إمتحانات

1999-1998

الإمتحان الأول: **EMD1** (المدة ساعة و 45 دقيقة)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ: $U_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

1. برهن باستعمال تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
2. بيّن أنّه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث: $U_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$
3. أكتب عبارة المجموع $U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ بدلالة n.
4. إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[U_n + \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{3^n}}\right] \end{cases} \quad , \qquad \forall n \geq 1$$

1. برهن أنّ: $U_n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$
2. برهن أنّ (U_n) متزايدة.
3. تحقق من أنّ: $U_{n+1} \leq U_n + \dfrac{1}{4\times 3^n} \quad \forall n \geq 1$
4. إستنتج أنّ: $U_n \leq 1 + \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-1}}\right] \quad \forall n \geq 1$
5. بيّن أنّ (U_n) متقاربة.

التمرين الثالث:

1. بيّن أنّه إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ و g تابع محدود في جوار x_0 فإنّ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
2. ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{x} & ; \quad x > 0 \\ (a-b) + x^2 Sin\dfrac{1}{x} & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

أ. عيّن قيم $a, b \in \Re_+^*$ بحيث يكون f مستمر على $\Re$.

ب. بفرض: $g(x) = f(x) + \pi x$ و بفرض أن $b = 1$ و $a = 2$، بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $\left[-\dfrac{2}{\pi}, 0\right]$.

3. ليكن التابع h المعرّف بـ:

$$h(x)=\left[\frac{2x}{Cos(x)}\,f\left(\frac{-1}{|x|}\right)\right]^{m}$$

أ. ناقش حسب قيم $m\in\aleph^{*}$ وجود النهاية $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

ب. أوجد قيم m و $h(0)$ التي من أجلها يكون التابع h مستمر عند الصفر.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

1. ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\le 1 \\ ax+b & ; \quad x>1 \end{cases}$$

أوجد قيم a و b بحيث يكون f قابلا للإشتقاق عند 1.

2. أ. باستعمال نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\forall x\in \left]0,1\right[\quad x<\arcsin(x)<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب. استنتج $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\dfrac{\arcsin(x)}{x}$.

التمرين الثاني:

أنشر بجوار x_0 حتى الرتبة n الدالتين المعرفتين بـ:

$$f(x)=\sqrt{\cos(x)} \qquad (x_0=0,\ n=3)$$

$$g(x)=e^{x\,Log(x)} \qquad (x_0=1,\ n=3)$$

التمرين الثالث:

ليكن $m,n\in \aleph^*$. نضع:

$$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx \ ; \quad I(m,0)=\int_0^1 x^m\,dx \ ; \quad I(0,n)=\int_0^1 (1-x^n)\,dx$$

1. برهن أنّ: $\forall n,m\in \aleph \ \ I(m+1,n)=\dfrac{m+1}{n+1}I(m,n+1)$

2. بيّن أنّ: $\forall n,m\in \aleph \ \ I(m+1,n)=I(m,n)-I(m,n+1)$

استنتج العلاقة بين $I(m,n)$ و $I(m,n+1)$.

3. ليكن $m\in \aleph^*$ (ثابت). برهن بالتراجع أنّ:

$$\forall n\in \aleph \quad I(m,n)=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)(m+n+1)}$$

التمرين الرابع:

حل المعادلة التفاضلية:

$$(I)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases} x\,y'=y+x\cos\dfrac{y}{x} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

من أجل $\alpha \in \Re$ و $n \in \aleph$ نضع:

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^\alpha + 1)^n}$$

1. عيّن العلاقة بين $I_n(x)$ و $I_{n+1}(x)$.
2. فكّك إلى عوامل بسيطة في $\Re[x]$ الدالة:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$$

3. إستنتج $I_1(x)$، $I_2(x)$ و $I_3(x)$ من أجل $\alpha = 3$.

التمرين الثاني:

1. أحسب المشتقات الأولى للتوابع التالية:

$$x \mapsto arctg(x) \ ; \quad x \mapsto arctg\left(\frac{1}{x}\right), \ x \in \Re^*$$

2. بيّن أنّ: $\forall x > 0 \quad arctg(x) + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
3. أنشر في جوار 0 التابع $arctg$ حتى الرتبة 5.
4. إستنتج نشر التابع $arctg$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$ حتى الرتبة 5.

التمرين الثالث:

نعرّف التابع f على المجال I حيث $I = [1, \sqrt{3}]$ بـ:

$$f(x) = 1 - x + \frac{x}{2\pi} arctg(x)$$

1. أحسب f' و f'' ثم استنتج أنّ f' متزايدة على I.
2. بيّن أنّ f متناقص تماما على I.
3. إستنتج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تملك حلا وحيدا في المجال I.

معطاة: $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

إمتحانات

2000-1999

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ: $n \geq 2$ ، $U_n = \dfrac{2}{n(n-1)(n+1)}$

1. برهن باستخدام تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2. برهن أنّه يوجد ثلاث أعداد a، b و c بحيث: $\forall n \geq 2 \quad U_n = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n}$

3. أثبت أنّ: $\forall n \geq 2 \quad S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$ حيث $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} U_k$.

4. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 2} U_n$ ثمّ أحسب مجموعها.

التمرين الثاني:

أدرس طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n\, n!}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\alpha)}{2^n}\,, \quad (\alpha \in \Re) \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n+n}$$

التمرين الثالث:

أدرس حسب قيم a و b طبيعة السلسلتين:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+b}{n}\right)^{n^2}, \quad (b\geq 0) \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}, \quad (a \geq 0)$$

ثم استنتج طبيعة السلسلة:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+b}{n}\right)^{n^2}$$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 \geq 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $U_n \geq 1 \quad \forall n \in \aleph$

2. أ. برهن أنّ: $U_{n+1} - U_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \aleph$

ب. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p > q \geq 0$ ، أثبت أنّ:

$$\left|U_p - U_q\right| \leq \frac{1}{2^q}$$

ج. استنتج أنّ (U_n) كوشية. ما هي طبيعة $(U_n)_{n\geq 0}$؟

3. نضع: $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2$ حيث n من ℵ.

أ. أوجد عبارة V_n بدلالة n .

ب. أحسب بطريقتين المجموع $\sum_{k=0}^{n} V_k$.

ج. استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 0}$.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} Log(1+x) & ; \quad x \geq 0 \\ ax+b & ; \quad x<0 \quad (a,b \in \Re) \end{cases}$$

1. عيّن قيم a و b بحيث يكون f مستمرا على $\Re$.
2. عيّن قيم a و b بحيث يكون f قابلا للإشتقاق على $\Re$.
3. نفرض أنّ $a=1$ و $b=0$.
   أ. أدرس قابلية الإشتقاق بإستمرار لـ f على $\Re$.
   ب. ليكن h التابع المعرّف بـ:

$$h(x)=-\frac{1}{Log 2} f(x)+arc\cot g(x), \quad x \in \Re$$

- بيّن أنّ h رتيبة تماما على $\Re$.
- بيّن أنّه يوجد جذر وحيد للمعادلة $h(x)=0$ في المجال $[0,1]$.

4. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، بيّن أنّ:

$$\forall x \in \Re \quad f(x) \geq x-\frac{x^2}{2}$$

التمرين الثاني:

أحسب مستخدما النشور المحدودة النهايات التالية:

$$1) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(x)-(e^x-1)^2}{\sin^3(x)}$$

$$2) \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1-e^x)\sin^2(x)}{x^2+x^3}$$

التمرين الثالث:

من أجل n من $\aleph$، نضع:

$$I(n)=\int_{-1}^{+1}(t^2-1)^n\, dt$$

1. أحسب $I(0)$ و $I(1)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n \geq 1 \quad I(n)=-\frac{2n}{2n+1} I(n-1)$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n \geq 1 \quad I(n)=\frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)}$$

التمرين الرابع:

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y'-\frac{1}{x}y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'=\frac{y}{x}$.
2. تحقق من أنّ التابع $y:x\mapsto x\arcsin(x)$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).
3. استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (I).

الإمتحان الشامل: **Synthèse** (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x}-1}{2x} & ; \quad x>0 \\ 2x-1 & ; \quad x<0 \qquad (\alpha,\gamma\in\Re) \\ \gamma & ; \quad x=0 \end{cases}$$

1. عيّن قيم α و γ بحيث يكون f مستمرا عند 0.
2. نفرض أنّ $\alpha=-2$ و $\gamma=-1$.

أ. هل يقبل f الإشتقاق عند 0 ؟

ب. استنتج قيم a و b التي من أجلها يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع f في المجال $[a,b]$.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$U_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)dx\,,\quad n\in\aleph$$

1. بيّن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad U_n=(-1)^n e^{-n\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}\right)$$

2. نضع: $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ حيث n من $\aleph$. أحسب S_n بدلالة n، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}S_n$.
3. استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}U_n$، ثمّ أحسب مجموعها.

التمرين الثالث:

أنشر في جوار x_0 حتى الرتبة n التابعين المعرفين بـ:

$$f(x)=\sqrt{1+\sin^2(x)} \qquad (x_0=0,n=3)$$

$$g(x)=\frac{Log[\cos(x)]}{\cos^2(x)} \qquad (x_0=0,n=4)$$

التمرين الرابع:

ليكن f و g التابعين المعرّفين بـ:

$$f(x)=\frac{1}{1+Log(1+x)} \quad ; \quad g(x)=\frac{1-2x^2+x^3}{1+x}$$

1. أوجد النشر المحدود للتابعين f و g من الرتبة 2 في جوار 0.
2. استنتج أنّ لمنحنيي f و g نفس المماس عند 0 مع تعيين معادلته و وضعية منحنيي f و g إزاءه في جوار الصفر.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

I- ليكن k عددا حقيقيا منتميا إلى المجال $]0,1[$ و لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية حقيقية بحيث:

$$\forall n\in\aleph^* \quad |U_{n+1}-U_n|\le k\,|U_n-U_{n-1}|$$

1. أثبت أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

2. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\ge q\ge 0$، أثبت أنّ:

$$|U_p-U_q|\le k^q\frac{|U_1-U_0|}{1-k}$$

3. استنتج أنّ (U_n) كوشية.
4. ما هي طبيعة $(U_n)_{n\ge0}$؟

II- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\aleph}$ المعطاة بالصيغة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=1+\frac{1}{2}\sin(U_n)\ ,\ n\in\aleph \end{cases}$$

أثبت، مستدلا بالجزء (I) أنّ (U_n) متقاربة.

(استخدم المتراجحة: $\forall x,y\in\Re \quad |\sin(x)-\sin(y)|\le|x-y|$)

التمرين الثاني:

لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة و متناقصة مع $\sum_{n\ge1}U_n<+\infty$.

1. نضع $S_n=\sum_{k=1}^{n}k$ حيث n من $\aleph^*$.

أ. أحسب $S_{2n}-S_n$.

ب. برهن أنّه: $\forall n\in\aleph^* \quad 0\le nU_{2n+1}\le nU_{2n}\le S_{2n}-S_n$

ج. استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}(2n+1)U_{2n+1}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n}=0$.

د. إستنتج طبيعة المتتالية (nU_n) و أحسب $\lim_{n\to+\infty}nU_n$.

2. نضع $V_n=n(U_n-U_{n+1})$ مع n من $\aleph^*$.

أ. برهن أنّ: $\forall n\ge1 \quad \sum_{k=1}^{n}V_k=-(n+1)U_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}U_k$

ب. برهن صحّة الإستلزام: $\sum_{n\ge1}V_n<+\infty \quad\Rightarrow\quad \sum_{n\ge1}U_n<+\infty$

التمرين الثالث:

أنشر في جوار x_0 حتى الرتبة n التوابع المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{Log\left(\cos^2(x)\right)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \quad , \qquad (x_0=0, n=2)$$

$$g(x)=e^{x.Log\sqrt{x}} \quad , \qquad (x_0=1, n=2)$$

$$h(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad , \qquad (x_0=+\infty, n=2)$$

التمرين الرابع:

لتكن $\left(f(n)\right)_{n\in\aleph}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$f(n)=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$$

1. أحسب $f(0)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad f(n+1)=-e^{-1}+(n+1)f(n)$$

3. بيّن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad f(n)=n!e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$$

4. بيّن أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)<\frac{3}{e(n+1)}$$

(استخدم دستور ماك لوران-لاغرانج المطبق على التابع $x\mapsto e^x$)

5. إستنتج

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)$$

6. إستنتج طبيعة السلسلتين:

$$\sum_{n\geq 1} f(n) \quad ; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n}$$

إمتحانات

2001-2000

الإمتحان الأول: **EMD1** (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

لتكن A المجموعة المعرفة بـ:

$A=\{U_n\ ,\quad n\in ℵ\}$ ، حيث: $U_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

1. برهن باستخدام تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$
2. بيّن أنّ المجموعة A محدودة في $\Re$.
3. عيّن $\sup A$ و $\inf A$.
4. عيّن (في حالة الوجود) $\min A$ و $\max A$.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ:

$$U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Log(n),\quad n\geq 1$$

1. بيّن أنّ: $\forall n\geq 2\quad Log(n)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[Log(k+1)-Log(k)\right]$
2. بالاستعانة بالقضية: $\forall k\geq 1\quad \dfrac{1}{k+1}\leq Log(k+1)-Log(k)\leq\dfrac{1}{k}$ أثبت أنّ:

$$\forall n\geq 2\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq Log(n)\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1\quad \frac{1}{n}\leq U_n\leq 1$$

4. برهن أنّ (U_n) متناقصة.
5. استنتج أنّ (U_n) متقاربة نحو نهاية l من $[0,1]$.

التمرين الثالث:

أدرس حسب قيم a و b طبيعة السلسلتين:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n}\ ,\quad (a>0)\qquad ;\qquad \sum_{n\geq 1}\left(b+\frac{1}{n}\right)^n,\quad (b>0)$$

ثم استنتج طبيعة السلسلة:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n}+\sum_{n\geq 1}\left(b+\frac{1}{n}\right)^n$$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2+U_n} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. تأكد من أنّ (U_n) ذات حدود موجبة.
2. أثبت أنّ: $\quad |U_{n+1} - U_n| \le \dfrac{1}{4^n} |U_1 - U_0| \quad \forall n \in \aleph$
3. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p \ge q \ge 0$ أثبت أنّ:

$$|U_p - U_q| \le \frac{1}{4^q} \times \frac{4|U_1 - U_0|}{3}$$

4. استنتج أنّ (U_n) كوشيه.
5. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
6. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n \ge 0} U_n$.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sh(1+x)}{x^2-1} & ; \quad x<-1\\[2ex] \dfrac{1}{8}(x^2-5) & ; \quad x\geq -1\end{cases}$$

I- 1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار -1 للتابعين:

$$x\mapsto sh(1+x) \quad ; \quad x\mapsto ch(1+x)$$

2. استنتج، مستخدما النشور المحدودة:

1) $$\lim_{x\to -1}\frac{\text{sh}(1+\text{x})+\frac{1}{2}(x^2-1)}{(x^2-1)(x+1)}$$

2) $$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)\text{ch}(1+\text{x})-2x\,\text{sh}(1+x)}{(x^2-1)^2}$$

3) $$\lim_{x\to -1}\frac{\text{sh}(1+x)}{x^2-1}$$

II- بالاستعانة بما سبق، أثبت أنّ:

أ. f مستمرة عند -1.

ب. f قابل للاشتقاق عند -1.

ج. f قابل للاشتقاق بإستمرار على المجموعة $\Re$.

التمرين الثاني:

نضع:

$$I(n)=\int_{-\infty}^{0} t^n e^t\,dt\ , \quad n\geq 1 \qquad ; \qquad I(0)=\int_{-\infty}^{0} e^t\,dt$$

1. أحسب $I(0)$.

2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\geq 1 \quad I(n)=-n\,I(n-1)$$

3. إستنتج أنّ:

$$\forall n\in \aleph \quad I(n)=(-1)^n n!$$

التمرين الثالث:

ليكن f و g التابعين المعرّفين بـ:

$$f(x)=\frac{x-Log(1+x)}{\cos(x)} \qquad ; \qquad g(x)=Log(2+\sin(2x))$$

1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 للتابعين f و g في جوار 0.
2. استنتج أنّ للتابعين f و g مماسين عند الصفر يُطلب تعيين معادلتيهما و وضعية منحنيي f و g إزاءهما في جوار الصفر.

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(\alpha x)}{x^2} & ; \quad x<0\\[2ex] Log(1+x) & ; \quad x\geq 0\end{cases}$$

1. عيّن قيمة α التي يكون من أجلها f مستمرا عند 0 .
2. هل f يقبل للإشتقاق عند 0 .
3. ليكن h التابع المعرّف بـ:

$$h(x)=\sqrt{3}f(x)-\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right), \quad x\geq 0$$

أ. بيّن أنّ h رتيب تماما.

ب. برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,1[$.

ج. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، بيّن أنّ:

$$\forall x\in \Re^{+} \quad |h(x)+1|\leq\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)x$$

التمرين الثاني:

أحسب مستخدما النشور المحدودة من الرتبة n النهايات التالية:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)-\dfrac{x^2}{2}}{\sin^2(x)-x^2} \qquad (n=4)$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-Log(1+x)-\dfrac{3}{2}x^2}{\sin(x)-x\cos(2x)} \qquad (n=3)$$

التمرين الثالث:

ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، نضع:

$$I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

1. أحسب $I(0)$.
2. بإستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\in\aleph^* \quad I(n)=\frac{2n}{2n-1}I(n+1)$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad I(n+1) = \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2}$$

<u>التمرين الرابع</u>:

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$x\,y' + 2y = \frac{x}{1+x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

1. حلّ المعادلة التفاضلية $x\,y' + 2y = 0$.
2. تحقق من أنّ التابع $y : x \mapsto \frac{x - \mathrm{arctang}(x)}{x^2}$ حل خاص للمعادلة (I) .
3. استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (I) .

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

I- ليكن k عددا حقيقيا منتميا إلى المجال $]-1,1[$ و لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية تحقق:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad U_{n+1}-U_n=k^n$$

1. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\geq q\geq 0$ ، أثبت أنّ: $\left|U_p-U_q\right|\leq k\ \dfrac{|k|^q}{1-k}$

2. استنتج أنّ (U_n) كوشية.

II- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعطاة بالصيغة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0=1, U_1=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n+U_{n-1}}{2}, \quad n\geq 1 \end{cases}$$

1. بيّن أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_{n+1}-U_n=-\dfrac{U_n-U_{n-1}}{2}$

2. أثبت أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_{n+1}-U_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

3. أثبت، مستدلا بالجزء (I)، أنّ (U_n) متقاربة.

التمرين الثاني:

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة و متناقصة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. نضع:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\ ,\quad n\in\mathbb{N}$$

1. أحسب $S_{2n+1}-S_{2n}$.
2. برهن أنّه: $\forall n\in\mathbb{N} \quad S_{2n+1}\leq a_0$
3. أدرس رتابة $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$، ثم إستنتج طبيعة المتتاليتين $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
4. استنتج طبيعة المتتالية (S_n) .
5. استنتج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n$.

التمرين الثالث:

أنشر بجوار x_0 حتى الرتبة n التوابع المعرفة بـ:

$$f(x)=Log\left(e+\sin(e.x)\right) \quad , \quad (x_0=0, n=2)$$

$$g(x)=\mathrm{sh}\left(1-\cos(\mathrm{x})\right) \quad , \quad (x_0=0, n=2)$$

$$h(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad , \quad (x_0=+\infty, n=2)$$

التمرين الرابع:

لتكن $(I_n)_{n\in ℵ}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}[\sin(x)]^n dx\,,\quad n\in ℵ$$

1. أحسب I_0 و I_1 .
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n\geq 2\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

3. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1\quad I_{2n}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\forall n\geq 1\quad I_{2n+1}=\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$$

4. أ. بالاستعانة بالمتراجحة $\sin(x)\leq 1$ من أجل أي x من $\mathfrak{R}$، تحقق من أنّ:

$$\forall n\in ℵ\quad I_{n+1}\leq I_n$$

ب. استنتج أنّ:

$$\forall n\geq 1\quad 1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

ج. استنتج أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\right]^2\times n=\frac{1}{\pi}$$

إمتحانات

2002-2001

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

I- أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. كل متتالية متقاربة محدودة.
2. كل متتالية متناقصة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n\geq 0} U_n \ CV$.
4. مجموع سلسلتين ذاتي حدود موجبة و متباعدتين هو سلسلة متباعدة.

II- برهن صحة الإستلزام:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \subset \Re \\ \\ A \neq \phi \\ \\ B \ \text{محدودة} \end{array}\right\} \Rightarrow (\sup A \leq \sup B)$$

III- أدرس طبيعة السلاسل:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^2+1} \qquad ; \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 2^n} \qquad ; \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

التمرين الثاني:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع:

$$U_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , \quad n \ \text{زوجي} \\ \\ \dfrac{n^2}{n^2+1} & , \quad n \ \text{فردي} \end{cases}$$

1. باستخدام تعريف النهاية، بيّن أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. أدرس رتابة $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\aleph^*}$ و $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\aleph^*}$

3. نضع: $A = \left\{U_n \ / \ n = 2p, \ p \in \aleph^*\right\}$ و $B = \left\{U_n / n = 2p+1, \ p \in \aleph\right\}$.

أ. بيّن أنّ المجموعتين A و B محدودتان في $\Re$.

ب. عين $\sup A$ ، $\sup B$ ، $\inf A$ و $\inf B$.

4. استنتج $\sup(A \cup B)$ و $\inf(A \cup B)$.

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{U_n} + \dfrac{U_n}{2} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 2$.
2. برهن أنّ (U_n) متناقصة.
3. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
4. استنتج مع التعليل: $\underset{n\in\aleph}{Sup}\, U_n$ و $\underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n$.
5. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$.

__التمرين الرابع__:

لتكن (U_n) متتالية ذات حدود موجبة متناقصة و متقاربة نحو الصفر $\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = 0\right)$ و $(V_n)_{n\in\aleph}$ المتتالية المعرّفة بـ:

$$V_n = n\left(U_n - U_{n+1}\right)$$

1. برهن أنّ:

أ. $$\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} V_k = -(n+1)U_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} U_k$$

ب. $$\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = U_{n+1}$$ حيث $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{V_k}{k}$$

2. استنتج أنّ: $$\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n+1} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (n+1)\frac{V_k}{k}$$
3. نفرض أنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1} V_n$ متقاربة. برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=1}^{n+1} U_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} V_k$$

ثم استنتج أنّ $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة.

4. **تطبيق**: أدرس طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ حيث $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$، ثم استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0} V_n$ مع $V_n = n(U_n - U_{n+1}), \quad n \geq 0$.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن f تابعا حقيقيا ولتكن x_0 قيمة من $\Re$.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. إذا كان f يقبل نهاية عند x_0، فإنّ f مستمر عند x_0.
2. (f مستمر على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f مستمر على $[a,b]$ و f مستمر على $[b,c]$)
3. (f قابل للاشتقاق على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f قابل للاشتقاق على $[a,b]$ $\wedge$ f قابل للاشتقاق على $[b,c]$)
4. $(\exists c\in]a,b[/ f(c)=0) \Rightarrow$ (f مستمر على $]a,b[$ و $0>f(a)\times f(b)$)
5. إذا كان f يقبل نشرا محدودا في جوار x_0، فإنّ f مستمر عند x_0.
6. إذا كان f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0، فإنّ f يحقق شروط دستور "ماك لوران" مع باقي "يونغ" من الرتبة n.

II- ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x} & ; \quad x\le -1 \\ -ax+b & ; \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{2a}{x} & ; \quad x>1 \end{cases} \qquad (a\in\Re, b\in\Re)$$

عيّن قيم a و b بحيث يكون f مستمرا على $\Re$.

III- أحسب مستخدما النشور المحدودة النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) \qquad ; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x.\operatorname{arctg}(x)}$$

IV- أنشر في جوار 1 حتى الرتبة 2 التابع المعرف بـ:

$$f(x)=\frac{Log(x)}{x^2}$$

ثمّ استنتج أنّ لمنحنى f مماسا عند 1، يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنى f بالنسبة له في جوار 1.

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\operatorname{ch}(x)}{\sin(x)} & ; \quad -1<x<0 \\ -\dfrac{1}{2}\arcsin(x) & ; \quad 0\le x<1 \end{cases}$$

I- 1.باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\forall x \in]0,1[\quad -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \le f(x) \le -\frac{x}{2}$$

2. استنتج $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x)}{x}$.

II- أثبت أنّ:

1. f قابل للاشتقاق على $]-1,1[$.
2. f قابل للاشتقاق بإستمرار على $]-1,1[$.

<u>التمرين الثالث</u>:

أحسب التكاملات التالية:

$$\int \frac{dx}{x\left(1+(Logx)^2\right)} \quad ; \quad \int \arcsin(x)dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} Log(1-x) & ; \quad x\le 0 \\ \sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

I-1. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\forall x\in \left]0,1\right[\quad \frac{-x}{1-x}\le Log(1-x)\le -x$$

2. نضع:

$$h(x)=\sqrt{3}\,f(-x)-\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right),\quad x\ge 0$$

أ. بيّن أنّ h رتيبة تماما.

ب. برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]0,1\right[$.

II-1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين:

$$x\mapsto Log(1-x) \quad ; \quad x\mapsto \sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3}$$

2. استنتج أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند 0 .

3. استنتج أنّ لمنحنى f مماسا عند 0، يُطلب تعيين معادلته و وضعيته بالنسبة لمنحنى f .

4. هل التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار 0؟

III-1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 1 في جوار $+\infty$ التابع f .

2. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. استنتج أنّ لمنحنى f خطا مقاربا في جوار $+\infty$ يُطلب تعيين معادلته و وضعيته بالنسبة لمنحنى f في جوار $+\infty$.

ملاحظة: الأجزاء **I**، **II** و **III** مستقلة عن بعضها البعض.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ:

$$U_n=\int_0^1 (1-x)^n \operatorname{ch}(x)\,dx\,,\quad n\ge 0$$

I-1. أحسب U_0.

2. برهن أنّ: $\forall n\in ℵ \quad 0\le U_n\le \operatorname{sh}(1)$

3. برهن أنّ: $\forall n\in ℵ \quad U_{n+1}\le U_n$

4. استنتج مع التعليل طبيعة المتتالية (U_n).

II- 1. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[U_{n+2} + (n+2)\right]$$

2. باستخدام طريقة الحصر، استنتج:

أ. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

ب. طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$.

3. استنتج مع التعليل:

$$Sup\{U_n\,, \quad n\in \aleph\} \quad ; \quad Inf\{U_n\,, \quad n\in \aleph\}$$

<u>التمرين الثالث</u>:

ليكن f تابعا حقيقيا و a عددا حقيقيا. نفرض أنّ التابع f من الصنف C^3 في جوار a .

نضع:

$$g(h) = \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3}$$

باستخدام دستور "تايلور" مع باقي "يونغ"، أحسب $\lim\limits_{h\to 0} g(h)$.

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage** (المدة ساعتان)

<u>التمرين الأول</u>:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n} \qquad , \qquad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n \leq 1$
2. برهن أنّ (U_n) متزايدة.
3. استنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
4. استنتج مع التعليل: $Sup\{U_n\,,\ \ n \in \aleph\}$ و $Inf\{U_n\,,\ \ n \in \aleph\}$.
5. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n \geq 0} U_n$.

<u>التمرين الثاني</u>:

لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ:

$$U_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ , \quad n \in \aleph^*$$

1. برهن باستعمال تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$
2. نضع $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ مع n من $\aleph$.

أ. أحسب قيمة S_n بدلالة n.

ب. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

ج. استنتج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n \geq 1} U_n$.

<u>التمرين الثالث</u>:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ f يقبل الإشتقاق على $\Re$، ثم أحسب f'.
2. هل التابع f' مستمر عند 0؟
3. هل التابع f يقبل الإشتقاق بإستمرار على $\Re$ ؟
4. باستخدام دستور "ماك لوران" مع باقي "لاغرانج" من الرتبة 1 للتابع $x \mapsto \sin(x)$، برهن أنّ:

$$\forall x \in \Re \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

I- أحسب مستخدما النشور المحدودة من الرتبة 3 النهايات التالية:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x\,Log(1+x)}{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{Log(1+x^2)}{x.\mathrm{arctg}(x)}$$

II- أحسب:

$$\int x^2\sin(x)dx$$

إمتحانات

2003-2002

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

<u>التمرين الأول</u>:

I- ليكن A جزءا غير خال من $\Re$ و a عددا حقيقيا و لتكن (u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات عددية.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. $\big(\sup(A)$ موجود و $\inf(A)$ موجود$\big) \Rightarrow \big(A$ جزء محدود من الأعلى في $\Re\big)$

2. $(a \in A) \Rightarrow \big(a$ حد أعلى لـ A في $\Re\big)$

3. $\left.\begin{array}{ll} \forall n \in \aleph, & W_n \le U_n \le V_n \\ \text{متقاربتين} & (W_n) \text{ و } (V_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \big((U_n)$ متقاربة$\big)$

4. $\big((U_n)$ متقاربة$\big) \Rightarrow \big((U_{2n})$ و (U_{2n+1}) متقاربتين$\big)$

5. $\big((U_n)$ و (V_n) متقاربتين$\big) \Rightarrow \big((U_n + V_n)$ متقاربة$\big)$

6. $\big(\sum_{n\ge 0} U_n$ و $\sum_{n\ge 0} V_n$ من نفس الطبيعة$\big) \Rightarrow \big(\forall n \in \aleph \quad 0 \le U_n \le V_n\big)$

7. $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \aleph \quad U_n \ge 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0\right)$

8. $\left.\begin{array}{l} S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k \\ (S_n) \text{ محدودة من الأعلى} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum\limits_{k\ge 0} U_k \text{ متقاربة}\right)$

II- أدرس طبيعة السلاسل:

$$\sum_{n\ge 1} \frac{n}{a^n},\ (a>1) \quad ; \quad \sum_{n\ge 0} \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad ; \quad \sum_{n\ge 2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

<u>التمرين الثاني</u>:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = -3 + \dfrac{4}{2-U_n} \quad , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n\in \aleph \quad -2<U_n\leq 0$
2. برهن أنّ (U_n) متناقصة.
3. استنتج مع التعليل طبيعة (U_n) ثم أحسب نهايتها.
4. أحسب مع التعليل في حالة وجودها:

$$\underset{n\in\aleph}{Min}U_n \text{ ؛ } \underset{n\in\aleph}{Max}U_n \text{ ؛ } \underset{n\in\aleph}{Inf}\,U_n \text{ ؛ } \underset{n\in\aleph}{Sup}U_n$$

5. إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}U_n$.

<u>التمرين الثالث</u>:

لتكن (U_n) متتالية متقاربة نحو الصفر $\left(\lim_{n\to+\infty}U_n=0\right)$ و (V_n) متتالية معرّفة بـ:

$$\forall n\in\aleph \quad V_n=U_{2n}+U_{2n+1}$$

نضع: $T_n=\sum_{k=0}^{n}V_k$ و $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ حيث n من $\aleph$.

