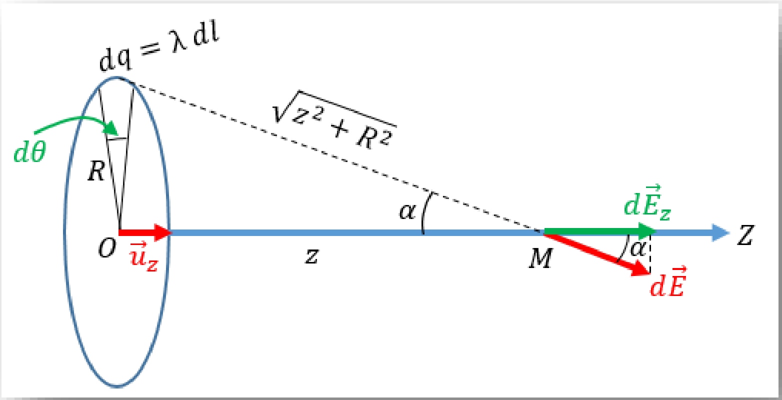
بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَانِ الرَّحِيمِ

تَمَارِين و مَسَائِل مَحلُولَة فِي الكَهرَبَاء السَّاكِنَة

مَعَ مُلَخَّص شَامِل للدُّرُوس



من إعداد: اللبي عبد القادر

أستاذ محاضر بقسم الفيزياء

جَامِعة الشَّهيد حَمَّه لخضر – الوادِي

النُّسخة الأولى: 07 جويلية 2019

وِلاية الوادِي 39000 – الجزائر

المحتويات

المقـــدّمـــة

إنّ هذا العمل يعتبر مساهمة في إثراء المراجع العلمية المتخصِّصة باللغة العربية. فبفضل الله تمّ إعداد هذه التمارين و المسائل مع حلِّها التفصيلي و المندرِجة ضِمن علم الكهرباء الساكنة. كما أنّه تمّ في هذا العمل إدراج ملخّص شامل للدروس ترتكِز عليه جل المسائل في الكهرباء الساكنة.

إنّ محتوى هذا العمل يتوافق مع البرامج المدرّسة في الجامعات و هو موجّه بدرجة أولى لطلبة السّنة الأولى من التعليم الجامعي تخصّص علوم المادة، تكنولوجيا، رياضيات و إعلام آلي و هو كذلك مفيد أيضا لطلبة بقية التخصّصات التي يُدرَّس فيها هذا الفرع.

تمّ تقسيم محتوى هذا العمل إلى خمسة فصول أساسية. حيث يعتبر الفصل الأول مدخل لبقية الفصول من خلال التطرق إلى ملخص شامل حول دروس الكهرباء الساكنة. أمّا الفصل الثاني فيهتمّ بالمسائل التي محتواها يدور حول التوزيع النقطي للشحنات. في الفصل الثّالث تمّ التطرق إلى المسائل التي محتواها يدور حول التوزيع المستمر للشحنات. استخدام نظرية غوص في التوزيع المستمر للشّحنات و طريقة حساب تدفق الحقل الكهربائي تمّ التطرّق له في الفصل الرّابع. أمّا الفصل الخامس، فيشمل مسائل حول ثنائيات الأقطاب.

اللبي عبد القادر

labbiabdelkader@yahoo.fr

الفصل الأوّل:
مُلخَّص شامل لدروس الكهرباء السّاكنة

1. دراسة الثّبات و التناظر:

سنتطرق هنا إلى شرح مختصر حول دراسة الثّبات و التناظر و ذلك نظرا لأهمّيتهما و استعمالهما في تبسيط و حل المسائل الخاصة بالكهرباء الساكنة.

1.1. الثّبات (Invariance):

نقول عن جملة أنّها ثابتة في تحويل معيّن إذا كانت نتيجة الانتقال تولّد حالة مماثلة للحالة الابتدائية. حيث نقبل بالمبدأ الآتي:

الحقل الكهربائي يملك نفس خصائص الثّبات للمصادر التي تسبّبت في وجوده.

مثال: كرة مشحونة حجميا بانتظام.

باستعمال الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) فإنّ عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M من الفضاء تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\varphi$$

- التّوزيع الشّحني هو ثابت من خلال الدوران وفق الزاوية θ إذن يمكن حذف الإحداثية θ من مركبات الحقل الكهربائي.
- كذلك التّوزيع الشّحني هو ثابت من خلال الدوران وفق الزاوية φ إذن يمكن حذف الإحداثية φ من مركبات الحقل الكهربائي.

بالتّالي في هذا المثال تكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u}_r + E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r)\,\vec{u}_\varphi$$

2.1. مستوي التناظر (Plan de symétrie):

- ✓ نقول عن مستوي أنّه مستوي تناظر للتّوزيع الشّحني إذا كان التّوزيع الشّحني يمكن تفكيكه إلى عنصرين متناظرين مثنى مثنى بالنسبة لهذا المستوي بحيث يكونان يملكان شحنتين متساويتين.
- ✓ إذا كانت النّقطة M المراد حساب الحقل عندها تنتمي لمستوي تناظر التّوزيع الشّحني فإنّ الحقل الكهربائي في النّقطة M أيضا ينتمي لهذا لمستوي.

مثال: كرة مشحونة حجميا بانتظام.

نأخذ هنا نفس المثال السّابق حيث وجدنا أنّ عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M من الفضاء تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u}_r + E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r)\,\vec{u}_\varphi$$

في هذه الحالة لدينا كل مستوي يحوي النقطتين O و M (O تمثل مركز الكرة) هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني و منه فإنّ الحقل الكهربائي في النقطة M ينتمي إلى تقاطع هذه المستويات أي أنّ الحقل الكهربائي في النقطة M يكون محمول على المستقيم OM و بالتالي يكون موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي السابقة في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

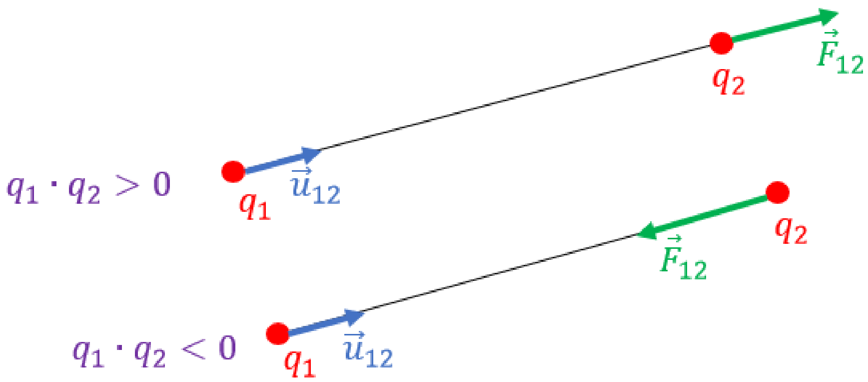
2. مُلخَّص حول دروس الكهرباء السّاكنة:

1.2. قانون كولوم (1785):

يعبّر قانون كولوم في الكهرباء السّاكنة عن القوّة الكهربائية المتبادلة بين شحنتين نقطيتين و ينصّ على أنّ القوّة الكهربائية المتبادلة بين شحنتين q_1 و q_2 تتناسب طردا مع جداء الشحنتين و عكسا مع مربع المسافة الفاصلة بين الشّحنتين r_{12} و اتّجاهها يكون محمول على المستقيم المار بالشحنتين. هذه القوّة

تكون قوّة تنافر إذا كانت الشحنتين لهما نفس الإشارة و تكون قوة تجاذب إذا كانت الشّحنتين لهما إشارتين مختلفتين. يُكتب قانون كولوم كالآتي:

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1\,q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$



حيث:

$\vec{F}_{12}$ تمثل القوة الكهربائية التي تؤثر بها الشحنة q_1 على q_2. أما القوة الكهربائية التي تؤثر بها الشحنة q_2 على q_1 فهي $\vec{F}_{21}$ حيث $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

q_1 و q_2: يأخذان كقيمتان جبريتان.

$K \simeq 9 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}$: يُمثِّل ثابت التّناسب. كما يمكن أن نكتب أيضا $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ حيث ε_0 تمثل سماحية الفراغ $\varepsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2}$.

☜ إذا أردنا حساب القوّة الكهربائية $\vec{F}_T$ التي تؤثِّر بها مجموعة من الشُّحنات النُّقطية $(q_2, q_3, \cdots, q_n)$ على شحنة نقطية أخرى (q_1) يمكننا استعمال مبدأ التراكب أو مبدأ التّحصيل الشّعاعي بحيث نكتب:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{i1} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \cdots + \vec{F}_{n1}$$

2.2. الحقل الكهربائي:

تعريف: نسمِّي حقلا كهربائيا المنطقة من الفضاء التي تكون فيها الشُّحنة q خاضعة إلى تأثير القوّة الكهربائية. و نكتب:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

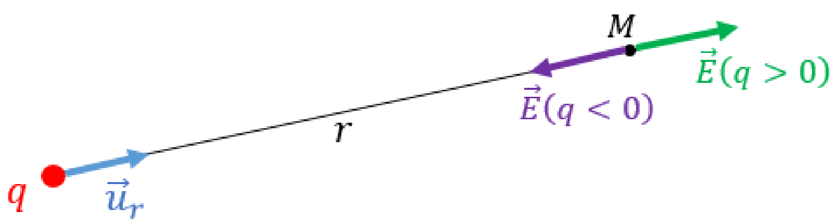
حيث $\vec{F}$ تمثل القوّة الكهربائية المؤثِّرة على الشّحنة q الموجودة داخل الحقل الكهربائي الخارجي $\vec{E}$.

كما يمكن أن نستنتج من هذه العلاقة أنّ الحقل الكهربائي له نفس اتّجاه القوة الكهربائية إذا كانت الشحنة q موجبة، و يكون اتِّجاه الحقل الكهربائي عكس اتِّجاه القوة الكهربائية إذا كانت الشحنة q سالبة.

و كذلك يمكن أن نستنتج من هذه العلاقة أنّ وحدة الحقل الكهربائي هي (N/C).

إذن يمكن كتابة عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q في نقطة M من الفضاء كالآتي:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$



نلاحظ حسب العلاقة الأخيرة أنّ إتّجاه الحقل الكهربائي $\vec{E}$ لا يتعلّق إلّا بإشارة الشُّحنة المولِّدة له (q)، حيث يكون الحقل الكهربائي متّجِه نحو خارج الشّحنة q إذا كانت q موجبة و يكون الحقل الكهربائي متّجِه نحو داخِل الشّحنة q إذا كانت q سالبة.

☜إذا أردنا حساب الحقل الكهربائي الإجمالي $\vec{E}_T$ الناشئ من طرف مجموعة من الشّحنات النّقطية $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ في نقطة M من الفضاء فإنّ استعمال مبدأ التراكب أو مبدأ التحصيل الشعاعي يبقى صالحا حيث نكتب:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

3.2. الكمون الكهربائي:

نعرِّف هنا دالة سلّمية جديدة و هي دالة الكمون الكهربائي V و التي لها علاقة بالحقل الكهربائي.

تعطى عبارة الكمون الكهربائي الذي تولّده شحنة نقطية q على بعد r منها كالآتي:

$$V = K\frac{q}{r} + C$$

و باعتبار أن الكمون معدوم عند اللانهاية $V(\infty) = 0$، إذن يأخذ الثابت C مساويا للصفر $C = 0$.

☜إذا أردنا حساب الكمون الكهربائي الإجمالي V_T الناشئ من طرف مجموعة من الشحنات النقطية $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ في نقطة M من الفضاء فإنّنا نستعمل المجموع الجبري حيث نكتب:

$$V_T = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

4.2. الطاقة الكامنة الكهربائية:

✓ تعطى عبارة الطاقة الكامنة الكهربائية E_P لشحنة نقطية q واقعة في منطقة يخيم فيها كمون كهربائي V كالآتي:

$$E_P = q\,V$$

✓ تعطى عبارة الطاقة الكامنة الكهربائية الداخلية E_P لجملة مُكوَّنة من شحنتين نقطيتين q_1 و q_2 تفصلهما المسافة r كالآتي:

$$E_P = K\frac{q_1\, q_2}{r}$$

✓ تعطى عبارة الطاقة الكامنة الكهربائية الداخلية E_P لجملة مُكوَّنة من مجموعة من الشحنات النقطية $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ كالآتي:

$$E_P = \sum_{\text{كل الأزواج الممكنة}} K\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\, V_i$$

5.2. تجوال الحقل الكهربائي:

ليكن لدينا المسار (L) موجّه من النقطة A إلى النقطة B. تجوال الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بين النقطتين A و B وفق المسار (L) هو:

$$\int_{A\ (L)}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

حيث V_A يمثل الكمون الكهربائي في النقطة A، و V_B يمثل الكمون الكهربائي في النقطة B.

و منه فإنّ تجوال الحقل الكهربائي لا يعتمد على شكل المسار المتّبع بل فقط على موضعي بدايته و نهايته.

كما يمكننا أن نستنتج أيضا أنّ تجوال الحقل الكهربائي وفق مسار مغلق معدوم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

6.2. عمل القوة الكهربائية:

ليكن لدينا المسار (L) موجّه من النقطة A إلى النقطة B. إنّ عمل القوة الكهربائية لنقل الشحنة الكهربائية q من النقطة A إلى النقطة B وفق المسار (L) هو:

$$W_{A\to B} = \int_{A\ (L)}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\int_{A\ (L)}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B)$$

و منه فإنّ عمل القوة الكهربائية لنقل الشحنة الكهربائية q من النقطة A إلى النقطة B لا يعتمد على شكل المسار المتّبع بل فقط على موضعي بدايته و نهايته.

كما يمكننا أن نكتب أيضا:

$$W_{A\to B} = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P$$

حيث: $E_P(A)$ تمثل الطاقة الكامنة الكهربائية للشحنة q في الموضع A، و $E_P(B)$ تمثل الطاقة الكامنة الكهربائية للشحنة q في الموضع B.

7.2. العلاقة بين الحقل و الكمون الكهربائيين:

كما قلنا سابقا، فإنّ دالة الكمون الكهربائي V لها علاقة بالحقل الكهربائي $\vec{E}$ عند كل موضع حيث يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

كما يمكن أن نكتب بشكل آخر:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

مثال: يعطى $V(x,y,z) = 5xy + 3y^2 + 2z \quad (Volt)$

أحسب قيمة الكمون و الحقل الكهربائيين عند النقطة: $M(0,1,2)\ m$.

الحل:

$$V(0,1,2) = 5(0)(1) + 3(1)^2 + 2(2) = 7\,Volt$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = -5y\vec{\imath} - (5x+6y)\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

$$\vec{E}(0,1,2) = -5(1)\vec{\imath} - [5(0)+6(1)]\vec{\jmath} - 2\vec{k} == -5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 2\vec{k} \quad (N/C)$$

8.2. خطوط الحقل و سطوح تساوي الكمون:

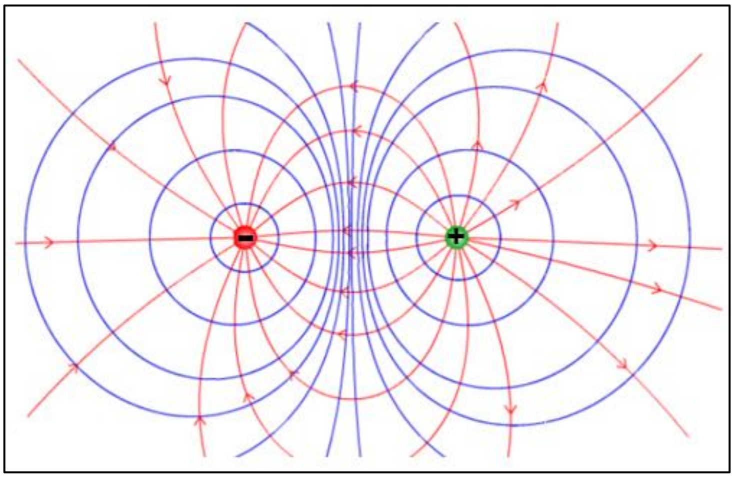
إنّ وجود الشحنات الكهربائية في الفضاء يغير في الخصائص الكهربائية له و ذلك بإنشاء حقل كهربائي في كل نقطة من نقاط الفضاء، و منه ندخل مفهوم خطوط الحقل الكهربائي و سطوح تساوي الكمون. يمكن أن نعرّف خط الحقل الكهربائي على أنّه خط موجّه بحيث يكون شعاع الحقل الكهربائي مماسي له في كل نقطة من نقاطه. أما سطح تساوي الكمون فهو مجموعة مواضع الفضاء التي تملك كمونا واحدا.

خصائص:

- ✓ خطوط الحقل الكهربائي لا تتقاطع فيما بينها.
- ✓ سطوح تساوي الكمون أيضا لا تتقاطع فيما بينها.
- ✓ خطوط الحقل الكهربائي عمودية على سطوح تساوي الكمون.
- ✓ الكمون يتناقص في إتِّجاه الحقل الكهربائي.
- ✓ يكون الحقل الكهربائي أشد كلما كانت سطوح تساوي الكمون أقرب إلى بعضها.

مثال: خطوط الحقل و سطوح تساوي الكمون الناتجين عن شحنتين مختلفتين في الإشارة.

في هذه الحالة تخرج خطوط الحقل من الشحنة الموجبة متّجهة نحو الشحنة السالبة و تكون سطوح تساوي الكمون عمودية عليها كما هو موضح في الشكل الآتي:



9.2. التوزيع المستمر للشحنات:

في حالة وجود عدد كبير من الشحنات بحيث يمكن إدخال مفهوم التوزيع المستمر للشحنات فإنّه عمليا من أجل حساب الحقل و الكمون الكهربائيين يجب تحويل الجمع إلى تكامل حيث يكون:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int K \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

$$V = \int dV = \int K \frac{dq}{r}$$

حيث dq تمثل الشحنة العنصرية و هي تحسب كالآتي:

أ. التوزيع الخطّي للشحنات:

تعطى عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع بالعلاقة:

$$dq = \lambda \, dl$$

حيث: λ تمثل الكثافة الخطية للشحنة (C/m)، dl يمثل عنصر الطول (m).

