مراجعة السداسي الأول

تمرين 1:

نقطة مادية M معرفة بالإحداثيات التالية:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t^2 - 5 \end{cases}$$

1/ ما نوع الإحداثيات المستعملة

2/ باستخدام المعلم المناسب أكتب

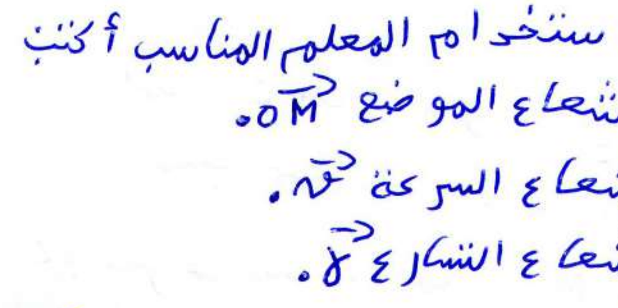
* شعاع الموضع $\vec{OM}$.
* شعاع السرعة $\vec{v}$.
* شعاع التسارع $\vec{\gamma}$.

3/ أحسب طويلة شعاع التسارع $\|\vec{\gamma}\|$

* ثم استنتج طبيعة الحركة.

4/ أكتب معادلة المسار $y=f(x)$

تمرين 2:



ينزلق جسم كتلته m على مستوي مائل بدون سرعة ابتدائية وبدون قوى احتكاك

1/ مثل القوى المؤثرة على الجسم

2/ بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك استنتج تسارع الحركة γ وطبيعة الحركة

3/ أحسب السرعة v_B بطريقتين مختلفتين

4/ عين عبارة رد الفعل الناظمي N

$g = 10 m/s^2 ; \alpha = 30°$

$AB = 4m$

تمرين 3:

نقطة مادية M .

أكتب شعاع الموضع $\vec{OM}$ في الإحداثيات القطبية

1/ أكتب شعاع السرعة $\vec{v}$

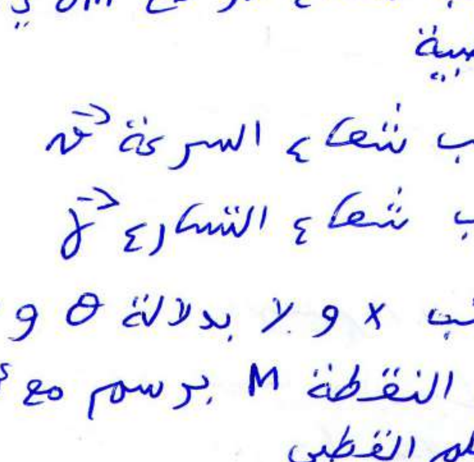
2/ أكتب شعاع التسارع $\vec{\gamma}$

3/ أكتب x و y بدلالة θ و ρ

4/ مثل النقطة M برسم مع أشعة الوحدة للمعلم القطبي

علما أن: $\rho = k \cdot \theta \; ; \; \theta = \omega \cdot t$

تمرين 4:



جسم M فوق سطح كروي ينزلق بدون سرعة إبتدائية وبدون إحتكاك من النقطة M_0 إلى النقطة M'

1/ باستخدام المعلم الذاتي $(u_T ; u_N)$ أكتب المعادلتين التفاضليتين للحركة مع تمثيل القوى

2/ استنتج عبارة السرعة $v(\theta)$ على المستوي الكروي

3/ استنتج عبارة رد الفعل N

4/ حدد الزاوية التي ينفصل بها الجسم عن السطح الكروي

تمرين 5:

نزود الفضاء بالمعلم $R(OXYZ)$ ذو الأساس المتعامد المتجانس والمباشر $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعطي إحداثيات النقاط $A ; B ; C$ كالتالي

$A(-2 ; -2 ; 2)$; $B(-3 ; 1 ; 4)$

$C(-1 ; 2 ; -2)$

1/ مثل النقاط في المعلم.

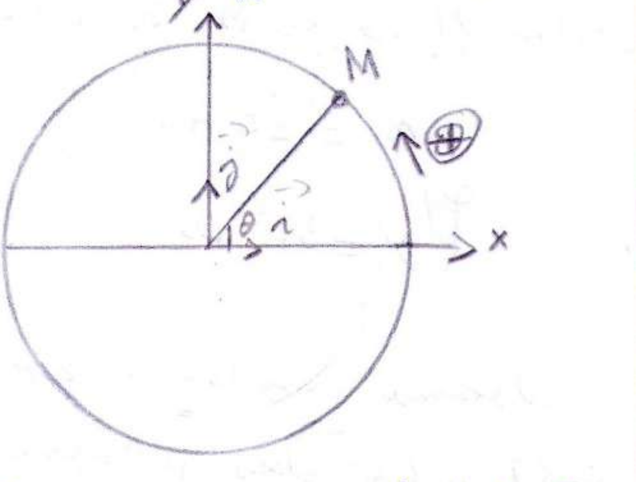
2/ أحسب مركبات وطويلتي الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ (مع الرسم).

3/ أحسب الجداء السلمي للشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و استنتج الزاوية المحصورة بينهما.

أحسب الشعاع $\vec{V} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ واستنتج مساحة المثلث ABC.