1. بيّن أنّ: $\forall\, n\in\aleph, T_n=S_{2n+1}$
2. أكتب S_{2n} بدلالة S_{2n+1}.
3. برهن أنّ:

$$\sum_{n\geq 0}U_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}V_n \text{ متقاربة}$$

4. تطبيق: عيّن طبيعة السلسلة

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن التابع f المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{sh}(x)+1 & ; \quad x<0\\ \\ a^2x+b & ; \quad x\geq 0\end{cases} \qquad (a\in\Re,\ b\in\Re)$$

1. عيّن قيم a و b بحيث يكون f مستمرا عند 0.
2. عيّن قيم a و b بحيث يكون f قابلا للإشتقاق عند 0.

II- أحسب مستخدما النشور المحدودة النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}-\cos(x)}{x\sin(x)}$$

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\mathrm{arctg}(x) & ; \quad x\leq 1\\ \\ (1+x)e^{1/x-1} & ; \quad x>1\end{cases}$$

I- 1. مستخدما نظرية التزايدات المنتهية، برهن أنّ:

$$\frac{x}{1+x^2}\leq arctgx\leq x\ ,\quad \forall x>0$$

2. استنتج أنّ:

$$x(x-1)\leq f(x)\leq\frac{x(x-1)}{1+x^2}\ ,\quad \forall x\in[0,1]$$

II- 1. أدرس استمرارية التابع f عند 1.
2. هل التابع f قابل لاشتقاق عند 1؟ (علّل إجابتك)
3. هل التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة 3 في جوار 1؟
4. بيّن أنّ التابع f' رتيب تماما على المجال $]0,1[$.
5. بيّن أنّ المعدلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,1[$.

III- 1. أوجد النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0.
2. استنتج أنّ منحنى f مماسا عند 0، يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنى f بالنسبة له في جوار 0.

التمرين الثالث.

أحسب التكاملات التالية:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad ; \qquad \int x\,\mathrm{arctg}(x)dx$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse** (المدة ساعتان)

<u>التمرين الأول</u>:

لتكن المتتالية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = 1 + \dfrac{U_{n-1}}{n-1}, \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

1. أحسب U_2 .
2. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph^* \quad 1 \leq U_n \leq 2$
3. برهن باستخدام تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.
4. برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_n = 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times(2)\times 1}$$

5. برهن باستخدام طريقة الحصر أنّ:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^{n-1}}\right) = 0$$

6. ما هي طبيعة $\sum\limits_{n \geq 2} V_n$ حيث $V_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^{n-1}}$ ؟

<u>التمرين الثاني</u>:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = x^2 Log\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2\sqrt{x^2+1}$$

1. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$.
2. استنتج وجود خط مقارب في جوار $+\infty$ لمنحنى f يُطلب تعيين معادلته و وضعية منحنى f إزاءه في جوار $+\infty$.

<u>التمرين الثالث</u>:

نضع:

$$U_n = \int_0^1 Log[(x+1)(x+2)\times\cdots\times(x+n)]dx, \qquad n \in \aleph^*$$

1. أحسب $\int_0^1 Log(x+k)dx$ حيث $k \in \aleph^*$.
2. إستنتج أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n = (1+n)Log(1+n) - n$
3. حدّد طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n \geq 1} U_n$.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 7 - \dfrac{6}{U_n}, \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in ℵ \quad 1 < U_n < 6$
2. برهن أنّ (U_n) متزايدة.
3. إستنتج أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.
4. عيّن مع التعليل في حالة وجودها :

$Sup\{U_n / n \in ℵ\}$ ؛ $Inf\{U_n / n \in ℵ\}$ ؛ $Max\{U_n / n \in ℵ\}$ ؛ $Min\{U_n / n \in ℵ\}$

5. استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n \geq 0} U_n$.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^2+1} - \cos(x)\right], \quad x \neq 0$$

1. جد النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0.
2. استنتج $\lim_{x \to 0} f(x)$.
3. استنتج مع التعليل أنّ التابع f يقبل تمديدا بالإستمرار عند 0 نرمز له بـ: $\tilde{f}$.
4. مستخدما الإجابة عن السؤال الأول:

أ. برهن أنّ التابع $\tilde{f}$ يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. أعط معادلة المماس لمنحنى $\tilde{f}$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لمنحنى $\tilde{f}$ في جوار الصفر.

5. بيّن أنّ المعادلة $\tilde{f}(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين الثالث:

مستخدما النشر المحدود، أحسب حسب قيم الوسيط λ النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x) - \lambda x}$$

التمرين الرابع:

نعتبر التكاملين:

$$I = \int_0^{\pi/2} x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \quad \text{و} \quad J = \int_0^{\pi/2} x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

1. أحسب $I + J$.
2. أحسب $I - J$.
3. إستنتج قيم I و J.

إمتحانات

2004-2003

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- لتكن (U_n) المتتالية المعرّفة بـ:

$$U_n = \frac{1-3n}{2n-1}, \quad n \geq 1$$

1. برهن مستخدما تعريف النهاية أنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\frac{3}{2}$
2. برهن أنّ (U_n) رتيبة.
3. أحسب مع التعليل في حالة وجودها:

$$\underset{n\in \aleph^*}{Min} U_n \ \text{؛} \ \underset{n\in \aleph^*}{Max} U_n \ \text{؛} \ \underset{n\in \aleph^*}{Inf} U_n \ \text{؛} \ \underset{n\in \aleph^*}{Sup} U_n$$

II- ليكن A جزءا من $\Re_-^*$ غير خال و محدودا مع $\sup A \neq 0$، و لتكن $\frac{1}{A}$ المجموعة المعرّفة بـ:

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{x} \ , \quad x \in A \right\}$$

1. برهن أنّ: $SupA < 0$.
2. برهن أنّ: $\frac{1}{A}$ جزء محدود.
3. برهن أنّ: $Sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{Inf(A)}$.
4. استنتج أنّ: $Inf\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{Sup(A)}$.

III- نضع $A = \{U_n , \quad n \in \aleph^*\}$ حيث (U_n) المتتالية المعرّفة في الجزء (I). أحسب:

$$Inf\left(\frac{1}{A}\right) \quad ; \quad Sup\left(\frac{1}{A}\right)$$

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين المعرّفتين بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 1, V_0 = 2 \\ U_n = \frac{1}{3}(2U_{n-1} + V_{n-1}), \quad n \geq 1 \\ V_n = \frac{1}{3}(U_{n-1} + 2V_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

1. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n < V_n$
2. بيّن أنّ (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة.
3. أثبت أنّه:

$$\exists k \in \left]0,1\right[: \quad \forall n \in \aleph \quad V_n - U_n = k^n$$

ثم استنتج النهاية التالية: $\lim\limits_{n \to +\infty}(V_n - U_n)$

4. استنتج أنّ (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l.
5. عيّن قيمة l (يمكنك الإستفادة من كون المجموع $U_n + V_n$ لا يتعلق بـ n).

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن f تابعا حقيقيا معرفا على مجال I من $\Re$ و x_0 عددا حقيقيا من I و ليكن n من $\aleph^*$.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. إذا كان f مستمرا عند x_0، فإنّ f يقبل نهاية عند x_0.
2. (f مستمر بانتظام على I) $\Leftrightarrow$ (f مستمر على I)
3. (f يقبل الإشتقاق عند x_0) $\Leftrightarrow$ (f مستمر عند x_0)
4. (f يقبل الإشتقاق عند x_0) $\Leftrightarrow$ (f يقبل الإشتقاق من اليمين و من اليسار عند x_0)
5. التابع g المعرّف بـ $g(x)=x+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار 0.
6. (f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0) $\Leftrightarrow$ $\left(\exists l\in\Re\ /\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=l\right)$

II- مستخدما نظرية التزايدات المنتهية بين أنّ:

$$\forall x\in[0,1[\quad x\le \arcsin x\le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

III- ليكن f التابع المعرف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(ax)}{x^2} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}\qquad (a\in\Re)$$

1. عيّن قيمة a التي من أجلها يكون f مستمرا عند 0.
2. نفرض أنّ $a=1$.

أ. برهن أنّ f يقبل الاشتقاق على $\Re$، ثم أحسب f'.

ب. عيّن المجموعة E التي يكون عليها f قابلا للاشتقاق بإستمرار.

التمرين الثاني:

I- ليكن f و g تابعين معرّفين بـ:

$$f(x)=\left(Log(1+x)\right)^2 \quad ; \qquad g(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x^2)}$$

1. جد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين f و g.
2. إستنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\,g(x)}$
3. استنتج أنّ لمنحنيي f و g مماسين عند 0، يُطلب تعيين معادلتيهما و وضعية منحنيي f و g إزاءهما في جوار الصفر.

II- ليكن h التابع المعرّف بـ:

$$h(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

جد النشر المحدود للتابع $x \mapsto \frac{h(x)}{x}$ من الرتبة 2 في جوار $+\infty$، ثمّ استنتج أنّ لمنحنى h خطا مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ يُطلب تعيين معادلته و وضعيته بالنسبة لمنحنى h في جوار $+\infty$.

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

I- ليكن k عددا حقيقيا منتميا إلى المجال $]0,1[$ و لتكن $(U_n)_{n\in\aleph}$ متتالية عددية بحيث:

$$\forall n\in\aleph^* \quad |U_{n+1}-U_n|\le k|U_n-U_{n-1}|$$

1. أثبت أنّ:

$$\forall n\in\aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

2. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث $p\ge q\ge 0$ ، أثبت أنّ:

$$|U_p-U_q|\le k^q\frac{|U_1-U_0|}{1-k}$$

3. استنتج أنّ $(U_n)_{n\in\aleph}$ كوشية.
4. ما هي طبيعة (U_n) ؟

II- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\aleph}$ المعطاة بالصيغة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0>0 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2+U_n} \quad , \quad n\in\aleph \end{cases}$$

1. بيّن أنّ: $\forall n\in\aleph \quad U_n\ge 0$
2. أثبت، مستدلا بالجزء (I)، أنّ (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{1}{1+x^2}-\cos(x)\right] & ; \quad x\ne 0 \\ -\dfrac{1}{2} & ; \quad x=0 \end{cases}$$

1. جد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 2 في جوار 0.
2. استنتج $\lim_{x\to 0} f(x)$.
3. استنتج أنّ التابع f مستمر عند 0.
4. برهن أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند 0.
5. أعط معادلة المماس لمنحنى f عند 0 ثمّ حدّد وضعية هذا المنحنى بالنسبة للمماس في جوار الصفر.
6. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين الثالث:

مستخدما النشر المحدود، أحسب حسب قيم الوسيط λ النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{Log(1+x) - \lambda x}$$

التمرين الرابع:

من أجل n من $\aleph^*$، نضع:

$$I(n) = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\, dx$$

1. أحسب $I(1)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة، برهن أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad I(n+2) = \frac{n+1}{2} I(n) - \frac{1}{2e}$$

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage** (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) و (V_n) المتتاليتين المعرّفتين بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \quad , \quad V_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \qquad , \qquad n \geq 0 \\ V_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \qquad , \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

1. بيّن أنّ حدود المتتاليتين موجبة.
2. برهن أنّ: $\forall n \in \aleph \quad V_n < U_n$
3. بيّن أنّ (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة.
4. أثبت صحة: $\exists k \in \left]0,1\right[\; / \quad \forall n \in \aleph \quad (U_{n+1} - V_{n+1}) \leq k^{n+1}$

   ثم استنتج أنّ: $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$
5. استنتج أنّ (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l.
6. عيّن قيمة l (يمكنك الإستفادة من كون الجداء $U_n V_n$ لا يتعلق بـ n).
7. أحسب مع التعليل و في حالة الوجود: $\underset{n\in\aleph}{Max} U_n$، $\underset{n\in\aleph}{Sup} U_n$ و $\underset{n\in\aleph}{Inf} U_n$ و كذا $\underset{n\in\aleph}{Min} V_n$، $\underset{n\in\aleph}{Sup} V_n$ و $\underset{n\in\aleph}{Inf} V_n$.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + x + \sin x \times \sin \dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

1. برهن أنّ التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re$ ثم أحسب f'.
2. عيّن المجموعة E التي يكون عليها f قابلا للاشتقاق بإستمرار.

التمرين الثالث:

I- أنشر بجوار x_0 حتى الرتبة n التابعين المعرفين بـ:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin^2(x)} \qquad , \qquad (x_0 = 0, n = 2)$$
$$g(x) = e^{x \, Log \sqrt{x}} \qquad , \qquad (x_0 = 1, n = 2)$$

II- أحسب مستخدما النشور المحدودة النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1 + \cos x) - 2\,\text{tg}\, x}{2x - \sin x - \text{tg}\, x}$$

إمتحانات

2005-2004

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I- ليكن M عددا حقيقيا و (U_n) متتالية عددية وليكن f تابعا حقيقيا معرفا على $[a,c]$.

أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير :

1. كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بـ M متقاربة نحو M.
2. كل متتالية متناقصة وتقبل حدا أدنى M متقاربة نحو M.
3. (U_n) متباعدة $\Leftrightarrow \left[\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty \ \vee \ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty\right]$
4. (U_n) متقاربة $\Leftrightarrow [\ \forall l \in IR, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph : |U_n - l| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0\ ]$
5. (f مستمر على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f مستمر على $[a,b]$ و $]b,c]$)
6. (f يقبل الاشتقاق على $[a,c]$) $\Rightarrow$ (f يقبل الاشتقاق على $[a,b]$ و $[b,c]$)

II- مستخدمًا تعريف النهاية، بين أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

III- لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\Re$ ومحدودة من الأعلى في $\Re$ وليكن a عددا حقيقيا بحيث $a \notin A$. نضع: $B = A \cup \{a\}$.

1. بيّن أنّ المجموعة B محدودة من الأعلى في $\Re$.
2. بيّن أنّ: $Sup\, A \le Sup B$.
3. نفرض أنّ $a \le SupA$.
بيّن أنّ: $Sup\, B = SupA$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n^2} \end{cases} , \quad n \in \aleph$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n > 0$
2. نضع: $\forall n \in \aleph \quad (Z_n = U_{2n} \ \wedge \ W_n = U_{2n+1})$

أ. أحسب : W_1, Z_1, Z_0, W_0

ب. برهن أنّ : $\forall n \in \aleph \quad (Z_{n+1} = Z_n^4 \wedge \ W_{n+1} = W_n^4)$

ج. برهن أنّ : $\forall n \in \aleph \quad (Z_n < 1 \ \wedge \ W_n > 1)$

د. أدرس رتابة (W_n) و (Z_n).

ه. عين في حالة التقارب النهايات المحتملة لـ (W_n) و (Z_n).

و. استنتج طبيعة (W_n) و (Z_n).

ز. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n$ ، ثم استنتج طبيعة (U_n).

الإمتحان الثاني: EMD2 (ساعة و نصف)

التمرين الأول:

I- هل التوابع التالية تقبل نشورا محدودة من الرتبة 2 في جوار الصفر؟ برّر إجابتك.

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$$

II- 1. برهن باستخدام التعريف أن التابع : $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ مستمر عند الصفر.

2. برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أنّ :

$$\forall x \geq 0 \quad \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$$

III- عين مستخدما النشور المحدودة قيم a و b بحيث يكون :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=0$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف بـ :

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}+\frac{\sin ax}{x} & ; \quad x<0 \\ 0 & ; \quad x=0 \qquad (a,b\in\Re) \\ Log(b+x) & ; \quad x>0 \end{cases}$$

1. عين قيم a و b التي يكون من أجلهما f مستمرا عند الصفر.
2. نفرض $a=0$ و $b=1$.

أ. أدرس قابلية اشتقاق f عند الصفر.

ب. أحسب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$.

ج. هل التابع f' يقبل تمديدا بالاستمرار عند الصفر؟

التمرين الثالث:

أحسب التكاملات التالية :

$$\int \cos x \, Log(1+\cos x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\, dx$$

$$\int \frac{e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

1. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار $-\infty$ للتابع :

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x} e^{\frac{1}{x}}$$

2. استنتج معادلة الخط المقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$ و وضعية هذا الأخير إزاءه في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$$

و لتكن (U_n) المتتالية التراجعية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. حل المعادلة $f(x) = x$ في $]0,+\infty[$.
2. نضع $l = \sqrt[3]{2}$. برهن أنّ التابع f متزايد تماما على $[l, 2]$.
3. برهن بالتراجع و بالاستعانة برتابة التابع f أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad l < u_n \leq 2$$

4. برهن أنّ (U_n) متناقصة و استنتج طبيعتها.
5. أحسب في حالة وجودها مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Sup}\, U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Inf}\, U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Max}\, U_n \; ; \; \underset{n\in IN}{Min}\, U_n$$

التمرين الثالث:

ليكن f تابعا مستمرا على $[0,+\infty[$ و قابلا للاشتقاق على $]0,+\infty[$ مع f' متزايد تماما على $]0,+\infty[$.

1. برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية مرتين أنّ :

$$\forall x \geq 1 \quad f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$$

2. نفرض $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

أ. برهن أنّ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

ب. استنتج إشارة f' ثم أوجد جدول تغيرات f و استنتج إشارة f على $[0,+\infty[$.

التمرين الرابع:

ليكن:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+4)^n} dx, \quad n \in \aleph$$

1. أحسب I_0 و I_1 .

2. برهن باستخدام المكاملة بالتجزئة، أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad I_n = \frac{1}{1-2n}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} - 8n\, I_{n+1}\right)$$

3. استنتج عبارة $\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx$.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرّف بـ :

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x<0 \\ \sin(shx) & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

-I 1. أدرس استمرارية التابع f على مجموعة تعريفه.

2. أدرس قابلية اشتقاق التابع f على مجموعة تعريفه ثم أحسب التابع المشتق في حالة وجوده.

3. باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أثبت أنّ:

$$\forall x\geq 0 \quad |\sin(shx)|\leq x\,chx$$

-II جد النشر المحدود المعمّم للتابع f من الرتبة 1 في جوار $-\infty$ ثم استنتج معادلة الخط المقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$ و وضعية هذا الأخير إزاءه في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x)=Log\left(\cos^2 x\right)-\frac{2x+\alpha x^2}{1+x}, \quad (\alpha\in\Re)$$

1. جد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 في جوار الصفر.
2. عيّن معادلة المماس ووضعيته حسب قيم α بالنسبة لمنحنى f في جوار الصفر.
3. مستخدما النشر المحدود ، أحسب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Log\left(\cos^2 x\right)}{1-ch(x)}$$

التمرين الثالث:

أحسب مايلي:

$$\int x^2 \operatorname{arctg}(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$$

إمتحانات

2006-2005

الإمتحان الأول: EMD1 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

لتكن (U_n) المتتالية الحقيقية المعرفة بـ:

$$U_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \aleph^*$$

1. مستخدمًا تعريف النهاية بين أنّ :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

2. أدرس رتابة المتتالية (U_n).
3. نضع:

$$A = \left\{ U_n \; ; \; n \in \aleph^* \right\}$$

أ. بين أنّ المجموعة A محدودة في $\Re$.

ب. عين في حالة وجودها :

$$SupA \; ; \; InfA \; ; \; MaxA \; ; \; MinA$$

التمرين الثاني:

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\Re^+$ ومحدودة من الأعلى في $\Re$ وليكن λ عددا حقيقيا بحيث $\lambda \rangle 0$. نضع: $\lambda A = \left\{ \lambda a \in \Re \; / \; a \in A \right\}$

1. بين أنّ المجموعة λA محدودة من الأعلى في $\Re$.
2. باستخدام الخاصية المميزة للحد الأعلى في $\Re$، بين أنّ : $Sup(\lambda A) = \lambda \, SupA$

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{6} + 1, \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. بين أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 \le U_n \le 2$
2. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad \left| U_{n+1} - U_n \right| \le \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$
3. إذا كان p و q عددين طبيعيين بحيث: $p \ge q \ge 0$, أثبت أنّ :

$$\left| U_p - U_q \right| \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^q$$

4. استنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

الإمتحان الثاني: EMD2 (المدة ساعة و 30 دقيقة)

التمرين الأول:

I− ليكن f تابعا حقيقيا و x_0 عددا حقيقيا. أجب بـ (نعم) أو (لا) بدون تبرير:

1. (f لا يقبل نهاية عند x_0) ⇐ (f غير معرف عند x_0)
2. (f يقبل نهاية عند x_0) ⇐ (f مستمر عند x_0)
3. (f يقبل الاشتقاق عند x_0) ⇔ (f يقبل الاشتقاق من اليمين ومن اليسار عند x_0)
4. (f يقبل الاشتقاق على I) ⇐ (f من الصنف C^0 على I)
5. (f معرف عند x_0) ⇐ (f يقبل نشرا محدودا في جوار x_0)
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{o(x^2)}=1$.

II− برهن باستخدام التعريف أن التابع : $f: x\mapsto x^2+3$ مستمر عند 0 .

III− برهن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية أن:

$$\forall x\in[0,1[\quad x\le\frac{\pi}{2}-Arc\cos x\le\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرّف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,chx-shx}{chx-1} & ;\quad x\neq 0\\[2ex] l & ;\quad x=0\end{cases}\quad,\ (l\in\Re)$$

1. أوجد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 في جوار 0 .
2. استنتج قيمة l التي يكون من أجلها f مستمرا عند 0 .
3. نفرض أن $l=0$.

أ. بين أن التابع f يقبل الاشتقاق عند 0 .

ب. أعط معادلة المماس لمنحنى f عند 0 ثمّ حدّد وضعية هذا المنحنى بالنسبة للمماس في جوار 0 .

التمرين الثالث:

أحسب مايلي :

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx \quad ; \quad \int\frac{Logx}{x}\,dx \quad ; \quad \int\frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$$

الإمتحان الشامل: Synthèse (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 > \sqrt{\alpha} & , \quad \alpha > 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{\alpha}{U_n}) & , \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad U_n > \sqrt{\alpha}$
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n).
3. استنتج مع التعليل تقارب المتتالية (U_n).
4. أحسب (في حالة وجودها) مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Sup}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Inf}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Max}\, U_n \quad ; \quad \underset{n\in IN}{Min}\, U_n \quad .$$

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\cos x - 1)}{x} \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

1. أحسب: $\lim_{x\to 0} f(x)$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أدرس استمرارية التابع f عند 0.
3. نضع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ مع $x \in \Re^*$ و لنعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بـ :

$$\forall n \in \aleph^* \qquad x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \wedge \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

أ. أحسب: $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} g(y_n)$.

ب. هل التابع g يقبل نهاية عند 0؟

ج. استنتج فيما إذا كان التابع f قابل للاشتقاق عند 0.

التمرين الثالث:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 2x}$$

1. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
2. استنتج وجود خطين مقاربين في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لمنحنى f يُطلب تعيين معادلتهما و وضعية منحنى f إزاءهما في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

التمرين الرابع:

لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y'-5y=5Logx-\frac{1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'-5y=0$.
2. تحقق من أنّ التابع $x\mapsto -Logx$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).
3. استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (I).

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage** (المدة ساعتان)

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية الحقيقية (U_n) المعرّفة بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 6}{U_n}, \quad n \in \aleph \end{cases}$$

1. أثبت أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 \le U_n \le 6$.
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n) .
3. استنتج مع التعليل طبيعة المتتالية (U_n) .
4. أحسب (في حالة وجودها) مع التعليل:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Sup} U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Inf} U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Max} U_n \quad ; \quad \underset{n\in\aleph}{Min} U_n$$

التمرين الثاني:

مستخدما النشور المحدودة أحسب النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \quad ; \quad 2)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{Log(1+x)}\right)$$

التمرين الثالث:

ليكن f التابع الحقيقي المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x^2 Log\left(\dfrac{1+x}{x}\right) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

1. أدرس اشتقاق التابع f على مجموعة تعريفه D_f . هل التابع f مستمر على D_f ؟
2. جد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
3. استنتج وجود خطين مقاربين في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لمنحنى f يُطلب تعيين معادلتيهما و وضعية منحنى f إزاء هما في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
4. احسب $\int_{e^{-n}}^{1} f(x)\,dx$ مع $n \in \aleph^*$.
5. نضع $U_n = \int_{e^{-n}}^{1} f(x)\,dx$ مع $n \in \aleph^*$.

أ. احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

ب. استنتج طبيعة المتتالية (U_n) .

إمتحانات

1999-1998

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

1. نبرهن باستعمال التعريف أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ أي نبرهن صحة:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph \ / \forall n \in \aleph, n \geq n_0 \Rightarrow \left| U_n - 0 \right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left| U_n - 0 \right| = \left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n}$$

و منه، حتى يكون $\left|U_n - 0\right| \leq \varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ أي $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

إذن بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{(a+b)n + 2a + b}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

بالمطابقة نجد:

$a+b=0$ و $2a+b=1$

و عليه:

$a=1$ و $b=-1$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

3. بإستخدام المساواة السابقة، لدينا:

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

التمرين الثاني:

1. نبرهن بالتراجع أنّ: $\forall n \in \aleph^* \quad U_n \geq 1$

من أجل $n=1$ ، لدينا $U_1 = 1 \geq 1$ صحيحة.

نفترض صحة المتراجحة من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.

لدينا:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left[U_n + \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{3^n}}\right] \geq \frac{1}{2}\left[U_n + U_n\right] \geq 1$$

لأنّ $U_n \geq 1$ (فرضا) و $\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} \geq U_n$.

و عليه:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_n \geq 1$$

2. لدينا:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_{n+1}-U_n = \frac{1}{2}\left[U_n+\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}\right]-U_n$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}-U_n\right] \geq 0$$

لأنّ $\forall n \in \aleph^* \quad \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}} \geq U_n$

و عليه المتتالية (U_n) متزايدة.

3. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n} \quad \Leftrightarrow \quad U_{n+1}-U_n \leq \frac{1}{4\times 3^n}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}-U_n\right] \leq \frac{1}{4\times 3^n}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}-U_n \leq \frac{1}{2\times 3^n}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3^n\left(\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}+U_n\right)} \leq \frac{1}{2\times 3^n}$$

و عليه:

$$U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}+U_n \geq 2$$

القضية $\sqrt{U_n^2+\frac{1}{3^n}}+U_n \geq 2$ محققة دوما لأنّ $U_n \geq 1$. من التكافؤ المنطقي نستنتج صحة:

$$\forall n \geq 1 \quad U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{4\times 3^n}$$

4. لدينا مما سبق:

$$\forall n \geq 2 \quad U_n \leq U_{n-1}+\frac{1}{4\times 3^{n-1}} \leq U_{n-2}+\frac{1}{4\times 3^{n-2}}+\frac{1}{4\times 3^{n-1}}$$
$$\leq U_1+\frac{1}{4\times 3^1}+\frac{1}{4\times 3^2}+\cdots+\frac{1}{4\times 3^{n-1}}$$

و بما أنّ $U_1=1$ فإنّ:

$$\forall n \geq 2 \quad U_n \leq 1+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right]$$

ثم واضح صحة المتراجحة أعلاه من أجل $n=1$ وعليه المتراجحة صحيحة من أجل أي n من $\aleph^*$.

5. لدينا من جهة أخرى:

$$\forall n\in \aleph^* \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\leq \frac{1}{2}$$

و عليه:

$$\forall n\in \aleph^* \quad U_n \leq \frac{9}{8}$$

أي (U_n) محدودة من الأعلى.

و بما أنّ (U_n) متزايدة حسب الإجابة الثانية، فهي إذن متقاربة.

التمرين الثالث:

1. لدينا فرضا g محدودة في جوار x_0 أي:

$$\exists \alpha>0,\ \exists M>0:\ \ |g(x)|\leq M,\quad \forall x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$$

و عليه

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\leq M|f(x)|,\quad \forall x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$$

إذن:

$$0\leq |f(x)g(x)|\leq M|f(x)|$$

بالمرور إلى النهاية لما x يؤول نحو x_0 و باستخدام الفرض نستنتج من الحصر أنّ:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)\,g(x)|=0$$

أي:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x)=0$$

2. أ. واضح أنّ التابع f مستمر على $\Re^*$ و ذلك من أجل كل قيم a و b من $\Re_+^*$.

من أجل القيمة 0 لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left((a-b)+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=a-b$$

لأنّ: $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ (عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو الصفر).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{x}=\frac{a}{2\sqrt{b}}$$ (حسب نظرية لوبيتال)

إذن حتى يكون التابع f مستمر عند 0 يلزم ويكفي أن يكون $a=2$ و $b=1$.

و عليه قيم a و b التى يكون من أجليهما التابع f مستمر على $\Re$ هي $a=2$ و $b=1$.

ب. لدينا: $g(0)=f(0)=1\ ;\ g(\frac{-2}{\pi})=f(\frac{-2}{\pi})-2=-1-\frac{4}{\pi^2}$

و بماأنّ التابع g مستمر على $\left[\frac{-2}{\pi},0\right]$ و $g(0)\times g(-\frac{2}{\pi})<0$ فإنّه حسب نظرية القيم

المتوسطة يوجد على الأقل c من المجال $\left[\frac{-2}{\pi},0\right]$ يحقق $g(c)=0$.

3. أ. لدينا:

$$h(x)=\left(\frac{2x}{\cos x}f(-\frac{1}{|x|})\right)^m=\left(\frac{2x}{\cos x}(a-b-\frac{\sin|x|}{|x|^2})\right)^m$$

و عليه:

$$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2(a-b)x}{\cos x}-\frac{2x\sin|x|}{x^2\cos x}\right)^m$$

و منه:

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}h(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{2(a-b)x}{\cos x}-\frac{2x\sin x}{x^2\cos x}\right)^m=(-2)^m$$

و

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}h(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{2(a-b)x}{\cos x}+\frac{2x\sin x}{x^2\cos x}\right)^m=2^m$$

لأنّ: $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

إذن:

$$\lim_{x\to0}h(x)=\begin{cases}2^m & ,\ \text{زوجي}\quad m\\ \text{غير موجودة} & ,\ \text{فردي}\quad m\end{cases}$$

ب. نستنتج أنه حتى يكون التابع h مستمرا عند 0 يلزم ويكفي أن يكون m زوجي و $h(0)=2^m$.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

1. لدينا تعريفا:

$$\left(f \text{ يقبل الإشتقاق عند } 1 \right) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \in \Re$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} (x+1) = 2$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{ax+b-1}{x-1}$$

o إذا كان $a+b-1 \neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \left| \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right| = +\infty$$

o إذا كان $a+b-1=0$ فإنّ: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ هي من الشكل $\frac{0}{0}$ و بإستخدام نظرية لوبيتال نجد:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = a$$

إذن حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند 1 يلزم و يكفي أن يكون $a=2$ و $a+b-1=0$ أي $a=2$ و $b=-1$.

2. أ. ليكن x من المجال $[0,x]$. لاحظ أنّ التابع $t \mapsto \arcsin(t)$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للإشتقاق على $]0,x[$.

و عليه حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث:

$$\arcsin(x) - \arcsin(0) = (\arcsin)'(c) \times (x-0)$$

أي:

$$\arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

و بما أنّ:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ لأن } 0 < c < x$$

فإنّ:

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad x < \arcsin(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب. من الجواب السابق نستنتج أنّ:

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad 1 < \frac{\arcsin x}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

و بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x} = 1$$

و ذلك حسب قاعدة الحصر.