ب. التوزيع السّطحي للشحنات:

تعطى عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع بالعلاقة:

$$dq = \sigma \, dS$$

حيث: σ تمثل الكثافة السطحية للشحنة (C/m^2)، dS يمثل عنصر المساحة (m^2).

ج. التوزيع الحجمي للشحنات:

تعطى عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع بالعلاقة:

$$dq = \rho\, dv$$

حيث: ρ تمثل الكثافة الحجمية للشحنة (C/m^3)، dv يمثل عنصر الحجم (m^3).

10.2. التدفق و نظرية غوص:

نعرّف تدفق الحقل الكهربائي عبر السّطح S المقدار Φ حيث:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

☜ **نظرية التدفق أو نظرية غوص:**

تنص نظرية غوص على أنّ تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق يساوي المجموع الجبري للشحنات الواقعة داخله $(\sum q_{int})$ مقسومة على الثابت ε_0 و نكتب:

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث ε_0 تمثل سماحية الفراغ $\varepsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N\, m^2}$.

أمّا S_G فيمثل سطح غوص و هو سطح وهمي و مغلق و معايير اختيار هذا السطح هي كالآتي:

- ✓ أن يمر سطح غوص على النقطة المراد حساب الحقل عندها.
- ✓ أن يكون $\vec{E} \mathbin{/\!/} d\vec{S}$ أو $\vec{E} \perp d\vec{S}$.
- ✓ أن يكون الحقل الكهربائي ثابت على إمتداد سطح غوص في الحالة $(\vec{E} \mathbin{/\!/} d\vec{S})$.

11.2. ثنائي القطب الكهربائي:

أ. مقدمة:

إنّ العديد من الجزيئات المتعادلة كهربائيا تنشئ حقلا كهربائيا، و يرجع السبب في ذلك إلى أنّ داخل الجزيئ يكون مركز ثقل الشحنات الموجبة غير متطابق مع مركز ثقل الشحنات السالبة. هذه الجزيئات تسمى قطبية أي أنّ لها قطب مشحون إيجابا و قطب مشحون سلبا و هي تشكل ثنائي القطب الكهربائي. مثل هذا التوزيع للشحنات يمكن أن يمون دائم أو ناجم عن حقل كهربائي خارجي.

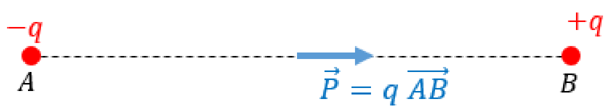
ب. عزم ثنائي القطب:

نعتبر أنّه لدينا توزيع للشحنات يتكون من شحنات موجبة نرمز لمجموعها بـ $(+q)$ و من شحنات سالبة نرمز لمجموعها بـ $(-q)$. و ليكن A مركز ثقل الشحنات السالبة و B مركز ثقل الشحنات الموجبة. يعطى عزم ثنائي القطب الكهربائي $\vec{P}$ لهذا التوزيع بالعلاقة:

$$\vec{P} = q\,\overrightarrow{AB}$$

وحدة عزم ثنائي القطب هي $(C\,m)$. إذا كان $\vec{P}$ غير معدوم فإنّ توزيع الشحنات يكون مستقطب.

إنّ النموذج الأكثر بساطة لثنائي القطب هو جملة شحنتين متساويتين مقدارا و متعاكستين في الإشارة تفصلهما مسافة صغيرة.



☜ **الجسم الذي هو متعادل كهربائيا و لكنه مستقطب يولِّد على مسافة بعيدة حقلا و كمونا كهربائيين مشابهين كتقريب أوّلي للحقل و الكمون الناشئين عن شحنتين نقطيتين يشكلان ثنائي قطب عزمه $\vec{P} = q\,\overrightarrow{AB}$.**

ج. الطاقة الكامنة لثنائي قطب موضوع داخل حقل كهربائي خارجي منتظم:

في حالة وجود ثنائي قطب كهربائي عزمه $\vec{P}$ داخل حقل كهربائي خارجي منتظم $\vec{E}$، فإنّ الطاقة الكامنة الكهربائية E_P لثنائي القطب هي كالآتي:

$$E_P = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

كذلك إنّ الطاقة الكامنة E_P لثنائي القطب لها علاقة بالقوّة $\vec{f}$ التي يخضع لها ثنائي القطب حيث يمكن أن نكتب:

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, E_P$$

ج. عزم مزدوجة ثنائي قطب موضوع داخل حقل كهربائي خارجي منتظم:

في حالة وجود ثنائي قطب كهربائي عزمه $\vec{P}$ داخل حقل كهربائي خارجي منتظم $\vec{E}$، فإنّ عزم المزدوجة $\vec{\tau}$ لثنائي القطب هي كالآتي:

$$\vec{\tau} = \vec{P} \wedge \vec{E}$$

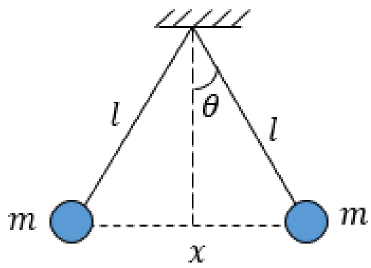
من خلال العلاقة الأخيرة يمكن أن نستنتج أنّه يوجد وضعيتي توازن لثنائي القطب الموضوع داخل حقل كهربائي خارجي منتظم يحقّقان: $\vec{\tau} = \vec{0}$ أي أنّ $P\ E\ sin\theta = 0$ ومنه يكون $sin\theta = 0$، إذن:

- ✓ $\theta = 0$ تمثِّل وضعية توازن مستقر.
- ✓ $\theta = \pi$ تمثِّل وضعية توازن حرج.

الفصل الثّاني:
مسائل حول التوزيع النقطي للشحنات

🕮 التّمرين الأوّل:

نعتبر أنّه توجد كريتين متماثلتين نصفي قطريهما مهمل معلقتين بحيث يشكلان نوّاسين بسيطين طولهما $l = 80cm$ كما هو موضّح في الشّكل. نفرض أن الكريتين لهما نفس الكتلة m و نفس الشحنة $q = 2 \cdot 10^{-8}C$، و أنّ البعد بين الكريتين عند التوازن هو $x = 4\ cm$. نعتبر أنّ الزاوية θ صغيرة كفاية بحيث يمكن أخذ $tan\theta \approx sin\theta$، المطلوب هو حساب كتلة الكريتين m. نأخذ حقل الجاذبية الأرضية $g = 10\ m/s^2$.



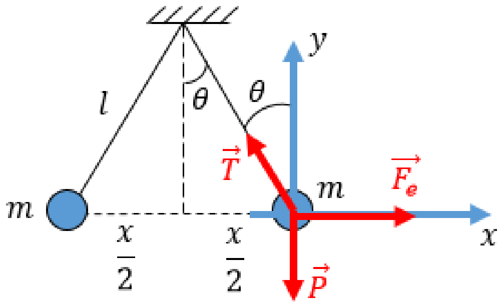
✍ الحل:

عند التوازن تكون الكتلتين في حالة سكون أي أنّ مجموع القوى المطبقة على كل كتلة يكون معدوم، فلو أخذنا مثلا النواس الموجود على اليمين كما هو موضّح في الشكل يكون لدينا:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

أي أنّ:

$$\vec{F_e} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$



حيث:

$\vec{P} = m\,\vec{g}$ و هي تمثل قوة الثقل.

$\vec{T}$ تمثل قوة توتر الخيط.

$\vec{F_e}$ تمثل القوة الكهربائية (قوة تنافر) و هي تعطى حسب قانون كولوم كالآتي:

$$\vec{F_e} = K\frac{q^2}{x^2}\,\vec{\imath}$$

بإسقاط العلاقة $(*)$ على المحورين (Ox) و (Oy) نجد:

$$\begin{cases} F_e - T\,sin\theta = 0 \\ -m\,g + T\,cos\theta = 0 \end{cases}$$

و منه نجد:

$$\begin{cases} T = \dfrac{F_e}{sin\theta} \\ T = \dfrac{m\,g}{cos\theta} \end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين نجد:

$$\frac{F_e}{sin\theta} = \frac{m\,g}{cos\theta}$$

إذن:

$$F_e = m\,g\,tan\theta$$

و حسب معطيات التمرين لدينا $tan\theta \approx sin\theta$، فنتحصل على:

$$F_e = m\ g\ sin\theta$$

و كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$sin\theta = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{l}$$

فيكون:

$$F_e = m\ g\ \frac{x}{2\ l}$$

و من جهة أخرى لدينا $F_e = K\frac{q^2}{x^2}$، إذن:

$$K\frac{q^2}{x^2} = m\ g\ \frac{x}{2\ l}$$

و أخيرا نتحصل على عبارة الكتلة m كالآتي:

$$m = \frac{2\ K\ l\ q^2}{g\ x^3}$$

تطبيق عددي:

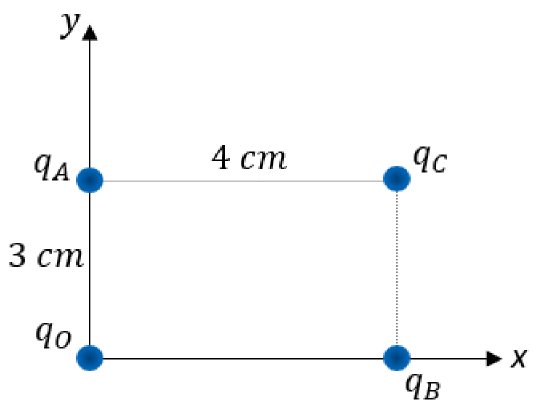
$$m = \frac{2(9\cdot10^9)(0.8)\ (2\cdot10^{-8})^2}{10\cdot(0.04)^3} = 9 \cdot 10^{-3}kg = 9\ g$$

التّمرين الثّاني:

نفرض أنه لدينا أربع شحنات نقطية q_A، q_B، q_C و q_O موضوعة كما في الشكل حيث:

$q_A = 1\ \mu C$ ، $q_B = -3\ \mu C$ ، $q_C = 2\ \mu C$ و $q_O = 2\ \mu C$.

1. مثل ثم أحسب القوة الكهربائية التي تؤثر بها كل شحنة من الشحنات q_A، q_B و q_C على الشحنة q_O.
2. أحسب القوة الكهربائية الإجمالية المطبقة على الشحنة q_O.
3. استنتج شدّة الحقل الكهربائي في موضع الشحنة q_O.



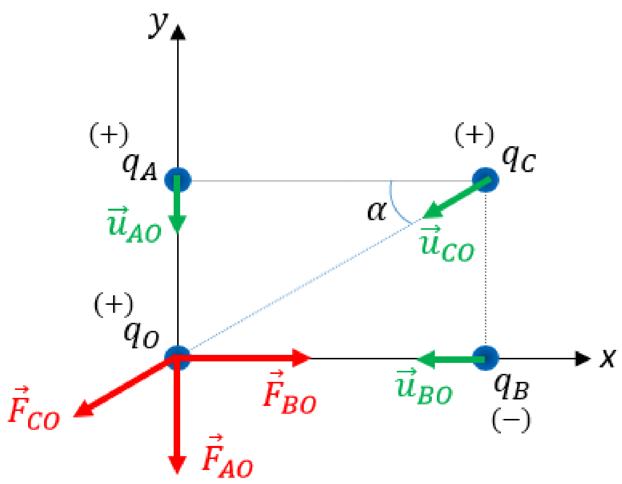
الحل:

1. تمثيل و حساب القوة الكهربائية التي تؤثر بها كل شحنة من الشحنات q_A، q_B و q_C على الشحنة q_O:

- تمثيل القوى موضّح في الشكل.
- حسب قانون كولوم لدينا:

$$\vec{F}_{AO} = K\frac{q_A\, q_O}{d_{AO}^2}\vec{u}_{AO} = 9\cdot 10^9\frac{(10^{-6})\cdot(2\cdot 10^{-6})}{(0.03)^2}(-\vec{j}) = -20\,\vec{j}\ \ (N)$$

$$\vec{F}_{BO} = K\frac{q_B\, q_O}{d_{BO}^2}\vec{u}_{BO} = 9\cdot 10^9\frac{(-3\cdot 10^{-6})\cdot(2\cdot 10^{-6})}{(0.04)^2}(-\vec{\imath}) = 33.75\,\vec{\imath}\ \ (N)$$



$$\vec{F}_{CO} = K\frac{q_C\, q_O}{d_{CO}^2}\vec{u}_{CO}$$

بالإسقاط نجد:

$$\vec{F}_{CO} = K\frac{q_C\, q_O}{d_{CO}^2}(-cos\alpha\, \vec{\imath} - sin\alpha\, \vec{\jmath})$$

حيث كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$d_{CO} = \sqrt{d_{AO}^2 + d_{BO}^2} = \sqrt{(0.03)^2 + (0.04)^2} = 0.05\, m = 5cm$$
$$cos\alpha = \frac{d_{BO}}{d_{CO}} = \frac{4}{5}$$
$$sin\alpha = \frac{d_{AO}}{d_{CO}} = \frac{3}{5}$$

و منه يكون:

$$\vec{F}_{CO} = 9\cdot 10^9\,\frac{(2\cdot10^{-6})\cdot(2\cdot10^{-6})}{(0.05)^2}\left(-\frac{4}{5}\,\vec{\imath} - \frac{3}{5}\,\vec{\jmath}\right)$$

إذن:

$$\vec{F}_{CO} = (-11.52\,\vec{\imath} - 8.64\,\vec{\jmath}\,)\ \ (N)$$

2. حساب القوة الكهربائية الإجمالية المطبقة على الشحنة q_O:

حسب مبدأ التحصيل الشعاعي لدينا:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{BO} + \vec{F}_{CO}$$

بالتعويض نجد:

$$\vec{F}_T = (-20\,\vec{\jmath}) + (33.75\,\vec{\imath}\,) + (-11.52\,\vec{\imath} - 8.64\,\vec{\jmath}\,)$$

أي أنّ:

$$\vec{F}_T = (22.23\,\vec{i} - 28.64\,\vec{j}\,) \quad (N)$$

و منه تكون شدّة القوة الكهربائية الإجمالية المطبقة على الشحنة q_O كالآتي:

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(22.23)^2 + (-28.64)^2} \approx 36.25\ N$$

3. استنتاج شدّة الحقل الكهربائي في موضع الشحنة q_O:

لدينا حسب العلاقة التي تربط بين الحقل و القوة : $F_T = q_O\, E_T$

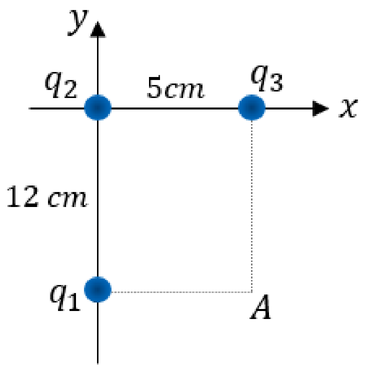
و منه نستنتج أنّ:

$$E_T = \frac{F_T}{q_O} = \frac{36.25}{2\cdot 10^{-6}} = 18.125 \cdot 10^{6}\ \ N/C$$

التّمرين الثّالث:

نفرض أنه لدينا ثلاث شحنات نقطية q_1، q_2 و q_2 موضوعة كما في الشكل حيث:

$q_1 = 2.5\ nC$، $q_2 = -21.97\ nC$ و $q_3 = -7.2\ nC$



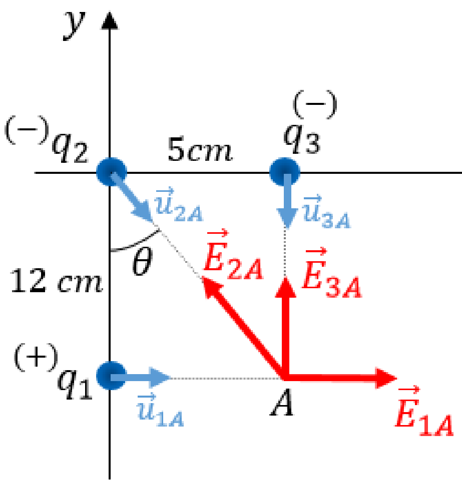
1. أحسب الحقل الكهربائي الإجمالي في النقطة A.
2. أحسب الكمون الكهربائي الإجمالي في النقطة A.
3. أحسب العمل اللازم بذله من أجل جلب بروتون من اللّانهاية إلى النقطة A.
4. استنتج القوة الكهربائية المؤثرة على البروتون في النقطة A.