تمرين 6:

نقطة مادية M تقوم بحركة دائرية كالتالي



1) علما أن $R = 2cm$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$

أحسب مساحة القوس المقطوع

2) نعرف النقطة المادية M بالإحداثيات التالية في المعلم الكارتيزي:

$$\begin{cases} X = R\cos\theta \\ Y = R\sin\theta \end{cases}$$

2-أ أكتب شعاع الموضع $\vec{OM}$

2-ب أكتب شعاع السرعة $\vec{v}$

2-ج أكتب شعاع التسارع $\vec{\gamma}$

2-د أكتب معادلة المسار

3/ باستخدام المعلم القطبي وباعتبار $R = \rho = K\theta^2$; $\theta = \omega t$

3-أ أكتب شعاع الموضع $\vec{OM}$

3-ب أكتب شعاع السرعة $\vec{v}$

3-ج أكتب شعاع التسارع $\vec{\gamma}$

حل التمرين 1:

1/ الإحداثيات المستعملة هي:

* الإحداثيات الكارتيزية

2/ * شعاع الموضع $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{OM} = (2t+3)\vec{i} + (3t^2-5)\vec{j}}$$

* شعاع السرعة $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = 2\vec{i} + 6t\vec{j}}$$

شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = 6\vec{j}}$$

3/ طويلة شعاع التسارع $\|\vec{\gamma}\|$:

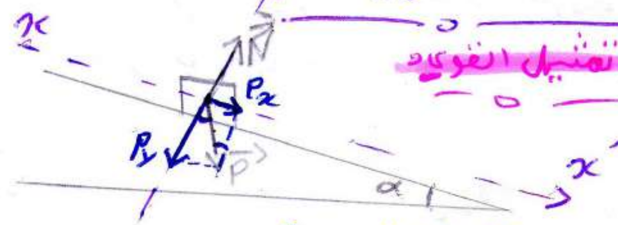
$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{6^2} = 6\, m/s^2$$

* إذاً $\gamma = cte$ نستنتج أن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام

حل التمرين 2:

1/ تمثيل القوى



$$\begin{cases} P_x = P\sin\alpha \\ P_y = -P\cos\alpha \end{cases}$$

2/ تسارع الحركة وطبيعتها:

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

على ox:

$$P_x + 0 = m\gamma_x$$

$$\cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}\gamma_x$$

$$\boxed{\gamma_x = g.\sin\alpha}$$

على oy:

$$P_y + N = m\gamma_y$$

$$-mg\cos\alpha + N = m\gamma_y$$

لا توجد حركة على oy ولهذا إذاً $\gamma_y = 0$

$$\boxed{\gamma = \gamma_x = g\sin\alpha = 10 . \sin 30 = 5\, m/s^2}$$

التسارع ثابت إذاً الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام

حساب v_B بطريقتين:

1ط: بتطبيق محذوفية الزمن بين A و B نجد

$$v_B^2 - \cancel{v_A^2}^{\,0} = 2\gamma(x_B - x_A)$$

$$v_B^2 = 2g\sin\alpha . AB$$

$$v_B = \sqrt{2g\sin\alpha . AB} = \sqrt{2 . 5 . 4}$$

$$\boxed{v_B = 6,32\, m/s}$$

$\vec{OM} = K\theta \, \vec{u}_\rho$

شعاع السرعة القطبي :

$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

$\vec{v} = K\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho + K\theta\,\dot{\vec{u}}_\rho$

$\begin{cases} \dot{\theta} = w \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\,u_\theta \end{cases}$

$\vec{v} = K.w\,\vec{u}_\rho + K\theta\,w\,\vec{u}_\theta$

$\vec{v} = K.w\,(\vec{u}_\rho + \theta\,\vec{u}_\theta)$

شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

$\begin{cases} \rho = K\theta \\ \dot{\rho} = K\dot{\theta} = Kw \end{cases} \Rightarrow w = cte \begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{w} = 0 \\ \ddot{\rho} = K\ddot{\theta} = K\dot{w} = 0 \end{cases}$

$\vec{\gamma} = (\cancelto{0}{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\cancelto{0}{\rho\ddot{\theta}} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

$\vec{\gamma} = -\rho\dot{\theta}^2\,\vec{u}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

$\vec{\gamma} = -K\theta\,\vec{u}_\rho + 2K\dot{\theta}.\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

$\dot{\theta} = w$

$\vec{\gamma} = -K\theta\,\vec{u}_\rho + 2Kw\,\vec{u}_\theta$

$\vec{\gamma} = K(-\theta\,\vec{u}_\rho + 2w\,\vec{u}_\theta)$

ط2 بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين A و B نجد :

$W_{A \to B} = \Delta E_c$

$W(P) + \cancelto{0}{W(N)} = E_{cB} - \cancelto{0}{E_{cA}}$

$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2$

$v_B^2 = 2gh$

$h = AB.\sin 30$

$v_B = \sqrt{2g\,AB\,\sin 30} = \sqrt{2.10.4.0,5}$

$v_B = 6,32\ m/s$

عبارة رد الفعل N :

$-mg\cos\alpha + N = m\gamma_y$

$\gamma_y = 0$

$-mg\cos\alpha + N = 0$

$N = mg\cos\alpha$

تمرين 3 :