التمرين الثاني:

o $\quad (x_0 = 0, n = 3) \qquad f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

لاحظ أنّ:

$$f(x) = \sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 + (-1 + \cos(x))}$$

تذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ (x \to 0)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\ (x \to 0)$$

و عليه:

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\ (x \to 0)$$

لأنّ $-\frac{x^2}{2} + 0(x^2) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ و التابع $x \mapsto \sqrt{1+x}$ مستمر عند 0.

o $\quad (x_0 = 1, n = 3) \qquad g(x) = e^{x.Log(x)}$

نضع $t = x - 1$. إذا كان $x \to 1$ فإنّ $t \to 0$. و عليه:

$$g(x) = g(t+1) = e^{(1+t)Log(1+t)}$$

تذكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$Log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\ (t \to 0)$$

و عليه:

$$(1+t)Log(1+t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\ (t \to 0)$$

و بما أنّ: $\lim_{t \to 0}(1+t)Log(1+t) = 0$ و التابع $t \mapsto e^t$ مستمر عند 0، ولدينا:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\ (t \to 0)$$

فإنّ:

$$e^{(1+t)Log(1+t)} = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3)\ (t \to 0)$$

إذن:

$$g(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + o\left((x-1)^3\right)\ (x \to 1)$$

التمرين الثالث:

1. ليكن m و n من $\aleph$. لدينا:

$$I(m+1,n)=\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx$$

إذا فرضنا $f(x)=x^{m+1}$ و $g'(x)=(1-x)^n$ ثمّ طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}I(m+1,n)&=f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1 f'(x)g(x)dx\\&=-\int_0^1(m+1)x^m\times\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]dx\\&=\frac{m+1}{n+1}\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1}dx\\&=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)\end{aligned}$$

2. ليكن m و n من $\aleph$. لدينا:

$$\begin{aligned}I(m,n)-I(m,n+1)&=\int_0^1\left[x^m(1-x)^n-x^m(1-x)^{n+1}\right]dx\\&=\int_0^1 x^m(1-x)^n\left[1-(1-x)\right]dx\\&=\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx\\&=I(m+1,n)\end{aligned}$$

إذن:

$$I(m+1,n)=I(m,n)-I(m,n+1)$$

و بما أنّ :

$$I(m+1,n)=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)$$

نستنتج أنّ:

$$I(m,n)-I(m,n+1)=\frac{m+1}{n+1}I(m,n+1)$$

أي:

$$I(m,n+1)=\frac{n+1}{m+n+2}I(m,n)$$

3. نستخدم البرهان بالتراجع. ليكن m عددا طبيعيا ثابتا.

من أجل $n=0$ لدينا:

$$I(m,0)=\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}=\frac{0!}{m+1}$$

إذن المساواة صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض صحة المساواة من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.

لدينا حسب الإجابة على السؤال الثاني:

$$I(m,n+1)=\frac{n+1}{m+n+2}I(m,n)$$

و باستخدام فرض التراجع نجد:

$$I(m,n+1)=\frac{n+1}{m+n+2}\times\frac{n!}{(m+1)(m+2)......(m+n+1)}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(m+1)(m+2)......(m+n+1)(m+n+2)}$$

إذن:

$$\forall m,n\in \aleph \quad I(m,n)=\frac{n!}{(m+1)(m+2)......(m+n+1)}$$

<u>التمرين الرابع</u>:

لدينا:

$$x\,y'=y+x\cos\frac{y}{x}\Leftrightarrow y'=\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

نضع $z=\dfrac{y}{x}$ أي $y=x.z$ فيكون $y'=z'.x+z$ و تأخذ المعادلة الشكل الآتي:

$$\frac{z'}{\cos(z)}=\frac{1}{x} \qquad \text{مع} \qquad \cos(z)\neq 0$$

و منه:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)}=\int\frac{dx}{x}=\log|x|+\lambda \quad / \quad \lambda\in\Re$$

ثم:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)}=\int\frac{1+tg^2\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{z}{2}\right)}dz$$

نضع $t=tg\left(\dfrac{z}{2}\right)$ فيكون $dt=\dfrac{1}{2}\left[1+tg^2\left(\dfrac{z}{2}\right)\right]$ وعليه:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)} = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=-Log|1-t|+Log|1+t|+\alpha \quad / \quad \alpha\in\Re$$

إذن:

$$\int\frac{dz}{\cos(z)} = \log\left|\frac{1+tg\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{z}{2}\right)}\right|+\alpha \quad / \quad \alpha\in\Re$$

ومنه:

$$\int \frac{dz}{\cos(z)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow Log\left|\frac{1+tg\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{z}{2}\right)}\right| + \alpha = Log|x| + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+tg\left(\frac{z}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{z}{2}\right)} = kx \quad / \quad k \in \Re^*$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{k\,x-1}{k\,x+1} \quad / \quad k \in \Re^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{2} = m\pi + arctg\frac{kx-1}{kx+1} \quad / \quad k \in \Re^*\ , m \in Z$$

$$\Leftrightarrow y = 2x\,arctg\frac{k\,x-1}{k\,x+1} + 2m\pi\,x \quad / \quad k \in \Re^*\ , m \in Z$$

من جهة أخرى اذا كان $\cos(z) = 0$ فإنّ $z = \frac{\pi}{2} + m\pi$ وعليه $y = \frac{\pi}{2}x + m\pi\,x$ مع m من Z .

إذن من السهل التأكد من أنّ التابع $x \mapsto \frac{\pi}{2}x + 2m\pi\,x$ هو أيضا حل للمعادلة:

$$x\,y' = y + x\cos\frac{y}{x}$$

و منه الحل العام للمعادلة السابقة يعطى بالعلاقة:

$$\begin{cases} y = 2x\,arctg\dfrac{kx-1}{kx+1} + 2m\pi\,x \quad / \quad m \in Z\ , k \in \Re^* \\ \vee \\ y = \dfrac{\pi}{2}x + m\pi\,x \qquad\qquad / \quad m \in Z \end{cases}$$

لدينا من جهة أخرى:

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2arctg\dfrac{kx-1}{kx+1} + 2m\pi = 0 \\ \vee \\ \dfrac{\pi}{2} + m\pi = 0 \end{cases}$$

(المعادلة $\frac{\pi}{2} + m\pi = 0$ مستحيلة الحل لأن m صحيح)

$$\Leftrightarrow arctg\frac{k-1}{k+1} = -m\pi$$

$$\Leftrightarrow arctg\frac{k-1}{k+1} = 0$$

(لأن: $\forall x \in \Re, \quad arctg(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$)

$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{k+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

و منه التابع $x \mapsto 2x\,arctg\frac{x-1}{x+1}$ هو الحل للجملة (I).

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

ليكن n من $\aleph^*$ و α من $\Re$.

1. إذا فرضنا $f'(x)=1$ و $g(x)=\left(x^\alpha+1\right)^{-n}$ و طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx \\
&= \frac{x}{\left(x^\alpha+1\right)^n}+n\alpha\int\frac{x^\alpha}{\left(x^\alpha+1\right)^{n+1}}dx \\
&= \frac{x}{\left(x^\alpha+1\right)^n}+n\alpha\int\frac{x^\alpha+1-1}{\left(x^\alpha+1\right)^{n+1}}dx \\
&= \frac{x}{\left(x^\alpha+1\right)^n}+n\alpha\int\frac{1}{\left(x^\alpha+1\right)^n}dx-n\alpha\int\frac{1}{\left(x^\alpha+1\right)^{n+1}}dx \\
&= \frac{x}{\left(x^\alpha+1\right)^n}+n\alpha I_n(x)-n\alpha I_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

و منه:

$$\forall n\in\aleph^* \quad I_{n+1}(x)=\frac{1}{\alpha n}\left[\frac{x}{\left(x^\alpha+1\right)^n}+(\alpha n-1)\,I_n(x)\right]$$

2. لاحظ أنّ: $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

و منه يوجد a، b و c ثوابت حقيقية بحيث:

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}\text{...................................}(I)$$

بضرب طرفي المساواة (I) في $x+1$ ثم تعويض x بـ -1 نجد: $a=\frac{1}{3}$.

بضرب طرفي المساواة (I) في x ثم نجعل x يؤول نحو $+\infty$ نجد: $a+b=0$.

و منه $b=-\frac{1}{3}$.

نعوّض الآن، في المساواة (I)، x بالصفر فنجد: $a+c=0$ و منه $c=\frac{2}{3}$.

إذن:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right]$$

3. من أجل $\alpha=3$، لدينا:

$$I_1(x)=\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

و منه لحساب $I_1(x)$ يكفي حساب:

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx \quad \text{و} \quad \int\frac{dx}{x+1}$$

لدينا:

- $$\int \frac{dx}{x+1} = Log|x+1| + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$
- $$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \ = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1+1)-2}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

لدينا من جهة أخرى:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$

نضع $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ فيكون $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ و منه:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(t)+\lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

و عليه:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \ = \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| - \sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

إذن:

$$I_1(x) = \frac{1}{3}\left[Log|x+1| - \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| + \sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda\right] \quad / \quad \lambda \in \Re$$

حساب $I_2(x)$:

بتعويض n بـ 1 في العلاقة الموجودة بالجواب عن السؤال الأول نجد:

$$I_2(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{x}{x^3+1} + 2I_1(x)\right]$$

و منه:

$$I_2(x) = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\left[Log|x+1| - \frac{1}{2}Log|x^2-x+1| + \sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda\right] \quad / \quad \lambda \in \Re$$

حساب $I_3(x)$:

بتعويض n بـ 2 في العلاقة الموجودة بالجواب عن السؤال الأول نجد:

$$I_3(x)=\frac{1}{6}\left[\frac{x}{\left(x^3+1\right)^2}+5I_2(x)\right]$$

و منه:

$$I_3(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\left(x^3+1\right)^2}+\frac{5x}{3\left(x^2+1\right)}+\frac{10}{9}\left[Log|x+1|-\frac{1}{2}Log\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda\right]\right)$$

(مع $\lambda\in\Re$)

التمرين الثاني:

ليكن x من $\Re^*$. نضع:

$$f(x)=arctg(x)\quad;\quad g(x)=arctg\left(\frac{1}{x}\right)\quad;\quad h(x)=arctg(x)+arctg\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad;\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{1}{x^2+1}$$

2. من الجواب السابق نستنتج أنّ:

$$\forall x>0\quad h'(x)=f'(x)+g'(x)=0$$

و منه:

$$\forall x>0\quad \int_1^x h'(t)dt=0$$

أي:

$$\forall x>0\quad h(x)-h(1)=0$$

إذن:

$$\forall x>0\quad h(x)=h(1)=arctg(1)+arctg(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

و عليه يكون لدينا:

$$\forall x>0\quad arctg(x)+arctg\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

3. لاحظ أنّ:

$$arctg(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$$

ثم

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

وعليه:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

و منه:

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\quad(x\to 0)$$

أي:

$$arctg(x)=arctg(0)+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\quad(x\to 0)$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\quad(x\to 0)$$

4. نضع $t=\frac{1}{x}$ لاحظ أنّ:

$$x \to +\infty \Leftrightarrow t \overset{>}{\to} 0$$

$$x \to -\infty \Leftrightarrow t \overset{<}{\to} 0$$

لدينا:
$$arctg(x) = arctg\left(\frac{1}{t}\right)$$

و باستخدام نتيجة السؤال الثاني نكتب:

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - arctg(t) \ , \quad \forall t > 0$$

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2} - arctg(t) \ , \quad \forall t < 0$$

(لأنّ التابع arctg فردي) و منه:

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + o\left(t^5\right) \ , \quad \left(t \xrightarrow{>} 0\right)$$

$$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + o\left(t^5\right) \ , \quad \left(t \xrightarrow{<} 0\right)$$

إذن:

$$arctg(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \ , \quad (x \to +\infty)$$

$$arctg(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \ , \quad (x \to -\infty)$$

<u>التمرين الثالث:</u>

1. ليكن x من I. لدينا:

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{2\pi}\left[arctg(x) + \frac{x}{1+x^2}\right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}\right] > 0 \ , \quad \forall x \in I$$

و منه f' متزايدة على I.

2. بما أنّ f' متزايدة على I فإنّ:

$$f^{'}(x) \leq f^{'}(\sqrt{3}) < 0 \quad , \quad \forall x \in I$$

لأنّ:

$$f^{'}(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{5}{6} \quad , \quad \forall x \in I$$

إذن f متناقصة تماما على I.

3. لدينا:

$$f(\sqrt{3}) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{3}} < 0 \quad \text{و} \quad f(1) = \frac{1}{8} > 0$$

و بما أنّ f مستمر على I و $f(1) \times f(\sqrt{3}) < 0$ ، فحسب نظرية القيم المتوسطة، يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال I و بما أنّ f رتيبة تماما فإنّ هذا الجذر وحيد.

إمتحانات

2000-1999

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

1. لدينا تعريفا

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph \,/\, \forall n \in \aleph - \{0,1\}, n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - 0| \leq \varepsilon\right)$$

ليكن $\varepsilon > 0$. لدينا من أجل $n \geq 2$:

$$|U_n - 0| = \frac{2}{n(n-1)(n+1)} < \frac{2}{n}$$

و عليه حتى يكون $|U_n - 0| \leq \varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$ أي $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ ، و بالتالي إذا أخذنا $n_0 = \left[\frac{2}{n}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. ليكن n من $\aleph - \{0,1\}$ و نبحث عن a ، b و c ثوابت حقيقية بحيث:

$$U_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

نضرب طرفي المساواة (I) في $n-1$ و بتعويض n بـ 1 نجد $a = 1$، ثم نضرب طرفي المساواة (I) في $n+1$ و بتعويض n بـ -1 نجد $b = 1$ و أخيرا نضرب طرفي المساواة (I) في n و بتعويض n بـ 0 نجد $c = -2$.

و منه:

$$U_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} + \frac{-2}{n}$$

3. ليكن n من $\aleph - \{0,1\}$ كيفي. لدينا:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - 2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

ملاحظة: يمكن استخدام البرهان بالتراجع للتأكد من أنّ: $\forall n \geq 2 \quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

4. لدينا: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

بما أنّ (S_n) هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n\geq 2} U_n$ و هي متقاربة نحو $\frac{1}{2}$، فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 2} U_n$ متقاربة ومجموعها هو $\frac{1}{2}$.

التمرين الثاني:

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$:

بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1\neq 0$ فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ متباعدة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n n!}$:

نضع: $U_n=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n n!}$. نلاحظ أنّ: $\forall n\geq 1 \quad U_n>0$

لدينا: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n+1}{3(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{2}{3}<1$ و حسب مقياس دالمبار السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n+n}$:

نضع: $U_n=\frac{1}{2^n+n}$. نلاحظ أنّ: $\forall n\in \aleph \quad U_n>0$

لدينا: $\frac{1}{2^n+n}\leq\frac{1}{2^n} \quad \forall n\in \aleph$ و بما أنّ $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ سلسلة متقاربة (سلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$)
فحسب مقياس المقارنة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$ حيث α من $\Re$:

نضع: $U_n=\frac{\cos(n\alpha)}{2^n}$.

لدينا: $|U_n|=\frac{|\cos(n\alpha)|}{2^n}\leq\frac{1}{2^n} \quad \forall n\in \aleph$ وبما أنّ $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ سلسلة متقاربة (سلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$) فإنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة مطلقا.

إذن $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

التمرين الثالث:

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ مع $a\geq 0$:

نضع $U_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$. نلاحظ أنّ: $\forall n \geq 1 \quad U_n > 0$

لدينا:

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a}$$

وعليه:

إذا كان $a>0$ فإنّ $e^{-a} < 1$ و حسب مقياس كوشي فإنّ $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة.

و إذا كان $a=0$ فإنّ $U_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$ و حسب الشرط اللازم لتقارب سلسلة فإنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متباعدة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+b}{n}\right)^{n^2}$ مع $b \geq 0$:

نضع: $V_n = \frac{n+b}{n}$. نلاحظ أنّ: $\forall n \geq 1 \quad V_n > 0$

لدينا:

$$\sqrt[n]{V_n} = \left(1+\frac{b}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{b}$$

وعليه:

إذا كان $b>0$ فإنّ $e^{b} > 1$ و حسب مقياس كوشي فإنّ $\sum_{n\geq 1} V_n$ متباعدة.

إذا كان $b=0$ فإنّ $V_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$ و حسب الشرط اللازم لتقارب سلسلة فإنّ $\sum_{n\geq 0} V_n$ متباعدة.

- طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} U_n + \sum_{n\geq 1} V_n$

إذا كان $b \geq 0$ و $a > 0$، فإنّ $\sum_{n\geq 1} U_n + \sum_{n\geq 1} V_n$ متباعدة لأنّ $\sum_{n\geq 1} U_n$ متقاربة و $\sum_{n\geq 1} V_n$ متباعدة.

إذا كان $b \geq 0$ و $a=0$، فإنّ $\sum_{n\geq 1} U_n + \sum_{n\geq 1} V_n$ متباعدة لأنّ $\sum_{n\geq 1} U_n = +\infty$ و $\sum_{n\geq 1} V_n = +\infty$.

التمرين الرابع:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. لدينا فرضا: $U_0 \geq 1$.
نفرض صحة المتراجحة من أجل الرتبة n أي $U_n \geq 1$ ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أنّ $U_{n+1} \geq 1$.
لدينا:

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geq \sqrt{U_n^2} = |U_n| = U_n \geq 1$$

ومنه: $\forall n \in \aleph \quad U_n \geq 1$

2. أ. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}-U_n=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}+U_n}\leq\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{1+1}$$

لأنّ: $U_n\geq 1$ و $\sqrt{U_n^2+\frac{1}{2^n}}\geq 1$.

وعليه:

$$\forall n\in\aleph\quad U_{n+1}-U_n\leq\frac{1}{2^{n+1}}$$

ب. لدينا من أجل p و q عددين طبيعيين بحيث $(p>q)$:

$$\left|U_p-U_q\right|\leq\left|U_p-U_{p-1}\right|+\left|U_{p-1}-U_{p-2}\right|+\cdots+\left|U_{q+1}-U_q\right|$$

$$\leq\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q+1}}$$

$$\leq\frac{1}{2^{q+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-q-1}}\right)$$

لكن:
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-q-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^{p-q}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{p-q-1}}\leq 2$$

إذن:
$$\left|U_p-U_q\right|\leq\frac{1}{2^{q+1}}\left(2-\frac{1}{2^{p-q-1}}\right)\leq\frac{1}{2^q}$$

ج. لدينا تعريفا:

(U_n) كوشية في $\Re$ $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\aleph\ /\ \forall p\in\aleph,\ \forall q\in\aleph,\ p\geq q\geq n_0\Rightarrow\left|U_p-U_q\right|\leq\varepsilon$

ليكن ε موجب تماما. لدينا حسب الإجابة "ب":

$$\left|U_p-U_q\right|\leq\frac{1}{2^q}$$

و حتى تكون $\left|U_p-U_q\right|\leq\varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{1}{2^q}\leq\varepsilon$ **أي** $q\geq\frac{Log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{Log 2}$.

إذن يكفي أخذ $n_0=\left[\frac{\left|Log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|}{Log 2}\right]+1$، و بالتالي فالمتتالية (U_n) كوشية إذن فهي متقاربة لأن حدودها حقيقية.

3. أ. لدينا:
$$\forall n \geq 0 \quad V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{2^n}$$

ب. لدينا من جهة:
$$\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

و لدينا من جهة أخرى:
$$\forall n \in \aleph \quad \sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n} \left(U_{k+1}^2 - U_k^2\right) = \left(U_1^2 - U_0^2\right) + \left(U_2^2 - U_1^2\right) + \cdots\cdots\cdots + \left(U_{n+1}^2 - U_n^2\right)$$
$$= -U_0^2 - U_{n+1}^2$$

ج. لدينا حسب الإجابة 'ب':
$$\forall n \in \aleph \quad 2 - \frac{1}{2^n} = -U_0^2 + U_{n+1}^2$$

و عليه:
$$\lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(-U_0^2 + U_{n+1}^2\right)$$

أي:
$$2 = -U_0^2 + \lim_{n \to +\infty} U_{n+1}^2$$

و منه:
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2 + U_0^2}$$

(لأنّ (U_n) ذات حدود موجبة).

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

1. من أجل $x \neq 0$ ، واضح أن التابع f مستمر و ذلك من أجل كل قيم a و b من $\Re$.
من أجل القيمة 0 ، لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} Log(1+x) = 0 = f(0) \\ \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} (ax+b) = b \end{cases}$$

إذن حتى يكون f مستمرا على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون $f(0) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$ أي:
$b=0$ و $a \in \Re$.

2. واضح أنه من أجل $x \neq 0$ ، التابع f قابل للاشتقاق من أجل أي a و b من $\Re$.
من أجل القيمة 0 ، حتى يكون التابع f قابلا للاشتقاق عند 0 يلزم أن يكون مستمرا عند 0 أي $b=0$. وعليه لدينا:

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{Log(1+x)}{x} = 1$$

$$\wedge$$

$$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{ax}{x} = a$$

إذن حتى يكون f قابلا للاشتقاق على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون b=0 وa=1 .

3. أ. لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & ; \quad x \geq 0 \\ \\ 1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

حتى يكون f قابلا للاشتقاق بإستمرار على $\Re$ يلزم و يكفي أن يكون f' مستمرا عند 0.
لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} 1 = 1 = f'(0) \\ \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{1+x} = 1 = f'(0) \end{cases}$$

إذن f' مستمر عند 0 و منه f قابل للإشتقاق بإستمرار على $\Re$.

ب.

- لدينا: $\forall x \in \Re \quad h'(x) = \frac{-1}{Log 2} f'(x) - \frac{1}{1+x^2} < 0$

لأنّ $\frac{-1}{Log2} f'(x) < 0$ و $-\frac{1}{1+x^2} < 0$ ، و عليه فإنّ h متناقص تماما على $\Re$.

• لدينا: $h(0)=\frac{-1}{Log2}f(0)+arcctg(0)=\frac{\pi}{2}>0$

$$h(1)=\frac{-1}{Log2}f(1)+arcctg(1)=-1+\frac{\pi}{4}<0$$

بما أنّ h مستمر على $[0,1]$ و $h(0)\times h(1)<0$ فحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد جذر للمعادلة $h(x)=0$ في المجال $[0,1]$ و بما أنّ h رتيب تماما على $[0,1]$ فإنّ هذا الجذر وحيد.

4. من أجل $x=0$ ، المتراجحة محققة لأن: $0\geq 0$.
و من أجل $x<0$ ، فإنّ:

$$f(x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\geq 0$$

و عليه فإنّ المتراجحة محققة.
و أخيرا من أجل $x>0$ ، فإنّ:

$$f(x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=Log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

نضع: $g(t)=Log(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$

التابع g مستمر و قابل للاشتقاق على المجال $[0,x]$ حيث $x>0$ ، فهو إذن يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$. و منه يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$g(x)-g(0)=g'(c)(x-0)$$

أي:

$$Log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}=\left(\frac{1}{1+c}-1+c\right)x$$

$$=\frac{c^2}{1+c}x>0$$

لأن $x>0$ و $c>0$.
و منه المتراجحة محققة.

إذن: $\forall x\in\Re \quad f(x)\geq x-\frac{x^2}{2}$

<u>التمرين الثاني</u>:

حساب النهايات المطلوبة باستخدام النشور المحدودة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin^2(x)}{x^2+x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)-(e^x-1)^2}{\sin^3(x)}$$

لدينا: $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

و منه: $\sin^3 x=x^3+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

ثم: $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad (x\to 0)$

و عليه: $x^2 \cos x = x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0)$

و لدينا: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0)$

و منه: $(e^x - 1)^2 = x^2 + x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$

إذن: $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(x) - (e^x - 1)^2}{\sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -1$$

من جهة أخرى نستنتج من النشور السابقة:

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

و

$$(1 - e^x)\sin^2 x = o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^x)\sin^2(x)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2 + x^3}$$

وعليه:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + x} = 0$$

التمرين الثالث:

1. $$I(0) = \int_{-1}^{+1} dt = 2 \quad ; \quad I(1) = \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t + c\right]_{-1}^{1} = \frac{-4}{3}$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I(n) = \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n\, dt = \int_{-1}^{+1} 1 \times (t^2 - 1)^n\, dt$$

بأخذ: $f'(t) = 1$ و $g(t) = (t^2 - 1)^n$ و $f(t) = t$ و $g'(t) = 2nt(t^2 - 1)^{n-1}$

و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int_{-1}^{+1} f'(t)\, g(t)\, dt = [f(t)\, g(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{+1} f(t)\, g'(t)\, dt \\
&= \left[t(t^2 - 1)^n\right]_{-1}^{+1} - 2n\int_{-1}^{+1} t^2\, (t^2 - 1)^{n-1}\, dt \\
&= -2n\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1 + 1)(t^2 - 1)^{n-1}\, dt \\
&= -2n\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n\, dt - 2n\int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^{n-1}\, dt \\
&= -2n\, I(n) - 2n\, I(n-1)
\end{aligned}$$

و عليه: $$\forall n \geq 1 \quad I(n) = -\frac{2n}{2n+1} I(n-1)$$

3. من العلاقة أعلاه نستنتج:

$$I(1)=-\frac{2}{3}I(0)$$

$$I(2)=-\frac{2\times2}{5}I(1)$$

$$I(3)=-\frac{2\times3}{7}I(2)$$

.

.

.

$$I(n-1)=-\frac{2(n-1)}{2n-1}I(n-2)$$

$$I(n)=-\frac{2n}{2n+1}I(n-1)$$

بضرب أطراف المساواة أعلاه طرفا في طرف نجد:

$$I(n)=(-1)^n\frac{(2)^n(1\times2\times3\cdots\cdots\times n)}{3\times5\times7\times\cdots\cdots\times(2n+1)}I(0)$$

$$=\frac{(-1)^n2^{n+1}n!}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)}$$

و هو المطلوب

التمرين الرابع:

1. لدينا:

$$y'=\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\ (y\neq0)$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{y'}{y}dx=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow Log|y|=Log|x|+c,\qquad c\in\Re$$

$$\Leftrightarrow y=kx,\quad k\in\Re^*$$

ثم التابع الصفري هو أيضا حل للمعادلة $y'=\frac{y}{x}$.

و عليه الحل العام للمعادلة $y'=\frac{y}{x}$ هو: $y:x\mapsto kx\ /\ \ k\in\Re$

2. من أجل التابع $x\mapsto x\arcsin x$ ، لدينا:

$$y'-\frac{y}{x}=\arcsin(x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

و منه التابع $x \mapsto x\arcsin x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).

3. الحل العام للمعادلة (I) هو:

$$y = y_1 + y_2$$

حيث y_1 هو الحل العام للمعادلة (I) بدون طرف حر و y_2 هو حل خاص للمعادلة (I).

إذن:

$$y = k\,x + x\,\arcsin(x)\,,\quad k \in \Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. لدينا: $f(0)=\gamma$ و

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}}(2x-1)=-1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{2x}\right)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{1+\alpha x+o(x)-1}{2x}$$

$$=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{\alpha+\frac{o(x)}{x}}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

إذن حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)=f(0)$$

أي:

$$\frac{\alpha}{2}=-1=\gamma$$

و عليه:

$$\alpha=-2 \quad \wedge \quad \gamma=-1$$

2. أ. لدينا:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}}\frac{(2x-1)-(-1)}{x}=2$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{\left(\frac{e^{-2x}-1}{2x}\right)+1}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{e^{-2x}+2x-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{1-2x+\frac{(-2x)^2}{2!}+o(x^2)+2x-1}{2x^2}$$

$$=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(1+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=1\neq 2$$

إذن التابع f لا يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. لتطبيق نظرية التزايدات المنتهية في المجال $[a,b]$، يلزم و يكفي أن يكون التابع f مستمرا على $[a,b]$ و قابلا للإ شتقاق على $]a,b[$ أي $a<b\leq 0$ أو $0\leq a<b$.

التمرين الثاني:

1. لدينا:

$$\int e^{-x}\sin(x)dx=-\int e^{-x}(\cos)'(x)dx$$

$$=-e^{-x}\cos(x)-\int e^{-x}\cos(x)dx \qquad \text{(حسب قانون المكاملة بالتجزئة)}$$

$$=-e^{-x}\cos(x)-\int e^{-x}(\sin)'(x)dx$$

$$=-e^{-x}\cos(x)-e^{-x}\sin(x)-\int e^{-x}\sin(x)dx$$

(بإستخدام المكاملة بالتجزئة مرة ثانية)

و منه:

$$\int e^{-x}\sin(x)dx=\frac{-e^{-x}}{2}(\cos x+\sin x)+\lambda \;/\; \lambda\in\Re$$

إذن من أجل أي عدد طبيعي n، لدينا:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin(x)\,dx=-\frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}(-1)^{n+1}+\frac{e^{-n\pi}}{2}(-1)^{n}$$

$$=\frac{(-1)^{n}e^{-n\pi}}{2}\left[1+e^{-\pi}\right]$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي، لدينا:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k=\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(-e^{-\pi}\right)^{k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}\right)\frac{1-\left(-e^{-\pi}\right)^{n+1}}{1+e^{-\pi}}$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}}{1+e^{-\pi}}=\frac{1}{2}$$

3. نستنتج أنّ $\sum_{n\geq 0}U_n$ متقاربة و مجموعها يساوي $\frac{1}{2}$.

التمرين الثالث:

ننشر أولا التابع $f:x\mapsto\sqrt{1+\sin^{2}(x)}$ حتى الرتبة 3 في جوار 0.

نذّكر أنّ في جوار الصفر لدينا:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right) \qquad (x\to 0)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o\left(x^3\right) \qquad (x\to 0)$$

و منه:

$$\sin^2 x=x^2+o\left(x^3\right) \qquad (x\to 0)$$

و $\sqrt{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$

(لأن $\lim_{x\to 0} \sin^2 x = 0$ و التابع $x \mapsto \sqrt{1+x}$ مستمر عند 0)

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

ننشر الآن التابع $g : x \mapsto \frac{Log(\cos x)}{\cos^2 x}$ حتى الرتبة 4 في جوار 0.

نذّكر أنّ في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \qquad (x \to 0)$$

و $Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \qquad (x \to 0)$

و عليه:

$$\begin{aligned} Log(\cos x) &= Log(1 + (-1 + \cos x)) \\ &= Log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \qquad (x \to 0) \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \qquad (x \to 0)$$

و بماأن $\lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1 \neq 0$ فإنه بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$g(x) = \frac{Log(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{x^2}{2} - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) \qquad (x \to 0)$$

<u>التمرين الرابع</u>:

1. لدينا في جوار الصفر:

$$f(x) = \frac{1}{1 + Log(1+x)} = \frac{1}{1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

$$g(x) = \frac{1 - 2x^2 + x^3}{1+x} = 1 - x - x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

و ذلك بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة لأن $\lim_{x\to 0} 1 + Log(1+x) \neq 0$ و $\lim_{x\to 0} 1 + x \neq 0$

2. نستنتج من الإجابة (1) أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = 1 - x$ مماس لمنحنيي f و g في جوار 0.

و لدينا:

$$f(x)-(1-x)=\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

$$g(x)-(1-x)=-x^2+o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

و بماأن $\frac{3}{2}x^2 \geq 0$ و $-x^2 \leq 0$ من أجل أي x في جوار 0 فإنّ منحنى f يقع فوق المماس في جوار 0 بينما يقع منحنى g تحته في نفس الجوار.