الحل:

1. حساب الحقل الكهربائي الإجمالي في النقطة A و ليكن $\vec{E}_T$:

نعلم أن الحقل الكهربائي يخضع أيضا لمبدأ التحصيل الشعاعي و منه يكون:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A} + \vec{E}_{3A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$



حيث:

$\vec{E}_{1A}$ يمثّل الحقل الكهربائي الذي ولّدته الشحنة q_1 في النقطة A، و يعطى كالآتي:

$$\vec{E}_{1A} = K\frac{q_1}{d_{1A}^2}\vec{u}_{1A} = 9 \cdot 10^9 \frac{2.5 \cdot 10^{-9}}{(5 \cdot 10^{-2})^2}(\vec{\imath}) = 9000\,\vec{\imath} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

$\vec{E}_{3A}$ يمثّل الحقل الكهربائي الذي ولّدته الشحنة q_3 في النقطة A، و يعطى كالآتي:

$$\vec{E}_{3A} = K\frac{q_3}{d_{3A}^2}\vec{u}_{3A} = 9 \cdot 10^9 \frac{-7.2 \cdot 10^{-9}}{(12 \cdot 10^{-2})^2}(-\vec{\jmath}) = 4500\,\vec{\jmath} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

$\vec{E}_{2A}$ يمثّل الحقل الكهربائي الذي ولّدته الشحنة q_2 في النقطة A، و يعطى كالآتي:

$$\vec{E}_{2A} = K\frac{q_2}{d_{2A}^2}\vec{u}_{2A}$$

مع العلم أنّ:

$$d_{2A} = \sqrt{d_{1A}^2 + d_{3A}^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13cm$$

و بالإسقاط يكون لدينا:

$$\vec{u}_{2A} = \sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath} = \frac{5}{13}\,\vec{\imath} - \frac{12}{13}\,\vec{\jmath}$$

و منه ينتج:

$$\vec{E}_{2A} = 9 \cdot 10^9 \frac{-21.97 \cdot 10^{-9}}{(13 \cdot 10^{-2})^2} \left(\frac{5}{13}\,\vec{\imath} - \frac{12}{13}\,\vec{\jmath}\right) = (-4500\,\vec{\imath} + 10800\,\vec{\jmath}) \quad (\frac{N}{C})$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد:

$$\vec{E}_T = (9000\,\vec{\imath}) + (-4500\,\vec{\imath} + 10800\,\vec{\jmath}) + (4500\,\vec{\jmath})$$

إذن:

$$\vec{E}_T = (4500\,\vec{\imath} + 15300\,\vec{\jmath}) \quad (\frac{N}{C})$$

و تكون شدة الحقل الكهربائي الإجمالي في النقطة A كالآتي:

$$E_T = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(4500)^2 + (15300)^2} \approx 15.95 \cdot 10^3 \ \frac{N}{C}$$

2. حساب الكمون الكهربائي الإجمالي في النقطة A و ليكن V_T:

لدينا:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_2 \quad \cdots\cdots\cdots \ (**)$$

حيث:

$V_1 = K\frac{q_1}{d_{1A}}$ يمثّل الكمون الكهربائي الذي ولّدته الشّحنة q_1 في النقطة A.

$V_2 = K\frac{q_2}{d_{2A}}$ يمثّل الكمون الكهربائي الذي ولّدته الشّحنة q_2 في النقطة A.

$V_3 = K\frac{q_3}{d_{3A}}$ يمثّل الكمون الكهربائي الذي ولّدته الشّحنة q_3 في النقطة A.

بالتعويض في العلاقة (**) نجد:

$$V_T = K\frac{q_1}{d_{1A}} + K\frac{q_2}{d_{2A}} + K\frac{q_3}{d_{3A}}$$

تطبيق عددي:

$$V_T = 9 \cdot 10^9 \frac{2.5 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \frac{-21.97 \cdot 10^{-9}}{13 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \frac{-7.2 \cdot 10^{-9}}{12 \cdot 10^{-2}}$$

و منه:

$$V_T = 450 - 1521 - 540 = -1611\, Volt$$

3. حساب العمل اللازم بذله من أجل جلب بروتون من اللّانهاية إلى النقطة A:

لدينا:

$$W_{\infty\to A} = E_p(\infty) - E_p(A)$$

حيث:

$E_p(\infty) = q_p\, V_\infty$ تمثل الطاقة الكامنة للبروتون عند اللانهاية و هي معدومة لأنّ الكمون عند اللّانهاية معدوم.

$E_p(A) = q_p\, V_T$ تمثل الطاقة الكامنة للبروتون عند النقطة A.

و منه نجد:

$$W_{\infty\to A} = q_p\, V_\infty - q_p\, V_T = q_p(V_\infty - V_T) = q_p(0 - V_T) = -q_p\, V_T$$

تطبيق عددي:

$$W_{\infty\to A} = -(1.6\cdot 10^{-19})\cdot(-1611) \approx 25.8\cdot 10^{-17} Joule$$

4. استنتاج القوة الكهربائية المؤثرة على البروتون في النقطة A:

لدينا:

$$\vec{F}_T = q_p \cdot \vec{E}_T$$

و منه يكون:

$$\vec{F}_T = 1.6\cdot 10^{-19}\ \cdot(4500\,\vec{\imath} + 15300\,\vec{\jmath})$$
$$\vec{F}_T = (7.2\cdot 10^{-16}\,\vec{\imath} + 24.48\cdot 10^{-16}\,\vec{\jmath})\ (N)$$

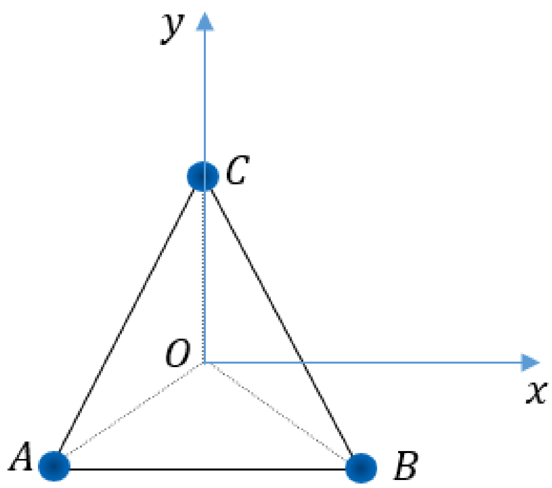
و تكون شدة القوة الكهربائية الإجمالية المؤثرة على البروتون في النقطة A كالآتي:

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(7.2\cdot 10^{-16})^2 + (24.48\cdot 10^{-16})^2} \approx 25.5\ \cdot 10^{-16}\, N$$

التمرين الرّابع:

نعتبر ثلاث شحنات نقطية q_A، q_B و q_C موضوعة على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $a = 2\sqrt{3}cm$ كما هو موضح في الشكل حيث $q_A = q_B = q_C = -6\mu C$ و ليكن O مركز ثقل المثلث.

1. أحسب الكمون الكهربائي الذي تولّده كل شحنة في مركز ثقل المثلث O.
2. استنتج الكمون الكهربائي الإجمالي في مركز ثقل المثلث O.
3. أوجد حسابيا بدون استنتاج قيمة الحقل الكهربائي الإجمالي في مركز ثقل المثلث O.
4. إذا وضعت الشحنة $Q = 3\ \mu C$ في مركز ثقل المثلث O، فأحسب القوّة المؤثّرة عليها.
5. أحسب الطاقة الكامنة للشّحنة Q.



الحل:

1. حساب الكمون الكهربائي الذي تولّده كل شحنة في مركز ثقل المثلثO:

بما أنّ النقطة تقع في مركز ثقل المثلث O إذن حسب خصائص المثلث المتساوي الأضلاع لدينا:

$$d_{AO} = d_{BO} = d_{CO} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\ cm$$

كذلك بسبب التناظر، الكمون الكهربائي الذي تولِّده كل شحنة في مركز ثقل المثلث O متساوي، هذا يعني أنّ:

$$V_A = V_B = V_C = K\frac{q_A}{d_{AO}} = 9\cdot 10^9\frac{-6\cdot 10^{-6}}{2\cdot 10^{-2}} = -27\cdot 10^5\,Volt$$

2. استنتاج الكمون الكهربائي الإجمالي V_T في مركز ثقل المثلث O:

لدينا:

$$\begin{cases} V_T = V_A + V_B + V_C \\ V_A = V_B = V_C \end{cases}$$

و منه نستنتج أنّ:

$$V_T = 3V_A = 3V_B = 3V_C$$

تطبيق عددي:

$$V_T = 3\cdot(-27\cdot 10^5) = -81\cdot 10^5\,Volt$$

3. الحساب المباشر للحقل الكهربائي الإجمالي $\vec{E}_T$ في مركز ثقل المثلث O:

حسب مبدأ التراكب لدينا:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{AO} + \vec{E}_{BO} + \vec{E}_{CO}$$

و منه:

$$\vec{E}_T = K\frac{q_A}{d_{AO}^2}\vec{u}_{AO} + K\frac{q_B}{d_{BO}^2}\vec{u}_{BO} + K\frac{q_C}{d_{CO}^2}\vec{u}_{CO}$$

حيث $d_{AO} = d_{BO} = d_{CO}$ و $q_A = q_B = q_C$، إذن:

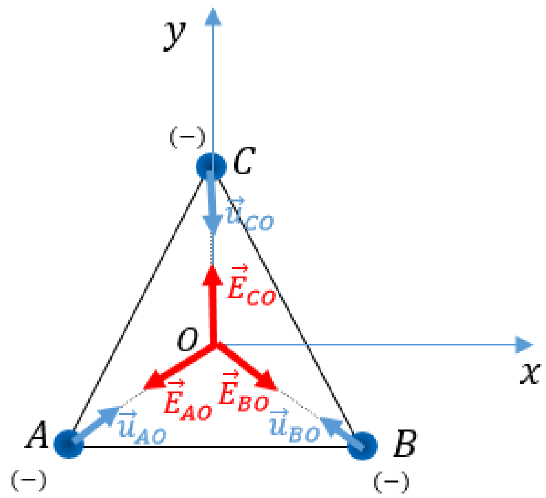
$$\vec{E}_T = K\frac{q_A}{d_{AO}^2}(\vec{u}_{AO} + \vec{u}_{BO} + \vec{u}_{CO})$$

نعلم أنّ المثلث المتساوي الأضلاع جميع زواياه متقايسة و تساوي $60°$ و بما أنّ المستقيمات AO، BO و CO هي منصفات لهذه الزوايا إذن بإسقاط أشعة الوحدة المتحصل عليها في العبارة الأخيرة على المحورين Ox و Oy كما هو موضح في الشكل يكون لدينا:

$$\vec{u}_{AO} = cos30\,\vec{\imath} + sin30\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_{BO} = -cos30\,\vec{\imath} + sin30\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_{CO} = -\vec{\jmath}$$



بالتعويض في عبارة $\vec{E}_T$ نجد:

$$\vec{E}_T = K\frac{q_A}{d_{AO}^2}\{(cos30\,\vec{\imath} + sin30\,\vec{\jmath}) + (-cos30\,\vec{\imath} + sin30\,\vec{\jmath}) + (-\vec{\jmath})\}$$

و منه يكون:

$$\vec{E}_T = K\frac{q_A}{d_{AO}^2}(2\,sin30 - 1)\,\vec{\jmath} = K\frac{q_A}{d_{AO}^2}\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]\vec{\jmath}$$

أي أنّ:

$$\vec{E}_T = K\frac{q_A}{d_{AO}^2}[1-1]\,\vec{\jmath} = \vec{0}$$

و بالتالي فإنّ الحقل الكهربائي الإجمالي $\vec{E}_T$ في مركز ثقل المثلث O معدوم:

$$\vec{E}_T = \vec{0}$$

☜ **ملاحظة:** كان بالإمكان مُسبَّقا استنتاج أنّ الحقل الكهربائي الإجمالي $\vec{E}_T$ في مركز ثقل المثلث معدوم و ذلك بسبب التناظر.

4. حساب القوّة $\vec{F}_T$ المؤثّرة على الشحنة Q الموضوعة في مركز ثقل المثلث:

بما أنّ الحقل الكهربائي الإجمالي $\vec{E}_T$ في مركز ثقل المثلث O معدوم إذن:

$$\vec{F}_T = Q \cdot \vec{E}_T = \vec{0}$$

أي أنّ الشحنة Q موجودة في وضع توازن.

5. حساب الطاقة الكامنة للشّحنة Q الموضوعة في مركز ثقل المثلث:

لدينا:

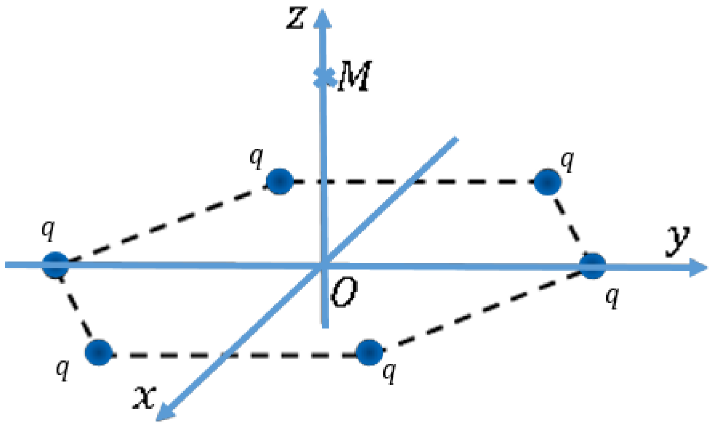
$$E_p = Q \cdot V_T$$

تطبيق عددي:

$$E_p = (3 \cdot 10^{-6}) \cdot (-81 \cdot 10^{5}) = -24.3\, Joule$$

🕮 التّمرين الخامس:

نعتبر سِتَّة شحنات نقطية متماثلة شحنة كل منها هي $q = 5\mu C$ موزعة في المستوي (Oxy) على قمم مضلع سداسي منتظم مركزه O و نصف قطره $R = 3\ cm$ كما هو موضح في الشكل. و لتكن M نقطة تقع في المحور Oz عند ارتفاع $z = 4\ cm$.



1. أحسب الكمون الكهربائي في النقطة M الناتج عن شحنة نقطية واحدة q.
2. استنتج الكمون الكهربائي الإجمالي في النقطة M الناتج عن الشحنات السِتَّة.
3. استنتج عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M، ثمّ أحسبه.
4. إذا وضعت الشحنة $Q = 9\ \mu C$ في النقطة O فأحسب عندئذ القوة المؤثرة عليها، ماذا تستنتج.
5. أحسب العمل اللازم بذله من أجل نقل الشحنة Q من النقطة O الى النقطة M.

✍ الحل:

1. حساب الكمون الكهربائي في النقطة M الناتج عن شحنة نقطية واحدة q:

لدينا:

$$V_1 = K\frac{q}{r} = K\frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

تطبيق عددي:

$$V_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(3 \cdot 10^{-2})^2 + (4 \cdot 10^{-2})^2}} = 9 \cdot 10^5\ volt$$

2. استنتاج الكمون الكهربائي الإجمالي في النقطة M الناتج عن الشحنات السِتَّة:

بسبب التناظر يكون لدينا:

$$V_T = 6\,V_1 = 6\,K\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

تطبيق عددي:

$$V_T = 6\,(9\cdot 10^5) = 54\cdot 10^5\ volt$$

3. استنتج عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M:

بسبب التناظر، الحقل الإجمالي في النقطة M يكون محمول على المحور Oz و منه:

$$\vec{E}_T = -\overrightarrow{grad}V_T = -\frac{\partial V_T}{\partial z}\vec{k}$$

أي أنّ:

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial}{\partial z}\left(6\,K\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k} = \frac{6\,K\,q\,z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

تطبيق عددي:

$$\vec{E}_T = \frac{6\,(9\cdot 10^9)\,(5\cdot 10^{-6})\,(4\cdot 10^{-2})}{[(3\cdot 10^{-2})^2+(4\cdot 10^{-2})^2]^{\frac{3}{2}}}\vec{k} = 86.4\cdot 10^6\,\vec{k}\quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

4. حساب القوة المؤثرة على الشحنة Q الموضوعة في النقطة O:

في النقطة O لدينا $z = 0$، إذن بالتعويض في عبارة $\vec{E}_T$ السابقة نجد أنّ $\vec{E}_T = \vec{0}$ و بالتالي تكون القوة المؤثرة على الشحنة Q معدومة:

$$\vec{F}_T = Q\cdot\vec{E}_T = \vec{0}$$

و منه نستنتج أنّ النقطة O تمثل وضعية توازن للشحنة Q.

5. حساب العمل اللازم بذله من أجل نقل الشحنة Q من النقطة O الى النقطة M:

$$W_{O\to M} = E_p(O) - E_p(M) = Q[V_T(O) - V_T(M)]$$

حيث:

$$V_T(O) = 6K\frac{q}{R} = 6(9\cdot 10^9)\frac{5\cdot 10^{-6}}{3\cdot 10^{-2}} = 90\cdot 10^5\ volt$$

و منه يكون:

$$W_{O\to M} = 9\cdot 10^{-6}\cdot[(90\cdot 10^5) - (54\cdot 10^5)] = 32.4\ Joule$$

التّمرين السّادس:

في تجربة ميليكان نعتبر وجود صفيحتين معدنيتين أفقيتين تفصلهما مسافة قدرها $1.5\ cm$، الفرق في الكمون بين الصفيحتين يساوي $3\ kV$. كما نعتبر أنّه في الفضاء المحصور بين الصفيحتين هناك قطرات زيت صغيرة مشحونة سلبا في حالة توازن.

1. حدد أي الصفيحتين المشحونة إيجابا و المشحونة سلبا.
2. أحسب شحنة قطرة الزيت التي نعتبرها كروية الشكل، قارنها مع شحنة الالكترون.

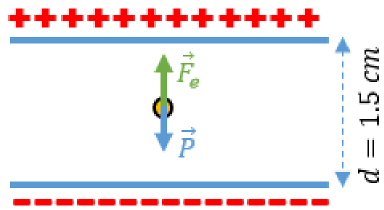
يعطى: الكتلة الحجمية للزيت $\rho = 900\ kg/m^3$، نصف قطر قطرة الزيت $R = 2.05\ \mu m$، شدة حقل الجاذبية الأرضية $g = 9.8\ m/s^2$.

الحل:

1. تحديد أي الصفيحتين المشحونة إيجابا و المشحونة سلبا:

نعلم أنّه حتى تكون قطرة الزيت في حالة توازن بين الصفيحتين يجب أن يكون مجموع القوى المطبّقة عليها معدوم، و بما أنّه لا توجد إلا قوّتان باعتبارهما الوحيدتان و هما القوّة الكهربائية و قوّة الثقل التي

هي طبعا متّجهة نحو الأسفل فحتما إذن سيكون اتّجاه القوّة الكهربائية نحو الأعلى. لدينا كذلك من معطيات التمرين أنَّ قطرة الزيت مشحونة سلبا $(q < 0)$ و حسب العلاقة $\vec{F} = q\,\vec{E}$ فإنّه يمكننا أن نستنتج أنَّ اتّجاه الحقل الكهربائي هو عكس اتّجاه القوّة الكهربائية، أي أنَّ اتّجاه الحقل الكهربائي يكون متجها شاقوليا من الأعلى نحو الأسفل و من هنا نستنتج أنَّ الصفيحة العلوية مشحونة إيجابا و الصفيحة السفلية مشحونة سلبا كما هو موضّح في الشكل.