$\rho = K\theta \ ; \ \theta = w.t$

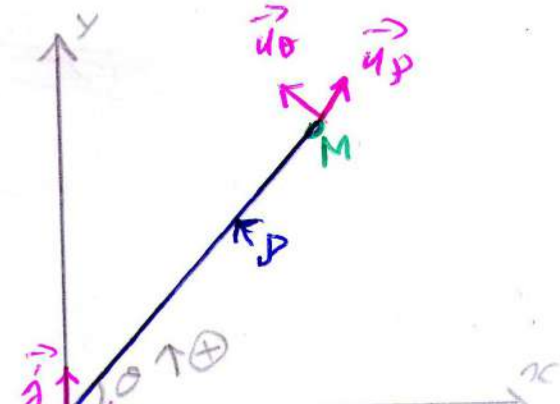
شعاع الموضع القطبي $\vec{OM}$:

$\vec{OM} = \rho . \vec{u}_\rho$

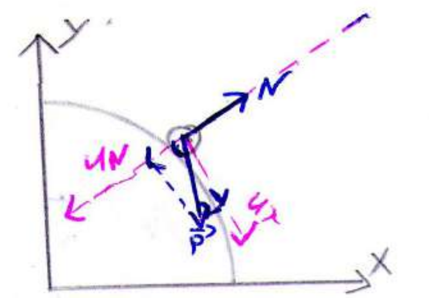
...تابة x و y بدلالة ρ و θ :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

التمثيل :



حل التمرين 4 :



$$\begin{cases} P_N = P\cos\theta \\ P_T = P\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} N_N = -N \\ N_T = 0 \end{cases} \Rightarrow P = mg$$

1/ المعادلتين التفاضليتين للحركة :

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك نجد :

$$\sum \vec F_{ext} = m\vec\gamma$$

على u_T :

$$\cancel{m} g\sin\theta + 0 = \cancel{m}\gamma_T$$

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g\sin\theta} \quad \cdots (1)$$

على $\vec u_N$:

$$mg\cos\theta - N = m\gamma_N \qquad \gamma_N = \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}} \quad \cdots (2)$$

2/ عبارة السرعة $v(\theta)$:

لا يمكننا استخدام المعادلة (2) لأن N مجهول إذاً نستخدم المعادلة (1)

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

لا يمكننا التكامل لأنه لدينا متغيرات tgθ
إذاً نتخلص من أحدهم
نضرب الطرفين في $\frac{d\theta}{d\theta}$

$$\frac{d\theta}{d\theta}\cdot\frac{dv}{dt} = g\sin\theta\cdot\cancel{\frac{d\theta}{d\theta}}$$

$$\frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = g\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta \qquad \dot\theta = \frac{v}{R}$$

$$\frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{v}{R} = g\sin\theta$$

$$v\,dv = Rg\sin\theta\,d\theta$$

بالتكامل نجد :

$$\int_{v_0}^{v(\theta)} v\,dv = Rg\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$mg(3\cos\theta - 2) = 0$

$3mg\cos\theta - 2mg = 0$

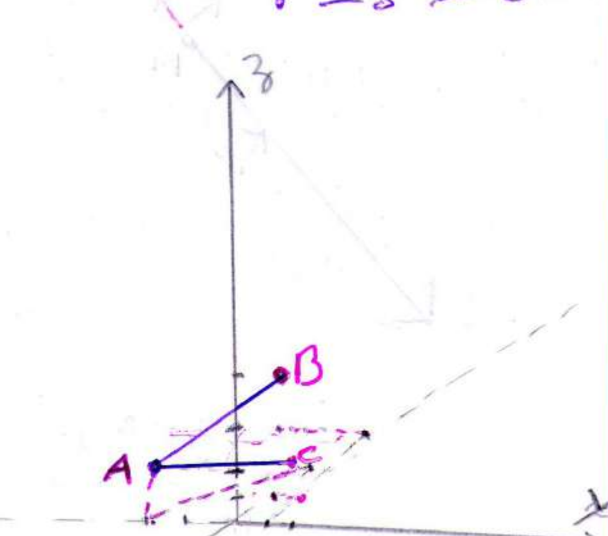
$3\cancel{mg}\cos\theta = 2\cancel{mg}$

$\cos\theta = \frac{2}{3}$

لاستخراج الزاوية
SHIFT + cos

$\theta = 48,189^\circ$

حل التمرين 5 :



$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-3-(-2)\\1-(-2)\\4-(2)\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\2-(-2)\\-2-2\end{pmatrix}$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2+(3)^2+(2)^2} = \sqrt{14} \approx 3,741$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-4)^2}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{33}$

$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v(\theta)} = Rg[-\cos\theta]_{\theta_0}^{\theta}$ $\begin{cases}\theta_0 = 0\\ v_0 = 0\end{cases}$

$\frac{v_\theta^2}{2} - \cancel{\frac{v_0^2}{2}}^{\,0} = Rg[-\cos\theta - (-\cos 0)]$

$\frac{v_{(\theta)}^2}{2} = Rg(-\cos\theta + 1)$

$v_{(\theta)}^2 = 2Rg(1-\cos\theta)$

$v_{(\theta)} = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$

3/ عبارة رد الفعل N :

$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$

$v = v_{(\theta)}$

$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$

$N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$

$N = mg\cos\theta - \frac{m[2\cancel{R}g(1-\cos\theta)]}{\cancel{R}}$

$N = mg\cos\theta - 2mg + 2mg\cos\theta$

$N = -2mg + 3mg\cos\theta$

$N = mg(3\cos\theta - 2)$

4/ الزاوية التي يغادر بها الجسم السطح الكروي :