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

<u>التمرين الأول</u>:

I- 1. نستخدم البرهان بالتراجع:

من أجل $n=0$ ، المتراجحة صحيحة لأن: $\left|U_1-U_0\right|\le k^0\left|U_1-U_0\right|$.

نفرض أنّ $\left|U_{n+1}-U_n\right|\le k^n\left|U_1-U_0\right|$ و نبرهن أنّ $\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|\le k^{n+1}\left|U_1-U_0\right|$.

لدينا حسب فرض التمرين:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|\le k\left|U_{n+1}-U_n\right|$$

و باستخدام فرض التراجع نستنتج أنّ:

$$\begin{aligned}\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|&\le k\times k^n\left|U_1-U_0\right|\\&\le k^{n+1}\left|U_1-U_0\right|\end{aligned}$$

و عليه:

$$\forall n\in ℵ\quad \left|U_{n+1}-U_n\right|\le k^n\left|U_1-U_0\right|$$

2. لدينا من أجل p و q عددين طبيعيين مع $p>q$:

$$\begin{aligned}\left|U_p-U_q\right|&=\left|U_p-U_{p-1}+U_{p-1}-U_{p-2}+U_{p-2}+\cdots-U_{q+1}+U_{q+1}-U_q\right|\\&\le\left|U_p-U_{p-1}\right|+\left|U_{p-1}-U_{p-2}\right|+\cdots+\left|U_{q+1}-U_q\right|\\&\le k^{p-1}\left|U_1-U_0\right|+k^{p-2}\left|U_1-U_0\right|+\cdots+k^q\left|U_1-U_0\right|\\&\le\left(k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q\right)\left|U_1-U_0\right|\end{aligned}$$

لكن:

$$k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q=k^q\left(\frac{1-k^{p-q}}{1-q}\right)\le\frac{k^q}{1-k}$$

لأن: $0<1-k^{p-q}<1$ (لأن k من $]0,1[$)

و عليه:

$$\left|U_p-U_q\right|\le k^q\,\frac{1-k^{p-q}}{1-k}\left|U_1-U_0\right|\le\frac{k^q\left|U_1-U_0\right|}{1-k}$$

3. استنتاج أنّ (U_n) كوشية:

لدينا مما سبق، من أجل p و q طبيعيين مع $p\ge q$:

$$0\le\left|U_p-U_q\right|\le\frac{k^q\left|U_1-U_0\right|}{1-k}$$

بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$0 \le \lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}} |U_p - U_q| \le \frac{|U_1 - U_0|}{1-k} \lim_{q\to+\infty} k^q$$

و بما أنّ: $\lim_{q\to+\infty} k^q = 0$ (لأنّ $0 < k < 1$) فإن: $\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}} |U_p - U_q| = 0$

و هو ما يجعل (U_n) متتالية كوشية.

4. (U_n) متقاربة لأنّها كوشية و حدودها حقيقية.

II- ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، لدينا:

$$|U_{n+1} - U_n| = \left|\frac{1}{2}(\sin U_n - \sin U_{n-1})\right|$$

$$= \frac{1}{2}|\sin U_n - \sin U_{n-1}|$$

$$\le \frac{1}{2}|U_n - U_{n-1}|$$

بأخذ $k = \frac{1}{2}$ و باستخدام الجزء (I)، نستنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة.

<u>التمرين الثاني</u>:

ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، لدينا:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} U_k - \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=n+1}^{2n} U_k$$

1. أ.

$$= U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{2n}$$

ب. لدينا:

$$S_{2n} - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{2n} \ge U_{2n} + U_{2n} + \cdots + U_{2n}$$

(لأنّ (U_n) متناقصة فرضا).

و عليه:

$$S_{2n} - S_n \ge nU_{2n} \ge nU_{2n+1} \ge 0$$

(لأنّ (U_n) متتالية موجبة و متناقصة).

إذن:

$$\forall n \in \aleph^* \quad 0 \le nU_{2n+1} \le nU_{2n} \le S_{2n} - S_n$$

ج. بما أنّ $\sum_{n\ge1} U_n$ متقاربة فإنّ (S_n) متقاربة و (U_n) متقاربة نحو 0 و عليه:

$$\left(\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0\right) \wedge \left(\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = 0\right)$$

ثم باستخدام الجواب 'ب'، نستنتج من الحصر أن:

$$\left[\lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n}=0\right]\ \wedge\ \left[\lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n+1}=0\right]$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)U_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}(2n)U_{2n+1}+\lim_{n\to+\infty}U_{2n+1}=0$$

د. بما أنّ المتتاليتين المستخرجتين $\left(2nU_n\right)$ و $\left((2n+1)U_{n+1}\right)$ متقاربتين نحو نفس النهاية وهي 0، فإنّ المتتالية $\left(nU_n\right)$ متقاربة نحو 0.

2. أ. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}V_k&=\sum_{k=1}^{n}k\left(U_k-U_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}kU_k-\sum_{k=1}^{n}kU_{k+1}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}kU_k-\sum_{k=1}^{n}(k+1)U_{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}U_{k+1}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}kU_k-\sum_{k=2}^{n+1}kU_k\right)+\sum_{k=2}^{n+1}U_k\\&=\left(U_1-(n+1)U_{n+1}\right)+\sum_{k=2}^{n+1}U_k\\&=-(n+1)U_n+\sum_{k=1}^{n+1}U_k\end{aligned}$$

(لاحظ أنّه يمكن استخدام البرهان بالتراجع).

ب. نفرض أنّ $\sum_{n\geq1}U_n$ متقاربة و نبرهن تقارب $\sum_{n\geq1}V_n$.

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}V_k&=\lim_{n\to+\infty}\left[-(n+1)U_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}U_k\right]\\&=-\lim_{n\to+\infty}(n+1)U_{n+1}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}U_k\\&=0+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}U_k\end{aligned}$$

بماأنّ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}U_k$ عدد حقيقي (لأن $\sum_{n\geq1}U_n$ متقاربة) فإن السلسلة $\sum_{n\geq1}V_n$ متقاربة.

التمرين الثالث:

- ننشر أولا التابع f حتى الرتبة 2 في جوار 0 حيث:

$$f(x)=\frac{Log\left(\cos^2(x)\right)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$$

لدينا: $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\sin^2 x}\neq 0$

ثم في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

و منه:

$$\cos^2 x = 1-x^2+o\left(x^2\right) \qquad (x\to 0)$$

وعليه:

$$Log\left(\cos^2 x\right)=Log\left(1-x^2+o\left(x^2\right)\right) \qquad (x\to 0)$$

و بماأن $-x^2+o\left(x^2\right)$ في جوار 0 من أجل x في جوار 0 و $x\mapsto Log(1+x)$ مستمر عند 0
و لدينا $Log(1+x)=x+o(x)$ في جوار 0 فإنّ:

$$Log\left(\cos^2 x\right)=Log\left(1-x^2+o\left(x^2\right)\right)=-x^2+o\left(x^2\right) \qquad (x\to 0)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\sin x = x+o\left(x^2\right) \qquad (x\to 0)$$

ومنه:

$$\sin^2 x = x^2+o\left(x^2\right) \qquad (x\to 0)$$

و عليه:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}=\sqrt{1+x^2+o\left(x^2\right)} \qquad (x\to 0)$$

و بماأنّ $x^2+o\left(x^2\right)$ في جوار 0 من أجل x في جوار 0 و $x\mapsto\sqrt{1+x}$ مستمر عند 0
و لدينا $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+o(x)$ في جوار 0 فإنّ:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}=\sqrt{1+x^2+o\left(x^2\right)}=1+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right) \qquad (x\to 0)$$

إذن بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$f(x)=-x^2+o\left(x^2\right) \qquad (x\to 0)$$

- ننشر الآن التابع $g: x\mapsto e^{x\log\sqrt{x}}$ حتى الرتبة 2 في جوار 1.

لدينا:

$$e^{x Log\sqrt{x}}=e^{\frac{1}{2}x\, Log\, x}$$

نضع: $x = t + 1$ مع t في جوار الصفر. عندئذ لدينا:

$$g(x)=e^{\frac{1+t}{2}Log(1+t)}$$

ثم: $$Log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right) \qquad (x\to 0)$$

و منه:

$$\frac{1+t}{2}Log(1+t)=\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o\left(t^2\right) \qquad (t\to 0)$$

و بماأنّ $\lim_{t\to 0}\frac{1+t}{2}Log(1+t)=0$ و $x\mapsto e^t$ مستمر عند 0 و

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right) \quad (t\to 0)$$

فإنّ:

$$g(1+t)=e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)}=1+\frac{t}{2}+\frac{3}{8}t^2+o(t^2)\qquad (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$g(x)=1+\frac{x-1}{2}+\frac{3(x-1)^2}{8}+o\left((x-1)^2\right)\qquad (x\to 1)$$

- يبقى أن ننشر التابع $h:x\mapsto\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ حتى الرتبة 2 في جوار $+\infty$.

لنضع: $t=\frac{1}{x}$. لاحظ أنّه عندما يكون المتغير x في جوار $+\infty$، يكون المتغير t في جوار 0 مع t موجب.

و عليه:

$$h(x)=h\left(\frac{1}{t}\right)=\sqrt{\frac{1}{1+t}}=\sqrt{1-t+t^2+o(t^2)}\qquad (t\to 0)$$

و بماأنّ $\lim_{t\to 0}-t+t^2+o(t^2)=0$ و $\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)$ في جوار 0 فإنّ:

$$h\left(\frac{1}{t}\right)=1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+o(t^2)\qquad (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$h(x)=1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\qquad (x\to +\infty)$$

<u>التمرين الرابع</u>:

1. لدينا:

$$f(0)=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=1-e^{-1}$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$f(n+1)=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\int_0^1 h'(x)\,g(x)dx$$

مع $h'(x)=e^{-x}$ و $g(x)=x^{n+1}$.

و عليه بإستخدام المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}f(n+1)&=\left[h(x)g(x)\right]_0^1-\int_0^1 h(x)g'(x)dx\\&=-e^{-1}+(n+1)\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx\\&=-e^{-1}+(n+1)f(n)\end{aligned}$$

3. نستخدم البرهان بالتراجع:

لدينا: $f(0)=0!e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}\right)\right]=1-e^{-1}$ محققة.

نفرض صحة الخاصية من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.
لدينا من الجواب السابق:

$$f(n+1)=-e^{-1}+(n+1)f(n)$$

$$=-e^{-1}+(n+1)n!e^{-1}\left[e-\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]\right] \quad \text{(حسب فرض التراجع)}$$

$$=(n+1)!e^{-1}\left[e-\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right]\right]$$

و عليه:

$$\forall n\in \aleph \quad f(n)=n!e^{-1}\left[e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$$

4. حسب دستور 'ماك لوران' مع باقي 'لاغرانج' للتابع $x\mapsto e^x$ من الرتبة n لدينا:

$$\forall x>0,\exists c\in\,]0,x[\;/\quad e^x=1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

و منه:

$$e=\left[1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]+\frac{e^c}{(n+1)!}$$

مع $0<c<1$

أو:

$$e^1-\left[1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]=\frac{e^c}{(n+1)!}$$

و عليه:

$$\forall n\in \aleph \quad f(n)=e^{-1}n!\frac{e^c}{(n+1)!}$$

و بما أنّ $0<c<1$، فإن:

$$\forall n\in \aleph \quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)=e^{-1}n!\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{e(n+1)}$$

(**لأنّ** $e<3$)

5. لدينا مما سبق:

$$\forall n\in \aleph \quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)<\frac{3}{e(n+1)}$$

و بالمرور إلى النهايات، نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e(n+1)}\le\lim_{n\to+\infty}f(n)\le\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{e(n+1)}$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}f(n)=0$$

6. بماأنّ:

$$\forall n\in \aleph \quad \frac{1}{e(n+1)}<f(n)$$

و

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n+1}=+\infty$$

فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1} f(n)$ متباعدة حسب مقياس المقارنة.

ثم، لدينا: $\forall n \in \aleph \quad \frac{f(n)}{n} < \frac{3}{en(n+1)} < \frac{3}{en^2}$

و $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$

فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n}$ متقاربة حسب مقياس المقارنة.

إمتحانات

2001-2000

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

$$A=\left\{\frac{n-1}{n+1},\quad n\in \aleph\right\}$$

1. لدينا تعريفا:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=1 \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\aleph \ / \ \forall n\in\aleph, n\geq n_0 \Rightarrow |U_n-1|\leq\varepsilon\right)$$

ليكن ε موجب تماما.
لدينا من أجل $0\leq n$:

$$|U_n-1|=\frac{2}{n+1}$$

يكون لدينا $\frac{2}{n+1}<\varepsilon$ إذا كان $n>\frac{2}{\varepsilon}-1$ و بالتالي إذا أخذنا $n_0=\left[\left|\frac{2}{\varepsilon}-1\right|\right]+1$ يتحقق المطلوب.

2. بما أنّ المتتالية (U_n) متقاربة فهي محدودة و عليه A محدودة في $\Re$.
3. لدينا:

$$\forall n\in\aleph \quad U_{n+1}-U_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}>0$$

و عليه (U_n) متزايدة.
و بما أنّ المتتالية (U_n) محدودة، فإن:

$$\sup A=\sup_{n\in\aleph} U_n=\lim_{n\to+\infty} U_n=1$$

و

$$\inf A=\inf_{n\in\aleph} U_n=U_0=-1$$

4. بما أنّ $1\notin A$ (لأنّ (U_n) رتيبة تماما) فإن $\max A$ غير موجود.
$\min A=-1$ (لأنّ $-1=U_0\in A$).

التمرين الثاني:

1. ليكن n من $\aleph-\{0,1\}$ كيفي، لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[Log(k+1)-Log(k)\right]=\sum_{k=1}^{n-1}Log(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}Log(k)$$

$$=(Log2+Log3+\cdots+Logn)-(Log1+Log2+\cdots+Log(n-1))$$

$$=Logn$$

2. لدينا فرضا:

$$\frac{1}{k+1}\leq Log(k+1)-Log(k)\leq\frac{1}{k},\quad \forall k\geq1$$

و بالتالي:

$$\forall n\geq 2\quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\left(Log(k+1)-Log(k)\right)\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

أي:

$$\forall n\geq 2\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq Logn\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

3. المتراجحة صحيحة عندما نأخذ $n=1$، لأنّ:

$$\frac{1}{1}\leq U_1=1-Log1\leq 1$$

و من أجل $n\geq 2$ لدينا:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq Logn\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

أي:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Logn\leq 0\\ \wedge\\ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-Logn\geq 0\end{cases}$$

و عليه:

$$\begin{cases}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Logn\leq 1\\ \wedge\\ 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-Logn\geq \frac{1}{n}\end{cases}$$

و هو المطلوب.

4. ليكن n من $\aleph$ كيفي، لدينا:

$$U_{n+1}-U_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-Log(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-Logn\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}-Log(n+1)+Logn\leq 0$$

بفضل فرض السؤال 2.
و عليه المتتالية (U_n) متناقصة.

5. كما يظهر من النتيجتين 3 و 4 أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 0 و عليه، فإنّ (U_n) متقاربة كذلك.
بما أنّ:

$$\forall n\in\aleph\quad \frac{1}{n}\leq U_n\leq 1$$

و بالمرور إلى النهاية، فإنّ: $0\leq\lim_{n\to+\infty}U_n\leq 1$

و عليه: $\lim_{n\to+\infty}U_n\in[0,1]$

التمرين الثالث:

من أجل a و b موجبين تماما، نضع:

$$U_n = \frac{a^n}{n} \quad ; \quad V_n = \left(b + \frac{1}{n}\right)^n \quad / \ n \in \aleph^*$$

(لاحظ أن (U_n) و (V_n) ذاتا حدود موجبة)

لدينا: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = a \in \Re_+^*$

$$\left.\begin{array}{l} a < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} U_n \ \ CV \\ a > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} U_n \ \ DV \end{array}\right\}$$ (حسب مقياس دالمبار)

و في حالة a=1 فإنّ $U_n = \frac{1}{n}$ و عليه $\sum\limits_{n \geq 1} U_n$ متباعدة (سلسلة ريمان مع α=1).

لدينا من جهة أخرى: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{V_n} = b \in \Re_+^*$

$$\left.\begin{array}{l} b < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} V_n \ \ CV \\ b > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n \geq 1} V_n \ \ DV \end{array}\right\}$$ (حسب مقياس كوشي)

و في حالة b=1 فإنّ $V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$ و عليه $\sum\limits_{n \geq 1} V_n$ متباعدة (و ذلك حسب الشرط اللازم لتقارب سلسلة).

بما أنّ السلسلتين ذوات حدود موجبة فإنه في حالة تباعدهما تكون نهاية متتالية المجاميع الجزئية لكل منهما $+\infty$ و عليه نستنتج:

$$(a < 1 \wedge b < 1) \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} U_n + \sum_{n \geq 1} V_n \quad CV\right)$$

$$(a < 1 \wedge b \geq 1) \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} U_n + \sum_{n \geq 1} V_n \quad DV\right)$$

$$(a \geq 1 \wedge b < 1) \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} U_n + \sum_{n \geq 1} V_n \quad DV\right)$$

$$(a \geq 1 \wedge b \geq 1) \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} U_n + \sum_{n \geq 1} V_n \quad DV\right)$$

ملاحظة: نرمز بـ CV لسلسلة متقاربة و بـ DV لسلسلة متباعدة.

التمرين الرابع:

1. يمكن التأكد بكل سهولة أنّ المتتالية (U_n) ذات حدود موجبة و ذلك باستخدام البرهان بالتراجع.
2. نستعين بالبرهان بالتراجع.

من أجل $n = 0$، لدينا:

$$|U_1 - U_0| \leq 1 \times |U_1 - U_0|$$

نفرض صحة الخاصية من أجل الرتبة n أي:

$$\left|U_{n+1}-U_n\right| \le \frac{1}{4^n}\left|U_1-U_0\right|$$

و نبرهن صحتها من أجل الرتبة n أي نبرهن:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right| \le \frac{1}{4^{n+1}}\left|U_1-U_0\right|$$

لدينا:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right| = \left|\frac{1}{2+U_{n+1}}-\frac{1}{2+U_n}\right| \qquad = \frac{\left|U_{n+1}-U_n\right|}{\left|(2+U_{n+1})(2+U_n)\right|}$$

$$\le \frac{1}{4}\left|U_{n+1}-U_n\right|$$

و باستخدام فرض التراجع، نستنتج أنّ:

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right| \le \frac{1}{4^{n+1}}\left|U_1-U_0\right|$$

و عليه المتراجحة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

3. حالة خاصة من التمرين الأول (الإمتحان الإستدراكي 2000/1999) السؤال رقم 2 مع $k=\frac{1}{4}$.

4. لدينا مما سبق: $0 \le \left|U_p-U_q\right| \le \frac{1}{4^q}\left|U_1-U_0\right|$

بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$0 \le \lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p-U_q\right| \le \left|U_1-U_0\right| \lim_{q\to+\infty}\frac{1}{4^q}$$

و بما أنّ $\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{4^q}=0$ فإنّ $\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p-U_q\right|=0$ و هو ما يجعل المتتالية (U_n) كوشية.

5. (U_n) متقاربة لأنها كوشية و نهايتها حل للمعادلة $\ell=\frac{1}{2+\ell}$ أي $\ell=-1+\sqrt{2}$. و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=-1+\sqrt{2}$$

6. بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}U_n=-1+\sqrt{2}\neq 0$ فإنّ السلسلة $\sum_{n\ge 0}U_n$ متباعدة.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- 1. نضع $t = x + 1$ مع t في جوار 0. نذكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\mathrm{sh}(t) = t + o(t^2)\ ;\ \mathrm{ch}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

بتعويض t بـ $x+1$، نجد:

$$\mathrm{sh}(1+x) = 1 + x + o\left((1+x)^2\right) \qquad (x \to -1)$$

$$\mathrm{ch}(1+x) = 1 + \frac{(1+x)^2}{2} + o\left((1+x)^2\right) \qquad (x \to -1)$$

.2

- $$\lim_{x\to -1} \frac{\mathrm{sh}(1+\mathrm{x}) + \frac{1}{2}(x^2-1)}{(x^2-1)(x+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sh}(t) + \frac{1}{2}(t^2 - 2\,t)}{(t^2-2\,t)t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{-2t^2 + o(t^2)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}}{-2 + \frac{o(t^2)}{t^2}} = -\frac{1}{4}$$

- $$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)\,\mathrm{ch}(1+\mathrm{x}) - 2x\ \mathrm{sh}(1+x)}{(x^2-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2-2\,t)\,\mathrm{ch}(t) - 2\,(t-1)\,\mathrm{sh}(t)}{(t^2-2t)^2}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 + o(t^2)}{+4t^2 + o(t^2)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-1 + \frac{o(t^2)}{t^2}}{+4 + \frac{o(t^2)}{t^2}} = -\frac{1}{4}$$

- $$\lim_{x\to -1} \frac{\mathrm{sh}(1+x)}{x^2-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t^2-2t} = \lim_{t\to 0} \frac{t + o(t^2)}{t^2-2t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{o(t^2)}{t}}{-2+t} = -\frac{1}{2}$$

II- أ. لدينا تعريفا:

f مستمرة عند -1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

ثم: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{\text{sh}(1+x)}{x^2-1} = -\dfrac{1}{2}$ (حسب 2)

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{8}(x^2-5) = -\frac{1}{2} = f(-1)$$

و عليه: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)$

و منه f مستمر عند -1.

ب. لدينا تعريفا:

f يقبل الاشتقاق عند -1 $\Leftrightarrow \exists l \in \Re / \quad \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-1} = l$

ثم: $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{\dfrac{\text{sh}(1+x)}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{\text{sh}(1+x)+\dfrac{1}{2}(x^2-1)}{(x^2-1)(x+1)} = -\frac{1}{4} \text{ (حسب 2)}$$

و $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\dfrac{1}{8}(x^2-5)+\dfrac{1}{2}}{(x+1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x^2-1}{8(x+1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{8}(x-1) = -\frac{1}{4}$$

إذن: $$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\frac{1}{4}$$

أي f قابل للاشتقاق عند -1.

ج. لدينا تعريفا:

f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\Re$ $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ يقبلل الإشتقاق على } \Re \\ \text{و} \\ f' \text{ مستمر على } \Re \end{array} \right.$

o دراسة قابلية إشتقاق f على $\Re$:

واضح أن التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re/\{-1\}$ و بماأنه يقبل الإشتقاق عند -1 حسب ما سبق فإن f يقبل الإشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-1)\,\mathrm{ch}(1+x)-2x\,\mathrm{sh}(1+x)}{(x^2-1)^2} & ; \quad x<-1\\[2ex] \dfrac{1}{4}x & ; \quad x\geq -1\end{cases}$$

- o دراسة استمرارية f' على $\Re$:
  - $x<-1$: f' مستمر (نسبة تابعين مستمرين)
  - $x>-1$: f' مستمر (كثير حدود من الدرجة الأولى)
  - القيمة -1: لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{(x^2-1)\,\mathrm{ch}(1+x)-2x\,\mathrm{sh}(1+x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{1}{4}$$ (حسب 2)

و
$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{1}{4}x=-\frac{1}{4}=f'(-1)$$

و منه:
$$\lim_{x\to -1} f'(x)=-\frac{1}{4}=f'(-1)$$

أي f' مستمر عند -1.

إذن f' مستمر على $\Re$.

<u>التمرين الثاني</u>:

1. $$I(0)=\int_{-\infty}^{0}e^t\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^t\,dt=\lim_{x\to-\infty}\left[e^t\right]_x^0=\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^x\right)=1$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I(n)=\int_{-\infty}^{0}t^n e^t\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t^n e^t\,dt$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f'(t)g(t)\,dt$$

حيث: $g(t)=t^n$ ، $f'(t)=e^t$ و $f(t)=e^t$.

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\left[f(t)g(t)\right]_x^0-\int_x^0 f(t)g'(t)\,dt\right)$$ (باستعمال المكاملة بالتجزئة)

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\left[t^n e^t\right]_x^0-n\int_x^0 t^{n-1}e^t\,dt\right)$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(x^n e^x\right)}_{=0}-n\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t^{n-1}e^t\,dt}_{I(n-1)}$$

إذن:
$$\forall n\geq 1\quad I(n)=-nI(n-1)$$

3. لنعوض كل n بـ $n-1$ ، $n-2$ ، ...،1، 0 على التوالي فنجد:

$$I(n) = -n\,I(n-1)$$
$$I(n-1) = -(n-1)\,I(n-2)$$
$$I(n-2) = -(n-2)\,I(n-3)$$
$$\vdots$$
$$I(1) = -1\,I(0)$$
$$I(0) = 1$$

و بضرب أطراف المساواة طرفا في طرف و بالإختزال نجد:

$$I(n) = (-1)^n\, n!\, I(0)$$

إذن: $\forall n \in \aleph \quad I(n) = (-1)^n\, n!$

التمرين الثالث:

.1

- $f(x) = \dfrac{x - Log(1+x)}{\cos(x)}$

لدينا: $x - Log(1+x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$$

إذن بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة لـ $\dfrac{x^2}{2}$ على $1-\dfrac{x^2}{2}$ و مع إهمال جميع الحدود التي رتبها أكبر تماما من 2، نجد:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- $g(x) = Log(2 + \sin(2x))$

أو بعبارة أخرى: $g(x) = Log2 + Log\left(1 + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) \;/\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 0$

لدينا:

$$\frac{\sin 2x}{2} = x + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

و عليه:

$$Log\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

إذن:

$$g(x) = Log2 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

2. نستنتج مما سبق أنّ لمنحنيي f و g مماسان عند 0.
- معادلة المماس بالنسبة لمنحنى f هي: $y = 0$.

و بماأن $\frac{1}{2}x^2 > 0$ في جوار 0 فإن منحنى f يقع فوق المماس في جوار 0.

- معادلة المماس بالنسبة لمنحنى g هي: $y = Log\,2 + x$.

و بماأن $-\frac{1}{2}x^2 < 0$ في جوار 0 فإن منحنى g يقع تحت المماس في جوار 0.

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(\alpha x)}{x^2} & ; \quad x<0\\ Log(1+x) & ; \quad x\geq 0\end{cases}$$

1. لدينا تعريفا: $\left(f \text{ مستمر عند } 0 \right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)= f(0)$

ثم:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} Log(1+x)=0= f(0)$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{-x+\sin(\alpha x)}{x^2}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{-x+\alpha x+o(x^2)}{x^2}$$
$$=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\left(\frac{\alpha-1}{x}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)$$

إذن حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\dfrac{\alpha-1}{x}=0$ أي $\alpha=1$.

2. لدينا تعريفا: $\left(f \text{ يقبل الاشتقاق عند } 0 \right) \Leftrightarrow \exists\, l\in\Re \,/\, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=l$

من أجل $\alpha\neq 1$، f غير مستمر عند 0. و عليه f غير قابل للاشتقاق عند 0.

و من أجل $\alpha=1$، لدينا

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{Log(1+x)}{x}=1$$

و

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{-x+\sin x}{x^3}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{-x+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}$$
$$=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

إذن f غير قابل للاشتقاق عند 0.

3. أ. ليكن x من $\Re^+$. لدينا:

$$h'(x)=\frac{\sqrt{3}}{1+x}+\frac{\pi}{(x+2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)>0$$

لأنّ: $0<\dfrac{\pi}{x+2}<\dfrac{\pi}{2}$ أي $\cos\left(\dfrac{\pi}{x+2}\right)\geq 0$.

و عليه h متزايدة تماما على $\Re^+$.

ب. لدينا: $\sqrt{3}\log 2-\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ $h(1)=$ و $h(0)=-1$

إذن: $h(0)\,h(1)<0$

ثم واضح أن h مستمر على $[0,1]$ و عليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد c من $]0,1[$ حل للمعادلة $h(x)=0$، و بما أنّ h رتيبة تماما فإنّ هذا الحل وحيد.

ج. من أجل $x=0$ ، واضح أنّ المتراجحة محققة لأن $0\leq 0$.

و من أجل $x>0$ ، التابع h مستمر و قابل للاشتقاق على المجال $[0,x]$ و عليه حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من $]0,x[$ يحقق:

$$h(x)-h(0)=h'(c)(x-0)$$

و بالتعويض نجد:

$$h(x)+1=\left(\frac{\sqrt{3}}{1+c}+\frac{\pi}{(c+2)^2}\cos\frac{\pi}{c+2}\right)x$$

و عليه:

$$|h(x)+1|=\left(\frac{\sqrt{3}}{1+c}+\frac{\pi}{(c+2)^2}\cos\frac{\pi}{c+2}\right)x\leq\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)x$$

لأن: $0\leq\cos\frac{\pi}{c+2}\leq 1$ ، $(c+2)^2\geq 4$ و $1+c>1$ (لأن $c>0$).

إذن: $\forall x\in\Re^+\quad |h(x)+1|\leq\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}\right)x$

التمرين الثاني:

1. $(n=4)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)-\frac{x^2}{2}}{\sin^2(x)-x^2}$

نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

ومنه: $\sin^2(x)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\quad (x\to 0)$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)-\frac{x^2}{2}}{\sin^2(x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4!}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{1}{8}$$

2. $(n=3)$ $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - Log(1+x)-\frac{3}{2}x^2}{\sin(x)-x\cos(2x)}$$

إذا تذكرنا كذلك أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - Log(1+x)-\frac{3}{2}x^2}{\sin(x)-x\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{11}{6}x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{11}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{1}{11}$$

<u>التمرين الثالث</u>:

$$\forall n\in \aleph^* \quad I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

.1

$$I(1)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)}dx \quad =\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{1}{(x^2+1)}dx$$

$$=\lim_{a\to+\infty}[\text{arctg}(x)]_0^a=\frac{\pi}{2}$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I(n)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

ثم: $$\int_0^{a}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx=\int_0^{a}f'(x)\,g(x)dx$$

حيث: $g(x)=(x^2+1)^{-n}$ و $f'(x)=1$.

و عليه باستخدام المكاملة بالتجزئة، لدينا:

$$\int_0^a \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx = \left[f(x)g(x)\right]_0^a - \int_0^a f(x)\, g'(x)dx$$

$$= \left[x \times \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}\right]_0^a + 2n\int_0^a \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{a}{\left(a^2+1\right)^n} + 2n\int_0^a \frac{x^2+1-1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{a}{\left(a^2+1\right)^n} + 2n\int_0^a \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx - 2n\int_0^a \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx$$

نجعل a يؤول نحو $+\infty$، نجد:

$$I(n) = 2n\, I(n) - 2n\, I(n+1)$$

و عليه:

$$I(n) = \frac{2n}{2n-1} I(n+1)$$

(لاحظ أنّ $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{a}{\left(a^2+1\right)^n} = 0$)

3. لدينا مما سبق:

$$\forall n \in ℕ^* \quad I(n+1) = \frac{2n-1}{2n} I(n)$$

و منه نستنتج:

$$I(2) = \frac{1}{2} I(1)$$

$$I(3) = \frac{3}{4} I(2)$$

$$I(4) = \frac{5}{6} I(3)$$

.

.

