التوابع الحقيقية وحيدة المتغير
نظريتي روول والتزايدات المنتهية
الدرس رقم 01

المستوى : سنة أولى علوم دقيقة
مقرر التحليل

19 أفريل 2020

نظرية روول

في كل ما يأتي لنعتبر $[a, b]$ مجال غير خال من $\mathbb{R}$.

نظرية روول

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ بحيث

نظرية روول

في كل ما يأتي لنعتبر $[a, b]$ مجال غير خال من $\mathbb{R}$.

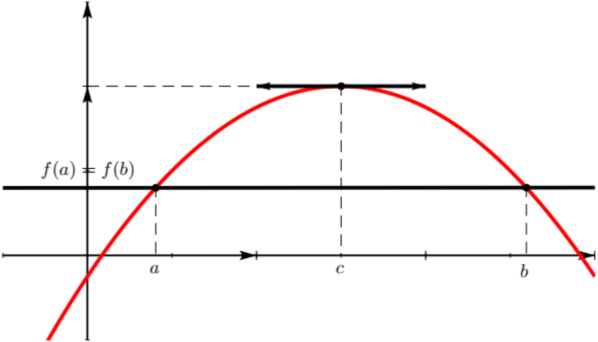
نظرية روول

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ بحيث $f(a) = f(b)$ عندئذ، يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ يحقق

$$f'(c) = 0$$

نظرية روول : التفسير الهندسي

نظرية روول : التفسير الهندسي



نظرية التزايدات المنتهية

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ عندئذ، يوجد

نظرية التزايدات المنتهية

نظرية التزايدات المنتهية

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ عندئذ، يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ يحقق

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

البرهان

نظرية التزايدات المنتهية

نظرية التزايدات المنتهية

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ عندئذ، يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ يحقق

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

البرهان

نظرية التزايدات المنتهية

نظرية التزايدات المنتهية

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ عندئذ، يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ يحقق

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

البرهان

لاثبات هذه النظرية نستعين بالتابع g والمعرف كما يلي :

$$\begin{array}{rcl} g : [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) \end{array}$$

البرهان

التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ اذن التابع g كذالك مستمر وقابل للاشتقاق على هذا المجال.
اضافة لذالك لدينا :

$$g(a) = g(b) = 0$$

أي ان التابع g يحقق شروط نظرية روول، اذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث $g'(c) = 0$ اي ان

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

أي أن

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

وهذا ينهي البرهان.

البرهان

التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ اذن التابع g كذالك مستمر وقابل للاشتقاق على هذا المجال.

البرهان

التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ اذن التابع g كذالك مستمر وقابل للاشتقاق على هذا المجال.
اضافة لذالك لدينا :

$$g(a) = g(b) = 0$$

أي ان التابع g يحقق شروط نظرية روول، اذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$

البرهان

التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ اذن التابع g كذالك مستمر وقابل للاشتقاق على هذا المجال.
اضافة لذالك لدينا :

$$g(a) = g(b) = 0$$

أي ان التابع g يحقق شروط نظرية روول، اذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث $g'(c) = 0$ اي ان

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

البرهان

التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ اذن التابع g كذالك مستمر وقابل للاشتقاق على هذا المجال.
اضافة لذالك لدينا :

$$g(a) = g(b) = 0$$

أي ان التابع g يحقق شروط نظرية روول، اذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث $g'(c) = 0$ اي ان

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

أي أن

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

وهذا ينهي البرهان.

ملاحظات

بفرض أن التابع f قابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ ومن نظرية التزايدات المنتهية يمكن

ملاحظات

بفرض أن التابع f قابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ ومن نظرية التزايدات المنتهية يمكن استنتاج مايلي :

ملاحظات

بفرض أن التابع f قابل للاشتقاق على المجال $[a, b]$ ومن نظرية التزايدات المنتهية يمكن استنتاج مايلي :

- f متزايد على المجال $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]a, b[; \quad f'(x) \geq 0$

ملاحظات

بفرض أن التابع f قابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ ومن نظرية التزايدات المنتهية يمكن استنتاج مايلي :

- f متزايد على المجال $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad ;\forall x \in]a, b[$
- f متناقص على المجال $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad ;\forall x \in]a, b[$
- f تابع ثابت على المجال $[a, b]$ يكافىء أن مشتقه على المجال $]a, b[$ معدوم.

ملاحظات

بفرض أن التابع f قابل للاشتقاق على المجال $[a, b]$ ومن نظرية التزايدات المنتهية يمكن استنتاج مايلي :

- f متزايد على المجال $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in]a, b[; \quad f'(x) \geq 0$
- f متناقص على المجال $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in]a, b[; \quad f'(x) \leq 0$
- f تابع ثابت على المجال $[a, b]$ يكافىء أن مشتقه على المجال $]a, b[$ معدوم.

نظرية روول حالة خاصة من نظرية التزايدات المنتهية.

أمثلة وتمارين

تمرين 1

تمرين 1

هل يمكن تطبيق نظرية رورل على التابعين التاليين :

$$\begin{aligned} g:[-1,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow g(x)=\sqrt[3]{x^2} \end{aligned}$$

تمرين 1

هل يمكن تطبيق نظرية رول على التابعين التاليين :

$$\begin{array}{rcl} g:[-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & g(x)=\sqrt[3]{x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f:[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \left\{ \begin{array}{rcl} x\sin(\frac{1}{x}) & ; & x\neq 0 \\ 0 & ; & x=0 \end{array} \right. \end{array}$$

أمثلة وتمارين

تمرين 1

هل يمكن تطبيق نظرية روول على التابعين التاليين :

$$\begin{array}{rcl} g:[-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & g(x)=\sqrt[3]{x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f:[0,\pi] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x\sin(\frac{1}{x}) & ; & x\neq 0 \\ 0 & ; & x=0 \end{array} \right. \end{array}$$

إرشاد : تطبيق مباشر لنظرية روول.

تمرين 2

لتكن a ,b و c ثلاثة أعداد حقيقية.
أثبت أن المعادلة

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[0, 1]$

تمرين 2

لتكن a ,b و c ثلاثة أعداد حقيقية.
أثبت أن المعادلة

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[0, 1]$

إرشاد : يمكنك الاستعانة بالتابع التالي :

$$h(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x.$$