2. حساب شحنة قطرة الزيت:

باعتبار أنّ قطرة الزيت في حالة سكون إذن يكون مجموع القوى المطبّقة عليها معدوم، أي أنّ:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

و باعتبار أنّ القوّة الكهربائية و قوّة الثقل هما الوحيدتان المطبّقتين على قطرة الزيت، يكون:

$$\vec{P} + \vec{F}_e = \vec{0}$$

و منه نجد:

$$m\,\vec{g} + q\,\vec{E} = \vec{0}$$

مع العلم أنّ كلا الحقلين $\vec{g}$ و $\vec{E}$ متّجهين نحو الأسفل، إذن بإسقاط العلاقة الأخيرة على المحور Oz الشّاقولي و المتّجه نحو الأعلى يكون:

$$-m\,g - q\,E = 0$$

أي أنّ:

$$q = -\frac{m\,g}{E}$$

و بما أنّ الحقل الكهربائي منتظم بين الصفيحتين إذن يكون $E = \frac{\Delta V}{d}$ حيث ΔV يمثل فرق الكمون بين الصفيحتين و d تمثل المسافة بينهما. بتعويض عبارة E نجد:

$$q = -\frac{m\, g\, d}{\Delta V}$$

كذلك لدينا كتلة قطرة الزيت $m = \rho\, v$ حيث $v = \frac{4}{3}\pi R^3$ يمثل حجم القطرة، إذن بتعويض عبارة m نجد:

$$q = -\frac{4\pi\rho\, g\, d\, R^3}{3\, \Delta V}$$

تطبيق عددي:

$$q = -\frac{4\pi(900)\,(9.8)\,(0.015)\,(2.05 \cdot 10^{-6})^3}{3\,(3000)} = -1.6 \cdot 10^{-18} C$$

و بمقارنتها بشحنة الإلكترون $e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$ نجد أنّ:

$$q = 10 \cdot (-1.6 \cdot 10^{-19})$$

أي أنّ:

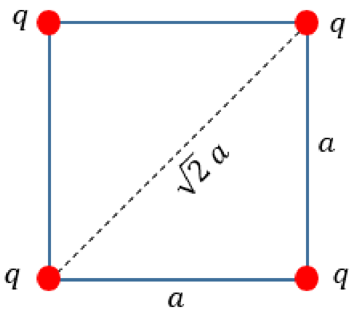
$$q = 10\, e$$

و منه فإنّ شحنة قطرة الزيت أكبر عشر مرّات من شحنة الإلكترون.

🕮 التّمرين السابع:

أحسب الطاقة الكامنة الداخلية لجملة تتكون من أربعة شحنات نقطية متماثلة شحنة كل منها هي $q = 3\ \mu C$ موضوعة على رؤوس مربع طول ضلعه $a = 1\ cm$.

✍ الحل:



الطاقة الكامنة الداخلية لهذه الجملة هي E_P حيث:

$$E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i\, V_i = \frac{1}{2}(q_1\, V_1 + q_2\, V_2 + q_3\, V_3 + q_4\, V_4)$$

مع العلم أنّ:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V$$

و منه يكون:

$$E_P = \frac{1}{2}(4\, q\, V) = 2\, q\, V$$

حيث:

$$V = K\frac{q}{a} + K\frac{q}{\sqrt{2}\,a} + K\frac{q}{a} = Kq\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}\,a} + \frac{1}{a}\right) = K\, q\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,a}\right)$$

بالتعويض في عبارة E_P نجد:

$$E_P = 2\, K\, q^2\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,a}\right) = K\frac{q^2}{a}(\sqrt{2}+4)$$

تطبيق عددي:

$$E_P = 9\cdot 10^9\frac{(3\cdot 10^{-6})^2}{0.01}(\sqrt{2}+4) \approx 43.85\, Joule$$

الفصل الثّالث:

مسائل حول التّوزيع المستمر للشّحنات

التّمرين الأوّل:

نعتبر أنّه لدينا كرة مركزها O و نصف قطرها R مشحونة حجميا، أوجد عبارة الشحنة الكلية للكرة إذا كانت:

1. الكثافة الحجمية للشحنة ثابتة و تساوي ρ_0 .
2. الكثافة الحجمية للشحنة تتغير حسب العلاقة الآتية: $\rho(r) = \frac{4}{3}\rho_0\left(\frac{R}{r}\right)$.

حيث ρ_0 ثابت.

الحل:

1. إيجاد عبارة الشحنة الكلية للكرة q إذا كانت الكثافة الحجمية للشحنة ثابتة و تساوي ρ_0 :

لدينا:
$$dq = \rho \, dv$$

و منه:

$$q = \iiint_{v} \rho \, dv$$

بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ثابتة و تساوي ρ_0 ، إذن:

$$q = \iiint_{v} \rho_0 \, dv = \rho_0 \iiint_{v} dv = \rho_0 \cdot v$$

من المعلوم أنّ حجم الكرة هو $v = \frac{4}{3}\pi R^3$ و منه تكون عبارة الشحنة الكلية للكرة كالآتي:

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$$

2. إيجاد عبارة الشحنة الكلية للكرة q إذا كانت الكثافة الحجمية للشحنة تتغير حسب العلاقة : $\rho(r) = \frac{4}{3}\rho_0\left(\frac{R}{r}\right)$

لدينا:

$$q = \iiint_{v} \rho \, dv$$

بتعويض عبارة ρ نجد:

$$q = \iiint_{v} \frac{4}{3}\rho_0\left(\frac{R}{r}\right) dv$$

لدينا كذلك عبارة عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الكروية كالآتي:

$$dv = r^2 sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

بتعويض عبارة dv نجد:

$$q = \iiint_{v} \frac{4}{3}\rho_0\left(\frac{R}{r}\right) r^2 sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

بما أنّ جميع المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض فيكون:

$$q = \frac{4\rho_0 \, R}{3}\int_0^R r \, dr \int_0^{\pi} sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

بحساب هذه التكاملات نجد:

$$q = \frac{4\rho_0 \, R}{3}\left(\frac{1}{2}R^2\right)(2)(2\pi)$$

و منه تكون عبارة الشحنة الكلية للكرة كالآتي:

$$q = \frac{8\pi\rho_0 \, R^3}{3}$$

التمرين الثّاني:

نعتبر سلك على شكل مستقيم لانهائي الطول مشحون بانتظام و محمول على المحور Oz و لتكن λ الكثافة الخطّية للشحنة موجبة.

1. أعط وحدة الكثافة الخطّية للشحنة λ.
2. أعط عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع الشحني.
3. أوجد عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن المستقيم اللانهائي الطول و المشحون بانتظام.
4. نعتبر الآن أنّ السلك على شكل قطعة مستقيمة AB طولها L مشحونة بانتظام محمولة على المحور Oz:

أ. أوجد في هذه الحالة عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M واقعة على محور القطعة المستقيمة و التي تبعد مسافة r عن النقطة O منتصف AB.

ب. بالنسبة للحقل الكهربائي ناقش الحالتين: $L \ll r$ و $L \gg r$.

الحل:

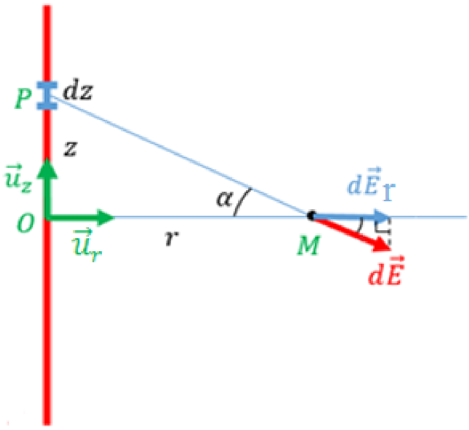
1. وحدة الكثافة الخطّية للشحنة λ هي: (C/m).
2. عبارة الشحنة العنصريةdq لهذا التوزيع الشحني هي:

$$dq = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot dz$$

3. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن المستقيم اللانهائي الطول و المشحون بانتظام:

باستعمال الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z) فإنّ عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M معطاة من الفضاء تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\,\vec{u}_z$$



دراسة الثبات (Invariance):

- إذا قمنا بعملية انسحاب للنقطة M وفق المحور Oz فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية z من مركبات الحقل الكهربائي.
- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M حول المحور Oz فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية θ من مركبات الحقل الكهربائي.

و منه عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M يمكن كتابتها كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u}_r + E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta + E_z(r)\,\vec{u}_z$$

دراسة التناظر:

لدينا المستوي $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ و المستوي $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ هما مستويي تناظر للشحنات و منه فإنّ الحقل الكهربائي في النقطة M ينتمي إلى تقاطع هذين المستويين أي أنّ الحقل الكهربائي يكون موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي السابقة في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

☜ إيجاد عبارة مركبة الحقل الكهربائي $E_r(r)$:

لدينا كما هو موضح في الشكل:

$$dE_r = dE\,cos\alpha$$

و منه يكون:

$$E_r = \int dE \ cos\alpha$$

حيث عبارة الحقل الكهربائي العنصري dE في النقطة M تعطى كالآتي:

$$dE = K \frac{dq}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}$$

مع العلم أن: $dq = \lambda \cdot dz$ تمثل الشحنة العنصرية لهذا التّوزيع الخطّي.

بالتعويض في عبارة E_r نجد:

$$E_r = \int K \frac{\lambda \cdot dz}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} \ cos\alpha$$

نقوم إذن بتغيير جميع المتغيرات في التكامل الأخير بدلالة متغير واحد و ليكن α $(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le +\frac{\pi}{2})$، حيث كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$\begin{cases} tg\alpha = \frac{z}{r} \rightarrow \frac{1}{(cos\alpha)^2} d\alpha = \frac{dz}{r} \rightarrow \boldsymbol{dz = \frac{r}{(cos\alpha)^2} d\alpha} \\ cos\alpha = \frac{r}{\|\overrightarrow{PM}\|} \rightarrow \boldsymbol{\|\overrightarrow{PM}\| = \frac{r}{cos\alpha}} \end{cases}$$

حيث قمنا بمفاضلة عبارة $tg\alpha$ في المعادلة الأولى.

بالتعويض في عبارة E_r الأخيرة نجد:

$$E_r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K \lambda}{r} cos\alpha \ d\alpha = \frac{K \lambda}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos\alpha \ d\alpha$$

و منه:

$$E_r = \frac{K \lambda}{r} [sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

أي أنّ:

$$E_r = \frac{2\,K\,\lambda}{r}$$

لدينا $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ و منه يكون:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}$$

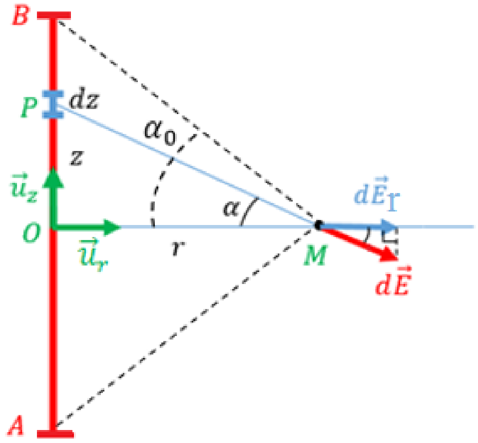
و منه يمكننا كتابة عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن المستقيم اللانهائي الطول و المشحون بانتظام:

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}\vec{u}_r$$

4. حالة قطعة مستقيمة مشحونة بانتظام:

أ. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M واقعة على محور القطعة المستقيمة و التي تبعد مسافة r عن النقطة O منتصف AB:

بما أنّ النقطة M واقعة على محور القطعة المستقيمة $(z = 0)$ إذن بسبب التناظر الحقل الكهربائي في النقطة M يكون محمول على محور هذه القطعة المستقيمة أي أنّ $\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r$ و باتّباع نفس الخطوات السابقة مع تغيير حدود التكامل نجد:



$$E_r = \frac{K\,\lambda}{r}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} cos\alpha == \frac{K\,\lambda}{r}[sin\alpha]_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}$$

أي أنّ:

$$E_r = \frac{2\,K\,\lambda}{r} sin\alpha_0$$

و لدينا كما هو موضح في الشكل:

$$sin\alpha_0 = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}$$

بالتعويض يكون:

$$E_r = \frac{K\,\lambda\,L}{r\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}$$

و منه يمكننا كتابة عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن القطعة المستقيمة و المشحونة بانتظام في نقطة M واقعة على محورها كالآتي:

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r = \frac{K\,\lambda\,L}{r\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}\vec{u}_r$$

ب. المناقشة بالنسبة للحقل الكهربائي و ذلك في الحالتين: $r \ll L$ و $r \gg L$:

حسب عبارة الحقل الكهربائي الأخيرة لدينا:

$$\vec{E} = \frac{K\,\lambda\,L}{r\,L\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r^2}{L^2}}}\vec{u}_r = \frac{K\,\lambda}{r\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r^2}{L^2}}}\vec{u}_r$$

في الحالة $r \ll L$ لدينا المقدار $\frac{r^2}{L^2}$ يؤول إلى الصفر و منه يكون:

$$\vec{E} = \frac{2\,K\,\lambda}{r}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}\vec{u}_r$$

و هي تمثل عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن المستقيم اللانهائي الطول و المشحون بانتظام كما تحصلنا عليها في السؤال الثالث.

و من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{E} = \frac{K\,\lambda\,L}{r\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}\vec{u}_r = \frac{K\,\lambda\,L}{r^2\sqrt{\frac{L^2}{4\,r^2} + 1}}\vec{u}_r$$

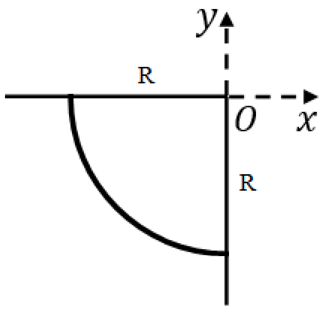
ففي الحالة $r \geq L$ لدينا المقدار $\frac{L^2}{r^2}$ يؤول إلى الصفر و منه يكون:

$$\vec{E} = \frac{K\,\lambda\,L}{r^2}\vec{u}_r = K\,\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

و هي تمثل عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية حيث $q = \lambda\,L$ تمثل الشحنة الكلية للقطعة المستقيمة.

التمرين الثّالث:

نعتبر شحنة q موزعة خطيا بانتظام على طول قوس يشكل ربع دائرة نصف قطرها R كما هو موضح في الشكل، و لتكن λ الكثافة الخطية للشحنة موجبة.



1. أكتب عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع الخطي.
2. أوجد عبارة كثافة الشحنة الخطية λ بدلالة q و R.
3. أوجد عبارة الكمون الكهربائي عند المبدأ O.
4. أوجد عبارة الحقل الكهربائي عند المبدأ O.

الحل:

1. عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع الخطي:

$$dq = \lambda\, dl = \lambda\, R\, d\theta$$

2. إيجاد عبارة كثافة الشحنة الخطية λ بدلالة q و R:

بمكاملة عبارة dq السابقة يكون:

$$q = \int dq = \lambda\, R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \lambda\, R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \lambda\, R \frac{\pi}{2}$$

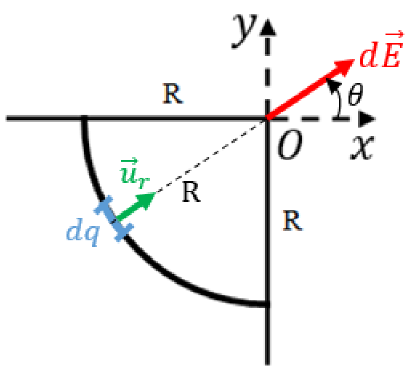
و منه نجد:

$$\lambda = \frac{2\, q}{\pi\, R}$$

3. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي عند المبدأ O:

$$V = \int dV = \int_0^q K \frac{dq}{R} = \frac{K}{R} \int_0^q dq = \frac{K\, q}{R}$$

4. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي عند المبدأ O:



لدينا:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

حيث :

$$d\vec{E} = K\frac{dq}{R^2}\vec{u}_r = K\frac{\lambda\, R\, d\theta}{R^2}\vec{u}_r = K\frac{\lambda\, d\theta}{R}\vec{u}_r$$

كما هو موضح في الشكل لدينا أيضا:

$$\vec{u}_r = cos\theta\,\vec{\imath} + sin\theta\,\vec{\jmath}$$

بالتعويض في عبارة $\vec{E}$ نجد:

$$\vec{E} = K\frac{\lambda}{R}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\, d\theta\,\vec{\imath} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta\, d\theta\,\vec{\jmath}\right\}$$

و منه:

$$\vec{E} = K\frac{\lambda}{R}\left\{[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\vec{\imath} + [-cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\vec{\jmath}\right\}$$

إذن:

$$\vec{E} = K\frac{\lambda}{R}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

و لدينا من السؤال الثاني $\lambda = \frac{2\,q}{\pi\,R}$ و منه تكون عبارة الحقل الكهربائي عند المبدأ O كالآتي:

$$\vec{E} = \frac{2\,K\,q}{\pi\,R^2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

و تكون شدّة الحقل الكهربائي عند المبدأ O كالآتي:

$$E = \frac{2\sqrt{2}\,K\,q}{\pi\,R^2}$$

🕮 التّمرين الرّابع:

لتكن لدينا حلقة دائرية نصف قطرها R تحمل شحنة موزعة بانتظام كثافتها الخطية λ موجبة. و ليكن OZ المحور العمودي على مستوي الحلقة و الذي يمر بمركزها O.