شرط مغادرة الجسم السطح هو

$N = 0$

$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v(\theta)} = Rg\left[-\cos\theta\right]_{\theta_0}^{\theta} \qquad \begin{cases}\theta_0 \\ v_0\end{cases}$$

$$\frac{v_\theta^2}{2} - \cancel{\frac{v_0^2}{2}}^{\,0} = Rg\left[-\cos\theta - (-\cos 0)\right]$$

$$\frac{v(\theta)^2}{2} = Rg(-\cos\theta + 1)$$

$$v_{(\theta)}^2 = 2Rg(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{v_{(\theta)} = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}}$$

3/ عبارة رد الفعل N :

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$$

$$v = v_{(\theta)}$$

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta - \frac{m[2\cancel{R}g(1-\cos\theta)]}{\cancel{R}}$$

$$N = mg\cos\theta - 2mg + 2mg\cos\theta$$

$$N = -2mg + 3mg\cos\theta$$

$$\boxed{N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4/ الزاوية التي يغادر بها الجسم السطح الكروي :

شرط مغادرة الجسم السطح هو

$$\boxed{N = 0}$$

$$mg(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$3mg\cos\theta - 2mg = 0$$

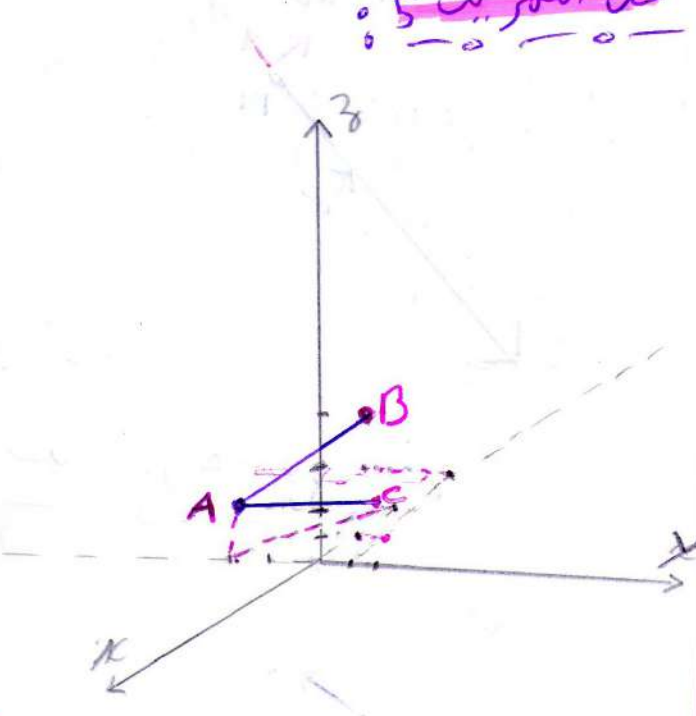
$$3\cancel{mg}\cos\theta = 2\cancel{mg}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$$

لاستخراج الزاوية SHIFT + cos

$$\boxed{\theta = 48{,}189^\circ}$$

حل التمرين 5 :



$$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}-3-(-2)\\1-(-2)\\4-(2)\end{pmatrix} \qquad \vec{AC}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\2-(2)\\-2-2\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\boxed{\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2+(3)^2+(2)^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}741}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-4)^2}$$

$$\boxed{\|\vec{AC}\| = \sqrt{33}}$$

حساب الجداء السلمي لـ $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

$$\vec{AB} = -1\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AC} = 1\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot -4$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$$

استنتاج الزاوية المحصورة بين $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos(\vec{AB} \cdot \vec{AC})$$

$$\cos(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|AC\|}$$

$$\cos(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{33}}$$

$$\cos(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \simeq 0,139$$

$$\alpha \simeq 82,01^\circ$$

حساب الشعاع $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-4 \cdot 3 - 4 \cdot 2)\vec{i} - (-4 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (-4 \cdot 1 - 1 \cdot 3)\vec{k}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -20\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$$

حساب مساحة المثلث $\hat{ABC}$:

$$S = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{(20)^2 + (-2)^2 + (-7)^2}}{2} = \frac{\sqrt{453}}{2}\, u$$

$$S \simeq 10,641\, u$$

حل التمرين 6 :

حساب مسافة القوس :

$$S = R\cdot\theta = \cancel{2}\times10^{-2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{S = \pi\times10^{-2} = 3,14\times10^{-2}\,m}$$

شعاع الموضع :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{OM} = R(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})}$$

شعاع السرعة $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})}$$

شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) + R\dot\theta.[\dot\theta(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})]$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = R\ddot\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) - R\dot\theta^2(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})}$$

معادلة المسار :

$$y^2 + x^2 = R^2$$

$$(R\cos)^2 + (R\sin\theta)^2 = R^2$$

$$R^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) = R^2$$

إذن المسار دائرة نصف قطرها

$$\boxed{R = 2cm}$$

/3

3-أ/ شعاع الموضع في المعلم القطبي

لدينا :

$$\vec{OM} = R(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\begin{cases} \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\rho \\ R = K\theta^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{OM} = K\cdot\theta^2\cdot\vec{u}_\rho}$$

