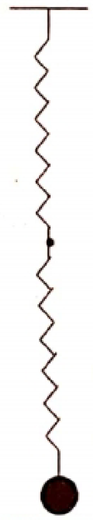
المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط

التخصص : السنة الأولى علوم دقيقة　　　الأعمال الموجهة　　　السلسلة 8 : تحريك + طاقة



التمرين الأول

في الشكل المقابل النابضان مربوطين على التسلسل

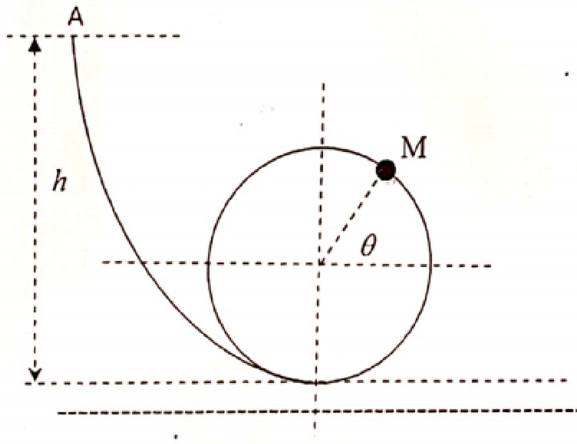
1 - بدراسة حالة التوازن أوجد عبارة ثابت المرونة للنابض المكافئ k بدلالة ثابتي المرونة k_1 و k_2 للنابضين.

2 – نزيح الكتلة m عن وضع توازنها بقيمة A ثم نتركها بدون سرعة ابتدائية أثبت أن حركة الكتلة جيبية مستقيمة

وذلك بثلاث طرق (الـ - ع أ ت - و نظريات الطاقة).

التمرين الثاني

ينزلق جسم بدون احتكاك على مستوٍ منحنٍ ينتهي بمستوٍ دائري نصف قطره R (أنظر الشكل 2).
ينطلق الجسم من ارتفاع h بدون سرعة ابتدائية .



1 – أوجد عبارة السرعة عند النقطة M بدلالة θ ، g ، R و h .

2 – أوجد عبارة رد فعل المستوى N على الجسم .

3 – أحسب قيمة θ حتى يكون لـ N أصغر قيمة.

4 – ما هو الشرط الذي يجب توفره في h حتى لايغادر الجسم المستوي.

التمرين الثالث

* 1 - كتلة نقطية m معلقة بخيط طوله l وكتلته مهملة مثبت من نقطة O .

1- 1 – نزيح الخيط عن الشاقول بزاوية θ_m ثم نتركه بدون سرعة ابتدائية أوجد عبارة سرعة الكتلة وتوتر الخيط عند الوضع الكيفي θ (أنظر الشكل 3) بدلالة θ_m ، θ ، l ، m تطبيق عددي $\theta_m = 60^0$ ، $\theta = 0^0$ ، $l = 1\ m$ $m = 1\ Kg$.

1- 2 – أثبت أنه في حالة θ_m صغيرة جدا فإن حركة الكتلة تصبح دورانية جيبية يطلب تحديد عبارة دورها T .

1- 3 – إذا ضاعفنا طول الخيط أربع مرات استنتج النسبة بين الدور الجديد T_1 والدور T .

** 2- الكتلة m الآن تهتز بدون احتكاك على خيط صلد (أنظر الشكل 4)

إحداثيات الكتلة تعطى بالمعادلات الوسيطية التالية:

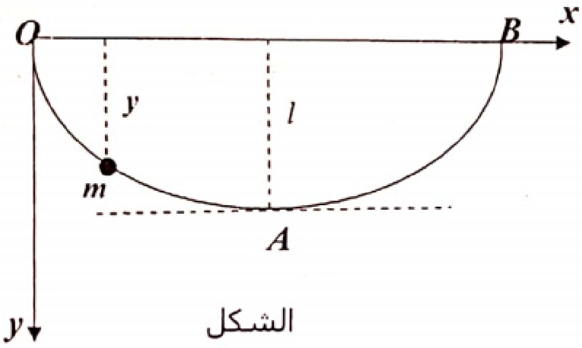
$x = l(\varphi - \sin\varphi)$ ، $y = l(1 - \cos\varphi)$ حيث φ وسيط يتغير مع الزمن دور الاهتزازات هو T_2 تنطلق الكتلة من النقطة O بدون سرعة ابتدائية