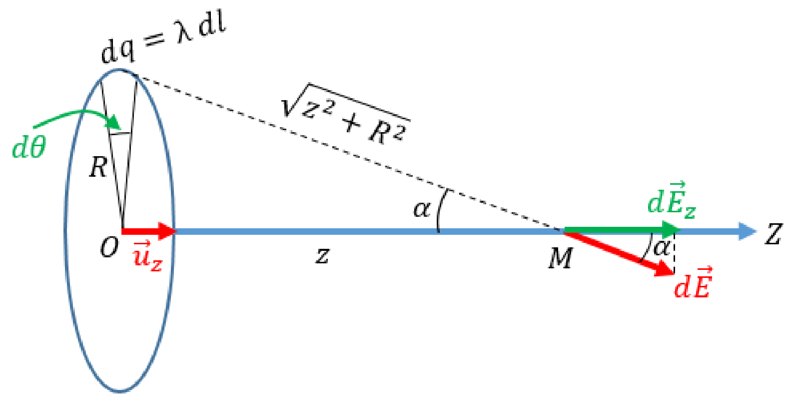
1. أعطي رسم تخطيطي لهذه المسألة.
2. أكتب عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع الخطي.
3. أوجد عبارة الكمون الكهربائي في النقطة M التي تقع على المحور OZ و التي تبعد بمسافة z عن مركز الحلقة O.
4. أوجد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M بطريقتين مختلفتين:

أ. باستنتاجه من الكمون.

ب. بالحساب المباشر له.

✍ الحل:

1. رسم تخطيطي لهذه المسألة:



2. عبارة الشحنة العنصرية لهذا التوزيع الخطي:

$$dq = \lambda\, dl = \lambda\, R\, d\theta$$

3. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي في النقطة M التي تقع على المحور OZ و التي تبعد بمسافة z عن مركز الحلقة O:

لدينا:

$$V = \int dV$$

حيث:

$$dV = K \frac{dq}{\sqrt{z^2 + R^2}} = K \frac{\lambda\, R\, d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

و منه يكون:

$$V = K \frac{\lambda\, R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

أي أنّ:

$$V = \frac{2\pi\, K\, \lambda\, R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

4.أ. الطريقة الأولى: إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك باستنتاجه من الكمون:

بما أنّ عبارة V لا تتعلق إلا بـ z إذن:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial z}\, \vec{u}_z$$

و منه بحساب مشتقة V نجد:

$$\vec{E} = -2\pi\, K\, \lambda\, R \left(\frac{0 - \frac{2\, z}{2\sqrt{z^2 + R^2}}}{z^2 + R^2} \right) \vec{u}_z$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{2\pi\, K\, \lambda\, R\, z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\, \vec{u}_z$$

4.ب. الطريقة الثانية: إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك بالحساب المباشر له:

- بما أنّ النقطة M تقع على محور الحلقة OZ إذن مركبات الحقل الكهربائي في النقطة M لا تتعلق إلا بـ z.
- دراسة التناظر: بما أنّ كل مستوي يشمل محور الحلقة OZ هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني إذن فالحقل الكهربائي يكون محمول على المحور OZ.

هذا يعني أنّ:

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{u}_z$$

و منه:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int dE_z\ \vec{u}_z$$

كما هو موضح في الشكل لدينا :

$$dE_z = dE\ cos\alpha$$

حيث:

$$dE = K\frac{dq}{z^2+R^2} = K\frac{\lambda\,R\,d\theta}{z^2+R^2}$$

$$cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

بالتعويض في عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ نجد:

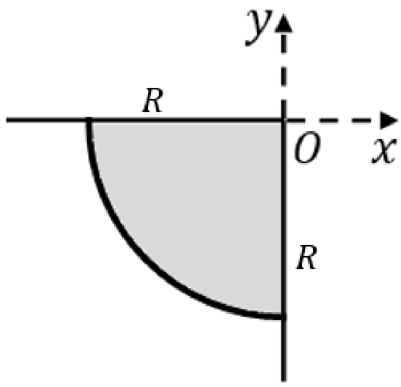
$$\vec{E} = \int dE\ cos\alpha\ \vec{u}_z = \int_0^{2\pi}\frac{K\,\lambda\,R\,z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta\ \vec{u}_z = \frac{K\,\lambda\,R\,z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}d\theta\ \vec{u}_z$$

و منه نجد:

$$\vec{E} = \frac{2\pi K\,\lambda\,R\,z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{u}_z$$

التّمرين الخامس:

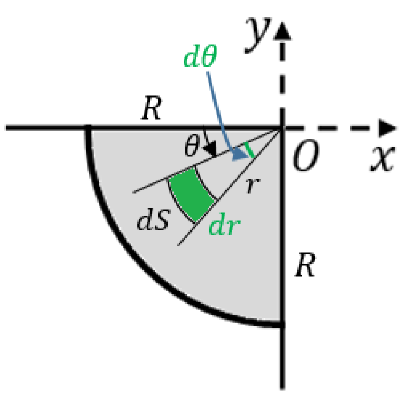
نعتبر شحنة q موزعة سطحيا بانتظام على ربع قرص نصف قطره R كما هو موضح في الشكل.



1. أعط وحدة الكثافة السطحية للشحنة σ.
2. أكتب عبارة الشحنة العنصرية dq لهذا التوزيع.
3. أوجد عبارة كثافة الشحنة السطحية σ بدلالة المعطيات.
4. أوجد عبارة الكمون الكهربائي عند المبدأ O بدلالة المعطيات.

الحل:

1. وحدة الكثافة السطحية للشحنة σ هي (C/m^2).
2. عبارة الشحنة العنصرية dq لهذا التوزيع:



كما هو موضح في الشكل:

$$dq = \sigma\, dS = \sigma\, r\, dr\, d\theta$$

3. إيجاد عبارة كثافة الشحنة السطحية σ بدلالة المعطيات:

بمكاملة عبارة dq نجد:

$$q = \int dq = \sigma \int_0^R r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \sigma \left(\frac{R^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

و منه:

$$\sigma = \frac{4\, q}{\pi\, R^2}$$

4. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي عند المبدأ O بدلالة المعطيات:

لدينا:

$$V = \int dV$$

حيث:

$$dV = K\frac{dq}{r} = K\frac{\sigma\, r\, dr\, d\theta}{r} = K\, \sigma\, dr\, d\theta$$

و منه يكون:

$$V = K\, \sigma \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

أي أنّ:

$$V = \frac{\pi}{2}\, K\, \sigma\, R$$

بتعويض عبارة σ المتحصل عليها في السؤال الثالث نجد:

$$V = \frac{\pi}{2}\, K\, \left(\frac{4\, q}{\pi\, R^2}\right) R = \frac{2\, K\, q}{R}$$

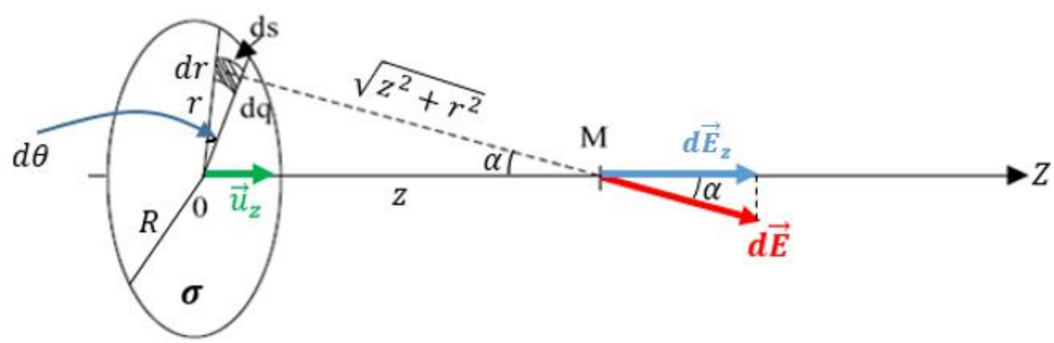
التمرين السّادس:

نعتبر قرص مركزه O و نصف قطره R مشحون سطحيا بانتظام و لتكن σ كثافة شحنته السطحية موجبة. نعتبر النقطة M الواقعة على محور القرص OZ في الاتّجاه الموجب و التي تبعد بمسافة z عن مركز القرص O.

1. أعط رسم تخطيطي للمسألة.
2. أكتب عبارة الشحنة العنصرية dq المحمولة من طرف السطح العنصري للقرص ds.
3. أوجد عبارة الكمون الكهربائي V الناتج عن كل القرص في النقطة M.
4. أوجد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M بطريقتين مختلفتين:
   أ. باستنتاجه من الكمون.
   ب. بالحساب المباشر له.
5. استنتج عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في النقطة M في حالة مستو لانهائي موزعة عليه الشحنة بانتظام.
6. نثقب فتحة دائرية نصف قطرها R و مركزها O داخل المستوي اللانهائي الطول، أوجد عندئذ عبارة الحقل الكهربائي الناشئ من طرف هذا المستوي اللانهائي المثقوب و ذلك في النقطة M.

الحل:

1. رسم تخطيطي للمسألة:



2. عبارة الشحنة العنصرية dq المحمولة من طرف السطح العنصري للقرص ds:

$$dq = \sigma\, ds = \sigma\, r\, dr\, d\theta$$

3. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي V الناتج عن كل القرص في النقطة M:

لدينا:

$$V = \int dV$$

حيث:

$$dV = K\frac{dq}{\sqrt{z^2 + r^2}} = K\frac{\sigma\, r\, dr\, d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

و منه يكون:

$$V = K\sigma \int_0^R \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

أو نكتب:

$$V = \frac{1}{2}K\sigma \int_0^R 2r(z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

أي أنّ:

$$V = \frac{1}{2}K\sigma \left[\frac{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_0^R (2\pi)$$

إذن:

$$V = 2\pi K\sigma\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

4.أ. الطريقة الأولى: إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك باستنتاجه من الكمون:

بما أنّ عبارة V لا تتعلق إلا بـ z إذن:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

و منه بحساب مشتقة V نجد:

$$\vec{E} = -2\pi K\sigma\left(\frac{2\,z}{2\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)\vec{u}_z$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = 2\pi K\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{u}_z$$

4.ب. الطريقة الثانية: إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك بالحساب المباشر له:

- بما أنّ النقطة M تقع على محور القرص OZ إذن مركبات الحقل الكهربائي في النقطة M لا تتعلق إلا بالاحداثية z.
- دراسة التناظر: بما أنّ كل مستوي يشمل محور القرص OZ هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني إذن فالحقل الكهربائي يكون محمول على المحور OZ.

هذا يعني أنّ:

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{u}_z$$

و منه:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int dE_z\ \vec{u}_z$$

كما هو موضح في الشكل لدينا :

$$dE_z = dE\ cos\alpha$$

حيث:

$$dE = K\frac{dq}{z^2+r^2} = K\frac{\sigma\ r\ dr\ d\theta}{z^2+r^2}$$

$$cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

بالتعويض في عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ نجد:

$$\vec{E} = \int dE\ cos\alpha\ \vec{u}_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{K\ \sigma\ z\ r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr\ d\theta\ \ \vec{u}_z$$

و منه نجد:

$$\vec{E} = K\ \sigma\ z \int_0^R \frac{r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr \int_0^{2\pi} d\theta\ \ \vec{u}_z$$

أو نكتب:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} K\ \sigma\ z \int_0^R 2r(z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta\ \ \vec{u}_z$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} K\ \sigma\ z \left[\frac{(z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \right]_0^R (2\pi)\ \vec{u}_z$$

أو نكتب أيضا:

$$\vec{E} = 2\pi\ K\ \sigma\ z \left[\frac{-1}{\sqrt{(z^2 + r^2)}} \right]_0^R\ \ \vec{u}_z$$

و منه:

$$\vec{E} = 2\pi\ K\ \sigma\ z \left(\frac{-1}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} + \frac{1}{z} \right) \vec{u}_z$$

و أخيرا نجد:

$$\vec{E} = 2\pi\ K\ \sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{u}_z$$

5. عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في النقطة M في حالة مستو لانهائي موزعة عليه الشحنة بانتظام:

يمكن استنتاج عبارة الحقل الكهربائي في حالة مستو لانهائي موزعة عليه الشحنة بانتظام و ذلك انطلاقا من عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن القرص السابقة و هذا باعتبار أن نصف قطر القرص يؤول إلى اللانهاية فيكون:

$$\vec{E} = 2\pi\, K\, \sigma(1-0)\, \vec{u}_z = 2\pi\, K\, \sigma\, \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\, \vec{u}_z$$

6. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي الناشئ من طرف المستوي اللانهائي المثقوب و ذلك في النقطة M:

حسب مبدأ التراكب لدينا:

الحقل الكهربائي الناتج عن المستوي اللانهائي

$\|$

الحقل الكهربائي الناتج عن القرص

$+$

الحقل الكهربائي الناتج عن المستوي اللانهائي المثقوب

و منه نستنتج أنّ:

الحقل الكهربائي الناتج عن المستوي اللانهائي المثقوب

$\|$

الحقل الكهربائي الناتج عن المستوي اللانهائي

$-$

الحقل الكهربائي الناتج عن القرص

و منه تكون عبارة الحقل الكهربائي الناشئ من طرف المستوي اللانهائي المثقوب في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E} = 2\pi\, K\, \sigma\, \vec{u}_z - 2\pi\, K\, \sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \vec{u}_z$$

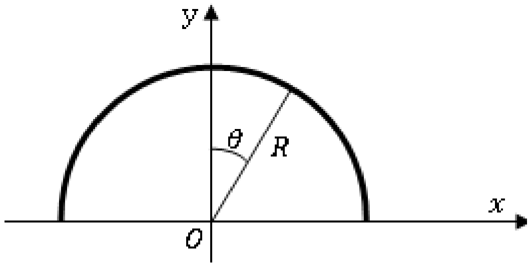
أي أنّ:

$$\vec{E} = 2\pi\, K\, \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\, \vec{u}_z$$

التّمرين السّابع:

نعتبر سلك على شكل نصف دائرة نصف قطرها R موزعة عليه خطيا الشحنة q (لاحظ الشكل).

علما أن كثافة الشحنة الخطية λ تتغير وفق العلاقة : $\lambda = \lambda_0 \cdot cos\theta$ ، حيث λ_0 ثابت موجب.



1. أوجد عبارة الشحنة الكلية للسلك q بدلالة R و λ_0.
2. أوجد عبارة الكمون الكهربائي في النقطة O.
3. أوجد عبارة الحقل الكهربائي الإجمالي في النقطة O.
4. إذا وضعت الشحنة النقطية q_0 في النقطة O، فأوجد عندئذ عبارة القوة الإجمالية المؤثرة عليها.

الحل:

1. إيجاد عبارة الشحنة الكلية للسلك q بدلالة R و λ_0:

لدينا:

$$dq = \lambda \, dl$$

حيث:

$$\lambda = \lambda_0 \, cos\theta$$

$$dl = R \, d\theta$$

بالتعويض في عبارة dq نجد:

$$dq = R \, \lambda_0 \, cos\theta \, d\theta$$

و منه يكون:

$$q = \int dq = R\,\lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos\theta\, d\theta$$

أي أنّ:

$$q = R\,\lambda_0\,[sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

و منه نجد:

$$q = 2R\,\lambda_0$$

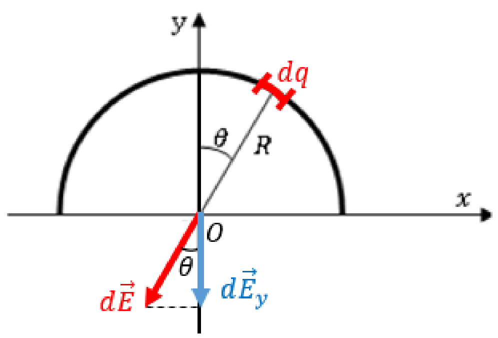
2. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي في النقطة O:

$$V = \int dV = \int K\frac{dq}{R} = \frac{K}{R}\int dq = \frac{K\,q}{R}$$

و بتعويض عبارة q السابقة يكون:

$$V = 2\,K\,\lambda_0$$

3. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي الإجمالي في النقطة O:



دراسة التناظر: بما أنّ المستويين (Oyz) و (Oxy) هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني إذن فالحقل الكهربائي ينتمي لتقاطع هذين المستويين أي أنّه محمول على المحور Oy.

هذا يعني أنّ كما هو موضح في الشكل:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int -dE\ cos\theta\ \vec{j}$$

حيث:

$$dE = K\frac{dq}{R^2} = K\frac{R\ \lambda_0\ cos\theta\ d\theta}{R^2} = \frac{K\ \lambda_0}{R}cos\theta\ d\theta$$

و منه بالتعويض في عبارة $\vec{E}$ يكون:

$$\vec{E} = -\frac{K\ \lambda_0}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos^2\theta\ d\theta\ \vec{j}$$

أو نكتب:

$$\vec{E} = -\frac{K\ \lambda_0}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta\ \vec{j}$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = -\frac{K\ \lambda_0}{2\ R}\left[\theta + \frac{1}{2}sin(2\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\ \vec{j}$$

بعد الحساب و التبسيط نجد:

$$\vec{E} = -\frac{\pi\ K\ \lambda_0}{2\ R}\ \vec{j}$$

4. إيجاد عبارة القوة الإجمالية $\vec{F}$ المؤثرة على الشحنة النقطية q_O:

لدينا:

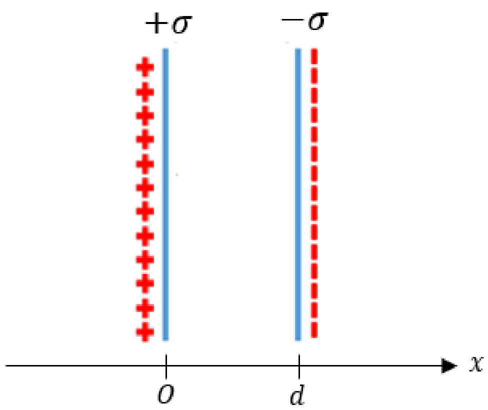
$$\vec{F} = q_O\ \vec{E}$$

و منه نستنتج أنّ:

$$\vec{F} = -\frac{\pi\ K\ \lambda_0\ q_O}{2\ R}\ \vec{j}$$

🕮 التّمرين الثّامن:

نعتبر صفيحتين متوازيتين أبعادهما كبير مقارنة بالمسافة d التي تفصلهما، مشحونتين بشحنتين متساويتين مقدارا و متعاكستين في الإشارة. و لتكن σ كثافة الشحنة السطحية للصفيحة المشحونة إيجابا حيث نعتبرها ثابتة و موجبة، إذن $-\sigma$ هي كثافة الشحنة السطحية للصفيحة المشحونة سلبا كما هو موضح في الشكل.