.

$$I(n+1) = \frac{2n-1}{2n} I(n)$$

و عليه بضرب أطراف المساواة طرفا في طرف نجد :

$$\forall n \in ℕ^* \quad I(n+1) = \frac{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)} I(1) = \frac{1\times3\times5\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)} \times \frac{\pi}{2}$$

التمرين الرابع:

1. نحلّ المعادلة التفاضلية $x\,y'+2\,y=0$.

لدينا من أجل $y\neq 0$ و $x\neq 0$:

$$xy'+2y=0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{2}{x} \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow Log|x|=-2\,Log|x|+\lambda\ /\quad \lambda\in\Re$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{c}{x^2}\ /\quad (c\in\Re)$$

لأن التابع الصفري هو أيضا حل المعادلة التفاضلية $x\,y'+2\,y=0$.

2. من أجل: $y=\frac{x-\operatorname{arctg}(x)}{\mathrm{x}^2}$

لدينا:

$$xy'+2y=x\left(\frac{-x-\frac{x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\right)+\frac{2x-2\operatorname{arctg}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x-\frac{x}{1+x^2}}{x^2}=\frac{x}{1+x^2}$$

و عليه التابع $x\mapsto\frac{x-\operatorname{arctg}(x)}{\mathrm{x}^2}$ حل خاص للمعادلة (I).

3. نستنتج أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية (I) هو التابع المعرف بـ:

$$y=y_1+y_2$$

حيث y_1 هو الحل العام للمعادلة (I) بدون الطرف الحر و y_2 هو الحل الخاص للمعادلة (I) وعليه نكتب:

$$y=\frac{c}{x^2}+\frac{x-\operatorname{arctg}(x)}{\mathrm{x}^2}\quad /\quad c\in\Re$$

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage**

التمرين الأول:

I- 1. ليكن p و q عددين طبيعيين بحيث $p \geq q$.
واضح صحة المتراجحة من أجل $p = q$.
من أجل $p > q$ ، لدينا:

$$\left|U_p - U_q\right| = \left|U_p - U_{p-1} + U_{p-1} - U_{p-2} + U_{p-2} + \cdots + \left(-U_{q+1}\right) + U_{q+1} - U_q\right|$$

$$\leq \left|U_p - U_{p-1}\right| + \left|U_{p-1} - U_{p-2}\right| + \cdots\cdots + \left|U_{q+1} - U_q\right|$$

$$\leq |k|^{p-1} + |k|^{p-2} + \cdots\cdots + |k|^q$$

$$\leq |k|^q \left(|k|^{p-1-q} + |k|^{p-2-q} \cdots + |k| + 1\right)$$

لكن:

$$1 + |k| + \cdots + |k|^{p-1-q} + 1 = \frac{1 - |k|^{p-q}}{1 - |k|}$$

إذن:

$$\left|U_p - U_q\right| \leq |k|^q \frac{1 - |k|^{p-q}}{1 - |k|} \leq \frac{|k|^q}{1 - |k|}$$

(لاحظ أنّ $1 - |k|^{p-q} < 1$ و $1 - |k| > 0$).

2. لدينا من أجل أي p و q عددين طبيعيين مع $p \geq q$:

$$0 \leq \left|U_p - U_q\right| \leq \frac{|k|^q}{1 - |k|}$$

ثمّ $\lim\limits_{q \to +\infty} \frac{|k|^q}{1 - |k|} = 0$ لأنّ $|k| < 1$، و منه:

$$\lim_{\substack{p \to +\infty \\ q \to +\infty}} \left|U_p - U_q\right| = 0$$

إذن (U_n) متتالية كوشية.

II- 1. لدينا:

$$\forall n \in \aleph^* \quad U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + U_{n-1}}{2} - U_n = \frac{U_n + U_{n-1} - 2U_n}{2}$$
$$= -\frac{U_n - U_{n-1}}{2}$$

1. لدينا من الإجابة عن السؤال الأول:

$$U_{n+1}-U_n=-\frac{U_n-U_{n-1}}{2}=-\frac{1}{2}(U_n-U_{n-1})$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(U_{n-1}-U_{n-2})$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3(U_{n-2}-U_{n-3})$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(U_1-U_0)$$

إذن:

$$\forall n\in \aleph^* \quad U_{n+1}-U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(U_1-U_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

2. بما أنّ $]-1,1[\ni -\frac{1}{2}$ و $U_{n+1}-U_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل أي n من $\aleph^*$، فإنّ المتتالية (U_n) متتالية كوشية و ذلك حسب الجزء (I)، و عليه (U_n) متقاربة لأن حدودها حقيقية.

<u>التمرين الثاني</u>:

1. لدينا:

$$\forall n\in \aleph \quad S_{2n+1}-S_{2n}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$
$$=(-1)^{2n+1}a_{2n+1}=-a_{2n+1}$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$S_{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$
$$=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{2n}-a_{2n+1}$$
$$=a_0+(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})-a_{2n+1}$$

و بما أنّ (a_n) موجبة و متناقصة فإنّ:

$$S_{2n+1}-a_0=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})-a_{2n+1}\le 0$$

إذن:

$$\forall n\in \aleph \quad S_{2n+1}\le a_0$$

3. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}=S_{2n+3}-S_{2n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$

$$=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k+(-1)^{2n+2}a_{2n+2}+(-1)^{2n+3}a_{2n+3}-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$

$$=a_{2n+2}-a_{2n+3}\geq 0$$

لأنّ (a_n) متناقصة، و منه المتتالية (S_{2n+1}) متزايدة.

و بما أنّ (S_{2n+1}) محدودة من الأعلى (حسب 2.)، فإنّ (S_{2n+1}) متقاربة نحو عدد حقيقي l.

من جهة أخرى لدينا:

$$S_{2n}=S_{2n+1}+a_{2n+1}$$

و بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}+\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=l+0=l$$

إذن (S_{2n}) متقاربة.

4. بما أنّ المتتاليتين (S_{2n}) و (S_{2n+1}) متقاربتان نحو نفس النهاية، فإنّ المتتالية (S_n) متقاربة.

5. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ متقاربة لأنّ متتالية مجاميعها الجزئية (S_n) متقاربة.

التمرين الثالث:

- ننشر التابع: $f:x\mapsto Log(e+\sin(e.x))$ حتى الرتبة 2 في جوار 0.

لدينا:

$$f(x)=Log(e+\sin(e.x))=1+Log\left(1+\frac{\sin(e.x)}{e}\right)$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e.x)}{e}=0$$

نذّكر أنّه في جوار الصفر، لدينا:

$$\sin x=x+o(x^2)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

ومنه:

$$\frac{\sin(e.x)}{e}=x+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

وعليه باستخدام قاعدة التركيب، نجد:

$$Log\left(1+\frac{\sin(e.x)}{e}\right)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

أي: $f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad (x\to 0)$

- ننشر الآن التابع $g: x\mapsto \mathrm{sh}(1-\cos(x))$ من الرتبة 2 في جوار 0 .

لدينا $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$ و التابع sh مستمر عند 0، ثم

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

و
$$\mathrm{sh}(x)=x+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

و منه باستخدام قاعدة التركيب، نجد:

$$\mathrm{sh}(1-\cos(x))=\mathrm{sh}\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$
$$=\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

- بالنسبة لنشر التابع h أنظر حل الإمتحان الاستدراكي لسنة 2000/1999 (التمرين 3).

التمرين الرابع:

1. حساب I_0 و I_1:

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx=[-\cos x]_0^{\pi/2}=1$$

2. ليكن n من $\aleph/\{0,1\}$. لدينا:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}[\sin(x)]^n dx=\int_0^{\pi/2}\sin(x)\times[\sin(x)]^{n-1}dx=\int_0^{\pi/2}f'(x)g(x)dx$$

حيث: $f'(x)=\sin(x)$ و $g(x)=[\sin(x)]^{n-1}$ وعليه بإستخدام التكامل بالتجزئة، نجد:

$$I_n=[f(x)g(x)]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}f(x)g'(x)dx$$
$$=-\left[\cos(x)\times(\sin x)^{n-1}\right]_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\times(\sin x)^{n-2}dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\times(\sin x)^{n-2}dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\left[1-\sin^2(x)\right]\times(\sin x)^{n-2}dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n-2}dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

إذن: $\forall n\geq 2 \quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

3. لدينا من النتيجة السابقة:

$$\forall n\geq 1, \quad I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\times\cdots\times 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2}\times I_0$$

و عليه:

$$\forall n \geq 1 \quad I_{2n} = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}$$

و بالمثل نجد:

$$\forall n \geq 1 \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}$$

$$= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times3}\times I_{2-1}$$

و عليه:

$$\forall n \geq 1 \quad I_{2n+1} = \frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}$$

4. أ. لدينا:

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leq \sin x \leq 1$$

و منه:

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \aleph, \quad (\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$$

و بالتالي:

$$\int_0^{\pi/2}[\sin(x)]^{n+1}dx \leq \int_0^{\pi/2}[\sin(x)]^n dx$$

أي:

$$\forall n \in \aleph \quad I_{n+1} \leq I_n$$

ب. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا مما سبق:

$$I_{n+1} \leq I_n$$

و منه:

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

و عليه:

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

ج. لدينا مما سبق:

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$$

$$= \left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times\frac{\pi}{2}\times(2n+1)$$

و بالمثل لدينا:

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2(n-2))}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)(2n)}$$

$$=\frac{2n+1}{2n}$$

و بما أنّ:

$$\forall n\geq1\quad 1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

فإنّ:

$$\forall n\geq1\quad 1\leq\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times\frac{\pi}{2}\times(2n+1)\leq\frac{2n+1}{2n}$$

و إنطلاقا من هذه العلاقة نحصل على:

$$\forall n\geq1\quad \frac{2n}{\pi(2n+1)}\leq\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times n\leq\frac{1}{\pi}$$

و ذلك بضرب أطراف المتراجحات في $\frac{2n}{\pi(2n+1)}$. و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\pi(2n+1)}=\frac{1}{\pi}$ إذن

وحسب قاعدة الحصر نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2\times n=\frac{1}{\pi}$$

إمتحانات

2002-2001

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

I-

1. نعم
2. لا
3. لا
4. نعم

II- لاحظ أنّ A محدودة في $\Re$ لأنّ $A \subset B$ و B محدودة في $\Re$، وعليه $\sup A \in \Re$ و $\sup B \in \Re$.

بما أنّ $\sup B$ هو أصغر عنصر في مجموعة الحواد العليا لـ B في $\Re$ فهو حاد أعلى لـ B في $\Re$ أي:

$$\forall x \in B \quad x \leq \sup B$$

و بما أنّ $A \subset B$ فإنّ:

$$\forall x \in A \quad x \leq \sup B$$

و عليه $\sup B$ حاد أعلى لـ A في $\Re$.

و بالتالي: $\sup A \leq \sup B$

لأنّ $\sup A$ هو أصغر عنصر في مجموعة الحواد العليا لـ A في $\Re$.

III- طبيعة السلاسل:

- $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^2+1}$

بما أنّ: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$ فإنّ $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^2+1}$ متباعدة.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n}$

لدينا: $$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 1} a^n$$

مع $a = \frac{2}{3}$

و هكذا تكون $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n}$ متقاربة لأنّها عبارة عن سلسلة هندسية أساسها a يحقق $|a| < 1$.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 2^n}$

نلاحظ أنّ:

$$\forall n \in \aleph^* \quad \frac{1}{n^2 2^n} \leq \frac{1}{n^2}$$

بما أنّ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ متقاربة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha = 2$) و حسب مقياس المقارنة فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2 2^n}$ متقاربة.

- $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

لدينا: $\forall n\in \mathbb{N}^* \quad \left|\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$

و بما أنّ $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha = \frac{3}{2}$) و حسب مقياس المقارنة فإنّ $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right|$ متقاربة و عليه السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ متقاربة.

التمرين الثاني:

1. * باستخدام تعريف النهاية نبرهن أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ أي نبرهن صحة:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n\in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

** باستخدام تعريف النهاية نبرهن كذلك أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$ أي نبرهن صحة:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ / \ \forall n\in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$$

و منه، و حتى يكون $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| \leq \varepsilon$، يكفي أن يكون $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ أي $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا:

$$\forall n \in \aleph^* \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$$\forall n \in \aleph \quad \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{2n+1}{(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]} > 0$$

و عليه $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\aleph^*}$ متناقصة، بينما $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\aleph^*}$ متزايدة.

3. لدينا:

$$A = \left\{\frac{1}{2p}\,,\quad p \in \aleph^*\right\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\,,\quad p \in \aleph\right\}$$

أ. يمكن أن نستقي من الإجابة الأولى أنّ المتتاليتين المستخرجتين $\left(\frac{1}{2p}\right)$ و $\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)$ متقاربتين و عليه فهما محدودتان و هو ما يفيد أنّ A و B محدودتين.

ب. بما أنّ $\left(\frac{1}{n}\right)$ متناقصة فإنّ $\left(\frac{1}{2p}\right)$ متناقصة أيضا، و عليه:

$$\sup A = \sup_{p\in\aleph^*}\left(\frac{1}{2p}\right) = \frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$$

$$\inf\ A = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{2p}\right) = 0$$

لأنّ $\left(\frac{1}{2p}\right)$ متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأدنى.

لدينا أيضا $\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)$ متزايدة لأنّ $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$ متزايدة، و عليه:

$$\inf B = \inf_{p\in\aleph}\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right) = \frac{(2\times 0+1)^2}{(2\times 0+1)^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sup B = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right) = 1$$

لأنّ $\left(\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+1}\right)$ متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن تتقارب نحو حدّها الأعلى.

ج. استنتاجات:

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) = \max\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 1$$

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf\ A, \inf\ B) = \min\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0$$

التمرين الثالث:

1. نستخدم البرهان بالتراجع:
لدينا: $U_0 = 3 \geq 2$ محققة. نفرض أنّ $U_n \geq 2$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $U_{n+1} \geq 2$ أي $U_{n+1} - 2 \geq 0$.
لدينا:

$$U_{n+1} - 2 = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} - 2 = \frac{(U_n - 2)^2}{2U_n} \geq 0$$

لأنّ $U_n > 0$ حسب فرض التراجع. و منه:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 2$$

2. لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} - U_n = \frac{4 - U_n^2}{2U_n} = \frac{(2 - U_n)(2 + U_n)}{2U_n} \leq 0$$

بفضل نتيجة السؤال الأول. و منه المتتالية (U_n) متناقصة.

a. يظهر من الجوابين الأول و الثاني أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 2 فهي إذن متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ. و بما أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2}$$

فإنّ:

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{U_n} + \frac{U_n}{2} \right)$$

أي:

$$\ell = \frac{2}{\ell} + \frac{\ell}{2}$$

لأنّ $\ell \neq 0$ و ذلك حسب السؤال 1. و منه $\ell^2 = 4$.
و عليه تكون قيمة النهاية هي $\ell = 2$ لأنّ $\ell = -2$ حل مرفوض لأنّ $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 2$.

4. استنتاج $\sup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ و $\inf_{n \in \mathbb{N}} U_n$:
بما أنّ (U_n) متناقصة فإنّ:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} U_n = U_0 = 3$$

و من جهة أخرى (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأدنى،
و عليه:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} U_n = \lim_{n \to +\infty} U_n = 2$$

5. بما أنّ $\lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0$ فإنّ $\sum_{n \geq 0} U_n$ متباعدة.

التمرين الرابع:

1. أ. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} V_k &= \sum_{k=1}^{n} k\left(U_k - U_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=1}^{n} kU_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)U_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} kU_k - \sum_{k=2}^{n+1} kU_k\right) + \sum_{k=2}^{n+1} U_k \\
&= \left(U_1 - (n+1)U_{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n+1} U_k \\
&= -(n+1)U_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} U_k
\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

ب. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{V_k}{k} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m}\left(U_k - U_{k+1}\right) \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{m} U_k - \sum_{k=n+1}^{m} U_{k+1}\right] \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{m} U_k - \sum_{k=n+2}^{m+1} U_k\right] \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left(U_{n+1} - U_{m+1}\right) \\
&= U_{n+1} - \lim_{m\to+\infty} U_{m+1}
\end{aligned}$$

و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ فإنّ:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = U_{n+1}$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا مما سبق:

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + (n+1)U_{n+1}$$

و بما أنّ:

$$U_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{V_k}{k} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{V_k}{k}$$

إذن:

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k = \sum_{k=1}^{n} V_k + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (n+1)\frac{V_k}{k}$$

3. نفرض أن $\sum_{n\geq1} V_k$ متقاربة. لدينا:

$$k\geq n+1\Rightarrow \frac{n+1}{k}\leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{k}V_k\leq V_k$$

(لاحظ أنّ المتتالية (V_n) ذات حدود موجبة لأنّ المتتالية (U_n) متناقصة فرضا)

و منه:

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{n+1}{k}V_k\leq \sum_{k=n+1}^{m}V_k\,,\ \ \forall m\geq n+1\ /\ n\in \aleph$$

و بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{n+1}{k}V_k\leq \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m}V_k$$

و منه:

$$\sum_{k=1}^{n}V_k+\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{n+1}{k}V_k\leq \sum_{k=1}^{n}V_k+\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m}V_k$$

أي:

$$\sum_{k=1}^{n+1}U_k\leq \sum_{k=1}^{+\infty}V_k$$

بفضل النتيجة السابقة، نستنتج أنّ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty}U_k$ محدودة من الأعلى،

و بما أنّ $\sum_{k=1}^{+\infty}U_k$ ذات حدود موجبة فإنها متقاربة.

4. لدينا:

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}+1}\underset{n\to+\infty}{\approx}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

و بما أنّ $\sum_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة (سلسلة ريمان مع $\alpha=\frac{1}{2}$) فإنّ $\sum_{n\geq0}U_n$ متباعدة حسب مقياس التكافؤ.

لدينا من جهة أخرى المتتالية (U_n) موجبة، متناقصة و متقاربة نحو 0 و هو ما يضمن، بفضل نتيجة السؤال 3، أن $\sum_{n\geq0}V_n$ متباعدة.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- 1. لا؛ 2. نعم؛ 3. لا؛ 4. لا؛ 5. لا؛ 6. لا

II- لاحظ أنّه حتى يكون f مستمرا على $\mathfrak{R}$ يكفي أن يكون f مستمرا عند القيمتين -1 و 1.
لدينا:

$$\left(f \text{ مستمر عند } -1\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)\right)$$
$$\Leftrightarrow -e^{-1} = a + b$$

لدينا من جهة أخرى:

$$\left(f \text{ مستمر عند } 1\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)\right)$$
$$\Leftrightarrow -a + b = 2a$$
$$\Leftrightarrow b - 3a = 0$$

إذن حتى يكون f مستمرا على $\mathfrak{R}$ يلزم و يكفي أن يكون $a = -\frac{1}{4}e^{-1}$ و $b = -\frac{3}{4}e^{-1}$.

III- حساب باستخدام النشور المحدودة النهايات المطلوبة:

- $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right)$

لدينا:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{\mathrm{sh}(x) - x}{x\,\mathrm{sh}(x)}$$

نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\mathrm{sh}(x) = x + o(x^2)$$

و عليه:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\mathrm{sh}(x) - x}{x\,\mathrm{sh}(x)}$$
$$= \lim_{x \to 0}\frac{o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

- $\lim_{x \to 0}\frac{\sin(x^2)}{x\,\mathrm{arctg}(x)}$

نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$$
$$\mathrm{arctg}(x) = x + o(x^2)$$

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x\,arctg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

IV- لنضع $t=x-1$. إذا كان المتغير x في جوار 1 كان المتغير t في جوار الصفر.
و عليه:

$$f(x)=f(t+1)=\frac{Log(t+1)}{(t+1)^2}\ \ /\ \ \lim_{t\to 0}(1+t)^2=1\neq 0$$

$$=\frac{t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1+2t+t^2}\quad (t\to 0)$$

$$=t-\frac{5}{2}t^2+o(t^2)\ \ (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$f(x)=(x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\quad (x\to 1)$$

بما أنّ التابع f يقبل الإشتقاق عند 1 فإنّ منحنى f يقبل مماسا عند 1 معادلته $y=x-1$ و بما أنّ $0<-\frac{5}{2}(x-1)^2$ في جوار 1 فإن منحنى f يقع تحت المماس في جوار 1.

<u>**التمرين الثاني:**</u>

I- 1. لاحظ أنّ التابع f مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$ من أجل أي عدد حقيقي x من المجال $]0,1[$.
إذن يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على التابع f في المجال $[0,x]$ حيث x من $]0,1[$.
وعليه:

$$\exists c\in\ ]0,x[\ /\ f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$$

أي:

$$f(x)=-\frac{x}{2\sqrt{1-c^2}}$$

(تذّكر أنّ مشتق التابع قوس الجيب هو التابع $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

و بما أنّ:

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن:

$$\forall x\in\ ]0,1[\quad -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\leq f(x)\leq -\frac{x}{2}$$

2. من الإجابة الأولى نستنتج أنّ:

$$\forall x\in \left]0,1\right[\quad -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\le \frac{f(x)}{x}\le -\frac{1}{2}$$

و بالمرور إلى النهاية نجد:

$$-\frac{1}{2}\le \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}\le -\frac{1}{2}$$

و عليه:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2}$$

II- 1. لاحظ أنّ التابع f قابل للاشتقاق على $\left]0,1\right[\cup\left]-1,0\right[$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين قابلين للاشتقاق على $\left]-1,0\right[$ و عبارة عن التابع العكسي لتابع قابل للاشتقاق على $\left]0,1\right[$.
ثم من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{2} \qquad \text{(حسب 2)}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1-\mathrm{ch}(x)}{x\sin x}=-\frac{1}{2} \quad \text{(حسب نظرية لوبيتال)}$$

و هو ما يضمن أنّ f يقبل الاشتقاق عند الصفر. إذن التابع f قابل للاشتقاق على $\left]-1,1\right[$، و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-\mathrm{sh}(x)\sin x-\cos x(1-\mathrm{ch}(x))}{\sin^2(x)} & ; \quad -1<x<0\\[2ex] -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & ; \quad 0\le x<1\end{cases}$$

1. لدينا تعريفا:

(f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\left]-1,1\right[$) $\Leftrightarrow$ (f يقبل الاشتقاق و f' مستمرعلى $\left]-1,1\right[$)

- f يقبل الاشتقاق على $\left]-1,1\right[$ (حسب1).
- لاحظ أنّ f' مستمر على $\left]0,1\right[\cup\left]-1,0\right[$.

و من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}=f'(0)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-\operatorname{sh}(x)\sin x - \cos x(1-\operatorname{ch}(x))}{\sin^2(x)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

و عليه f' مستمر عند 0.

إذن f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $]-1,1[$.

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة:

- $\int \frac{1}{x\left[1+(Logx)^2\right]}dx$

نفرض $t = Logx$ فيكون $dt = \frac{1}{x}dx$ و يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$\int \frac{dx}{x\left[1+(Logx)^2\right]} = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg}(t)+c = \operatorname{arctg}(Log(x))+c \ / \ c \in \Re$$

- $\int \arcsin(x)dx$

باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة:

$$\int \arcsin(x)dx = \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

حيث $f'(x) = 1$ و $g(x) = \arcsin x$.

و منه:

$$\int \arcsin(x)dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \ / \ c \in \Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

I- 1. من أجل x من المجال $]0,1[$ ، لاحظ أنّ التابع $g:t\mapsto Log(1-t)$ يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية في المجال $[0,x]$.

وعليه:

$$\exists c\in\,]0,x[\;/\;g(x)-g(0)=g'(c)(x-0)$$

أي:

$$Log(1-x)=\frac{-x}{1-c}$$

و بما أنّ $0<c<x$ فإنّ:

$$1\leq\frac{1}{1-c}\leq\frac{1}{1-x}$$

إذن:

$$\forall x\in\,]0,1[\quad \frac{-x}{1-x}\leq Log(1-x)\leq -x$$

2. أ. لدينا:

$$\forall x\geq 0\quad h(x)=\sqrt{3}\,Log(1+x)-\sin\left(\frac{\pi}{x+2}\right)$$

و منه:

$$\forall x\geq 0\quad h'(x)=\frac{\sqrt{3}}{1+x}+\frac{\pi}{(x+2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)>0$$

(لاحظ أنّ $x\geq 0\Rightarrow 0<\frac{\pi}{x+2}\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)>0$)

و هذا ما يضمن أنّ h رتيب تماما.

ب. يمكن التأكد بكل سهولة أنّ $h(0)h(1)<0$. و بما أنّ h مستمر على $[0,1]$، فإنّه يمكن استخدام نظرية القيم المتوسطة.

و عليه:

$$\exists c\in\,]0,1[\;/\;h(c)=0$$

و بما أنّ h رتيب تماما (حسب أ) فإنّ هذا الجذر وحيد.

II- 1. لدينا:

$$Log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3}=\left[1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[1+x-x^2+o(x^2)\right]\quad(x\to 0)$$

$$=-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

2. لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+3x+x^3}}{x}$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x} = -1$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{Log(1-x)}{x}$$
$$= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x} = -1$$

و عليه f يقبل الاشتقاق عند 0.

3. لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} -x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2) & ; \quad x \le 0 \wedge x \to 0 \\ -x+\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2) & ; \quad x > 0 \wedge x \to 0 \end{cases}$$

بما أنّ التابع f يقبل الإشتقاق عند 0 فإنّ منحنى f يقبل مماسا عند 0 معادلته $y=-x$ و لدينا:

a. إذا كان $x<0$ و x في جوار 0، فإنّ منحنى f يقع تحت المماس لأنّ $-\frac{x^2}{2}<0$.

b. إذا كان $x>0$ و x في جوار 0، فإنّ منحنى f يقع فوق المماس لأنّ $\frac{3}{2}x^2>0$.

4. بما أنّ النشر المحدود لـ f من الرتبة 2 لمّا $x \xrightarrow{>} 0$ لا يساوي النشر المحدود لـ f من الرتبة 2 لما $x \xrightarrow{<} 0$ فإنّ التابع f لا يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار 0.

-III 1. من أجل x في جوار $+\infty$ نضع $t=\frac{1}{x}$، عندئذ لدينا:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^3}}$$
$$= \frac{1}{t}\left(\sqrt{1+t^2}-\sqrt[3]{1+3t^2+t^3}\right)$$
$$= \frac{1}{t}\left(\left[1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right]-\left[1+\frac{1}{3}(3t^2)+o(t^2)\right]\right) \quad \left(t \xrightarrow{>} 0\right)$$
$$= -\frac{t}{2}+o(t) \quad \left(t \xrightarrow{>} 0\right)$$

و بالتالي:

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

2. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

3. نستنتج أنه في جوار $+\infty$ منحنى f يقبل خطا مقاربا معادلته $y = 0$.

و بما أنّ $-\frac{1}{2x} < 0$ فإن منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $+\infty$.

التمرين الثاني:

I- 1. حساب U_0:

$$U_0 = \int_0^1 \mathrm{ch}(x)dx = [\mathrm{sh}(x)]_0^1 = \mathrm{sh}(1)$$

2. لاحظ أنّ:

$$0 \le (1-x)^n \mathrm{ch}(x) \le \mathrm{ch}(x) \quad \forall x \in [0,1], \forall n \in ℵ$$

و منه:

$$\forall n \in ℵ \quad 0 \le \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{ch}(x)dx \le \int_0^1 \mathrm{ch}(x)dx$$

أي:

$$\forall n \in ℵ \quad 0 \le U_n \le \mathrm{sh}(1)$$

3. لدينا:

$$\forall x \in [0,1] \quad 0 \le 1-x \le 1$$

و منه:

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in ℵ \quad (1-x)^{n+1}\mathrm{ch}(x) \le (1-x)^n \mathrm{ch}(x)$$

و عليه:

$$\forall n \in ℵ \quad \int_0^1 (1-x)^{n+1}\mathrm{ch}(x)dx \le \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{ch}(x)dx$$

أي:

$$\forall n \in ℵ \quad U_{n+1} \le U_n$$

4. بما أنّ المتتالية (U_n) متناقصة (حسب 3) و محدودة من الأدنى (حسب 2) فإنها متقاربة.

II- 1. ليكن n من ℵ كيفي. بأخذ $f'(x) = chx$ و $g(x) = (1-x)^{n+2}$ و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد أنّ:

$$U_{n+2}=\int_0^1 f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$
$$=\left[(1-x)^{n+2}\operatorname{sh}(x)\right]_0^1+(n+2)\int_0^1(1-x)^{n+1}\operatorname{sh}(x)dx$$
$$=(n+2)\int_0^1(1-x)^{n+1}\operatorname{sh}(x)dx$$

ثم بأخذ هذه المرة $f'(x)=shx$ و $g(x)=(1-x)^{n+1}$ و باستخدام المكاملة بالتجزئة من جديد، نجد أنّ:

$$U_{n+2}=(n+2)\left[-1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n ch(x)dx\right]$$
$$=-(n+2)+(n+2)(n+1)U_n$$

و عليه:

$$\forall n\in ℕ \quad U_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[U_{n+2}+(n+2)\right]$$

2. أ. لدينا حسب (*I*- 2):

$$\forall n\in ℕ \quad 0\le U_n\le \operatorname{sh}(1)$$

و عليه:

$$\forall n\in ℕ \quad \frac{1}{n+1}\le U_n\le \frac{\operatorname{sh}(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n+1}$$

بالمرور إلى النهاية، نجد:

$$0\le \lim_{n\to+\infty}U_n\le 0$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

ب. لدينا:

$$\forall n\in ℕ \quad \frac{1}{n+1}\le U_n$$

و بما أنّ $\sum_{n\ge0}\frac{1}{n+1}$ متباعدة فإنّ $\sum_{n\ge0}U_n$ متباعدة.

3. بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى، فإنّ:

$$\sup\{U_n\,,\ n\in ℕ\}=U_0=\operatorname{sh}(1)$$
$$\inf\{U_n\,,\ n\in ℕ\}=\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

<u>التمرين الثالث</u>:

ليكن x في جوار a مع $x\neq a$. بما أنّ f من الصنف C^3 في جوار a فحسب دستور تايلور يونغ، لدينا:

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+(x-a)^3\varepsilon(x-a)$$

مع: $\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a)=0$

و عليه من أجل h في جوار 0 و $h\neq 0$ فإنّ:

$$f(a+3h)= f(a)+3\frac{f^{(1)}(a)}{1!}h+\frac{9}{2!}f^{(2)}(a)h^2+\frac{27}{3!}f^{(3)}(a)h^3+27h^3\varepsilon(3h) \ / \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(3h)=0$$

$$f(a+2h)= f(a)+2\frac{f^{(1)}(a)}{1!}h+4f^{(2)}(a)\frac{h^2}{2}+\frac{8}{3!}f^{(3)}(a)h^3+8h^3\varepsilon(2h) \ / \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(2h)=0$$

$$f(a+h)= f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}h+\frac{f^{(2)}(a)}{2}h^2+\frac{f^{(3)}(a)}{6}h^3+h^3\varepsilon(h) \ / \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

و بالتالي:

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{f^{(3)}(a)h^3+h^3\left[27\varepsilon(3h)-24\varepsilon(2h)+3\varepsilon(h)\right]}{h^3} \\ &= f^{(3)}(a)+27\varepsilon(3h)-24\varepsilon(2h)+3\varepsilon(h) \end{aligned}$$

إذن:

$$\lim_{h\to 0} g(h)= f^{(3)}(a)$$

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage**

التمرين الأول:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. لدينا $U_0 = 0 \leq 1$ محققة.
إذا فرضنا صحة الخاصية من أجل الرتبة n، أي $U_n \leq 1$ حق لنا أن نكتب:
$$\frac{1}{2-U_n} \leq 1$$
أي:
$$U_{n+1} \leq 1$$
و عليه:
$$\forall n \in \aleph \quad U_n \leq 1$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:
$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)^2}{2 - U_n}$$
و بما أنّ $U_n \leq 1$ (حسب 1) فإنّ $U_{n+1} - U_n \geq 0$. إذن (U_n) متزايدة.

3. المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى و متزايدة إذن فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.
و بما أنّ $\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n}$ فإنّ l يحقق المعادلة $l = \frac{1}{2-l}$.
لدينا:
$$l = \frac{1}{2-l} \Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow l = 1$$

4. بما أنّ (U_n) متزايدة فإنّ:
$$\inf\{U_n, \quad n \in \aleph\} = U_0 = 0$$
من جهة أخرى (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأعلى،
و عليه:
$$\sup\{U_n, \quad n \in \aleph\} = \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

5. بما أنّ $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1 \neq 0$ فإنّ $\sum_{n \geq 0} U_n$ متباعدة.

التمرين الثاني:

1. لدينا تعريفا:
$$\left(\lim_{n \to +\infty} U_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph^* \ / \ \forall n \in \aleph^*, \ n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - 0| \leq \varepsilon\right)$$
ليكن ε موجب تماما. لدينا من أجل n من $\aleph^*$:

$$\left|U_n - 0\right| = \left|Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = Log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

إذن:

$$\left|U_n - 0\right| \le \varepsilon \Leftrightarrow Log\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} \le e^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow n \ge \frac{1}{e^{\varepsilon}-1} \quad (\text{لأنّ } 0<\varepsilon)$$

يكفي أخذ:

$$n_0 = \left[\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right]+1$$

و بالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

2. أ. حساب قيمة S_n. من أجل n من $\aleph^*$، لدينا:

$$\begin{aligned}S_n &= U_1+U_2+\cdots+U_n\\ &= Log2+(Log3-Log2)+\cdots+(Log(n+1)-Logn)\\ &= Log(n+1)\end{aligned}$$

ب. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} Log(n+1) = +\infty$$

ج. استنتاج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\ge1} U_n$. بما أنّ متتالية المجاميع الجزئية (S_n) للسلسلة $\sum\limits_{n\ge1} U_n$ متباعدة فإنّ السلسلة $\sum\limits_{n\ge1} U_n$ متباعدة.

<u>التمرين الثالث</u>:

1. التابع f قابل للإشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين قابلين للاشتقاق.
من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^2)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

إذن التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(x)+x-2\sin x}{x^3} & ; \quad x\neq 0\\ -\dfrac{1}{6} & ; \quad x=0\end{cases}$$

2. لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+x-2\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

و بما أنّ $f'(0)=-\frac{1}{6}$ ، فإنّ التابع f' مستمر عند 0.

3. لاحظ أنّ التابع f' مستمر على $\Re^*$ و بما أنّه مستمر عند الصفر فإنّ f' مستمر على $\Re$.
و عليه التابع f يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\Re$.

4. لاحظ أنّ التابع $x\mapsto\sin(x)$ يحقق دستور "ماك لوران" مع باقي "لاغرانج" من الرتبة 1 و عليه من أجل أي x من $\Re^*$ يوجد c محصور بين 0 و x يحقق:

$$\sin x=\sin 0+(\sin)'(0)x+(\sin)''(c)\frac{x^2}{2}$$
$$=x-\frac{x^2}{2}\sin c$$

و منه:

$$\forall x\in\Re^*\quad |f(x)|=\left|-\frac{\sin c}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

و بما أنّ المتراجحة أعلاه محققة من أجل $x=0$ ، فإنّ:

$$\forall x\in\Re\quad |f(x)|=\left|-\frac{\sin c}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

I- حساب النهايات المطلوبة باستخدام النشور المحدودة من الرتبة 3:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x\,Log(1+x)}{e^x+\cos(x)-\sin(x)-2}$$

لدينا:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$
$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$
و عليه:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x\,Log(1+x)}{e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{3}{2}$$
(تذّكر أنّه $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$)

- $\lim_{x\to 0} \frac{Log(1+x^2)}{x\,\mathrm{arctg}(x)}$

نذكر أنه في جوار الصفر لدينا:
$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
و عليه:
$$\lim_{x\to 0} \frac{Log(1+x^2)}{x\,\mathrm{arctg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^2}} = 1$$

II- لحساب $\int x^2 \sin(x) dx$ ، نستعمل دستور المكاملة بالتجزئة و ذلك بأخذ $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$ فنجد:
$$\int x^2 \sin x\, dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$
ثم بتطبيق دستور المكاملة بالتجزئة مرة أخرى لحساب $\int x\cos(x)dx$ وذلك بأخذ $f'(x) = \cos x$ و $g(x) = x$ نحصل على:
$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x\, dx\right]$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c \quad / \; c \in \Re$$

إمتحانات

2003-2002

الإمتحان الأول:EMD1

التمرين الأول:

I- 1. لا؛ 2. لا؛ 3. لا؛ 4. لا؛
5. لا؛ 6. لا؛ 7. نعم؛ 8. لا.

II- دراسة طبيعة السلاسل:

- $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{a^n}$ مع $1<a$: بأخذ $U_n=\frac{n}{a^n}$ حيث n من $\aleph^*$ فإنّ (U_n) ذات حدود موجبة.

ثم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{a^{n+1}}}{\frac{n}{a^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{a}<1$$

و منه حسب مقياس دالمبار السلسلة $\sum_{n\geq 1}U_n$ متقاربة.

- $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-1}{n^2+1}$:

بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$ فإنّ السلسلة ذات الحد العام $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ متباعدة.

- $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$:

لدينا: $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\approx}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ و بما أنّ $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}$ متباعدة (سلسلة ريمان من أجل $\alpha=1$) فإنّ السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ متباعدة و ذلك حسب مقياس التكافؤ.

التمرين الثاني:

1. نبرهن بالتراجع أنّ: $\forall n\in\aleph \quad -2<U_n\leq 0$

لدينا $-2<U_0=-1\leq 0$ صحيحة. إذا افترضنا صحة الخاصية من أجل الرتبة n، أي $-2<U_n\leq 0$ فإنّه يمكننا أن نكتب:

$$1<\frac{4}{2-U_n}\leq 2$$

و منه:

$$-2<-3+\frac{4}{2-U_n}=U_{n+1}\leq -1\leq 0$$

و عليه:

$$\forall n\in\aleph \quad -2<U_n\leq 0$$

2. لدينا:

$$\forall n\in \aleph \quad U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2+U_n-2}{2-U_n}=\frac{(U_n+2)(U_n-1)}{2-U_n}\leq 0$$

و هذا راجع لكون عناصر المتتالية تنتمي إلى المجال $]-2,0]$.
إذن المتتالية (U_n) متناقصة.

3. استنتاج طبيعة (U_n) ثم حساب نهايتها:
بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l حل للمعادلة:

$$l=-3+\frac{4}{2-l}$$

أي:

$$l^2+l-2=0$$

و منه:

$$l=-2 \quad \vee \quad l=1$$

ثم $l=1$ حل مرفوض لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\leq 0$ (حسب 1)
إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=-2$$

4. حساب في حالة وجودها:
- $\sup\limits_{n\in\aleph}U_n$ ، $\max U_n$:

بما أنّ (U_n) متناقصة فإنّ

$$\sup_{n\in\aleph}U_n=\max_{n\in\aleph}U_n=U_0=-1$$

- $\inf\limits_{n\in\aleph}U_n$:

لدينا أيضا (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدّها الأدنى أي:

$$\inf_{n\in\aleph}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_n=-2$$

- $\min\limits_{n\in\aleph}U_n$:

بما أنّ $\forall n\in\aleph \quad U_n>-2$ فإنّ:

$\min\limits_{n\in\aleph}U_n$ غير موجود

5. إستنتاج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0}U_n$:
بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-2\neq 0$ فإنّ $\sum\limits_{n\geq 0}U_n$ متباعدة.

<u>التمرين الثالث</u>:

1. بيان أنّ: $\forall n\in\aleph \quad T_n=S_{2n+1}$
ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} V_k = \sum_{k=0}^{n} \left(U_{2k} + U_{2k+1}\right) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{2n} + U_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} U_k = S_{2n+1} \end{aligned}$$

2. كتابة S_{2n} بدلالة S_{2n+1}. ليكن n من $\aleph$. لدينا:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} U_k = \sum_{k=0}^{2n+1} U_k - U_{2n+1} = S_{2n+1} - U_{2n+1}$$

3. برهان التكافؤ: $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة

a. $(\Leftarrow)$: نفرض أنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة أي (S_n) متقاربة. و بما أنّ (S_{2n+1}) متتالية مستخرجة من (S_n) فإنها متقاربة. و منه (T_n) متقاربة أي $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة.

b. $(\Rightarrow)$: نفرض أنّ $\sum_{n\geq 0} V_n$ متقاربة أي (T_n) متقاربة و نبرهن أنّ $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة أي نبرهن أنّ (S_n) متقاربة.

بما أنّ (T_n) متقاربة فإنّ (S_{2n+1}) متقاربة. إذن حتى نبرهن أن (S_n) متقاربة يكفي أن نبرهن أنّ (S_{2n}) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}$.

لدينا:

$$S_{2n} = S_{2n+1} - U_{2n+1}, \quad \forall n \in \aleph$$

و بما أنّ (U_n) متقاربة نحو الصفر فإنّ (U_{2n+1}) متقاربة أيضا نحو الصفر لأنها متتالية مستخرجة من (U_n)، و منه (S_{2n}) متقاربة لأنها مجموع متتاليتين متقاربتين.

و لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n+1} - U_{2n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1}}_{=0} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}$$

و منه (S_n) متقاربة أي $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة.

4. تعيين طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$:

نضع: $U_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ و $V_n = U_{2n} + U_{2n+1}$ حيث n من $\aleph/\{0,1\}$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = 0$$

لأنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. إذن $\sum_{n\geq 2} U_n$ و $\sum_{n\geq 0} V_n$ لهما نفس الطبيعة.

لدينا من جهة أخرى:

$$\sum_{n\geq 2} V_n = \sum_{n\geq 2}\left(U_{2n} + U_{2n+1}\right) = \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(2n+1)}$$

و بما أنّ $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{n(2n+1)}$ و $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}$ متقاربة لأنّ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ كذلك (سلسلة ريمان مع $\alpha = 2 > 1$) فإنّ $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(2n+1)}$ متقاربة و ذلك حسب مقياس التكافؤ أي $\sum_{n\geq 2} V_n$ متقاربة و عليه $\sum_{n\geq 2} U_n$ متقاربة.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- 1. حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0)$$

لدينا $f(0) = b$ و:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} ax^2 + b = b$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \mathrm{sh}(x) + 1 = 1$$

ومنه حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون b=1 و a كيفي.

2. حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند الصفر يلزم و يكفي أن يتحقق:

$$\exists l \in \Re \; / \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = l$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{a^2 x + b - b}{x} = a^2$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{sh(x) + 1 - b}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{sh(x)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{sh(x) - sh(0)}{x} = sh'(0) = ch(0) = 1$$

لأنه حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند الصفر يلزم أن يكون مستمرا عند الصفر أي $b = 1$.
إذن حتى يكون f قابلا للإشتقاق عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون $b = 1$ و $a^2 = 1$ أي $b = 1$
و ($a = 1$ أو $a = -1$).

II- حساب النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \mathrm{x}^2} - \cos(x)}{x \sin(x^2)}$ باستخدام النشور المحدودة:

لدينا:

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

$$x \sin x^2 = x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

و عليه لإزالة حالة عدم التعيين يكفي نشر البسط من الرتبة 3 في جوار 0.
لدينا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

(التابع $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ تابع زوجي و عليه معامل x^3 معدوم في النشر المحدود)
و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}$$ غير موجودة

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}=+\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x^2)}=-\infty$$

<u>التمرين الثاني:</u>

I- 1. واضح أنّ المتراجحة محققة من أجل $x=0$ لأنّ: $0\le \text{arctg}\,0\le 0$
من أجل $x>0$ ، التابع $t\mapsto \text{arctg}\,t$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$. و منه حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من $]0,x[$ بحيث:
$$\text{arctg}\,x-\text{arctg}\,0=(\text{arctg})'(c)(x-0)$$
أي:
$$\text{arctg}\,x=\frac{1}{1+c^2}\times x$$
و بما أنّ $0<c<x$ فإنّ:
$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}<1$$
إذن:
$$\forall x>0\quad \frac{x}{1+x^2}<\text{arctg}(x)<x$$
و هو ما يوصل إلى المطلوب.

2. بما أنّ:
$$\forall x\ge 0\quad \frac{x}{1+x^2}\le \text{arctg}(x)\le x$$
فإنّ:
$$\forall x\in[0,1]\quad \frac{x(x-1)}{1+x^2}\ge (x-1)\,\text{arctg}(x)\ge x(x-1)$$
لأنّ: $\forall x\in[0,1]\quad x-1\le 0$

و هذا يعني أنّ:

$$\forall x\in[0,1] \quad x(x-1)\le f(x)\le \frac{x(x-1)}{1+x^2}$$

II- 1. دراسة استمرارية التابع f عند 1 . لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(1+x)e^{1/x-1}=+\infty$$

إذن f غير مستمر عند 1.

2. f غير قابل للاشتقاق عند 1 لأنّه غير مستمر عند 1.

3. f لا يقبل نشرا محدودا من أي رتبة في جوار 1 لأنّ $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$.

4. لدينا:

$$\forall x\in[0,1] \quad f(x)=(x-1)\,\mathrm{arctg}(x)$$

و منه:

$$f'(x)=\mathrm{arctg}(x)+\frac{x-1}{1+x^2}$$

و

$$\forall x\in[0,1] \quad f''(x)=\frac{2(1+x)}{(1+x^2)^2}>0$$

و عليه f' رتيب تماما على المجال $]0,1[$.

5. لدينا:

$$f'(0)=\mathrm{arctg}\,0+\frac{-1}{1}=-1 \quad ; \quad f'(1)=\mathrm{arctg}1+0=\frac{\pi}{4}$$

إذن:

$$f'(0)\times f'(1)<0$$

لدينا من جهة أخرى f' مستمر على المجال $[0,1]$ لأنّه عبارة عن مجموع توابع مستمرة.
و عليه فإنّه يوجد، بمقتضى نظرية القيم المتوسطة، c من $]0,1[$ بحيث $f'(x)=0$ و بما أنّ f' رتيب تماما على $]0,1[$ فإنّ c وحيد.

III- 1. النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0 . لاحظ أنّه في جوار 0 :

$$f(x)=(x-1)\mathrm{arctg}(x)$$

ثم تذّكر أنّه في جوار 0 لدينا:

$$\mathrm{arctg}(x)=x+o(x^2)$$

و عليه:

$$(x-1)\,\mathrm{arctg}(x)=(x-1)x+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

و منه:

$$f(x)=-x+x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

2. معادلة المماس عند الصفر هي $y=-x$. و بما أنّ $x^2 \geq 0$ فإنّ منحنى f يقع فوق المماس في جوار الصفر.

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة:

- $\int x \operatorname{arctg}(x)dx$:

إذا فرضنا $f'(x)=x$ و $g(x)=\operatorname{arctg} x$ و طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg}(x)dx &= f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx\\ &=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}.dx\\ &=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}.dx\\ &=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c \quad / \quad c\in\Re\end{aligned}$$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$:

لدينا:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

نضع $t=\frac{x}{2}$ فيكون $dt=\frac{1}{2}dx$. و منه بالتعويض في التكامل نجد:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+c \quad / \quad c\in\Re$$

$$=\arcsin\frac{x}{2}+c \quad / \quad c\in\Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. حساب U_2. لدينا:

$$U_2 = 1 + \frac{U_1}{2-1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

2. نستعين بالتراجع. من أجل n=1 لدينا: $1 \le U_2 \le 2$ صحيحة.

نفرض صحة الخاصية أجل الرتبة n أي $1 \le U_n \le 2$ ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن $1 \le U_{n+1} \le 2$.

لدينا:

$$U_{n+1} = 1 + \frac{U_n}{n}$$

و بما أنّ:

$$1 \le U_n \le 2$$

فإنّ:

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \le 1 + \frac{U_n}{n} \le 1 + \frac{2}{n}$$

و عليه يكون لدينا حالتان:

أ. إذا كان $n \ge 2$ فإنّ:

$$1 < 1 + \frac{U_n}{n} \le 1 + \frac{2}{n} \le 1 + 1$$

أي:

$$1 \le U_{n+1} \le 2$$

ب. إذا كان $n < 2$ أي $n = 1$ فحسب الجواب 1 فإنّ: $1 \le U_{1+1} \le 2$

و عليه:

$$\forall n \in \aleph^* \quad 1 \le U_n \le 2$$

3. لدينا تعريفا:

$$\left(\lim_{n \to +\infty} U_n = 1\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \aleph^* /\ \forall n \in \aleph^*,\ n \ge n_0 \Rightarrow |U_n - 1| \le \varepsilon\right)$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا من أجل $n \ge 2$:

$$|U_n - 1| = \left|\frac{U_{n-1}}{n-1}\right| = \frac{U_{n-1}}{n-1} \le \frac{2}{n-1}$$

و منه، حتى يكون $|U_n - 1| \le \varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{2}{n-1} \le \varepsilon$ أي $n \ge 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

و بالتالي إذا أخذنا: $n_0 = \left[1 + \frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب .

4. يمكن استخدام البرهان بالتراجع للتأكد من أنّ:

$$\forall n\in \aleph^* \quad U_n = 1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times(2)\times 1}$$

5. لدينا:

$$n-1<n \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}$$

$$(n-1)(n-2)<n^2 \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

.

.

.

$$(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1<n^{n-1} \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n^{n-1}}<\frac{1}{(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}$$

إذن:

$$0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}<\frac{1}{(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}$$

و بالتالي:

$$0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}<U_n-1$$

و بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$ إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}\right)=0$$

(يمكن أيضا استخدام: $\forall n\geq 3 \quad 0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdots+\frac{1}{n^2}$)

6. طبيعة $\sum\limits_{n\geq 1} V_n$ حيث $V_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}}$:

لاحظ أنّ:

$$\forall n\in \aleph^* \quad V_n>\frac{1}{n}$$

و بما أنّ $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ متباعدة (سلسلة توافقية) فإنّ $\sum\limits_{n\geq 1} V_n$ متباعدة و ذلك حسب مقياس المقارنة.

التمرين الثاني:

1. النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 للتابع f في جوار $+\infty$:

نضع $t=\frac{1}{x}$. إذا كان المتغير x في جوار $+\infty$ كان المتغير t في جوار الصفر مع t موجب تماما. و عليه:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}Log(1+t)-\frac{2}{t}\sqrt{1+t^2}$$

لإيجاد النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار $+\infty$ للتابع f يكفي إيجاد النشر المحدود من الرتبة 3 للتابع $t \mapsto \log(1+t)$ ومن الرتبة 2 للتابع $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ و ذلك في جوار 0.
لدينا:

$$Log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad (t \to 0)$$

$$\sqrt{1+t^2} = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{2t}{3} + o(t)$$

و بالتالي:

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

2. نستنتج من النشر المحدود السابق أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = -x - \frac{1}{2}$ خط مقارب لمنحنى f في جوار $+\infty$. و بما أنّ $-\frac{2}{3x} < 0$ من أجل $x \to +\infty$ فإنّ منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $+\infty$.

<u>التمرين الثالث</u>:

1. حساب $\int_0^1 Log(x+k)dx$ حيث $k \in ℵ^*$.

نفرض $f'(x) = 1$ ، $g(x) = Log(x+k)$ ، $f(x) = x$ و $g'(x) = \frac{1}{x+k}$.

إذن و بتطبيق دستور المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Log(x+k)dx &= [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx \\
&= [x\,Log(x+k)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+k}dx \\
&= Log(1+k) - \int_0^1 \frac{x+k-k}{x+k}dx \\
&= Log(1+k) - \int_0^1 dx + k\int_0^1 \frac{dx}{x+k} \\
&= Log(1+k) - 1 + k\,Log(1+k) - k\,Logk
\end{aligned}$$

و عليه:

$$\int_0^1 Log(x+k)dx = (1+k)Log(1+k) - 1 - k\,Logk, \quad k \in ℵ^*$$

2. إستنتاج أنّ: $U_n = (1+n)Log(1+n) - n \quad \forall n \in ℵ^*$

لدينا من أجل أي عدد طبيعي n غير معدوم:

$$U_n=\int_0^1 Log\left[(x+1)(x+2)\times\cdots\times(x+n)\right]dx=\int_0^1\left[Log(x+1)+Log(x+2)+\cdots+Log(x+n)\right]dx$$

$$=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}Log(x+k)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 Log(x+k)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(1+k)Log(1+k)-k\,Logk-1\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(1+k)Log(1+k)-k\,Logk\right]-\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=(1+n)Log(1+n)-n$$

ملاحظة: يمكن استخدام البرهان بالتراجع للتأكد أنّ:

$$\forall n\in \aleph^* \quad U_n=(1+n)\log(1+n)-n$$

3. طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}U_n$. لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left[(1+n)Log(1+n)-n\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(1+n)\left[Log(1+n)-\frac{n}{n+1}\right]=+\infty$$

و بالتالي السلسلة $\sum_{n\geq 1}U_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول نحو الصفر.

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage**

التمرين الأول:

1. إثبات أنّ: $\forall n \in \aleph \quad 1 < U_n < 6$.

نستخدم البرهان بالتراجع. لدينا فرضا $1 < U_0 < 6$.

إذا فرضنا $1 < U_n < 6$ من أجل الرتبة n حقّ لنا أن نكتب: $-6 < -\frac{6}{U_n} < -1$ و منه:

$$7 - 6 < U_{n+1} = 7 - \frac{6}{U_n} < 7 - 1$$

و عليه:

$$1 < U_{n+1} < 6$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad 1 < U_n < 6$$

2. ليكن n من $\aleph$. لدينا:

$$U_{n+1} - U_n = 7 - \frac{6}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 6}{U_n} = \frac{(U_n - 1)(-U_n + 6)}{U_n} > 0$$

وضع هذه الإشارة مبرر لكون $1 < U_n < 6$.

إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

3. المتتالية (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ. لحساب ℓ نحل المعادلة:

$$\ell = 7 - \frac{6}{\ell}$$

أي:

$$\ell^2 - 7\ell + 6 = 0$$

و منه:

$$\ell = 6 \quad \vee \quad \ell = 1$$

الحل 1 حل مرفوض لأنّ $\ell = \sup\{U_n / n \in \aleph\}$ و $\forall n \in \aleph, \quad 1 < U_n < 6$.

إذن:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 6$$

4. بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو حدّها الأعلى أي:

$$\sup\{U_n / n \in \aleph\} = \lim_{n \to +\infty} U_n = 6$$

و بما أنّ $1 < U_n < 6$ فإنّ $\max\{U_n / n \in \aleph\}$ غير موجود.

ثم من تزايد (U_n) نستنتج أنّ:

$$\min\{U_n / n \in \aleph\} = \inf\{U_n / n \in \aleph\} = U_0 = 2$$

5. $\sum_{n \geq 0} U_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول نحو الصفر.

التمرين الثاني:

1. النشر المحدود من الرتبة 2 للتابع f في جوار 0.

تذكّر أنّه في جوار 0 لدينا:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o\left(x^4\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$$

و عليه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{23}{24}x^4+o\left(x^4\right)\right]\quad(x\to 0)$$

إذن:

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)\quad(x\to 0)$$

2. استنتاج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)\right]=-\frac{1}{2}$$

3. بما أنّ التابع يقبل نهاية منتهية عند الصفر فإنّه يقبل تمديدا بالإستمرار عند 0 و لدينا:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & ; \quad x=0 \end{cases}$$

4. أ. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{23}{24}x^2+o\left(x^2\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{23}{24}x+o(x)\right]=0$$

إذن التابع التابع $\tilde{f}$ يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. لاحظ أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\tilde{f}(x) = f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2)$$

و عليه معادلة المماس لمنحني $\tilde{f}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي: $y = -\frac{1}{2}$. و بما أنّ $\frac{23}{24}x^2 > 0$ فإنّ منحنى $\tilde{f}$ يقع فوق المماس في جوار الصفر.

5. لدينا:

$$\tilde{f}(0) = -\frac{1}{2} < 0 \qquad ; \qquad \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)} > 0$$

و هو ما يضمن، بفضل استمرار $\tilde{f}$ على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و نظرية القيم المتوسطة، وجود c من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث: $\tilde{f}(c) = 0$.

<u>التمرين الثالث:</u>

حساب حسب قيم الوسيط λ النهاية التالية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x) - \lambda x}$ باستخدام النشر المحدود:

تذّكر أنّه في جوار الصفر أنّه:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

و عليه:

$$\sin x - \lambda x = (1 - \lambda)x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

و بالتالي:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x) - \lambda x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(1 - \lambda)x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{-\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} & \lambda = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{(1 - \lambda) - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)} & \lambda \neq 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x) - \lambda x} = \begin{cases} -6 & \lambda = 1 \\ 0 & \lambda \neq 1 \end{cases}$$

التمرين الرابع:

1. حساب $I+J$. لدينا:

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\pi/2} x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^{\pi/2} x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

2. حساب $I-J$. لدينا:

$$\begin{aligned} I-J &= \int_0^{\pi/2} x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx - \int_0^{\pi/2} x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x\left[\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx \end{aligned}$$

لاحظ أنّ

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos x$$

و بالتالي:

$$I-J=\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$

و باستخدام دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} I-J = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx &= \int_0^{\pi/2} x\,(\sin)'\,x\,dx \\ &= [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}-[-\cos]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1 \end{aligned}$$

3. إستنتاج قيم I و J. لدينا:

$$\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{8} \\ I-J=\dfrac{\pi}{2}-1 \end{cases}$$

بحل الجملة نجد أنّ:

$$I=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \quad ; \quad J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

إمتحانات

2004-2003

الإمتحان الأول:EMD1

التمرين الأول:

I- 1. نبرهن باستخدام التعريف أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\frac{3}{2}$ أي نبرهن:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in \aleph^* /\quad \forall n\in\aleph^*,\quad n\geq n_0 \Rightarrow \left|U_n-\frac{3}{2}\right|\leq\varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left|U_n+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1-3n}{2n-1}+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)}$$

و منه:

$$\left|U_n+\frac{3}{2}\right|\leq\varepsilon \iff \frac{1}{2(2n-1)}\leq\varepsilon \iff n\geq\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$$

إذا أخذنا: $n_0=\left[\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right]+1$ يتحقق المطلوب.

1. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1}-U_n = \frac{1-3(n+1)}{2(n+1)-1}-\frac{1-3n}{2n-1} = \frac{1}{4n^2-1}>0$$

إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

2. بما أنّ (U_n) متزايدة و متقاربة فإنّ:

$$\inf_{n\in\aleph^*} U_n = \min_{n\in\aleph^*} U_n = U_1 = -2$$

$$\sup_{n\in\aleph^*} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = -\frac{3}{2}$$

و بما أنّ $-\frac{3}{2}\notin\{U_n, n\in\aleph^*\}$ لأنّ (U_n) متزايدة تماما فإنّ $\max\limits_{n\in\aleph^*} U_n$ غير موجود.

II- 1. حتى نبرهن أنّ $\sup A<0$، يكفي أن نبرهن أنّ 0 حاد أعلى لـ A لأنّ $\sup A$ هو أصغر الحواد العليا لـ A و $\sup A\neq 0$ فرضا.

بما أنّ $A\subset\Re^-$ فإنّ:

$$\forall x\in A\quad x\leq 0$$

و منه 0 حاد أعلى لـ A في $\Re$ و هو المطلوب.

1. لدينا:

$$\forall x\in A\quad \inf A\leq x\leq \sup A<0$$

و منه:

$$\forall x\in A\quad \frac{1}{\sup A}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\inf A}$$

إذن $\frac{1}{A}$ محدودة في $\Re$.

2. حتى نبرهن أنّ $\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}$ يكفي أن نبرهن أنّ:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)\leq\frac{1}{\inf(A)} \text{ و } \sup\left(\frac{1}{A}\right)\geq\frac{1}{\inf(A)}$$

لدينا من الإجابة عن السؤال الثاني:

$$\forall x\in A \quad \frac{1}{x}\leq\frac{1}{\inf A}$$

و منه $\frac{1}{\inf A}$ حاد أعلى لـ $\frac{1}{A}$ في $\Re$.

و عليه:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)\leq\frac{1}{\inf(A)}$$

يبقى أن نبرهن أنّ:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)\geq\frac{1}{\inf(A)}$$

نلاحظ مما سبق أنّ $\sup\left(\frac{1}{A}\right)$ و $\frac{1}{\inf(A)}$ من نفس الإشارة، و بالتالي حتى نبرهن صحة $\sup\left(\frac{1}{A}\right)\geq\frac{1}{\inf(A)}$ يلزم و يكفي أن نبرهن $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{A}\right)}\leq\inf(A)$ أي $\frac{1}{\sup\frac{1}{A}}$ حاد أدنى لـ A في $\Re$ لأنّ $\inf A$ هو أكبر الحواد الدنيا لـ A.

ليكن x من A. لدينا:

$$x\in A\Rightarrow\frac{1}{x}\in\frac{1}{A}\Rightarrow\frac{1}{x}\leq\sup\frac{1}{A}<0\Rightarrow x\geq\frac{1}{\sup\frac{1}{A}}$$

إذن $\frac{1}{\sup\frac{1}{A}}$ حاد أدنى لـ A في $\Re$ و هو المطلوب.

3. برهنا سابقا أنّ: $\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}$ أي $\inf(A)=\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{A}\right)}$ حيث A جزء غير خال من $\Re_-^*$ و محدود مع $\sup A\neq 0$.

بما أنّ $\frac{1}{A}$ جزء غير خال من $\Re_-^*$ و محدود مع $\sup\frac{1}{A}\neq 0$، فإنّ المساواة أعلاه تبقى صحيحة إذا استبدلنا A بـ $\frac{1}{A}$ أي:

$$\inf\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)}=\frac{1}{\sup(A)}$$

و هو المطلوب.

III- لدينا من الجزء (I): $\sup A=-\frac{3}{2}\neq 0$ و $\inf A=-2$ و منه A جزء غير خال من $\Re_-^*$ و محدود مع $\sup A\neq 0$. إذن:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\inf(A)}=-\frac{1}{2}$$

$$\inf\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\sup(A)}=-\frac{2}{3}$$

<u>التمرين الثاني</u>:

1. نستعين بالتراجع. لدينا: $U_0<V_0$ صحيحة لأنّ $1<2$.
نفرض أنّ $U_n<V_n$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $U_{n+1}<V_{n+1}$.
لدينا:

$$U_{n+1}-V_{n+1}=\frac{1}{3}(2U_n+V_n)-\frac{1}{3}(U_n+2V_n)$$
$$=\frac{1}{3}(U_n-V_n)<0$$

حسب فرض التراجع.
و منه: $U_{n+1}<V_{n+1}$
إذن:

$$\forall n\in \aleph \quad U_n<V_n$$

2. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{3}(2U_n+V_n)-U_n=\frac{1}{3}(V_n-U_n)>0$$

و

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{3}(U_n+2V_n)-V_n=\frac{1}{3}(U_n-V_n)<0$$

و منه (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة.