2-1 – أوجد قيمة φ التي تعدم y بعد لحظة الانطلاق ؟ في أي نقطة يكون ذلك ؟
كم يصبح الزمن بدلالة T_2 ؟

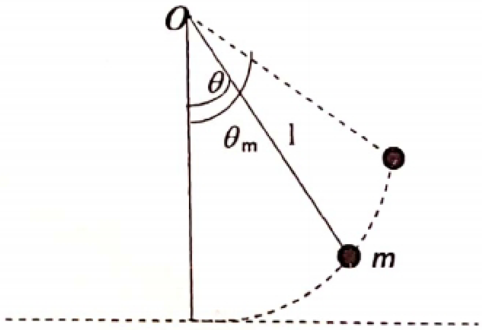
2-2 – أوجد عبارة سرعة الكتلة m بدلالة g , y تطبيق عددي : السرعة عند النقطة A.

2-3 - أوجد عبارة تغير φ مع الزمن حيث $\varphi(t = 0) = 0$ (استعمل نتيجة السؤال (2 - 2).

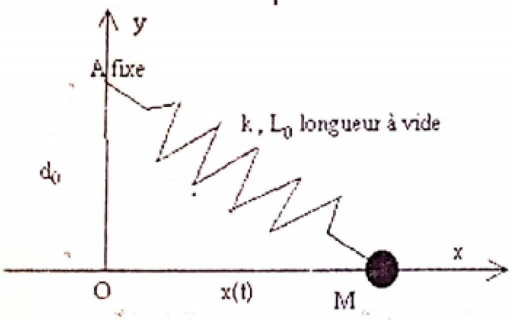
2-4 - باستعمال نتائج الأسئلة (1 - 3) و (2 – 1) و (2 - 3) استنتج العلاقة بين T_2 و T ماذا تستنتج؟



الشكل
4



الشكل



التمرين الرابع

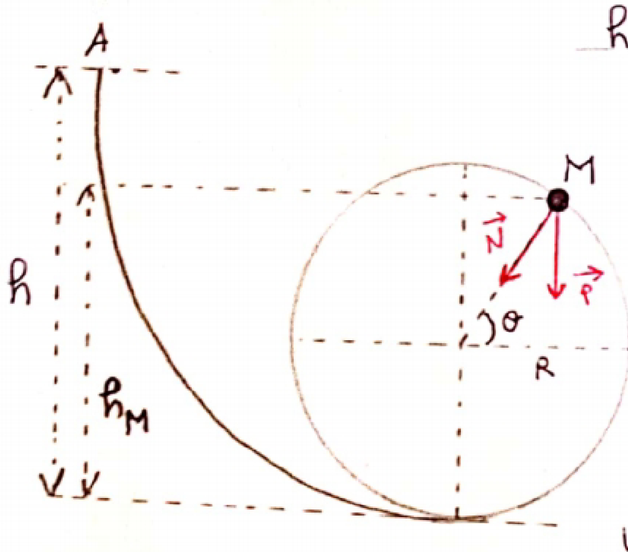
كتلة نقطية m مثبتة بطرف نابض مرن ثابت مرونته k. وكتلته مهملة طوله الأصلي l_0 طرفه الثاني مثبت بنقطة A تستطيع الكتلة الانزلاق بدون احتكاك على ساق أفقية O M (الشكل 5).

1 – اعط عبارة الطاقة الكامنة باعتبار مبدأ الطاقات الكامنة عند $x = 0$.

2 - عين أوضاع التوازن وارس حلاتها (مستقر أم قلق) حسب قيم d_0 ، أرسم في كل حالة منحنى الطاقة الكامنة وأرسم المنحنى الذي يعطي مواضع التوازن بدلالة d_0.