شعاع السرعة :

لدينا

$$R = K\theta^2$$

$$v = \frac{d\vec{OM}}{dt} = 2K\dot\theta\,\vec{u}_\rho + K\theta^2\dot\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = 2KW\vec{u}_\rho + K\theta^2W\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = KW(2\vec{u}_\rho + \theta^2\vec{u}_\theta)}$$

شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{U}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = (\cancel{2K\ddot{\theta}} - K\theta^2\cdot\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (\cancel{K\theta^2\cdot\ddot{\theta}} + 2\cdot 2K\dot{\theta}\cdot\dot{\theta})\vec{U}_\theta$$

$$\begin{cases}\dot{\theta} = w \\ \ddot{\theta} = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\ddot{\rho} = 0 \\ \dot{\rho} = 2K\dot{\theta} = 2Kw\end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = -K\theta^2\cdot\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho + 4K\dot{\theta}^2\vec{U}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = K\dot{\theta}^2(-K\theta^2\vec{U}_\rho + 4\vec{U}_\theta)$$

إذا قمت بتحويل العبارة السابقة للسرعة أو التسارع فلن تحصل على نتيجة صحيحة والسبب أن الإشتقاق يختلف لأن R لا يبقى ثابتا هكذا

$$\vec{v} = R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

عند تحويلها نعوض ب $R = K\theta^2$ ولكن النتيجة ستكون خاطئة ولهذا نشتق شعاع الموضع الفعلي لنحصل على نتيجة صحيحة

تمرين 1 : H

معادلة المسار $y = f(x)$:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t^2 - 5 \end{cases}$$

$$t = \frac{x-3}{2}$$

$$y = 3\cdot\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 5$$

$$y = 3\cdot\frac{(x^2 + 9 - 2\cdot3\cdot x)}{4} - 5$$

$$y = \frac{3x^2 + 27 - 6x - 20}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x + 7)$$

شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = (\cancel{2k\ddot{\theta}} - k\theta^2\cdot\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\cancel{k\theta^2\ddot{\theta}} + 2\cdot 2k\dot{\theta}\cdot\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\rho} = 0 \\ \dot{\rho} = 2k\dot{\theta} = 2kw \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = -k\theta^2\cdot\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + 4k\dot{\theta}^2\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = k\dot{\theta}^2(-k\theta^2\vec{u}_\rho + 4\vec{u}_\theta)}$$

إذا قمت بتحويل العبارة
السابقة للسرعة أو التسارع
فلن تحصل على نتيجة صحيحة
و السبب أن الإشتقاق يختلف
لأن R لا يبقى ثابتا
هكذا

$$\vec{v} = R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

عند تحويلها نعوض ب $R = k\theta^2$
ولكن النتيجة ستكون خاطئة
ولهذا نشتق شعاع الموضع الفضي
لنحصل على نتيجة صحيحة

H

التمرين 1: معادلة المسار $y = f(x)$:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t^2 - 5 \end{cases}$$

$$t = \frac{x-3}{2}$$

$$y = 3\cdot\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 5$$

$$y = 3\cdot\frac{(x^2 + 9 - 2\cdot 3\cdot x)}{4} - 5$$

$$y = \frac{3x^2 + 27 - 6x - 20}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(3x^2 - 18x + 7)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}(3x^2 - 18x + 7)}$$

II/ سلسلة مراجعة السداسي الأول

تمرين 1: جسم كتلته m يتحرك على مستوي مائل من الأعلى إلى أسفل تحت تأثير قوة احتكاك ثابتة F_0 على الجزء AB و بعدها تنتقل إلى الجزء BC دون احتكاك ليتوقف عند النقطة C (جزء أفقي)

1/ بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك حدد تسارع الحركة γ وطبيعة الحركة

2/ علما أن $v_A = 0m/s$ جد المعادلة الزمنية للسرعة $v(t)$

3/ جد عبارة السرعة v_B

4/ أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$

5/ عين عبارة رد الفعل الناظمي N

II/ على الجزء BC

1-أ/ حدد تسارع الحركة γ و طبيعة الحركة على BC

تمرين 2:

جسم كتلته m يتحرك نحو الأسفل على مستوي مائل بزاوية $\alpha = 30°$ وطوله L و معامل احتكاكه f

1/ بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك جد تسارع الحركة واستنتج طبيعة الحركة

2/ جد السرعة اللحظية في الجزء AB

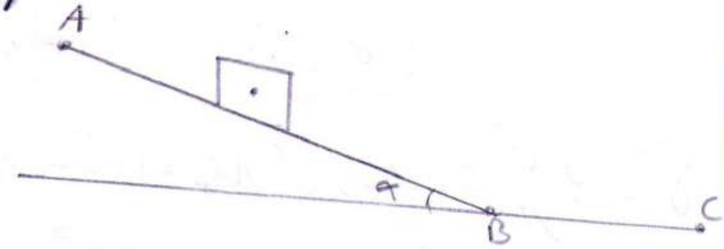
* استنتج السرعة عند B

3/ أحسب المسافة التي يتوقف عندها الجسم لما يصل إلى الجزء BC (معامل احتكاكه f)

نعطى :

$L = 10m \ , \ g = 10 m/s^2$

$m = 10kg \quad v_A = 0m/s$



تمرين 3:

تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير القوة $\vec{F}$ تعطى عبارتها كالتالي :

$$\vec{F} = x^2 \cdot y\,\vec{i} + x \cdot y\,\vec{j}$$

1/ أحسب عمل النقطة المادية من النقطة $O(0;0)$ إلى النقطة $A(2;4)$ علما أن المسار (ب) $y = x^2$ ماذا تستنتج

2/ ماذا يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية في هذه الحالة

3/ برهن أن $W_{O \to A} = \Delta E_c$

4/ إذا فرضنا أن النقطة المادية انتقلت عبر المسار (ب) أحسب السرعة v_A علما أن $v_O = 2m/s$ ، $m = 1Kg$

تمرين 4:

نقطة مادية M معرفة بالإحداثيات التالية :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t^2 - 5 \end{cases}$$

1/ أكتب شعاع الموضع $\vec{OM}$

* شعاع السرعة $\vec{v}$
* شعاع التسارع $\vec{\gamma}$

2/ أحسب طويلة $\|\vec{\gamma}\|$ واستنتج طبيعة الحركة

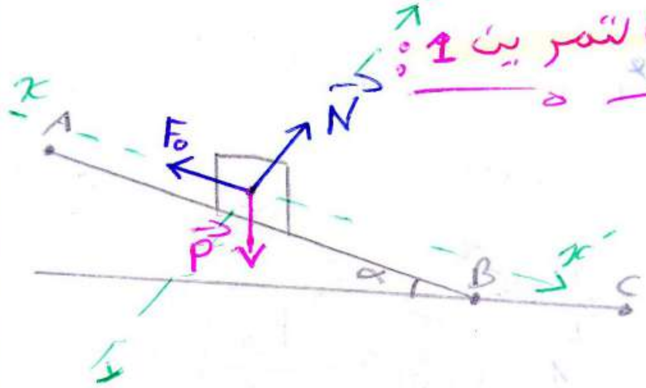
3/ أكتب معادلة المسار $y = f(x)$

4/ حسب التسارع المماسي γ_T

5/ حسب التسارع الناظمي γ_N

عند اللحظة 2s علما أن $R=4m$

حل التمرين 1:



1/ تسارع الحركة $\vec{\gamma}$ وطبيعة الحركة

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك نجد:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

على xx':

$$\vec{P} + \vec{F_0} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

$N=0$ عمودي ، $\gamma = \gamma_x$

$$P\sin\alpha - F_0 = m\gamma_x$$

$$mg\sin\alpha - F_0 = m\gamma_x$$

$$\gamma_x = g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}$$

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام لأن $\gamma = cte$

على yy':

$$\vec{P} + \vec{F_0} - P\cos\alpha + N = m\gamma_y$$

$$-mg\cos\alpha + N = m\gamma_y$$

لا توجد حركة على yy' إذا

$$\gamma_x = \gamma = g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}$$

2/ المعادلة الزمنية للسرعة $v(t)$:

ط1: لدينا:

$$\gamma = g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}$$

$$dv = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right) \cdot dt$$

بالتكامل نجد:

$$\int_{v_0=0}^{v(t)} dv = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)\int_{t=0}^{t} dt$$

$$v(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right) \cdot t$$

ط2: بما أن الحركة متغيرة بانتظام معادلتها الزمنية للسرعة كالتالي

$$v(t) = \gamma \cdot t + v_0$$

$$v_0 = 0$$

$$v(t) = \gamma \cdot t$$

$$v(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right) \cdot t$$

3/ عبارة السرعة v_B:

بتطبيق معادلة الزمن بين A و B نجد:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2\gamma(x_B - x_A)$$

$$\begin{cases} x_B - x_A = AB \\ \gamma = g\sin\alpha - \frac{F_0}{m} \\ v_A = v_0 = 0\,m/s \end{cases}$$

$$v_B^2 = 2\cdot\left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)\cdot AB$$

$$v_B = \sqrt{2\cdot AB\cdot\left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)}$$

4/ المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$:

ط 1:
لدينا:

$$v(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)t$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)\cdot t$$

$$dx(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)\cdot t\cdot dt$$

بالتكامل نجد

$$\int_{x_0=0}^{x(t)} dx = \left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)\cdot t\int_{t=0}^{t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)t^2$$

ط 2:

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام
معادلتها الزمنية للحركة كالتالي:

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\begin{cases} v_A = v_0 = 0\,m/s \\ x_0 = 0\,m \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{F_0}{m}\right)$$

عبارة رد الفعل N:

$$-mg\cos\alpha + N = m\gamma_y$$

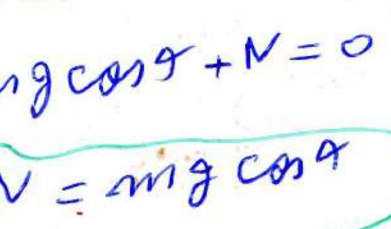
$$\gamma_y = 0$$

$$-mg\cos\alpha + N = 0$$

$$N = mg\cos\alpha$$

II/

1-أ/ تسارع الحركة وطبيعتها على BC



بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك

$$\sum \vec F_{ext} = m\vec\gamma$$

$$\vec P + \vec N = m\vec\gamma$$

بالإسقاط نجد

$$0 + 0 = m\gamma \Rightarrow \gamma = 0\,m/s^2$$

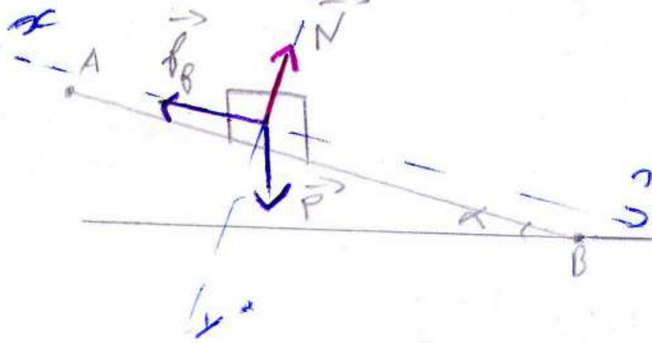
التسارع $\gamma = 0\ m/s^2$ إذاً الحركة مستقيمة منتظمة.

حل التمرين 2:

1/ تسارع الحركة وطبيعتها:

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك نجد:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$



$$\vec{P} + \vec{f}_B + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط نجد:

على $x'x$:

$$P\sin\alpha - f_B = m\gamma_x \quad (1)$$

$$\boxed{mg\sin\alpha - f\cdot N = m\gamma_x} \quad \begin{cases} f_B = f\cdot N \\ P = mg \end{cases}$$

على $y'y$:

$$-P\cos\alpha + N = ma_y$$

لا توجد حركة على $y'y$ إذاً

$$a_y = 0$$

$$-mg\cos\alpha + N = 0$$

$$\boxed{N = mg\cos\alpha} \quad (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$\cancel{m}g\sin\alpha - f\cdot\cancel{m}g\cos\alpha = \cancel{m}\gamma_x$$

$$\gamma_x = g\sin\alpha - f\cdot g\cos\alpha$$

$$\gamma = \gamma_x + \gamma_y \qquad \gamma_y = 0$$

$$\boxed{\gamma = \gamma_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$$

$$\gamma = 10(\sin 30 - 0,2\cdot\cos 30)$$

$$\boxed{\gamma = 3,27\ m/s^2} \Rightarrow \gamma = c^{te} = \text{ثابت}$$

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام

2/ عبارة السرعة اللحظية $v(t)$:

$$v(t) = \gamma\cdot t + \cancel{v_0}^{\,0} \qquad v_0 = 0\ m/s$$

$$\boxed{v(t) = \gamma\cdot t = 3,27\,t}$$

استنتاج v_B:

بتطبيق محذوفية الزمن نجد:

$$v_B^2 - \cancel{v_A^2}^{\,0} = 2\gamma\cdot(x_B - x_A)$$

$$\begin{cases} \gamma = 3,27\ m/s^2 \\ (x_B - x_A) = AB = L = 10\ m \end{cases}$$

$$v_B^2 = 2\gamma L \Rightarrow v_B = \sqrt{2\gamma\cdot L}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2\cdot 3,27\cdot 10} = 8,08\ m/s}$$

3/ المسافة التي يتوقف عندها الجسم:

المعادلة الزمنية للحركة

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\begin{cases} v_0 = v_B = 8{,}08\,m/s \\ t = 4\,s \\ \gamma = -2\,m/s^2 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(-2)(4)^2 + (8{,}08)(4) = 16\,m$$

$$X = 16\,m$$

وهي مسافة التوقف للجسم S

حل التمرين 3:

حساب العمل من $O(0,0)$ إلى $A(2;4)$

$$dW_{O\to A} = F\cdot dl$$

$$W_{O\to A} = \int_O^A F\cdot dl$$

$$W_{O\to A} = \int (x^2 y\,\vec{i} + x y\,\vec{j})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j})$$

$$W_{O\to A} = \int (x^2 \cdot y \cdot dx + x\cdot y\cdot dy)$$

لا يمكن إجراء تكامل بمتغيرين

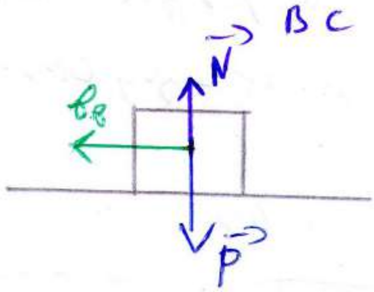
يجب جعل المعادلة لمتغير واحد إما x أو y

معادلة المستقيم (OA) من الشكل $y = ax + b$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$a = 2$$

على الجزء $\vec{BC}$



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_f = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط نجد

$$0 + 0 - f\cdot N = m\gamma$$

$$P = N = mg$$

$P \perp BC \; ; \; N \perp BC$ إسقاط يساوي صفر

$$-fmg = m\gamma$$

$$\gamma = -f\cdot g = 0{,}2\cdot 10 = -2 < 0$$

$$v(t) = \gamma\cdot t + v_0$$

v_0 سرعة ابتدائية على المسار BC وهي v_B

$$v(t) = \gamma t + v_B$$

$$\begin{cases} \gamma = -2 \\ v_B = 8{,}08 \end{cases}$$

$$v(t) = -2t + 8{,}08$$

لما يتوقف الجسم $v(t) = 0$

$$-2t + 8{,}08 = 0$$

$$t = \frac{8{,}08}{2} = 4\,s$$

وهي لحظة التوقف

تعيين b نعوض بإحدى النقطتين
و نتحقق

$y = 2x + b$

$O(0;0) \Rightarrow 0 = 2(0) + b \Rightarrow \boxed{b=0}$

$A(2;4) \Rightarrow 4 = 2(2) + b \Rightarrow b = 0$

$$\begin{cases} y = 2x \\ dy = 2\,dx \end{cases}$$

$$W_{O\to A} = \int_{x_O}^{x_A} \left(x^2 \cdot (2x) \cdot dx + \int_{x_O}^{x_A} x \cdot (2x)\, dx\right.$$