3. لدينا من أجل n من $\aleph^*$:

$$
\begin{aligned}
V_n - U_n &= \frac{1}{3}\left(2V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_{n-1} - V_{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(V_{n-1} - U_{n-1}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\left(V_{n-2} - U_{n-2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(V_{n-2} - U_{n-2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(V_{n-3} - U_{n-3}\right) \\
&= \cdots\cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(V_{n-n} - U_{n-n}\right)
\end{aligned}
$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph^* \quad V_n - U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(V_0 - U_0\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ثمّ هذه المساواة أيضا صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ: $V_0 - U_0 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$

و عليه:

$$\forall n \in \aleph \quad V_n - U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

إذن بأخذ $k = \frac{1}{3}$ يتحقق المطلوب.

لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(V_n - U_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

(لأنّ $0 < \frac{1}{3} < 1$).

4. بما أنّ (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة و $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(V_n - U_n\right) = 0$ فإنّ (U_n) و (V_n) متجاورتان و عليه فهما متقاربتان نحو نفس النهاية l.

5. لدينا:

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \aleph^* \quad V_n + U_n &= \frac{1}{3}\left(2V_{n-1} + U_{n-1} + 2U_{n-1} + V_{n-1}\right) \\
&= V_{n-1} + U_{n-1} = V_{n-2} + U_{n-2} = V_0 + U_0 = 3
\end{aligned}
$$

و عليه:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(V_n + U_n\right) = \lim_{n \to +\infty} V_n + \lim_{n \to +\infty} U_n = 3$$

أي $2l = 3$ و منه $l = \frac{3}{2}$.

الإمتحان الثاني: **EMD2**

التمرين الأول:

I- 1. نعم ؛ 2. لا ؛ 3. لا ؛
4. لا ؛ 5. نعم؛ 6. لا.

II- العلاقة صحيحة من أجل $x=0$ لأنّ: $0 \leq \arcsin 0 \leq 0$.
إذا كان $0<x<1$، لاحظ أنّ التابع $f: t \mapsto \arcsin t$ يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$. و عليه:

$$\exists c \in \left]0,x\right[/ \ f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$$

أي:

$$\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

و بما أنّ $0<c<x$ فإنّ:

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن:

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

و منه:

$$\forall x \in \left[0,1\right[\quad x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

III- 1. لدينا تعريفا:

$$(f \text{ مستمرة عند } 0) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\right)$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin(ax)}{x^2}$$

و هي من الشكل $\frac{0}{0}$
بتطبيق نظرية لوبيتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin(ax)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x}$$

و عليه لدينا حالتان:

- إذا كان $a-1\neq 0$ فإنّ:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x} \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x}$$

و منه $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة.

- إذا كان $a-1=0$ فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+a\cos(ax)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\sin(ax)}{2}=0 \quad \text{(حسب نظرية لوبيتال)}$$

و منه:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

إذن $a=1$.

2. نفرض أنّ $a=1$. لدينا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+\sin(x)}{x^2} & ; \quad x\neq 0\\[2ex] 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

أ. لاحظ أنّ التابع f يقبل الاشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين قابلين للاشتقاق على $\Re^*$.

من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

و هو ما يضمن أنّ f يقبل الاشتقاق عند الصفر. إذن التابع f يقبل الاشتقاق $\Re$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x+x\cos(x)-2\sin(x)}{x^3} & ; \quad x\neq 0\\[2ex] -\dfrac{1}{6} & ; \quad x=0\end{cases}$$

ب. لدينا f يقبل الاشتقاق على $\Re$ (حسب ما سبق) و f' مستمر على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن نسبة تابعين مستمرين على $\Re^*$.

من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos(x)-2\sin(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-2\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

و عليه f' يقبل الاشتقاق بإستمرار على $\Re$. إذن $E=\Re$.

التمرين الثاني:

I- 1. النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للتابعين f و g. لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= [Log(1+x)]^2 = Log(1+x)\times Log(1+x) \\ &= \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \quad (x\to 0) \\ &= x^2+o(x^2) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

$$g(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x^2)} \quad / \quad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x^2\right)\neq 0$$

$$g(x)=\frac{\cos(x)}{1+\sin(x^2)}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x^2+o(x^2)} \quad (x\to 0)$$

بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة و مع إهمال جميع الحدود التي رُتبها أكبر تماما من 2 نجد:

$$g(x)=1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

1. إستنتاج النهاية: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\,g(x)}$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\,g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x\left(1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\frac{o(x^2)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{o(x^2)}{x}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

2. منحنى f يقبل مماسا عند الصفر معادلته $y=0$ و هو يقع تحت منحنى f في جوار 0 لأنّ $x^2\geq 0$ في جوار 0 .
منحنى g يقبل مماسا عند الصفر معادلته $y=1$ و هو يقع فوق منحنى g في جوار 0 لأنّ $-\frac{3}{2}x^2\leq 0$ في جوار 0 .

II- نضع $t=\frac{1}{x}$ $\left(x\to +\infty \Leftrightarrow t\xrightarrow{>}0\right)$
لدينا:

$$\frac{h(x)}{x}=\mathrm{t}\times\mathrm{h}\left(\frac{1}{t}\right)=\sqrt{1+t+t^2}$$

تذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{t^2}{8}+o\left(t^2\right)$$

و عليه:

$$\sqrt{1+t+t^2}=1+\frac{1}{2}t-\frac{3}{8}t^2+o\left(t^2\right)\quad (t\to 0)$$

أي:

$$\mathrm{t}\times \mathrm{h}(t)=1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+o\left(t^2\right)\quad (t\to 0)$$

و بالتالي:

$$\frac{h(x)}{x}=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad (x\to +\infty)$$

نستنتج من النشر المحدود لـ $x\mapsto \frac{h(x)}{x}$ أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ خط مقارب لمنحنى h في جوار $+\infty$. و بما أنّ $\frac{3}{8x}>0$ فإنّ منحنى h يقع فوق الخط المقارب في جوار $+\infty$.

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

I- 1. نستخدم البرهان بالتراجع.

من أجل $n=0$ المتراجحة صحيحة لأنّ $|U_1-U_0|\le|U_1-U_0|$.

نفرض صحة العلاقة من أجل رتبة n و نبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا حسب فرض التمرين:

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|\le k|U_{n+1}-U_n|$$

ثم حسب فرض التراجع:

$$|U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

و منه:

$$|U_{n+2}-U_{n+1}|\le k^{n+1}|U_1-U_0|$$

و عليه:

$$\forall n\in \aleph \quad |U_{n+1}-U_n|\le k^n|U_1-U_0|$$

2. ليكن p و q عددين طبيعيين مع $p\ge q$.

واضح صحة المتراجحة من أجل $p=q$.

من أجل $p>q$ لدينا:

$$\begin{aligned}|U_p-U_q| &\le |U_p-U_{p-1}+U_{p-1}-U_{p-2}+\cdots\cdots-U_{q+1}+U_{q+1}-U_q|\\ &\le |U_p-U_{p-1}|+|U_{p-1}-U_{p-2}|+\cdots+|U_{q+1}-U_q|\\ &\le k^{p-1}|U_1-U_0|+k^{p-2}|U_1-U_0|+\cdots+k^q|U_1-U_0|\\ &\le \left(k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q\right)|U_1-U_0|\end{aligned}$$

لكن:

$$k^{p-1}+k^{p-2}+\cdots+k^q=k^q\left(1+k+\cdots+k^{p-1-q}\right)=k^q\frac{1-k^{p-q}}{1-k}$$

إذن:

$$|U_p-U_q|\le k^q\frac{1-k^{p-q}}{1-k}|U_1-U_0|\le k^q\frac{|U_1-U_0|}{1-k}$$

لأنّ $0<1-k^{p-q}<1$ و $1-k>0$.

3. لدينا مما سبق:

$$0\le|U_p-U_q|\le k^q\frac{|U_1-U_0|}{1-k},\quad \forall p,q\in\aleph\ /\ p>q$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$0\le\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}|U_p-U_q|\le\frac{|U_1-U_0|}{1-k}\lim_{q\to+\infty}k^q$$

و بما أنّ $\lim_{q\to+\infty}k^q=0$ لأنّ $0<k<1$ فرضا إذن حسب قاعدة الحصر فإنّ:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} |U_p - U_q| = 0$$

و هو ما يجعل المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية.

4. (U_n) متقاربة لأنها كوشية و حدودها حقيقية.

II- 1. باستخدام البرهان بالتراجع يمكن التأكد من موجبية حدود المتتالية (U_n).

2. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\begin{aligned} |U_{n+1} - U_n| &= \left|\frac{1}{2+U_n} - \frac{1}{2+U_{n-1}}\right| = \frac{|U_n - U_{n-1}|}{|(2+U_n)(2+U_{n-1})|} \\ &\le \frac{1}{4}|U_n - U_{n-1}| \end{aligned}$$

بأخذ $k=\dfrac{1}{4}$ و باستخدام الجزء (I)، نستنتج أنّ المتتالية (U_n) متقاربة و نهايتها l حل للمعادلة $l=\dfrac{1}{2+l}$ أي $l^2+2l-1=0$. ثم:

$$l^2+2l-1=0 \iff \left(l=-1-\sqrt{2} \ \vee \ l=-1+\sqrt{2}\right)$$

$l=-1-\sqrt{2}$ حل مرفوضا لأنّ $U_n \ge 0$ (حسب 1).

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -1+\sqrt{2}$$

<u>التمرين الثاني</u>:

1. لإيجاد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 2 في جوار 0، يكفي كتابة النشر المحدود للتابع $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} - \cos(x)$ من الرتبة 4 في جوار 0.

تذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

و عليه:

$$\frac{1}{1+x^2} - \cos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4) \quad (x\to 0)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4)\right] = -\frac{1}{2} + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2) \quad (x\to 0)$$

2. استنتاج $\lim_{x\to 0} f(x)$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o(x^2)\right]=-\frac{1}{2}$$

3. f مستمر عند 0 لأنّ $\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2}=f(0)$.

4. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{23}{24}x^2+o(x^2)+\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{23}{24}x+o(x)\right]=0$$

و هو ما يضمن أنّ f قابل للاشتقاق عند 0.

5. بما أنّ f يقبل الاشتقاق عند 0 فإنّ منحنى f يقبل مماسا عند الصفر معادلته $y=-\frac{1}{2}$ (حسب النشر المحدود لـ f في جوار 0)، و هو يقع تحت المنحنى لأنّ $\frac{23}{24}x^2\geq 0$ في جوار 0.

6. لدينا:

$$f(0)=-\frac{1}{2}<0 \qquad ; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)}>0$$

بما أنّ f مستمر على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $f(0)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ ، فحسب نظرية القيم المتوسطة، يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>التمرين الثالث</u>:

حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Log(1+x)-\lambda x}$ حسب قيم الوسيط λ باستخدام النشر المحدود:

تذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

و عليه:

$$Log(1+x)-\lambda x=(1-\lambda)x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Log(1+x)-\lambda x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-\lambda)x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=\begin{cases}\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}} & ; \quad \lambda=1\\[2ex] \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{(1-\lambda)+\frac{o(x)}{x}} & ; \quad \lambda\neq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2 & ; \quad \lambda=1\\ 0 & ; \quad \lambda\neq 1\end{cases}$$

<u>التمرين الرابع</u>:

1. حساب $I(1)$:

$$I(1)=\int_0^1 x e^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

2. ليكن n من $\aleph^*$ كيفي، بأخذ $g(x)=x^{n+1}$ ، $f'(x)=x e^{-x^2}$ و $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ و باستخدام المكاملة بالتجزئة نجد:

$$I(n+2)=\int_0^1 f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$=\left[\frac{-x^{n+1}e^{-x^2}}{2}\right]_0^1+\frac{(n+1)}{2}\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{-1}{2e}+\frac{n+1}{2}I(n)$$

و عليه:

$$\forall n\in \aleph^* \quad I(n+2)=\frac{n+1}{2}I(n)-\frac{1}{2e}$$

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage**

التمرين الأول:

1. يُمكن تراجع بسيط من برهان موجبية حدود المتتاليتين (U_n) و (V_n).

2. نستخدم البرهان بالتراجع مرة أخرى. لدينا $U_0 = 2$ و $V_0 = 1$. و منه القضية محققة من أجل $n = 0$.
نفرض صحة القضية من أجل رتبة n و نبرهن صحّتها من أجل الرتبة $n+1$.
لدينا:

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - \frac{U_n + V_n}{2} = -\frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} < 0$$

و عليه:

$$V_{n+1} < U_{n+1}$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad V_n < U_n$$

3. لدينا:

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2} < 0$$

$$\forall n \in \aleph\ , \quad V_{n+1} - V_n = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - V_n = \frac{2V_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n} > 0$$

(لأنّ $\forall n \in \aleph \quad V_n < U_n$).
إذن المتتالية (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة.

4. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا مما سبق:

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{U_n - V_n}{U_n + V_n} \times \frac{U_n - V_n}{2}$$

و بما أنّ:

$$0 < U_n - V_n \le U_n + V_n$$

فإنّ:

$$\frac{U_n - V_n}{U_n + V_n} \le 1$$

و منه:

$$\frac{U_n - V_n}{U_n + V_n} \times \frac{U_n - V_n}{2} \le \frac{U_n - V_n}{2}$$

إذن:

$$\forall n \in \aleph \quad U_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{U_n - V_n}{2}$$

و منه نستنتج:

$$\forall n\in \mathbb{N} \quad U_{n+1}-V_{n+1}\leq \frac{1}{2}\left(U_n-V_n\right)\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(U_{n-1}-V_{n-1}\right)\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(U_{n-n}-V_{n-n}\right)$$

أي:

$$\forall n\in \mathbb{N} \quad U_{n+1}-V_{n+1}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

إذن بأخذ $k=\frac{1}{2}$ يتحقق المطلوب.

بما أنّ $\forall n\in \mathbb{N} \quad 0\leq U_{n+1}-V_{n+1}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n-V_n\right)=0$ و ذلك حسب قاعدة الحصر.

5. بما أنّ $\left(U_n\right)$ متناقصة و $\left(V_n\right)$ متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n-V_n\right)=0$ ، فإنّ $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ متجاورتان، وعليه فهما متقاربتان نحو نفس النهاية l.

6. لدينا:

$$\forall n\in \mathbb{N} \quad U_{n+1}\times V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}\times\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}=U_nV_n$$

و منه:

$$\forall n\in \mathbb{N} \quad U_nV_n=U_0V_0=2$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_nV_n=\lim_{n\to+\infty}U_n\times\lim_{n\to+\infty}V_n=l^2=2$$

أي:

$$l=-\sqrt{2} \quad \vee \quad l=+\sqrt{2}$$

$l=-\sqrt{2}$ حل مرفوضا لأنّ $\forall n\in \mathbb{N} \quad U_n\geq 0$ (حسب 1).

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=\sqrt{2}$$

7. بما أنّ $\left(U_n\right)$ متناقصة و متقاربة فإنّ:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}U_n=\max_{n\in\mathbb{N}}U_n=U_0=2$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{2}$$

و بما أنّ $\left(V_n\right)$ متزايدة و متقاربة فإنّ:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}V_n=\min_{n\in\mathbb{N}}U_n=V_0=1$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}V_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=\sqrt{2}$$

التمرين الثاني:

1. التابع f قابل للاشتقاق على $\mathfrak{R}^*$ لأنّه عبارة عن جداء و تركيب و مجموع توابع قابلة للاشتقاق.
و من أجل القيمة 0 ، لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(1+x+\sin x\times\sin\frac{1}{x}\right)=1$$

(لاحظ أنّ $\lim_{x\to 0}\left(\sin x\times\sin\frac{1}{x}\right)=0$ لأنّه عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو الصفر).
إذن التابع f يقبل الاشتقاق على $\mathfrak{R}$ و لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases}1+x+\sin x\sin\frac{1}{x}+x\left(1+\cos x\times\sin\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right) & ;\quad x\neq 0\\ \\ 1 & ;\quad x=0\end{cases}$$

2. لدينا f يقبل الاشتقاق على $\mathfrak{R}$ (حسب 1)، ثم f' مستمر على $\mathfrak{R}^*$ لأنّه عبارة عن مجموع و جداء و تركيب توابع مستمرة.
يبقى دراسة إستمرارية f' عند 0.
لدينا:

$$\lim_{x\to 0}f'(x) \text{ غير موجودة}$$

لأنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\sin x\sin\frac{1}{x}+x\left(1+\cos x\times\sin\frac{1}{x}\right)\right]=1$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x\cos\frac{1}{x} \text{ غير موجودة}$$

و عليه f' غير مستمر عند 0.
إذن $E=\mathfrak{R}^*$

التمرين الثالث:

I- ننشر بجوار x_0 حتى الرتبة n:

- $f(x)=\sqrt{1+\sin^2(x)}$ $\qquad (x_0=0,\ n=2)$

تذّكر أنّه في جوار الصفر، لدينا:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$\sin x=x+o(x^2)$$

$$\sin^2 x=x^2+o(x^2)$$

و عليه:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}=1+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\quad (x\to 0)$$

• $g(x)=e^{x\,Log\sqrt{x}}\quad (x_0=1,\ n=2)$

نضع $t=x-1$، إذا كان $x\to 1$ فإنّ $t\to 0$.

و عليه:

$$g(x)=g(t+1)\ =e^{(1+t)Log\sqrt{1+t}}$$

$$=e^{\frac{(1+t)}{2}Log(1+t)}\quad /\quad \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)}{2}Log(1+t)=0$$

تذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$Log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)$$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)$$

و عليه:

$$e^{\frac{(1+t)}{2}Log(1+t)}=e^{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o\left(t^2\right)}=1+\frac{t}{2}+\frac{3}{8}t^2+o\left(t^2\right)\quad (t\to 0)$$

إذن:

$$g(x)=1+\frac{x-1}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)\quad (x\to 1)$$

II - حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)-2\,\mathrm{tg}\,x}{2x-\sin x-\mathrm{tg}\,x}$ باستخدام النشور المحدودة:

نذكّر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

و منه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)-2\,\mathrm{tg}\,x}{2x-\sin x-\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}{-\frac{1}{6}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}=7$$

إمتحانات

2005-2004

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

I- 1. لا ؛ 2. نعم ؛ 3. لا
4. لا ؛ 5. لا ؛ 6. لا

II- يكفي أن نبرهن أنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

و منه

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

بأخذ $n_0 = \left[\left| \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right| \right] + 1$ يتحقق المطلوب.

III- 1. حتى نبيّن أنّ B محدودة من الأعلى في $\mathfrak{R}$ يكفي أن نبيّن أنّه:

$$\exists M \in \mathfrak{R} \ / \ \forall x \in B, \quad x \leq M$$

ليكن x من B. لدينا:

$$x \in B \Rightarrow (x \in A \vee x \in \{a\}) \Rightarrow (x \leq \sup A \vee x = a)$$

بأخذ $M = \max(\sup A, a)$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا: $A \subset B$. و عليه:

$$\sup A \leq \sup B$$

3. نفرض أنّ $a \leq \sup A$ ، عندئذ لدينا:

$$\begin{aligned} \sup B = \sup(A \cup \{a\}) &= \max(\sup A, \sup\{a\}) \\ &= \max(\sup A, a) \\ &= \sup A \end{aligned}$$

التمرين الثاني:

1. لدينا $U_0 > 0$. ثم $U_n = \frac{1}{U_{n-1}^2} > 0 \quad \forall n \geq 1$.

و منه:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 0$$

2. أ. حساب : $W_1 \ , \ Z_1 \ , \ Z_0 \ , \ W_0$:

$$W_0 = U_1 = \frac{1}{U_0^2} = 4 \quad ؛ \quad Z_0 = U_0 = \frac{1}{2}$$

$$W_1 = U_3 = \frac{1}{U_2^2} = 256 \quad ؛ \quad Z_1 = U_2 = \frac{1}{U_1^2} = \frac{1}{16}$$

ب. لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+1} = U_{2n+3} = \frac{1}{U_{2n+2}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{U_{2n+1}^2}\right)^2} = U_{2n+1}^4 = W_n^4$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_{n+1} = U_{2n+2} = \frac{1}{U_{2n+1}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{U_{2n}^2}\right)^2} = U_{2n}^4 = Z_n^4$$

ج. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n = 0$ ، لدينا:

$$W_0 = 4 > 1 \quad \wedge \quad Z_0 = \frac{1}{2} < 1$$

نفرض أنّ $Z_n < 1$ و $W_n > 1$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $Z_{n+1} < 1$ و $W_{n+1} > 1$.

لدينا: $W_{n+1} = W_n^4$ و $Z_{n+1} = Z_n^4$

و بما أنّ: $0 < Z_n < 1$ و $W_n > 1$

فإنّ: $Z_n^4 < 1$ و $W_n^4 > 1$

و عليه: $Z_{n+1} < 1$ و $W_{n+1} > 1$

إذن:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (Z_n < 1 \quad \wedge \quad W_n > 1)$$

د. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$W_{n+1} - W_n = W_n^4 - W_n = W_n\left(W_n^3 - 1\right) > 0$$

$$Z_{n+1} - Z_n = Z_n^4 - Z_n = Z_n\left(Z_n^3 - 1\right) < 0$$

لأنّ: $0 < Z_n < 1$ و $W_n > 1$.

و منه (W_n) متزايدة و (Z_n) متناقصة.

ه. نفرض أنّ (W_n) متقاربة نحو l و (Z_n) متقاربة نحو l'. بما أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(Z_{n+1} = Z_n^4 \quad \wedge \quad W_{n+1} = W_n^4\right)$$

فإنّ:

$$l' = l'^4 \quad \wedge \quad l = l^4$$

أي:

$$\left(l'=1 \quad \vee \quad l'=0\right) \text{ و } \left(l=1 \quad \vee \quad l=0\right)$$

و. بما أنّ (Z_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فإنّها متقاربة نحو حدّها الأدنى. من جهة أخرى المتتالية (W_n) متزايدة فلو كانت متقاربة لكانت تتقارب نحو حدّها الأعلى، و بما أنّ $W_n > 1$ من أجل أي عدد طبيعي n فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} W_n \neq 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n \neq 0$$

و عليه (W_n) متباعدة.

ز. حسب ما سبق $\lim_{n\to+\infty} Z_n = 1$ أو $\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$ و بما أنّ:

$$\forall n \in \aleph \quad 0 < Z_n < 1 \text{ و } \lim_{n\to+\infty} Z_n = \inf_{n\in\aleph} Z_n$$

فإنّ $\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$.

لدينا أيضا مما سبق (W_n) متزايدة و متباعدة و منه $\lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty$.

إذن المتتالية (U_n) متباعدة لأنّ $\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$.

الإمتحان الثاني: EMD2

التمرين الأول:

I- لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{x}(\sin x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\quad (x\to 0)$$

$$=1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

و عليه التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة 2 في جوار الصفر. أما التابع g لا يقبل نشرا محدودا من أي رتبة في جوار الصفر لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$.

II- 1. لدينا تعريفا:

f مستمرة عند x_0 $\Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0;\forall x\in D_f,|x-x_0|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon\right)$

ليكن ε مو جب تماما.

لدينا:

$$\forall x\in D_f,\quad |f(x)-f(0)|=\left|\sqrt{1+x}-1\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}\right|\le|x|$$

(لأنّ $1+\sqrt{1+x}>1$)

إذن حتى يكون $|f(x)-f(0)|\le\varepsilon$ يكفي أن يكون $|x|\le\varepsilon$.

و عليه بأخذ $\delta=\varepsilon$ يتحقق المطلوب.

2. من أجل $x=0$ فإنّ $\sqrt{1+0}\le 1+\frac{0}{2}$ محققة.

من أجل $x>0$ التابع f المعرّف بـ $f(t)=\sqrt{1+t}$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$.

و منه باستخدام نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$$

أي:

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{x}{2\sqrt{1+c}}$$

و بما أنّ $0<c$ فإنّ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+c}}<1$$

و عليه:

$$\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

أي:

$$\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

و منه:

$$\forall x \geq 0 \quad \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$$

III- لدينا:

$$\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b=\frac{x\cos x+a\,Log(1+x)+b\,x\,Log(1+x)}{x\,Log(1+x)}$$

لاحظ أنّ:

$$x\,Log(1+x) \underset{x\to 0}{\approx} x^2$$

و عليه يكفي استخدام النشور المحدودة في البسط و المقام من الرتبة 2 في جوار الصفر.
نذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

و عليه:

$$x\cos x+a\,Log(1+x)+b\,x\,Log(1+x)=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+o\left(x^2\right) \quad (x\to 0)$$

$$x\,Log(1+x)=x^2+o\left(x^2\right) \quad (x\to 0)$$

و منه:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+a)}{x}+\left(b-\frac{a}{2}\right)+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}{1+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}$$

و عليه لدينا حالتان:

- إذا كان $a \neq -1$ فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right) \text{ غير موجودة}$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{1+a}{x} \neq \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{1+a}{x}$$

- إذا كان $a=-1$ فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=b-\frac{a}{2}=b+\frac{1}{2}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{Log(1+x)}+\frac{a}{x}+b\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \wedge \\ b-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \wedge \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

التمرين الثاني:

1. حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} Log(b+x)=Logb$$

و

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(x^2\cos\frac{1}{x}+\frac{\sin a\,x}{x}\right)=a$$

لأنّ: $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}=0$ (جداء تابعين أحدهما يؤول نحو الصفر و الآخر محدود)، و

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin a\,x}{x}=\lim_{x\to 0} a\frac{\sin a\,x}{ax}=a$.

و عليه حتى يكون f مستمرا عند الصفر يلزم و يكفي أن يكون $a=Logb=0$، أي: $a=0$ و $b=1$

2. من أجل $a=0$ و $b=1$، لدينا:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & ; \quad x<0 \\ 0 & ; \quad x=0 \\ Log(1+x) & ; \quad x>0 \end{cases}$$

أ. دراسة قابلية اشتقاق f عند الصفر. لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x\cos\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{Log(1+x)}{x}=1$$ (حسب نظرية لوبيتال)

و عليه f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر.

ب. حساب $f'(x)$ من أجل $x\neq 0$. لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & ; \quad x<0 \\ \\ \frac{1}{1+x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

ج. f' لا يقبل تمديدا بالاستمرار عند الصفرلأنّ:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sin\frac{1}{x}$ غير موجودة

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة :

- $\int \cos x \, Log(1+\cos x)\, dx$:

إذا فرضنا $f'(x)=\cos x$ ، $g(x)=Log(1+\cos x)$ و $f(x)=\sin x$ طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\int \cos x \, Log(1+\cos x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + \int (1-\cos x) dx$$

$$= \sin x \, Log(1+\cos x) + x - \sin x + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

- $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$:

لدينا:

$$\frac{1}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

و عليه:

$$\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx = \frac{1}{4} \times \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{4} \mathrm{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \lambda \quad / \quad \gamma \in \Re$$

- $\int \frac{e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sqrt{4-x^2}} dx$:

نضع $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ فيكون $dt = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ و يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$\int \frac{e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int e^t dt \quad = e^t + \lambda$$

$$= e^{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار∞- للتابع $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x} e^{\frac{1}{x}}$ **:**

نضع: $t = \frac{1}{x}$ عندئذ:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}} e^t = \frac{1}{t}\left[\frac{e^t}{1+t}\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1+t}\right] \quad (t \to 0)$$

بما أنّ $\lim_{t\to 0}(1+t) = 1 \neq 0$ ، فبإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$\frac{1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1+t} = 1+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left[1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right] = \frac{1}{t}+\frac{t}{2}+o(t) \quad (t \to 0)$$

إذن:

$$f(x) = x+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to -\infty)$$

نستنتج أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ خط مقارب لمنحنى f في جوار $-\infty$.

و بما أنّ $\frac{1}{2x} < 0$ في جوار $-\infty$ ، فإنّ منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

1. حل المعادلة $f(x) = x$ في $]0,+\infty[$ حيث $f(x) = \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$:

لدينا:

$$f(x) = x \iff \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right) = x \iff x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2}$$

2. نضع $l = \sqrt[3]{2}$. نبرهن أنّ f متزايد تماما على $[l, 2]$:

لدينا:

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^3-2}{x^3}\right)>0$$

لأنّ $x>\sqrt[3]{2}$. و عليه f متزايد تماما على $\left]\sqrt[3]{2}\,,2\right]$.

3. نستخدم البرهان بالتراجع:

لدينا $l<U_0\leq 2$ محققة.

نفرض صحة الخاصية من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$.

لدينا $l<U_n\leq 2$ و بما أنّ f متزايد تماما على $]l\,,2]$ ، فإنّ:

$$f(l)<f(U_n)\leq f(2)$$

ثمّ $f(l)=l$ و $f(2)=\frac{3}{2}<2$ و منه:

$$l<f(U_n)\leq 2$$

أي:

$$l<U_{n+1}\leq 2$$

إذن:

$$\forall n\in \aleph \quad l<U_n\leq 2$$

4. ليكن n من $\aleph$ كيفي. لدينا:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}\left(U_n+\frac{1}{U_n^2}\right)-U_n=\frac{2-U_n^3}{3U_n^2}<0$$

لأنّ $U_n>\sqrt[3]{2}$. و عليه (U_n) متناقصة.

بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فإنها متقاربة.

5. حساب نهاية (U_n).

بما أنّ (U_n) متقاربة في $\Re$ فإنّ نهايتها l' هي حل للمعادلة $l'=\frac{2}{3}\left(l'+\frac{1}{l'^2}\right)$.

(لاحظ أنّ $l'\neq 0$ لأنّ $\forall n\in \aleph \quad \sqrt[3]{2}<U_n\leq 2$)

لدينا:

$$l'=\frac{2}{3}\left(l'+\frac{1}{l'^2}\right)\Leftrightarrow l'^3=2\Leftrightarrow l'=\sqrt[3]{2}$$

و عليه:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\sqrt[3]{2}$$

بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فإنّ:

$$\sup_{n\in\aleph}U_n=\max_{n\in\aleph}U_n=U_0=2$$

$$\inf_{n\in\aleph}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_n=\sqrt[3]{2}$$

و بما أنّ $\sqrt[3]{2}\notin\{U_n\,,n\in\aleph\}$ فإنّ $\min_{n\in IN}U_n$ غير موجود.

التمرين الثالث:

1. ليكن x من المجال $[1,+\infty[$. التابع $t \mapsto f(t)$ مستمر على المجالين $[x,x+1]$ و $[x-1,x]$ و قابل للاشتقاق على $]x,x+1[$ و $]x-1,x[$.