التمرين الثاني :

1- عبارة السرعة عند النقطة M بدلالة : h, R, g, θ



- نطبق نظرية الطاقة الحركية :

$$E_{C_M} - E_{C_A} = \sum_{A \to M} W(\vec{F})$$

$$E_{C_M} - E_{C_A} = W_{A \to M}(\vec{P}) + W_{A \to M}(\vec{N})$$

- بما أن الجسم ينطلق من النقطة A بدون سرعة ابتدائية ⟵ $E_{C_A} = 0$ ، ولدينا أيضا : $W_{A \to M}(\vec{N}) = 0$

، إذن :

$$E_{C_M} = W_{A \to M}(\vec{P})$$

بما أن الجسم في حالة نزول فإن عمل الثقل موجب

$$\frac{1}{2} m V_M^2 = +mg(h_A - h_M)$$

$$\frac{1}{2} m V_M^2 = mg\left(h_A - (R + R\sin\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_M = \sqrt{2g\left[h - R(1 + \sin\theta)\right]}}$$

- طريقة ثانية : نطبق نظرية الطاقة الميكانيكية :

- بما أن الجسم ينزلق بدون احتكاك نكتب :

$$E_{M_M} - E_{M_A} = 0$$

$$E_{C_M} + E_{pp_M} - (\cancel{E_{C_A}}^{0} + E_{pp_A})$$

$$\frac{1}{2} m V_M^2 + mgh_M - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2} m V_M^2 + mg(R + R\sin\theta) - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2} m V_M^2 = mgh - mg(R + R\sin\theta)$$

$$\boxed{V_M = \sqrt{2g\left[h - R(1 + \sin\theta)\right]}}$$

② - عبارة رد فعل المستوي N :

- نطبق المبدأ الأساسي للتحريك :
$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$
$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

- بالإسقاط على (N) نجد :
$$N + P\sin\theta = m\gamma_N$$
$$N = m\gamma_N - mg\sin\theta$$

- لدينا : $\gamma_N = \frac{V_M^2}{R}$
$$N = m\frac{V_M^2}{R} - mg\sin\theta$$

- نعوض عبارة V_M نجد :
$$N = m\frac{2g[h - R(1+\sin\theta)]}{R} - mg\sin\theta$$
$$N = m\frac{2gh - 2gR - 2gR - 2gR\sin\theta}{R} - mg\sin\theta$$
$$\Rightarrow \boxed{N = 2gm\frac{h}{R} - gm(3\sin\theta + 2)}$$

③ - حساب قيمة θ حتى يكون لـ: N أصغر قيمة :

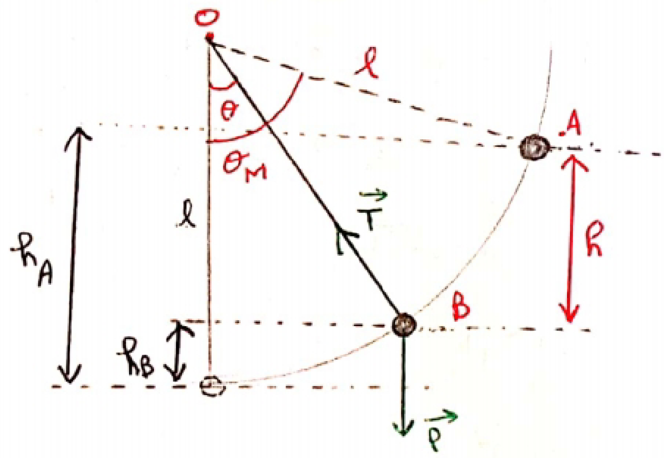
- من عبارة N نلاحظ أنه لكي يكون لـ: N أصغر قيمة لابد أن يكون لـ: $\sin\theta$ أكبر قيمة أي $\sin\theta = 1$ إذن :
$$\sin\theta = 1 \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