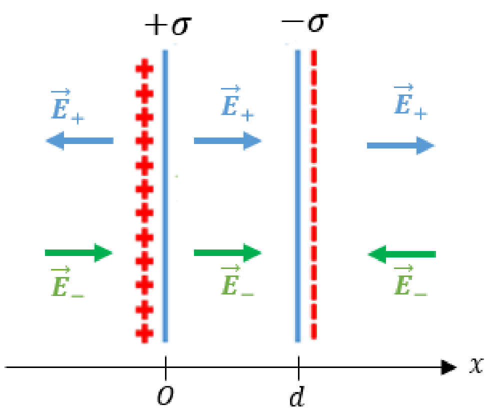


1. أوجد عبارة الحقل الكهربائي في المواضع $0 < x < d$ من جهة و $\begin{cases} x < 0 \\ x > d \end{cases}$ من جهة أخرى.
2. أوجد عبارة فرق الكمون بين الصفيحتين.

تذكير : الحقل الكهربائي الناتج عن مستوي لا نهائي الطول كثافة شحنته السطحية σ هو $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

✍ الحل:

1. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي:



ليكن $\vec{E}_+$ الحقل الكهربائي الناتج عن الصفيحة الموجبة و $\vec{E}_-$ الحقل الكهربائي الناتج عن الصفيحة السالبة، و منه يكون:

- ✓ الحقل الكهربائي في الموضع $0 < x < d$:

حسب مبدأ التراكب كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{\imath}$$

- ✓ الحقل الكهربائي في المواضع $\begin{cases} x < 0 \\ x > d \end{cases}$ لدينا:

حسب مبدأ التراكب كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} = \vec{0}$$

2. أيجاد عبارة فرق الكمون بين الصفيحتين:

لدينا:

$$dV = -\vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

بما أنّ الحقل الكهربائي موازي للمحور Ox، إذن يكون:

$$dV = -E\,dx$$

كذلك باعتبار أن الحقل الكهربائي منتظم، إذن بمكاملة العلاقة الأخيرة نجد:

$$\Delta V = E\,d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

الفصل الرّابع:
مسائل حول التدفّق و نظرية غوص

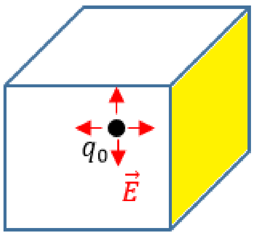
التمرين الأول:

نعتبر شحنة نقطية q_0 موضوعة في مركز مكعب طول ضلعه d. المطلوب إيجاد تدفق الحقل الكهربائي عبر وجه واحد من هذا المكعب.

الحل:

حسب نظرية التدفق (نظرية غوص) فإنّ تدفق الحقل الكهربائي Φ عبر الوجوه الستة للمكعب يساوي:

$$\Phi = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$



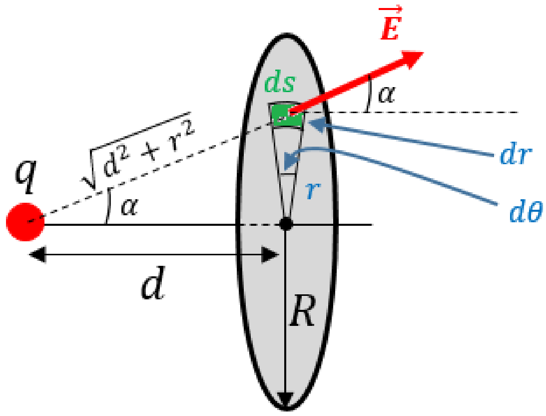
و منه بسبب التناظر يكون تدفق الحقل الكهربائي Φ_1 عبر وجه واحد للمكعب يساوي:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{6} = \frac{q_0}{6\varepsilon_0}$$

التّمرين الثاني:

نعتبر أنّه توجد شحنة نقطية $q = 6\ \mu C$ موجودة في محور قرص نصف قطره $R = 4\ cm$ على بعد $d = 3cm$ من مركز القرص. المطلوب هو حساب تدفق الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة النقطية q عبر سطح القرص.

✍ الحل:



يحسب تدفق الحقل الكهربائي Φ الناتج عن الشحنة النقطية q عبر سطح القرص كالآتي:

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \iint_S E\, ds\, cos\alpha$$

حيث، كما هو موضح في الشكل، E يمثل الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة النقطية q ، و ds تمثل المساحة العنصرية للقرص، و α تمثل الزاوية بين اتجاه الحقل الكهربائي و محور القرص:

$$E = K\frac{q}{d^2+r^2}$$

$$ds = r\, dr\, d\theta$$

$$cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}$$

بالتعويض في عبارة تدفق الحقل الكهربائي Φ نجد:

$$\Phi = K\, q\, d \int_0^R \frac{r}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

أي أنّ:

$$\Phi = K\, q\, d \left[\frac{-1}{\sqrt{d^2+r^2}}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}$$

و منه نجد:

$$\Phi = 2\pi\ K\ q\ d\ \left(\frac{-1}{\sqrt{d^2+R^2}}+\frac{1}{d}\right) = 2\pi\ K\ q\ \left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$$

تطبيق عددي:

$$\Phi = 2(3.14)(9\cdot 10^{9})(6\cdot 10^{-6})\left(1-\frac{0.03}{\sqrt{(0.03)^2+(0.04)^2}}\right)$$

و منه:

$$\Phi \approx 1.36\cdot 10^{5}\ \frac{N\ m^2}{C}$$

التّمرين الثالث:

لتكن لدينا كرة مركزها O و نصف قطرها R مشحونة حجميا بانتظام و لتكن ρ كثافة شحنتها الحجمية موجبة و ثابتة.

1- أثبت أن الحقل الكهربائي يكتب على الشكل $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\ \vec{u}_r$.

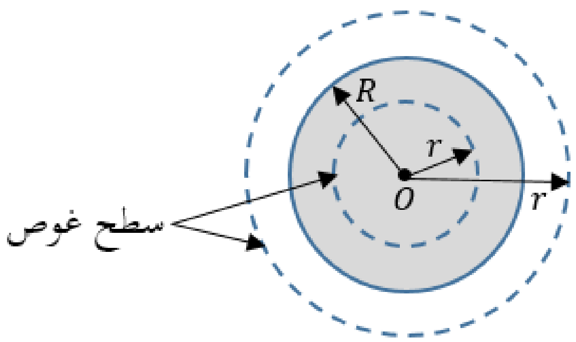
2- باستعمال نظرية غوص أوجد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقتين $r \le R$ و $r \ge R$.

3- أوجد عبارة الكمون الكهربائي في المناطق المذكورة سابقا.

4- أرسم دالتي الحقل و الكمون.

الحل:

1. إثبات أن الحقل الكهربائي يكتب على الشكل $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\ \vec{u}_r$:



باستعمال الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) فإنّ عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M معطاة من الفضاء تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\varphi$$

دراسة الثبات (Invariance):

- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية φ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية φ من مركبات الحقل الكهربائي.
- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية θ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية θ من مركبات الحقل الكهربائي.

و منه عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M يمكن كتابتها كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\,\vec{u}_r + E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r)\,\vec{u}_\varphi$$

دراسة التناظر: كل مستوي يحوي النقطتين O و M هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني و منه فإنّ الحقل الكهربائي في النقطة M ينتمي إلى تقاطع هذه المستويات أي أنّ الحقل الكهربائي يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي السابقة في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

2. عبارة الحقل الكهربائي:

لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل كرة مركزها O و نصف قطرها r.

لدينا الحقل الكهربائي و عنصر السطح هما قطريان أي أنّهما متوازيان إذن:

$$\oiint_{S_G} E\, ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

كذلك الحقل الكهربائي هو ثابت على امتداد سطح غوص إذن:

$$E \oiint_{S_G} ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E\, S_G = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

و منه:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

✓ المنطقة $r \leq R$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, \vec{u}_r$$

✓ المنطقة $r \geq R$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, R^3$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, R^3}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2}$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2}\, \vec{u}_r$$

3. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي في المناطق المذكورة سابقا:

نستعمل العلاقة:

$$dV = -\vec{E}\, d\vec{l}$$

لكن نعلم أنّ الحقل الكهربائي هو قطري، إذن يمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:

$$dV = -E\, dr$$

أي أنّ:

$$V = -\int E\, dr \cdots\cdots\cdots (**)$$

✓ المنطقة $r \geq R$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \, dr$$

و منه نجد:

$$V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r} + C_1$$

لدينا $V(\infty) = 0$ و منه حسب العلاقة الأخيرة نجد $C_1 = 0$، أي أنّ:

$$V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

✓ المنطقة $r \leq R$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \, dr$$

و منه نجد:

$$V = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_2$$

لإيجاد الثابت C_2 نستعمل خاصية استمرارية الكمون فيكون لدينا:

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R)$$

حيث V_{int} يشير إلى الكمون الكهربائي داخل الكرة و V_{ext} يشير إلى الكمون الكهربائي خارج الكرة.

و منه نجد:

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + C_2 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

إذن:

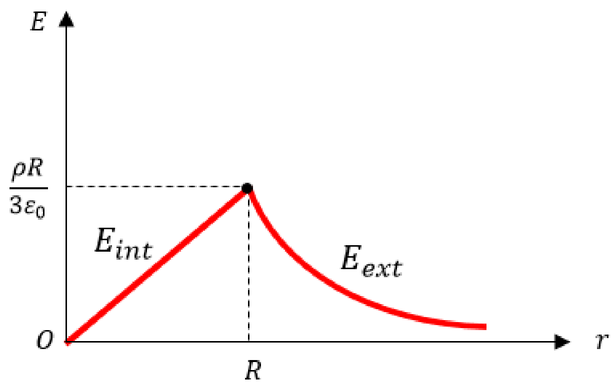
$$C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي داخل الكرة كالآتي:

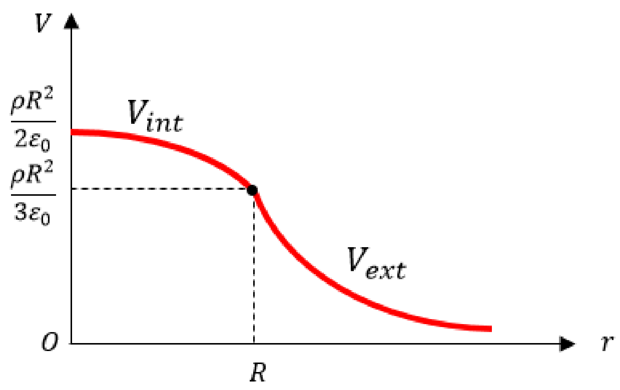
$$V = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

4. رسم دالتي الحقل و الكمون:

✓ الحقل الكهربائي $E(r)$:



✓ الكمون الكهربائي $V(r)$:



التّمرين الرابع:

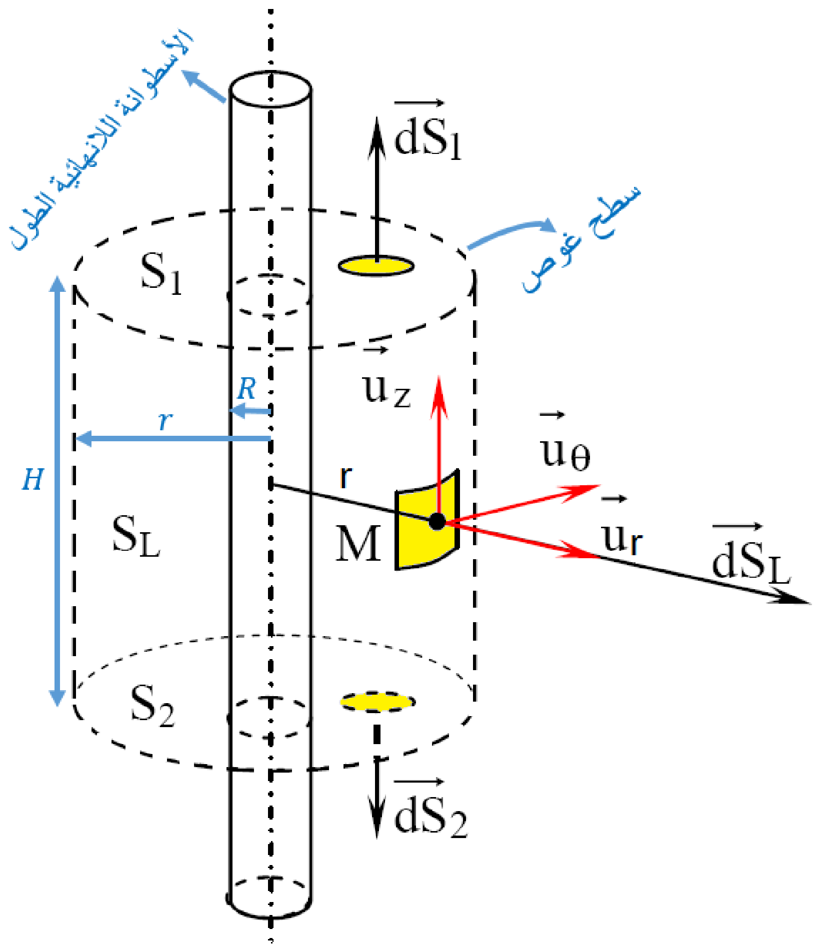
لتكن لدينا أسطوانة لا نهائية الطول محورها Oz و نصف قطرها R مشحونة سطحيا بانتظام و لتكن σ كثافة شحنتها السطحية موجبة و ثابتة.

1- أثبت أن الحقل الكهربائي يكتب على الشكل $\vec{E}(r,\theta,z) = E(r)\,\vec{u}_r$.

2- باستعمال نظرية غوص أوجد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقتين $r < R$ و $r > R$.

الحل:

1. إثبات أن الحقل الكهربائي يكتب على الشكل $\vec{E}(r,\theta,z) = E(r)\,\vec{u}_r$:



باستعمال الإحداثيات الأسطوانية (r,θ,z) فإنّ عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M معطاة من الفضاء تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\,\vec{u}_z$$

دراسة الثبات (Invariance):

- إذا قمنا بعملية انسحاب للنقطة M وفق المحور Oz فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية z من مركبات الحقل الكهربائي.
- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية θ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية θ من مركبات الحقل الكهربائي.

و منه عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M يمكن كتابتها كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\,\vec{u}_r + E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta + E_z(r)\,\vec{u}_z$$

دراسة التناظر: إنّ المستويين $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ و $(\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ هما مستويات تناظر للتوزيع الشحني و منه فإنّ الحقل الكهربائي في النقطة M ينتمي إلى تقاطع هذين المستويين أي أنّ الحقل الكهربائي يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي السابقة في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

2. عبارة الحقل الكهربائي:

لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل أسطوانة مغلقة لها نفس محور الأسطوانة المشحونة و نصف قطرها r و ارتفاعها H، و منه يكون:

$$\iint_{S_1} \vec{E}\,d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}\,d\vec{s}_2 + \iint_{S_L} \vec{E}\,d\vec{s}_L = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \;\cdots\cdots\cdots\; (*)$$

حيث S_1 يمثل مساحة القرص العلوي للأسطوانة، S_2 يمثل مساحة القرص السفلي للأسطوانة و S_L يمثل مساحة السطح الجانبي للأسطوانة.

بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون عموديا على عنصر السطح $d\vec{s}_1$، أي أنّ:

$$\iint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{s}_1 = 0$$

كذلك بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون عموديا على عنصر السطح $d\vec{s}_2$، أي أنّ:

$$\iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{s}_2 = 0$$

و بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون موازيا لعنصر السطح $d\vec{s}_L$ و ثابت على امتداد السطح الجانبي لأسطوانة غوص، أي أنّ:

$$\iint_{S_L} \vec{E}\, d\vec{s}_L = \iint_{S_L} E\, ds_L = E \iint_{S_L} ds_L = E\, s_L = E\, 2\pi\, r\, H$$

بالتعويض في العبارة (*) نجد:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \cdots\cdots\cdots (**)$$

✓ المنطقة $r < R$:

في هذه المنطقة لا توجد شحنات أي أنّ:

$$\sum q_{int} = 0$$

و منه نستنتج أن الحقل الكهربائي داخل الأسطوانة معدوم أي أنّ:

$$\vec{E} = \vec{0}$$

✓ المنطقة $r > R$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \sigma\, S_L = \sigma\, 2\pi\, R\, H$$

بالتعويض في العلاقة (**) نجد:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\sigma\, 2\pi\, R\, H}{\varepsilon_0}$$

و منه يكون:

$$E(r) = \frac{\sigma\, R}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

أي يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\sigma\, R}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\vec{u}_r$$

🕮 التّمرين الخامس:

لتكن لدينا كرة مركزها O و نصف قطرها R مشحونة حجميا و لتكن q شحنتها الكلية.