إذن باستخدام نظرية التزايدات المنتهية فإنه يوجد c من $]x,x+1[$ و يوجد c من $]x-1,x[$ بحيث:

$$f(x+1)-f(x)=f'(c)$$

$$f(x)-f(x-1)=f'(c')$$

و بما أنّ $c>x$ و $0\le c'<x$ و f' متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ فإنّ $f'(c)>f'(x)$ و $f'(c')<f'(x)$ ، و بالتالي:

$$f(x+1)-f(x)>f'(x) \quad \text{و} \quad f(x)-f(x-1)<f'(x)$$

أي:

$$\forall x\ge 1 \quad f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$$

2. نفرض $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

أ. لدينا:

$$f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]<\lim_{x\to+\infty} f'(x)<\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$$

و بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x-1)=\lim_{x\to+\infty} f(1+x)=0$$

فإنّ:

$$0\le \lim_{x\to+\infty} f'(x)\le 0$$

أي $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$ و ذلك حسب قاعدة الحصر.

ب. بما أنّ f' متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$ فإنّ:

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\quad f'(x)\le 0$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$f(0)$ $\searrow$ 0

و منه f متناقص على $[0,+\infty[$.

و بما أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإنّ:

$$\forall x\in[0,+\infty[\quad f(x)\ge 0$$

التمرين الرابع:

1. حساب I_0 و I_1.

$$I_0 = \int dx = x + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\left(x^2+4\right)} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

2. ليكن $n \in \aleph^*$ كيفي. لدينا:

$$I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^n} dx = \int 1 \times \left(x^2+4\right)^{-n} dx$$

إذا فرضنا $f'(x)=1$ ، $g(x)=\left(x^2+4\right)^{-n}$ و $f(x)=x$ طبّقنا دستور المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
I_n &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \\
&= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n\int \frac{x^2+4-4}{\left(x^2+4\right)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^n} dx - 8n\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} + 2n I_n - 8n I_{n+1}
\end{aligned}$$

و منه:

$$(1-2n)I_n = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} - 8n I_{n+1}$$

أي:

$$I_n = \frac{1}{1-2n}\left[\frac{x}{\left(x^2+4\right)^n} - 8n I_{n+1}\right]$$

3. بتعويض n بـ 1 نجد:

$$I_1 = -\left[\frac{x}{x^2+4} - 8 I_2\right]$$

و منه:

$$I_2 = \frac{1}{8}\left[I_1 + \frac{x}{x^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{x^2+4}\right] + \lambda \quad / \quad \lambda \in \Re$$

الإمتحان الإستدراكي: **Rattrapage**

التمرين الأول:

I- 1. استمرارية التابع f على مجموعة تعريفه.

لاحظ أنّ مجموعة تعريف f هي $\Re$. التابع $x \mapsto x\cos\frac{1}{x}$ مستمر على $]-\infty,0[$ لأنّه عبارة عن جداء و تركيب توابع مستمرة. ثمّ التابع $x \mapsto \sin(\text{sh}\, x)$ مستمر على $]0,+\infty[$ لأنّه عبارة عن تركيب تابعين مستمرين. و منه f مستمر على $\Re^*$.

من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

لأنّه لدينا جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو الصفر.

ثم:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sin(\text{sh}\, x) = \sin(\text{sh}\, 0) = 0$$

و عليه:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0)$$

و منه f مستمر على $\Re$.

2. قابلية اشتقاق التابع f على مجموعة تعريفه ثم حساب التابع المشتق في حالة وجوده.

واضح أنّ f قابل للاشتقاق على $\Re^*$ لأنّه عبارة عن جداء و تركيب توابع قابلة للاشتقاق.

ثم من أجل القيمة 0، لدينا:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{(غير موجودة)}$$

و عليه f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر.

إذن f يقبل فقط الاشتقاق على $\Re^*$ و لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x < 0 \\ \\ \text{ch}(x)\, \cos(\text{sh}\, x) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

3. من أجل $x = 0$، واضح أنّ المتراجحة محققة.

و من أجل $x > 0$، التابع $t \mapsto \sin(\text{sh}\, t)$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$، فهو إذن يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[0,x]$، و منه يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$\sin(\text{sh}(x)) = \text{ch}(c)\, \cos(\text{sh}(c))\, x$$

ومنه:

$$\left|\sin(\mathrm{sh}(x))\right| = \mathrm{ch}(c)\left|\cos(\mathrm{sh}(c))\right| x$$

و بما أنّ:

$$\left|\cos(\mathrm{sh}(c))\right| \le 1$$

و $\quad 1 < \mathrm{ch}(c) < \mathrm{ch}(x)$

لأنّ $0 < c < x$ و التابع ch متزايد تماما على $]0,+\infty[$ ، فإنّ:

$$\mathrm{ch}(c)\left|\cos(\mathrm{sh}(c))\right| \le ch(x)$$

و منه:

$$\left|\sin(\mathrm{sh}(x))\right| < x\,\mathrm{ch}(x)$$

إذن:

$$\forall x \ge 0 \quad \left|\sin(shx)\right| \le x\,chx$$

II- لاحظ أنّه في جوار $-\infty$ ، لدينا:

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}$$

نضع $t = \frac{1}{x}$ عندئذ:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\cos t \; = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \quad (t \to 0)$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f(x) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to -\infty)$$

نستنتج أنّه في جوار $-\infty$ يوجد خط مقارب معادلته $y = x$.

و بما أنّ $-\frac{1}{2x} > 0$ في جوار $-\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $-\infty$.

التمرين الثاني:

$$f(x) = Log\left(\cos^2 x\right) - \frac{2x + \alpha x^2}{1 + x}, \quad \alpha \in \Re$$

1. بما أنّ $\lim_{x \to 0}(1 + x) = 1 \ne 0$ فباستخدام القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$\frac{2x + \alpha x^2}{1 + x} = 2x + (\alpha - 2)x^2 + (2 - \alpha)x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

يبقى نشر التابع $Log\left(\cos^2 x\right)$.
تذّكر أنّه في جوار الصفر لدينا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

و عليه:

$$Log(\cos^2 x)=Log(1-x^2+o(x^3))\quad (x\to 0)$$

و بما أنّ $\lim_{x\to 0}(-x^2+o(x^3))=0$ و $x\mapsto Log(1+x)$ مستمر عند 0 فباستخدام تركيب النشور المحدودة نجد:

$$Log(\cos^2 x)=-x^2+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

إذن:

$$f(x)=-2x+(1-\alpha)x^2+(\alpha-2)x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

2. نستنتج أنّ معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=-2x$.
بالنسبة لوضعية هذا الأخير لدينا الحالات التالية:

- في حالة $1-\alpha>0$ أي $\alpha<1$ فإنّ منحنى f يقع فوق المماس في جوار الصفر.
- في حالة $1-\alpha<0$ أي $\alpha>1$ فإنّ منحنى f يقع تحت المماس في جوار الصفر.
- في حالة $\alpha=1$ لدينا:

$$f(x)-(-2x)=-x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

و عليه فإنّ منحنى f يقع تحت المماس من أجل $x\geq 0$ و فوقه من أجل $x\leq 0$.

3. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Log(\cos^2 x)}{1-\mathrm{ch}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=2$$

التمرين الثالث:

- $\int x^2\,\mathrm{arctg}(x)\,dx$

بأخذ $f'(x)=x^2$ ، $g(x)=arctg(x)$ و $f(x)=\frac{x^3}{3}$ ، و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\int x^2\,\mathrm{arctg}(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{3}\int\frac{x(x^2+1-1)}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}Log\left(1+x^2\right)+\lambda \quad / \quad \lambda\in\Re$$

- $\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$

لدينا:

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4=4\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right]$$

و عليه:

$$\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt \quad / \quad t=\frac{x-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+\lambda \quad / \quad \lambda\in\Re$$

إمتحانات

2006-2005

الإمتحان الأول: EMD1

التمرين الأول:

1. يكفي أن نبرهن أنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph^* \; / \; \forall n \in \aleph \; , \; n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - 1| \leq \varepsilon$$

ليكن ε مو جب تماما. لدينا:

$$|U_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

و منه:

$$|U_n - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

بأخذ $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ يتحقق المطلوب.

2. لدينا من أجل أي عدد طبيعي غير معدوم n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

و منه (U_n) متزايدة.

3. أ. بما أنّ المتتالية (U_n) متقاربة فهي محدودة، و عليه A محدودة في $\Re$.

ب. بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فإنّها متقاربة نحو حدّها الأعلى، و عليه:

$$SupA = \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

$$MinA = InfA = U_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

و بما أنّ $1 \notin A$ (لأن المعادلة $1 - \frac{1}{n} = 1$ لا حل لها في $\aleph$)، فإنّ: $MaxA$ غير موجود.

التمرين الثاني:

1. حتى نبيّن أنّ λA محدودة من الأعلى في $\Re$ يكفي أن نبيّن أنّه:

$$\exists M \in \Re \, / \, \forall x \in \lambda A \quad x \leq M$$

ليكن x من λA. لدينا:

$$(x \in \lambda A) \Leftrightarrow (x = \lambda a \, / \, a \in A)$$

و بما أنّ A محدودة من الأعلى في $\Re$ فرضا فإنّ:

$$a \leq SupA$$

و عليه:

$$\lambda a \leq \lambda SupA$$

(لأنّ $0 < \lambda$)

إذن:

$$\forall x \in \lambda A \quad x \leq \lambda SupA$$

بأخذ $M = \lambda SupA$ يتحقق المطلوب.

2. حتى نبرهن أنّ $Sup(\lambda A)=\lambda SupA$ يكفي أن نبرهن أنّ:
$$\forall \varepsilon>0\,,\exists b\in \lambda A: \lambda SupA-\varepsilon<b\leq \lambda SupA$$
ليكن ε مو جب تماما. بإستخدام الخاصية المميزة للحد الأعلى لـ A في $\Re$ من أجل $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ (لأنّ $\frac{\varepsilon}{\lambda}>0$)، فإنّه يوجد a من A يحقق:
$$SupA-\frac{\varepsilon}{\lambda}<a\leq SupA$$
و عليه:
$$\lambda SupA-\varepsilon<\lambda a\leq \lambda SupA$$
بأخذ $b=\lambda a$ يتحقق المطلوب.

التمرين الثالث:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا: $1\leq U_0\leq 2$ صحيحة لأنّ $U_0=1$.
نفرض أنّ $1\leq U_n\leq 2$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $1\leq U_{n+1}\leq 2$.
لدينا:
$$\begin{aligned}1\leq U_n\leq 2 &\Rightarrow 1\leq U_n^2\leq 4\\ &\Rightarrow \frac{1}{6}\leq\frac{U_n^2}{6}\leq\frac{4}{6}\\ &\Rightarrow 1\leq 1+\frac{1}{6}\leq\frac{U_n^2}{6}+1\leq\frac{2}{3}+1\leq 2\\ &\Rightarrow 1\leq U_{n+1}\leq 2\end{aligned}$$
إذن:
$$\forall n\in ℵ \quad 1\leq U_n\leq 2$$

2. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا:
$$|U_1-U_0|=\left|\frac{U_0}{6}+1-1\right|=\frac{1}{6}\leq\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^0$$
إذن القضية صحيحة من أجل $n=0$.
نفرض أنّ $|U_{n+1}-U_n|=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل رتبة n و نبرهن أنّ $|U_{n+2}-U_{n+1}|=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.
لدينا:
$$\begin{aligned}|U_{n+2}-U_{n+1}| &=\left|\frac{U_{n+1}^2}{6}+1-\frac{U_n^2}{6}-1\right|\\ &=\frac{1}{6}\left|U_{n+1}^2-U_n^2\right|\\ &=\frac{1}{6}|U_{n+1}-U_n||U_{n+1}+U_n|\end{aligned}$$
ثم $1\leq U_n\leq 2$ و $1\leq U_{n+1}\leq 2$ حسب السؤال الأول.
و منه:

$$\left|U_{n+1}+U_n\right|\le 4$$

إذن

$$\left|U_{n+2}-U_{n+1}\right|=\frac{1}{6}\left|U_{n+1}-U_n\right|\left|U_{n+1}+U_n\right|$$

$$\le \frac{1}{6}\times 4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$ (حسب فرض التراجع)

$$\le \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

و هو المطلوب.

3. ليكن p و q عددين طبيعيين مع $p\ge q$.
واضح صحة المتراجحة من أجل $p=q$.
من أجل $p>q$ لدينا:

$$\left|U_p-U_q\right|=\left|U_p-U_{p-1}+U_{p-1}-U_{p-2}+\cdots\cdots-U_{q+1}+U_{q+1}-U_q\right|$$

$$\le\left|U_p-U_{p-1}\right|+\left|U_{p-1}-U_{p-2}\right|+\cdots+\left|U_{q+1}-U_q\right|$$

$$\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-2}+\cdots+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}$$

$$\le\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-2}+\cdots+\frac{2}{3}+1\right)$$

لكن:

$$1+\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q-1}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}\right)$$

إذن:

$$\left|U_p-U_q\right|\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}$$

لأنّ $1 > 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{p-q} > 0$.

4. حتى نبين أن المتتالية (U_n) متقاربة يكفي أن نبين أنها متتالية كوشية لأن حدودها حقيقية.
لدينا مما سبق:

$$0\le\left|U_p-U_q\right|\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{q},\quad \forall p,q\in \aleph\ /\ p>q$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$0\le\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p-U_q\right|\le\frac{1}{2}\lim_{q\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{q}$$

و بما أنّ $\lim_{q\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^q = 0$ لأنّ $0<\frac{2}{3}<1$ فرضا إذن حسب قاعدة الحصر فإنّ:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left|U_p - U_q\right| = 0$$

و هو ما يجعل المتتالية $(U_n)_{n\in ℵ}$ كوشية، و بالتالي فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.

بما أنّ:

$$\forall n\in ℵ \quad U_{n+1} = \frac{U_n^2}{6}+1$$

فإنّ:

$$l = \frac{l^2}{6}+1$$

أي:

$$l^2 - 6l + 6 = 0$$

ثم:

$$l^2 - 6l + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(l = 3-\sqrt{3} \;\vee\; l = 3+\sqrt{3}\right)$$

$l = 3+\sqrt{3}$ حل مرفوض لأنّ $1\le l\le 2$ (حسب 1).

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 3+\sqrt{3}$$

الإمتحان الثاني: EMD2

<u>**التمرين الأول**</u>:

***I*-** 1. لا ؛ 2. نعم ؛ 3. لا ؛ 4. لا ؛ 5. لا ؛ 6. لا.

***II*-** يكفي أن نبرهن أنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \Re , |x-0| \le \delta \Rightarrow |x^2+3-3| \le \varepsilon$$

ليكن ε موجب تماما. لدينا:

$$|x^2+3-3| = |x^2| = x^2$$

و منه:

$$|x^2+3-3| \le \varepsilon \Leftrightarrow x^2 \le \varepsilon \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{\varepsilon}$$

و عليه بأخذ $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ يتحقق المطلوب.

***III*-** من أجل $x=0$ فإنّ $0 \le \frac{\pi}{2} - \arccos 0 \le \frac{0}{\sqrt{1-0^2}}$ محققة لأنّ $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

من أجل x من المجال $]0,1[$ التابع f المعرّف بـ $f: t \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos t$ مستمر على $[0,x]$ و قابل للاشتقاق على $]0,x[$.

و منه باستخدام نظرية التزايدات المنتهية يوجد c من المجال $]0,x[$ يحقق:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$$

أي:

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

و بما أنّ $0 < c < x$ فإنّ:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

و عليه:

$$x < \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي:

$$x < \frac{\pi}{2} - \arccos x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

و منه:

$$\forall x \ge 0 \quad x \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>**التمرين الثاني**</u>:

1. لاحظ أنّ: $ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\approx} \frac{x^2}{2}$

و عليه لإيجاد النشر المحدود للتابع f من الرتبة 3 يكفي نشر تابع البسط و المقام من الرتبة 2 في جوار 0.

نذّكر أنّه في جوار 0 لدينا:

$$ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$sh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

و عليه:

$$x\,ch(x)-sh(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)\quad (x\to 0)$$

$$ch(x)-1=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\quad (x\to 0)$$

و منه:

$$f(x)=\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+o(x^5)}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}=\frac{\frac{x}{3}+\frac{x^3}{30}+o(x^3)}{\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)}$$

و بماأنّ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}\neq 0$ فإنه بإجراء القسمة حسب القوى المتصاعدة نجد:

$$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

1. حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3)\right)=0$$

و عليه $f(0)=0$ ، أي $l=0$.

2. أ. لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}+\frac{x^2}{90}+o(x^2)\right)=\frac{2}{3}$$

و عليه التابع f يقبل الإشتقاق عند 0.

ب. نستنتج أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ مماس لمنحنى f عند 0.

- من أجل $x>0$ فإنّ $\frac{x^3}{90}>0$، و عليه منحنى f يقع فوق المماس في جوار 0.
- من أجل $x<0$ فإنّ $\frac{x^3}{90}<0$، و عليه منحنى f يقع تحت المماس في جوار 0.

التمرين الثالث:

حساب التكاملات المطلوبة:

- $\int e^{\sin x}\cos x\ dx$:

نضع $t=\sin x$ فيكون $dt=\cos x\,dx$ و يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$\int e^{\sin x}\cos x\ dx=\int e^{t}\,dt=e^{t}+c\quad / \quad c\in\Re$$
$$=e^{\sin x}+c\quad / \quad c\in\Re$$

- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$:

نضع $t=\sin x$ فيكون $dt=\cos x\,dx$ ، و منه:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\int_{0}^{1}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}$$

- $\int\frac{Logx}{x}dx$:

نضع $t=Logx$ فيكون $dt=\frac{dx}{x}$ ، و منه:

$$\int\frac{Logx}{x}dx=\int t\,dt=\frac{t^{2}}{2}+c\quad / \quad c\in\Re$$
$$=\frac{(Logx)^{2}}{2}+c\quad / \quad c\in\Re$$

- $\int\frac{1}{x^{2}+2x-3}dx$:

لدينا:

$$\frac{1}{x^{2}+2x-3}=\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

و عليه:

$$\int\frac{1}{x^{2}+2x-3}dx=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(Log|x-1|-Log|x+3|\right)+c\quad / \quad c\in\Re$$

الإمتحان الشامل: **Synthèse**

التمرين الأول:

1. من أجل n من $\aleph$ كيفي، لدينا:

$$U_n > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{\alpha}{U_{n-1}}\right) > \sqrt{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow U_{n-1}^2 + \alpha > 2\sqrt{\alpha}\,U_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow U_{n-1}^2 - 2\sqrt{\alpha}\,U_{n-1} + \alpha > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(U_{n-1} - \sqrt{\alpha}\right)^2 > 0$$

و بماأن القضية الأخيرة دائما محققة في $\Re$ فالقضية الأولى صحيحة.

2. لدينا من أجل أي عدد طبيعي n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{\alpha}{U_n}\right) - U_n = \frac{U_n^2 + \alpha - 2U_n^2}{2U_n}$$
$$= \frac{\alpha - U_n^2}{2U_n} < 0$$

لأنّ $U_n > \sqrt{\alpha}$ $\forall n \in \aleph$، أي $U_n^2 > \alpha$ $\forall n \in \aleph$.
إذن (U_n) متناقصة.

3. بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة.
4. نضع: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.

لديناً:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{\alpha}{U_n}\right)$$

بالمرور إلى النهاية لما n يؤول نحو $+\infty$ نجد:

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right)$$

لأنّ $l \geq \sqrt{\alpha}$، أي $l \neq 0$.
و عليه:

$$l^2 = \alpha$$

ثم:

$$l^2 = \alpha \Leftrightarrow \left(l = +\sqrt{\alpha} \vee l = -\sqrt{\alpha}\right)$$

$l = -\sqrt{\alpha}$ حل مرفوض لأنّ $l \geq \sqrt{\alpha}$ (حسب 1).
إذن $l = -\sqrt{\alpha}$.
بما أنّ (U_n) متناقصة فإنّ:

$$\underset{n\in\aleph}{Max}U_n = \underset{n\in\aleph}{Sup}U_n = U_0$$

و بما أنّ (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي إذن متقاربة نحو حدها الأدنى، أي:

$$\underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{\alpha}$$

$\underset{n\in\aleph}{Min}U_n$ غير موجود لأنّ $U_n > \sqrt{\alpha}\quad \forall n\in\aleph$.

التمرين الثاني:

1. لدينا:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{x}\times\sin\frac{1}{x}\right]$$

ثم $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$ تابع محدود،

و $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1+o(x)-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x} = 0$$

إذن لدينا جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول نحو 0، وعليه $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

لدينا أيضا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x-1}{x}\times\sin\frac{1}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left((\cos x-1)\times\sin\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\right]$$

ثم $x\mapsto(\cos x-1)\times\sin\frac{1}{x}$ تابع محدود و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$، وعليه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. حتى يكون f مستمرا عند 0 يلزم و يكفي أن يكون: $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$.

لدينا $f(0) = 0$، ثم حسب ماسبق: $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

و منه f مستمر عند 0.

3. أ.لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}(n\pi)^2\left(\cos\frac{1}{n\pi}-1\right)\sin(n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

لأنّ $\sin(n\pi) = 0\quad \forall n\in\aleph$.

$$\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(y_n)}{y_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2\left(\cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = +\infty\times0$$

(حالة عدم التعيين **)**

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+o\left(x^2\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$$

و بما أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=0$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=-\frac{1}{2}$$

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}g\left(y_n\right)=-\frac{1}{2}$$

ب. بما أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=0$$

و

$$\lim_{n\to+\infty}g\left(x_n\right)\neq\lim_{n\to+\infty}g\left(y_n\right)$$

فإنّ $\lim_{n\to+\infty}g\left(y_n\right)$ غير موجودة .

ج. لدينا تعريفا:

$$\left(f \text{ يقبل الإشتقاق عند } 0\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=l\in\Re\right)$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)$$ غير موجودة

و منه f لا يقبل الإشتقاق عند 0.

التمرين الثالث:

1. النشر المحدود المعمّم من الرتبة 1 في جوار $+\infty$ و $-\infty$ للتابع $f:x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$:

نضع: $t=\frac{1}{x}$، عندئذ:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=e^t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}=\frac{e^t}{|t|}\sqrt{1+2t}$$

و عليه لإيجاد النشر من الرتبة 1 يكفي نشر التابع $t\mapsto e^t\sqrt{1+2t}$ من الرتبة 2.

لدينا:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و منه:

$$\sqrt{1+2t} = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و

$$e^t\sqrt{1+2t} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\left(1 + t - \frac{1}{2}t^2\right) + o(t^2)$$
$$= 1 + 2t + t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

و عليه:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{|t|}\left(1 + 2t + t^2\right) + o(t) \quad (t \to 0)$$

أي:

$$f(x) = |x|\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(\frac{1}{x} \to 0\right)$$

إذن:

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

$$f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to -\infty)$$

2. نستنتج أنه في جوار $+\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y = x + 2$ ، و بما أنّ $\frac{1}{x} > 0$ في جوار $+\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $+\infty$.
ثم في جوار $-\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y = -x - 2$ ، و بما أنّ $-\frac{1}{x} > 0$ في جوار $+\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $-\infty$.

<u>التمرين الرابع</u>:

$$y' - 5y = 5Logx - \frac{1}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

1. لدينا:

$$y' - 5y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 5 \quad (y \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow Log|y| = 5x + c \;\; / \quad c \in \Re$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^c e^{5x} \;\; / \quad c \in \Re$$
$$\Leftrightarrow y = k e^{5x} \;\; / \quad k \in \Re^*$$

ثم التابع الصفري هو أيضا حل للمعادلة $y' - 5y = 0$.

و عليه الحل العام للمعادلة $y^{'} - 5y = 0$ هو: $y_1 : x \mapsto k e^{5x} \ / \quad k \in \Re^*$

2. من أجل التابع $y_2 : x \mapsto -Logx$ ، لدينا:

$$y_2^{'} - 5y_2 = -\frac{1}{x} + 5Logx$$

و منه التابع y_2 حل خاص للمعادلة التفاضلية (I).

3. الحل العام للمعادلة (I) هو:

$$y = y_1 + y_2$$

أي:

$$y = k e^{5x} - Logx \ / \quad k \in \Re$$

الإمتحان الإستدراكي: Rattrapage

التمرين الأول:

1. نستخدم البرهان بالتراجع. من أجل $n=0$، لدينا: $1<U_0=2<6$ صحيحة.
نفرض صحة القضية $1<U_n<2$ من أجل الرتبة n و نبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن $1<U_{n+1}<6$.
لدينا:

$$U_{n+1}=\frac{7U_n-6}{U_n}=7-\frac{6}{U_n}$$

لأنّ $U_n\neq 0$ حسب فرض التراجع.
و من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned}1<U_n<6 &\Rightarrow \frac{1}{6}<\frac{1}{U_n}<1\\ &\Rightarrow -6<-\frac{6}{U_n}<-1\\ &\Rightarrow 1<7-\frac{1}{U_n}<6\\ &\Rightarrow 1<U_{n+1}<6\end{aligned}$$

إذن:

$$\forall n\in \aleph \quad 1<U_n<6$$

2. دراسة رتابة (U_n). لدينا:

$$\forall n\in \aleph \quad U_{n+1}-U_n=\frac{7U_n-6}{U_n}-U_n=\frac{-U_n^2+7U_n-6}{U_n}$$

بما أنّ $\forall n\in \aleph \quad U_n>0$ فإنّ إشارة $U_{n+1}-U_n$ هي من نفس إشارة $-U_n^2+7U_n-6$.
لدينا:

$$-x^2+7x-6=0\Leftrightarrow (x=1 \ \vee \ x=6)$$

و بما أنّ $\forall n\in \aleph \quad 1<U_n<6$ فإنّ:

$$\forall n\in \aleph \quad -U_n^2+7U_n-6\geq 0$$

و عليه المتتالية (U_n) متزايدة.

3. بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة.

4. نضع: $\lim_{n\to+\infty} U_n=l$.
لدينا:

$$U_{n+1}=\frac{7U_n-6}{U_n}$$

بالمرور إلى النهاية لما n يؤول نحو $+\infty$ نجد:

$$l = \frac{7l-6}{l}$$

لأنّ $l \geq 1$، أي $l \neq 0$.

و عليه:

$$l^2 - 7l + 6 = 0$$

ثم:

$$l^2 - 7l + 6 = 0 \iff (l = 1 \vee l = 6)$$

بما أنّ (U_n) متزايدة فهي إذن متقاربة نحو حدها الأعلى، وعليه:

$$\forall n \in \aleph \quad U_n \leq l$$

و منه: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 6$.

بما أنّ (U_n) متزايدة فإنّ:

$$\underset{n\in\aleph}{Min}\, U_n = \underset{n\in\aleph}{Inf}\, U_n = U_0 = 2$$

و بما أنّ (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة نحو حدها الأعلى، أي:

$$\underset{n\in\aleph}{Sup}\, U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = 6$$

$\underset{n\in\aleph}{Max}\, U_n$ غير موجود لأنّ $\forall n \in \aleph \quad U_n < 6$.

التمرين الثاني:

لدينا:

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1+o(x)-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{Log(1+x)}\right) = \lim_{x\to0}\frac{Log(1+x)-x}{x\,Log(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x\,(x+o(x))}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

التمرين الثالث:

1. دراسة قابلية الإشتقاق على $\Re$:

واضح أن التابع f يقبل الإشتقاق على $\Re^*$.
من أجل القيمة 0، لدينا تعريفا:

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=l\in\Re\right)\Leftrightarrow\left(f \text{ يقبل الإشتقاق عند } 0\right)$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{x\,e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}e^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{x^2Log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x}\\&=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}x\left[Log(1+x)-Log(x)\right]\\&=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}x\,Log(1+x)-\lim_{\substack{>\\x\to 0}}x\,Log(x)\\&=0-0=0\end{aligned}$$

إذن:

$$\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\in\Re$$

و عليه f يقبل الإشتقاق على $\Re$.
و بما أنّ f قابل للإشتقاق عند $\Re$ فإنّ f مستمر على $\Re$

2. إيجاد النشر المحدود المعمّم للتابع f من الرتبة 1 في جوار $-\infty$.

لدينا $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$

وعليه بوضع $x=\frac{1}{t}$ مع $t\overset{<}{\to}0$ فإنّ:

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}e^t&=\frac{1}{t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\quad\left(t\overset{<}{\to}0\right)\\&=\frac{1}{t}+1+\frac{t}{2}+o(t)\quad\left(t\overset{<}{\to}0\right)\\&=x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to-\infty)\end{aligned}$$

و منه نستنتج أنه في جوار $-\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y=x+1$، و بما أنّ $\frac{1}{2x}<0$ في جوار $-\infty$ فإنّ منحنى f يقع تحت الخط المقارب في جوار $-\infty$.
و من جهة أخرى لدينا:

$$f(x)=x^2\,Log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad (x\to+\infty)$$

وعليه بوضع $x=\frac{1}{t}$ مع $t\overset{>}{\to}0$ فإنّ:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}Log(1+t)=\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right)\quad\left(t\overset{>}{\to}0\right)$$

$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{t}{3}+o(t)\quad\left(t\overset{>}{\to}0\right)$$

$$=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\quad (x\to+\infty)$$

و منه نستنتج أنه في جوار $+\infty$ يوجد خط مقارب معادلته: $y=x-\frac{1}{2}$، و بما أنّ $\frac{1}{3x}>0$ في جوار $+\infty$ فإنّ منحنى f يقع فوق الخط المقارب في جوار $+\infty$.

3. لدينا:

$$\int_{e^{-x}}^{1} f(x)dx=\int_{e^{-x}}^{1} x^2 Log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$$

بأخذ $h'(x)=x^2$ ، $h(x)=\frac{x^3}{3}$ ، $g(x)=Log\left(\frac{1+x}{x}\right)$ و $g'(x)=-\frac{1}{x^2+x}$ ، و باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\int_{e^{-n}}^{1} x^2 Log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx=\left[h(x)g(x)\right]_{e^{-n}}^{1}-\int_{e^{-n}}^{1} h(x)g'(x)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1} x^3\frac{1}{x^2+x}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}\frac{x^2}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}\frac{x^2-1+1}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}(x-1)dx+\frac{1}{3}\int_{e^{-n}}^{1}\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}Log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]_{e^{-n}}^{1}+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+\frac{1}{3}Log(x+1)\right]_{e^{-n}}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}Log2-\frac{1}{6}-\frac{\left(e^{-n}\right)^3}{3}Log\left(1+e^{n}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\left(e^{-n}\right)^2}{2}-e^{-n}\right)-\frac{1}{3}Log\left(e^{-n}+1\right)$$

4. أ. لدينا:

$$U_n = \int_{e^{-n}}^{1} f(x)\, dx = \frac{2}{3} Log 2 - \frac{1}{6} - \frac{\left(e^{-n}\right)^3}{3} Log\left(1+e^{n}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\left(e^{-n}\right)^2}{2} - e^{-n}\right) - \frac{1}{3} Log\left(e^{-n}+1\right)$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{3} Log 2 - \frac{1}{6} - \frac{\left(e^{-n}\right)^3}{3} Log\left(1+e^{n}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\left(e^{-n}\right)^2}{2} - e^{-n}\right) - \frac{1}{3} Log\left(e^{-n}+1\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3} Log 2 - \frac{1}{6}$$

ب. بما أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{3} Log 2 - \frac{1}{6}$$

فإنّ (U_n) متقاربة.