$$W_{O\to A} = \int_0^2 2x^3 dx + \int_0^2 2x^2 dx$$

$$W_{O\to A} = 2\int_0^2 x^3 dx + 2\int_0^2 x^2 dx$$

$$W_{O\to A} = 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$W_{O\to A} = 2 \cdot \frac{(2)^4}{4} + 2 \cdot \frac{(2)^3}{3}$$

$$W_{O\to A} = 2 \cdot \frac{16}{4} + 2 \cdot \frac{8}{3}$$

$$W_{O\to A} = \frac{32}{4} + \frac{16}{3} = \frac{160}{12}\,J = \frac{40}{3}\,J$$

$= 13,33\ J$

على المسار (ب) $y = x^2$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ dy = 2\,dx \end{cases}$$

$$W_{O\to A} = \int_0^2 (x^2 \cdot y\vec{i} + x y \vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$W_{O\to A} = \int_0^2 (x^2 \cdot x^2 \cdot dx + x \cdot x^2 \cdot 2dx$$

$$W_{O\to A} = \int_0^2 x^4 dx + \int_0^2 2x^3 dx$$

$$W_{O\to A} = \int_0^2 x^4 dx + 2\int_0^2 x^3 dx$$

$$W_{O\to A} = \frac{1}{5} \cdot x^5 \Big|_0^2 + 2 \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$W_{O\to A} = \frac{32}{5} + \frac{16}{4} = \frac{128 + 80}{20}$$

$= \frac{52}{5}\,J = 10,4\ J$

العمل غير متساوي والقوى غير محافظة

2/ التغير في الطاقة الميكانيكية ΔE_M يساوي عمل القوى الغير محافظة

$$\Delta E_M = \sum W(F)_{(\text{الغير محافظة})}$$

3/ إثبات أن $W_{0\to A} = \Delta E_c$

$$W_{0\to A} = \int_0^A F\, dl$$

$$\begin{cases} F = ma = m\dfrac{dv}{dt} \\ a = \dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$W_{0\to A} = \int_0^A m.\frac{dv}{dt}.dl$$

$$W_{0\to A} = m\int_0^A dv.\frac{dl}{dt}$$

$$v = \frac{dl}{dt}$$

$$W_{0\to A} = m\int_0^A v.dv$$

$$W_{0\to A} = m\frac{v^2}{2}\Big|_0^A$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{0\to A} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_{0\to A} = E_{cA} - E_{c0} = \Delta E_c$$

إذن

$$W_{0\to A} = \Delta E_c$$

4/ حساب قيمة السرعة v_A:

$$W_{0\to A} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{2W_{0\to A}}{m} = v_A^2 - v_0^2$$

$$v_A^2 = \frac{2W}{m} + v_0^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2W}{m} + v_0^2}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2\cdot 10,4}{1} + 2}$$

$$v_A = 4,774\ m/s$$

حل التمرين 4:

1/

* شعاع الموضع $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{OM} = (2t+1)\vec{i} + (3t^2-5)\vec{j}$$

شعاع السرعة $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 6t\vec{j}$$

شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = 6\vec{j}$$

4) حساب $\|\vec{\gamma}\|$ و طبيعة الحركة :

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \sqrt{6^2}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = 6\ m/s^2$$

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام

3/ معادلة المسار $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t^2 + 5 \end{cases}$$

$$t = \frac{x - 1}{2}$$

$$y = 3 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 5$$

$$y = 3 \cdot \frac{(x^2 + 1^2 - 2(x)(1))}{2^2} - 5$$

$$y = \frac{3x^2 + 3 - 6x}{4} - 5$$

$$y = \frac{3x^2 - 6x + 3 - 20}{4}$$

$$y = \frac{3x^2 - 6x - 17}{4}$$

$$y(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x - 17)$$

حساب التسارع المماسي γ_T :

$$\gamma_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 6t\,\vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (6t)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 36t^2}\ m/s$$

$$\gamma_T = \frac{d\left(\sqrt{4+36t^2}\right)}{dt}$$

$$\gamma_T = \frac{72}{2\sqrt{4+36t^2}}$$

$$\gamma_T = \frac{72}{\sqrt{4+36t^2}}$$

حساب التسارع الناظمي عند $t = 2s$

$$[illegible] = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{4+36t}\right)^2}{R}$$

$$= \frac{4+36(2)}{4} = \frac{40}{4} = 10\ m/s^2$$

$$\gamma_{N(2s)} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = \frac{(\sqrt{4+36t^2})^2}{4}$$

$$\gamma_{N(2s)} = \frac{\sqrt{4+36(2)^2}}{4} = \frac{\sqrt{148}}{4} m/s^2$$

$$\gamma_N \simeq 3,04\ m/s^2$$