1. أثبت أن الحقل الكهربائي يكتب على الشكل $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\,\vec{u}_r$.
2. باستعمال نظرية غوص أوجد عبارة الحقل الكهربائي داخل و خارج الكرة إذا كانت الكثافة الحجمية للشحنة تتغير وفق العلاقة الآتية:

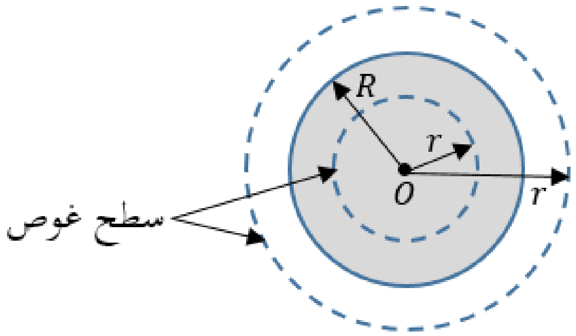
$$\rho = A\, r^2$$

حيث A ثابت و r يمثل البعد عن المركز O.

3. أوجد عبارة الثابت A بدلالة q و R.

✍ الحل:

1. إثبات أن الحقل الكهربائي يكتب على الشكل $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\,\vec{u}_r$:



باستعمال الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) فإنّ عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M معطاة من الفضاء تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\varphi$$

- دراسة الثبات (Invariance):

بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ρ لا تتعلق إلا بـ r و الذي يمثل البعد عن المركز O، و بالتالي:

- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية φ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية φ من مركبات الحقل الكهربائي.
- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية θ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية θ من مركبات الحقل الكهربائي.

و منه عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M يمكن كتابتها كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\,\vec{u}_r + E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta + E_\varphi(r)\,\vec{u}_\varphi$$

- دراسة التناظر: كذلك بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ρ لا تتعلق إلا بـ r و الذي يمثل البعد عن المركز O، و بالتالي كل مستوي يحوي النقطتين O و M هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني و منه فإنّ الحقل الكهربائي في النقطة M ينتمي إلى تقاطع هذه المستويات أي أنّ الحقل

الكهربائي يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي السابقة في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

2. عبارة الحقل الكهربائي:

لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل كرة مركزها O و نصف قطرها r.

لدينا الحقل الكهربائي و عنصر السطح هما قطريان أي أنّهما متوازيان إذن:

$$\oiint_{S_G} E\,ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

كذلك الحقل الكهربائي هو ثابت على امتداد سطح غوص إذن:

$$E\oiint_{S_G} ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E\,S_G = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

و منه:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

✓ المنطقة $r \le R$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \iiint_{v} \rho \, dv = \iiint_{v} (A\, r^2)(r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi)$$

أي أنّ:

$$\sum q_{int} = A \int_0^r r^4 \, dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

و منه نجد:

$$\sum q_{int} = A \left(\frac{r^5}{5}\right)(2)(2\pi) = \frac{4\pi A}{5} r^5$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi A}{5\, \varepsilon_0} r^5$$

و منه نجد:

$$E = \frac{A}{5\, \varepsilon_0} r^3$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{A}{5\, \varepsilon_0} r^3 \, \vec{u}_r$$

✓ المنطقة $r \geq R$:

بنفس الطريقة السابقة لكن مع تغيير حدود التكامل يكون لدينا:

$$\sum q_{int} = A \int_0^R r^4 \, dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

و منه نجد:

$$\sum q_{int} = A\left(\frac{R^5}{5}\right)(2)(2\pi) = \frac{4\pi A}{5}R^5$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد:

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{4\pi A}{5\ \varepsilon_0}R^5$$

أي أنّ:

$$E\ = \frac{\rho R^5}{5\ \varepsilon_0}\ \frac{1}{r^2}$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho R^5}{5\ \varepsilon_0}\ \frac{1}{r^2}\ \vec{u}_r$$

4. إيجاد عبارة الثابت A بدلالة q و R:

لدينا عبارة الشحنة الكلية للكرة q هي كالآتي:

$$q = \iiint_{v} \rho\ dv = \iiint_{v}\ (A\ r^2)(r^2\ sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi)$$

أي أنّ:

$$q = A\int_0^R r^4\ dr\int_0^\pi sin\theta\ d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

و منه نجد:

$$q = A\left(\frac{R^5}{5}\right)(2)(2\pi) = \frac{4\pi A}{5}R^5$$

و منه تكون عبارة الثابت A كالآتي:

$$A = \frac{5\ q}{4\pi\ R^5}$$

التّمرين السادس:

نعتبر أنّه لدينا كرة مركزها O و نصف قطرها a مشحونة حجميا بانتظام و لتكن ρ كثافة شحنتها الحجمية موجبة. كما نعتبر أنّ هذه الكرة موجودة داخل كرة أخرى لها نفس المركز O و نصف قطرها b حيث b أكبر من a و مشحونة سطحيا بانتظام و لتكن σ كثافة شحنتها السطحية موجبة.

1- أوجد عبارة الحقل الكهربائي في المناطق $r < a$ و $a < r < b$ و $r > b$.

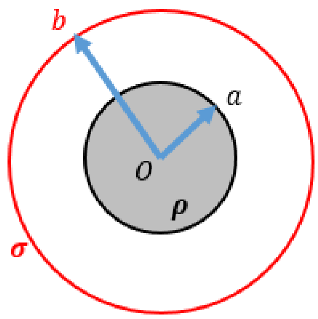
2- أوجد عبارة الكمون الكهربائي في نفس المناطق المذكورة سابقا.

الحل:

1. عبارة الحقل الكهربائي:

بنفس الطريقة التي أستعملت في المسائل السابقة (دراسة الثبات و التناظر) يمكن إثبات أنّ الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات الكروية يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ في جميع المناطق المذكورة في هذا التمرين و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$



لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل كرة مركزها O و نصف قطرها r.

لدينا الحقل الكهربائي و عنصر السطح هما قطريان أي أنّهما متوازيان إذن:

$$\oiint_{S_G} E\, ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

كذلك الحقل الكهربائي هو ثابت على امتداد سطح غوص إذن:

$$E \oiint_{S_G} ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E\, S_G = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

و منه:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\; (*)$$

✓ المنطقة $r < a$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, \vec{u}_r$$

✓ المنطقة $a < r < b$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3$$

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}\, \vec{u}_r$$

✓ المنطقة $r > b$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = q_v + q_s = \rho\, v + \sigma\, S = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3 + \sigma\, 4\pi\, b^2$$

حيث q_v تمثل شحنة الكرة المشحونة حجميا و q_s تمثل شحنة الكرة المشحونة سطحيا.

بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3 + \sigma\, 4\pi\, b^2}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\,\vec{u}_r$$

2. عبارة الكمون الكهربائي في المناطق المذكورة سابقا:

نستعمل العلاقة:

$$dV = -\vec{E}\, d\vec{l}$$

لكن نعلم أنّ الحقل الكهربائي هو قطري، إذن يمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:

$$dV = -E\, dr$$

أي أنّ:

$$V = -\int E\, dr \cdots\cdots\cdots (**)$$

✓ المنطقة $r > b$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V = -\int \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\, dr$$

و منه نجد:

$$V = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + C_1$$

لدينا $V(\infty) = 0$ و منه حسب العلاقة الأخيرة نجد $C_1 = 0$، أي أنّ:

$$V=\left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}+\frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}$$

✓ المنطقة $a<r<b$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V=-\int\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,dr$$

و منه نجد:

$$V=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}+C_2$$

لإيجاد الثابت C_2 يمكن أن نستعمل خاصية استمرارية الكمون بحيث يكون الكمون الكهربائي في المنطقة $r\geq b$ و الكمون الكهربائي في المنطقة $a\leq r\leq b$ متساويين فقط عند الموضع $r=b$ و منه يمكن أن نستخرج قيمة الثابت C_2 و ذلك كالآتي:

$$\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{b}+C_2=\left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}+\frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{b}$$

و منه نجد:

$$C_2=\frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي في هذه المنطقة كالآتي:

$$V=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}+\frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

✓ المنطقة $r<a$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V=-\int\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r\,dr$$

و منه نجد:

$$V = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} r^2 + C_3$$

لإيجاد الثابت C_3 يمكن أن نستعمل خاصية استمرارية الكمون بحيث يكون الكمون الكهربائي في المنطقة $r \leq a$ و الكمون الكهربائي في المنطقة $a \leq r \leq b$ متساويين فقط عند الموضع $r = a$ و منه يمكن أن نستخرج قيمة الثابت C_3 و ذلك كالآتي:

$$-\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} a^2 + C_3 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

و منه نجد:

$$C_3 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي في هذه المنطقة كالآتي:

$$V = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

التمرين السابع:

نعتبر أسطوانة لا نهائية الطول نصف قطرها R، مشحونة حجميا بانتظام و لتكن ρ الكثافة الحجمية للشحنات $(\rho > 0)$.

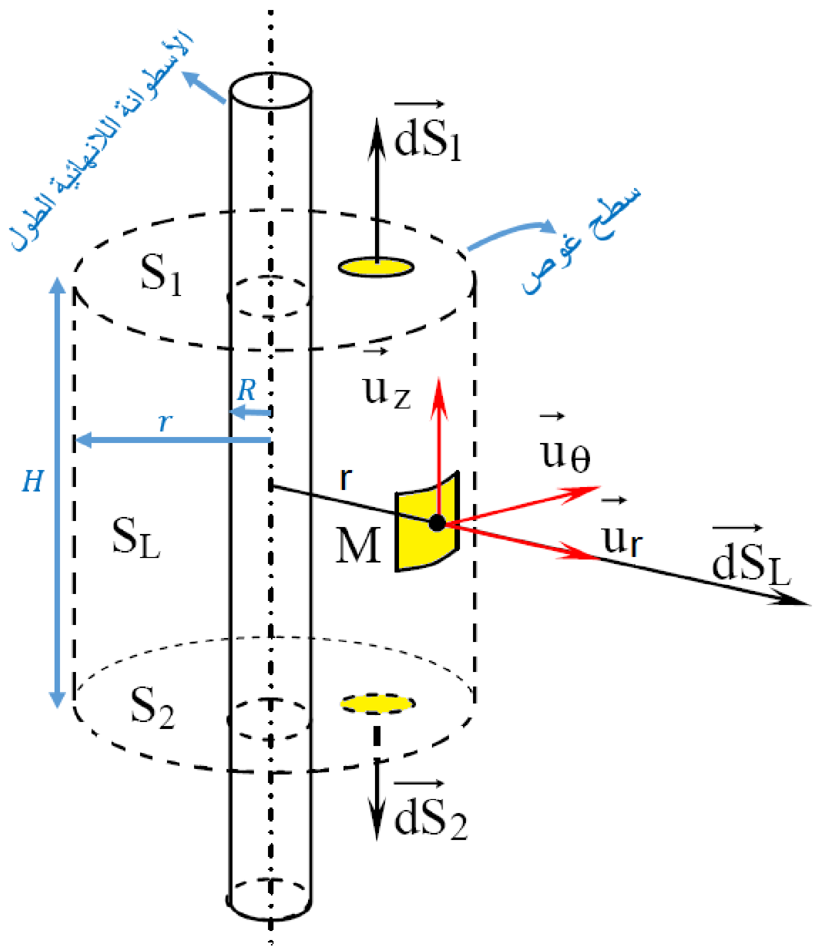
1. باستعمال نظرية غوص أوجد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقتين $r < R$ و $r > R$.
2. أوجد عبارة الكمون الكهربائي V في نفس المناطق المذكورة سابقا، نأخذ الشرط الحدي التالي: $V = 0$ من أجل $r = 0$.
3. في هذا السؤال نعتبر أن الكثافة الحجمية للشحنات ρ تعطى كالآتي: $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)$ حيث ρ_0 ثابت. أوجد عندئذ عبارة الحقل الكهربائي في المنطقة $r < R$.

الحل:

1. عبارة الحقل الكهربائي:

بنفس الطريقة التي أستعملت في التمرين الرابع (دراسة الثبات و التناظر) يمكن إثبات أنّ الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات الأسطوانية يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ في جميع المناطق المذكورة في هذا التمرين و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$



لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل أسطوانة مغلقة لها نفس محور الأسطوانة المشحونة و نصف قطرها r و ارتفاعها H، و منه يكون:

$$\iint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{s}_2 + \iint_{S_L} \vec{E}\, d\vec{s}_L = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

حيث S_1 يمثل مساحة القرص العلوي للأسطوانة، S_2 يمثل مساحة القرص السفلي للأسطوانة و S_L يمثل مساحة السطح الجانبي للأسطوانة.

بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون عموديا على عنصر السطح $d\vec{s}_1$، أي أنّ:

$$\iint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{s}_1 = 0$$

كذلك بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون عموديا على عنصر السطح $d\vec{s}_2$، أي أنّ:

$$\iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{s}_2 = 0$$

و بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون موازيا لعنصر السطح $d\vec{s}_L$ و ثابت على امتداد السطح الجانبي لأسطوانة غوص، أي أنّ:

$$\iint_{S_L} \vec{E}\, d\vec{s}_L = \iint_{S_L} E\, ds_L = E \iint_{S_L} ds_L = E\, s_L = E\, 2\pi\, r\, H$$

بالتعويض في العبارة $(*)$ نجد:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \cdots\cdots\cdots (**)$$

✓ المنطقة $r < R$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \pi\, r^2\, H$$

بالتعويض في العلاقة (**) نجد:

$$E\ 2\pi\, r\, H = \frac{\rho\, \pi\, r^2\, H}{\varepsilon_0}$$

و منه يكون:

$$E(r) = \frac{\rho}{2\, \varepsilon_0}\, r$$

أي يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\, \varepsilon_0}\, r\, \vec{u}_r$$

✓ المنطقة $r > R$:

في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \pi\, R^2\, H$$

بالتعويض في العلاقة (**) نجد:

$$E\ 2\pi\, r\, H = \frac{\rho\, \pi\, R^2\, H}{\varepsilon_0}$$

و منه يكون:

$$E(r) = \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, \frac{1}{r}$$

أي يمكن أن نكتب:

$$\vec{E} = \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, \frac{1}{r}\, \vec{u}_r$$

2. عبارة الكمون الكهربائي :

نستعمل العلاقة:

$$dV = -\vec{E}\, d\vec{l}$$

لكن نعلم أنّ الحقل الكهربائي هو قطري، إذن يمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:

$$dV = -E\, dr$$

أي أنّ:

$$V = -\int E\, dr \cdots\cdots\cdots (***)$$

✓ المنطقة $r < R$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V = -\int \frac{\rho}{2\, \varepsilon_0}\, r\, dr$$

و منه نجد:

$$V = -\frac{\rho}{4\, \varepsilon_0}\, r^2 + C_1$$

لدينا $V(r = 0) = 0$ و منه حسب العلاقة الأخيرة نجد $C_1 = 0$، أي أنّ:

$$V = -\frac{\rho}{4\, \varepsilon_0}\, r^2$$

✓ المنطقة $r > R$:

في هذه المنطقة يكون:

$$V = -\int \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, \frac{1}{r}\, dr$$

و منه نجد:

$$V = -\frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\, ln(r) + C_2$$

لإيجاد الثابت C_2 نستعمل خاصية استمرارية الكمون فيكون لدينا:

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R)$$

حيث V_{int} يشير إلى الكمون الكهربائي داخل الأسطوانة و V_{ext} يشير إلى الكمون الكهربائي خارج الأسطوانة. و منه نجد:

$$-\frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\, ln(R) + C_2 = -\frac{\rho}{4\,\varepsilon_0}\, R^2$$

إذن:

$$C_2 = -\frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - ln(R)\right)$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي داخل الكرة كالآتي:

$$V = -\frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\, ln(r) - \frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - ln(R)\right)$$

أي أنّ:

$$V = -\frac{\rho\, R^2}{2\,\varepsilon_0}\left(ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

3. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقة $r < R$ و هذا في حالة الكثافة الحجمية للشحنات ρ تتغير وفق العلاقة $\rho = \rho_0\left(\frac{r}{R}\right)$:

بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ρ لا تتعلق إلا بـ r و الذي يمثل البعد عن محور الأسطوانة في الإحداثيات الأسطوانية، و بالتالي هنا يبقى نفس الشيئ في دراسة الثبات و التناظر كما قمنا بذلك في التمرين الرابع حيث يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي:

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r)\, \vec{u}_r$$

و لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقة $r < R$ ننطلق من العلاقة (**) التي توصلنا إليها في السؤال الأول:

$$E\ 2\pi\ r\ H = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\upsilon} \rho\ d\upsilon$$

حيث: $d\upsilon = r\ dr\ d\theta\ dz$ يمثل عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الأسطوانية. و منه يكون:

$$E\ 2\pi\ r\ H = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\upsilon} \rho_0\left(\frac{r}{R}\right) r\ dr\ d\theta\ dz$$

أي أنّ:

$$E\ 2\pi\ r\ H = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\ R}\int_0^r r^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz$$

إذن:

$$E\ 2\pi\ r\ H = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\ R}\left(\frac{r^3}{3}\right)(2\pi)(H)$$

و منه:

$$E = \frac{\rho_0}{3\ \varepsilon_0\ R} r^2$$

و يمكن أن نكتب أيضا:

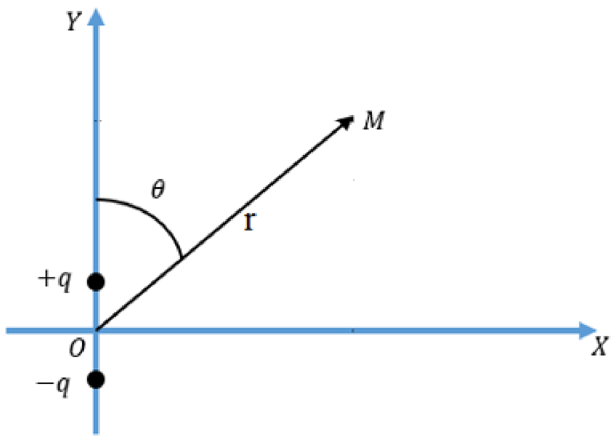
$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\ \varepsilon_0\ R} r^2\ \vec{u}_r$$

الفصل الخامس:

مسائل حول ثنائيات الأقطاب

🕮 التّمرين الأول:

نعتبر ثنائي قطب كهربائي عزمه P يتكون من شحنتين $+q$ و $-q$ تفصلهما المسافة a كما هو موضح في الشكل.



أثبت أنّ عبارة الكمون الكهربائي في تقريب ثنائي القطب بدلالة الإحداثيات (r,θ) هي:

$$V = \frac{K\ P\ cos\theta}{r^2}$$

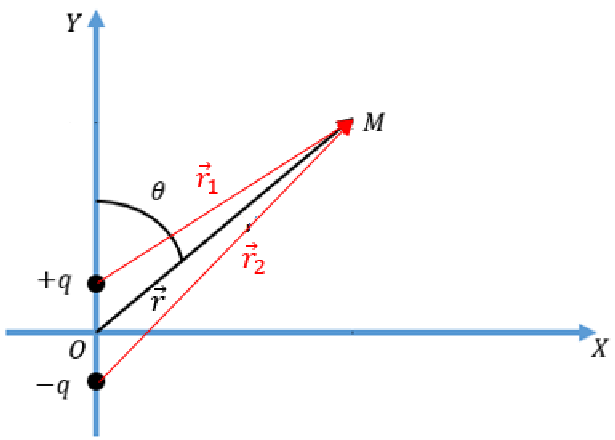
✍ الحل:

نعلم أنّ حساب الكمون الكهربائي في تقريب ثنائي القطب ينجز بحيث يكون $r \gg a$.

كما هو موضح في الشكل، عبارة الكمون الإجمالي في النقطة M هي:

$$V = V_+ + V_- = K\frac{q}{r_1} - K\frac{q}{r_2} = Kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

حسب علاقة شال لدينا:



$$\frac{a}{2}\,\vec{j} + \vec{r}_1 = \vec{r}$$

أي أنّ:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{a}{2}\,\vec{j}$$

بتربيع طرفي المعادلة يكون:

$$r_1^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - a\,r\,cos\theta$$

أو نكتب:

$$r_1^2 = r^2\left(1 + \frac{a^2}{4\,r^2} - \frac{a}{r}\,cos\theta\right)$$

باستعمال تقريب ثنائي القطب $a \ll r$ فيكون المقدار $\frac{a^2}{4\,r^2}$ يؤول إلى الصفر و منه:

$$r_1^2 = r^2\left(1 - \frac{a}{r}\,cos\theta\right)$$

أي أنّ:

$$r_1 = r\left(1 - \frac{a}{r}\,cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

بقلب طرفي المعادلة يكون:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\ cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

و باستعمال التقريب: $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\,\varepsilon$ نجد:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2\,r}\ cos\theta\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

و من جهة أخرى و حسب علاقة شال أيضا لدينا:

$$\frac{a}{2}\,\vec{j} + \vec{r} = \vec{r}_2$$

بتربيع طرفي المعادلة يكون:

$$r_2^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + a\,r\,cos\theta$$

أو نكتب:

$$r_2^2 = r^2\left(1 + \frac{a^2}{4\,r^2} + \frac{a}{r}\ cos\theta\right)$$

باستعمال تقريب ثنائي القطب $a \ll r$ فيكون المقدار $\frac{a^2}{4\,r^2}$ يؤول إلى الصفر و منه:

$$r_2^2 = r^2\left(1 + \frac{a}{r}\ cos\theta\right)$$

أي أنّ:

$$r_2 = r\left(1 + \frac{a}{r}\ cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

بقلب طرفي المعادلة يكون:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\ cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

و باستعمال التقريب: $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\,\varepsilon$ نجد:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2\,r}\,cos\theta\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

بتعويض العبارتين (1) و (2) في المعادلة (*) نجد:

$$V = Kq\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2\,r}\,cos\theta\right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2\,r}\,cos\theta\right)\right]$$

أي أنّ:

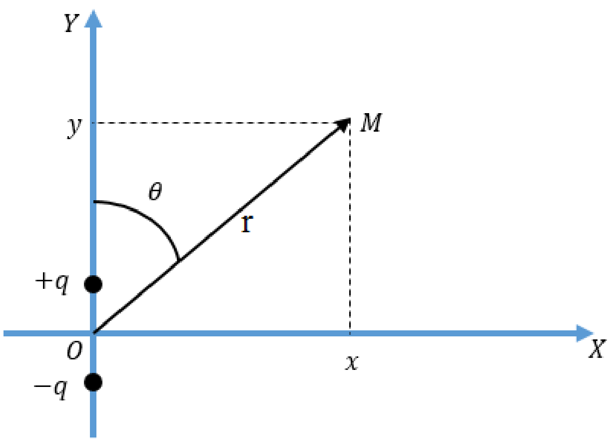
$$V = \frac{Kq}{r}\left(\frac{a}{r}cos\theta\right) = \frac{K\,q\,a}{r^2}cos\theta$$

حيث ندخل عزم ثنائي القطب $P = q\,a$ فيكون:

$$V = \frac{K\,P\,cos\theta}{r^2} = \frac{K\,\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

التّمرين الثاني:

نعتبر ثنائي قطب كهربائي عزمه P يتكون من شحنتين $+q$ و $-q$ كما هو موضح في الشكل. علما أنّ عبارة الكمون الكهربائي في تقريب ثنائي القطب بدلالة الإحداثيات (r,θ) هي $V = \frac{K\,P\,cos\theta}{r^2}$، أوجد:



1. عبارة الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات r و θ.
2. عبارة الكمون الكهربائي بدلالة الإحداثيات الكارتيزية (x,y).
3. عبارة الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات الكارتيزية (x,y).

✍ الحل:

1. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات r و θ:

يمكننا إيجاد عبارة الحقل الكهربائي انطلاقا من عبارة الكمون الكهربائي و ذلك باستخدام العلاقة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\right)$$

و منه يكون:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K\ P\ cos\theta}{r^2}\right)\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{K\ P\ cos\theta}{r^2}\right)\vec{u}_\theta$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{2\ K\ P}{r^3}cos\theta\ \vec{u}_r + \frac{K\ P}{r^3}sin\theta\ \vec{u}_\theta$$

و منه:

$$\vec{E} = \frac{K\ P}{r^3}(2\ cos\theta\ \vec{u}_r + sin\theta\ \vec{u}_\theta)$$

2. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي بدلالة الإحداثيات الكارتيزية (x, y):

لدينا:

$$V = \frac{K\ P\ cos\theta}{r^2}$$

و كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

بالتعويض في عبارة V نجد:

$$V = \frac{K\,P\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات الكارتيزية (x, y):

يمكننا إيجاد عبارة الحقل الكهربائي إنطلاقا من عبارة الكمون الكهربائي و ذلك باستخدام العلاقة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath}\right)$$

و منه يكون:

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K\,P\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K\,P\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{\jmath}\right]$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = -K\,P\left[\frac{0-\frac{3}{2}2x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,y}{(x^2+y^2)^3}\,\vec{\imath} + \frac{1\cdot(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}2y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,y}{(x^2+y^2)^3}\,\vec{\jmath}\right]$$

و بعد التبسيط نجد:

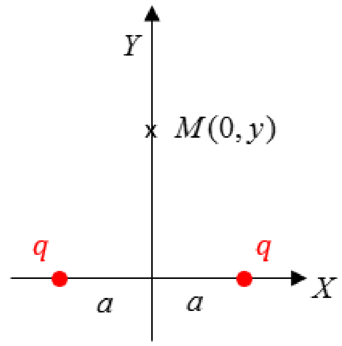
$$\vec{E} = -K\,P\left[\frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{\imath} + \frac{x^2+y^2-3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{\jmath}\right]$$

و منه:

$$\vec{E} = \left[\frac{3KPxy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{\imath} - \frac{KP(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{\jmath}\right]$$

التّمرين الثالث:

نعتبر أنه لدينا شحنتين نقطيتين متساويتين و موجبتين تفصلهما المسافة $2a$ موضوعتين كما هو موضح في الشكل.



1. أوجد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M بدلالة q، a وy .

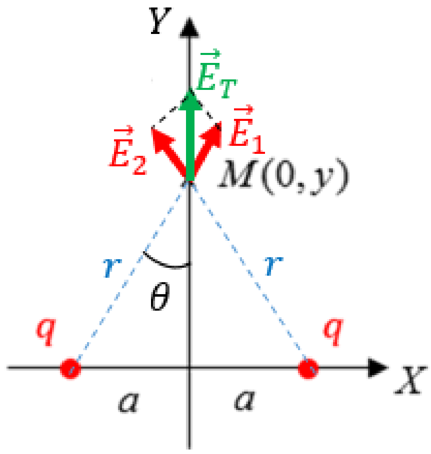
2. إذا وضع في النقطة M ثنائي قطب كهربائي عزمه $\vec{P} = P \cdot \vec{j}$، أوجد عندئذ:

أ. عبارة طاقة كمون ثنائي القطب.

ب. عبارة القوة $\vec{f}$ التي يخضع لها ثنائي القطب.

الحل:

1. عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M بدلالة q، a وy :



حسب مبدأ التراكب لدينا:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

و بسبب التناظر الحقل الإجمالي في النقطة M يكون محمول على المحور (OY) بحيث يكون:

$$\vec{E}_T = 2E_1\, cos\theta\, \vec{j}$$

و منه:

$$\vec{E}_T = 2\left(K\frac{q}{r^2}\right)\, cos\theta\, \vec{j}$$

حيث كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$r = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

بالتعويض في عبارة $\vec{E}_T$ نجد:

$$\vec{E}_T = \frac{2\,K\,q\,y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{j}$$

2. أ. عبارة طاقة كمون ثنائي القطب E_P الموضوع في النقطة M:

لدينا:

$$E_P = -\vec{P}\cdot\vec{E}_T$$

و منه:

$$E_P = -(P\cdot\vec{j})\cdot\left(\frac{2\,K\,q\,y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{j}\right)$$

أي أنّ:

$$E_P = -\frac{2\,K\,q\,P\,y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ب. عبارة القوة $\vec{f}$ التي يخضع لها ثنائي القطب الموضوع في النقطة M:

لدينا:

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\,E_P = -\frac{\partial E_P}{\partial y}\,\vec{J}$$

و منه:

$$\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2\,K\,q\,P\,y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{J}$$

أي أنّ:

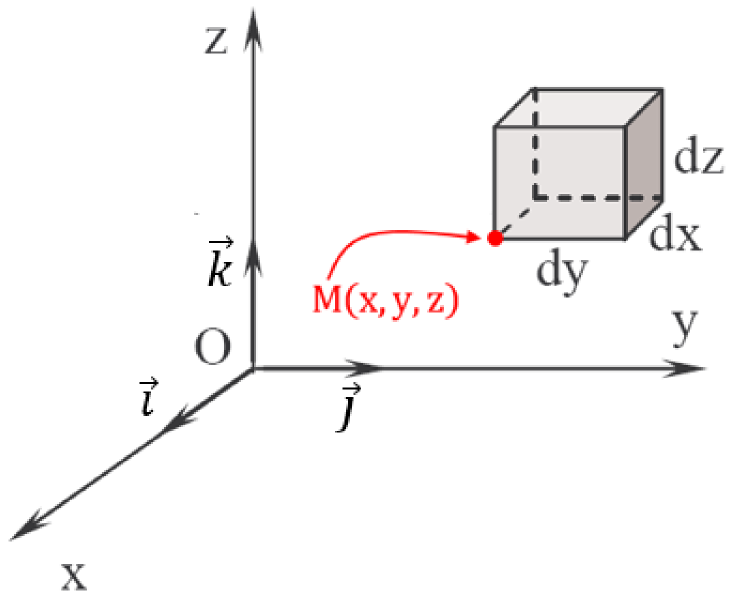
$$\vec{f} = \frac{2\,K\,q\,P\,(2y^2-a^2)}{(a^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{J}$$

الملـــحـق

عبارة التّدرج – عناصر الانتقال، المساحة و الحجم

سنتطرق هنا إلى عبارة التّدرج و كذلك عبارات عنصر الانتقال، عنصر المساحة و عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الكارتيزية، الإحداثيات الأسطوانية و الإحداثيات الكروية و ذلك نظرا للأهمّية البالغة لهذه العبارات في دراسة المسائل الخاصة بالكهرباء الساكنة.

أ. **نظام الإحداثيات الكارتيزية** (x, y, z):



- عبارة عنصر الانتقال بدلالة الإحداثيات الكارتيزية:

$$d\vec{l} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

- عبارة عنصر المساحة بدلالة الإحداثيات الكارتيزية:

بالنسبة للمستوي (Oxy) مثلا يكون: $dS = dx\,dy$

عبارة عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الكارتيزية:

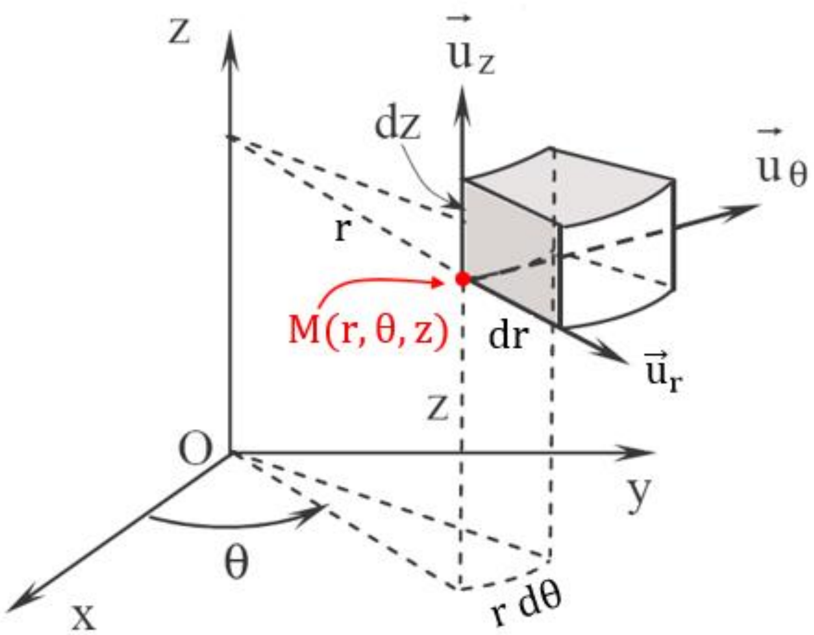
$$dv = dx\, dy\, dz$$

عبارة التدرج بدلالة الإحداثيات الكارتيزية:

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

حيث V تمثل دالة سلمية مثل الكمون الكهربائي.

ب. نظام الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z):



عبارة عنصر الانتقال بدلالة الإحداثيات الأسطوانية:

$$d\vec{l} = dr\, \vec{u}_r + r\, d\theta\, \vec{u}_\theta + dz\, \vec{u}_z$$

عبارة عنصر المساحة بدلالة الإحداثيات الأسطوانية:

بالنسبة للسطح العمودي على $\vec{u}_r$: $\quad dS = r\, d\theta\, dz$

عبارة عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الأسطوانية:

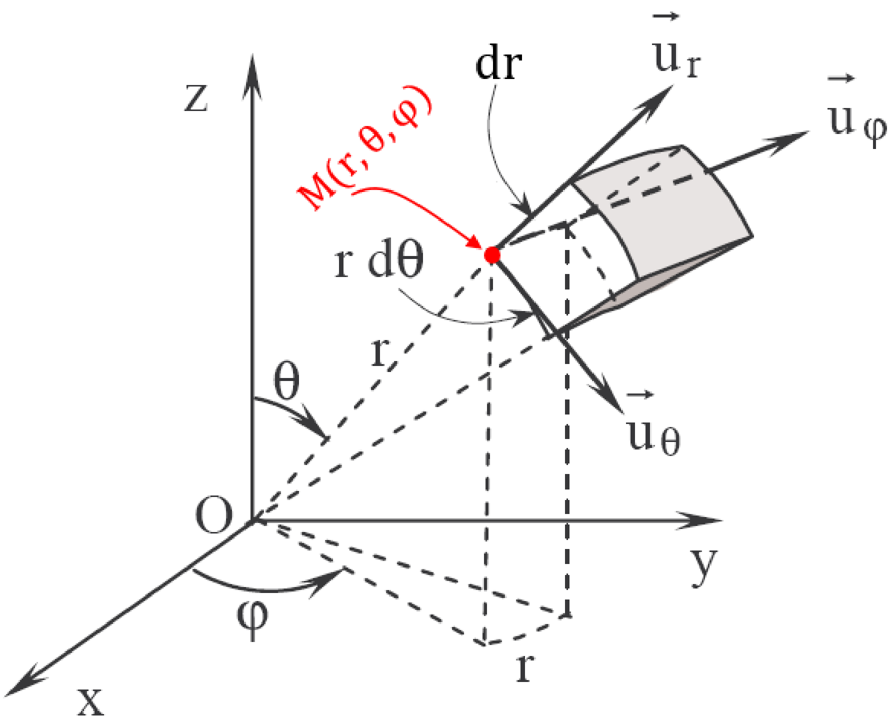
$$dv = r\ dr\ d\theta\ dz$$

عبارة التدرج بدلالة الإحداثيات الأسطوانية:

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

حيث V تمثل دالة سلمية مثل الكمون الكهربائي.

ج. نظام الإحداثيات الكروية (r, θ, φ):



عبارة عنصر الانتقال بدلالة الإحداثيات الكروية:

$$d\vec{l} = dr\ \vec{u}_r + r\ d\theta\ \vec{u}_\theta + r\ sin\theta\ d\varphi\ \vec{u}_\varphi$$

- عبارة عنصر المساحة بدلالة الإحداثيات الكروية:

بالنسبة للسطح العمودي على $\vec{u}_r$: $dS = r^2\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

- عبارة عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الكروية:

$$d\mathcal{v} = r^2\, sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

- عبارة التدرج بدلالة الإحداثيات الكروية:

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\, sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

حيث V تمثل دالة سلمية مثل الكمون الكهربائي.