④ - الشرط الذي يجب توفره في h حتى لا يغادر الجسم المستوي :

- لكي لا يغادر الجسم المستوي لابد أن يكون: $N > 0$ عند الموضع $\theta = \frac{\pi}{2}$
$$N > 0 \Rightarrow 2gm\frac{h}{R} - mg(3\sin\theta + 2) > 0$$
$$\Rightarrow \cancel{2gm}\frac{h}{R} > \cancel{mg}(3\sin\theta + 2)$$

- نعوض : $\theta = \frac{\pi}{2}$ نجد :
$$\boxed{N > \frac{5h}{2}}$$

التمرين الثالث :



1-1)- إيجاد عبارة السرعة عند الوضع θ :

- نطبق نظرية الطاقة الحركية :

$$Ec_B - Ec_A = \sum_{A \to B} W(\vec{F})$$

$$Ec_B - Ec_A = W_{A \to B}(\vec{P}) + W_{A \to B}(\vec{T})$$

- بما أن الكتلة نزلت بدون سرعة ابتدائية $\longrightarrow Ec_A = 0$ ، ولدينا : $W_{A \to B}(\vec{T}) = 0$

تصبح العلاقة :

$$Ec_B = W_{A \to B}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = + m g h$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 = \cancel{m} g (\ell \cos\theta - \ell \cos\theta_M)$$

$$\frac{1}{2} V_B^2 = g\ell (\cos\theta - \cos\theta_M)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_M)}}$$

- **طريقة ثانية :** نطبق نظرية الطاقة الميكانيكية :

- بما أنه لا يوجد احتكاك نكتب :

$$E_{M_B} - E_{M_A} = 0$$

$$Ec_B + E_{pp_B} - (\cancel{Ec_A}^{\,0} + E_{pp_A}) = 0$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 + m g h_B - m g h_A = 0$$

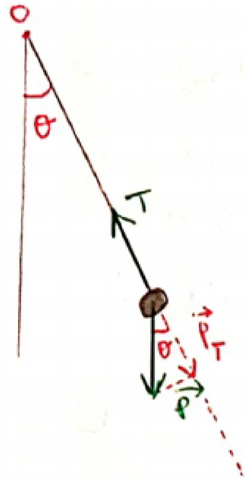
$$\frac{1}{2} m V_B^2 + mg(\ell - \ell\cos\theta) - mg(\ell - \ell\cos\theta_M)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 = \cancel{m} g\ell(1-\cos\theta_M) - \cancel{m} g\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_M)}}$$

* عبارة توتر الخيط :

- نطبق المبدأ الأساسي للتحريك : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$



$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$$

- بالإسقاط على (T) نجد :

$$T - P\cos\theta = m\gamma_N$$

$$T = m\gamma_N + mg\cos\theta$$

- نضع ، $\gamma_N = \dfrac{V_B^2}{R}$

$$T = m\frac{V_B^2}{R} + mg\cos\theta$$

- نعوض عبارة V_B نجد ،

$$T = m\,\frac{2g\cancel{l}(\cos\theta - \cos\theta_M)}{\cancel{R}} + mg\cos\theta$$

- لدينا : $(R = l)$ وإذن :

$$T = 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_M + mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_M)}$$

- تطبيق عددي : لدينا ، $\theta_M = 60°$ ، $\theta = 0$ ، $l = 1m$ ، $m = 1kg$

وإذن :

$$\boxed{V_B = \sqrt{g}} \quad , \quad \boxed{T = 2g}$$

1-2) - اثبات أنه في حالة θ_M صغيرة جدا فإن حركة الكتلة تصبح دورانية جيبية :

- لدينا عبارة السرعة V_B ،

$$V_B = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_M)}$$

$$\Rightarrow V_B^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_M)$$

- لدينا ، $V_B = RW = R\dot{\theta}$ وبما أن $(R = l)$ نكتب : $V_B = l\dot{\theta}$

- نعوض في العبارة نجد:

$$\Rightarrow \cancel{l^2}\dot{\theta}^2 = 2g\cancel{l}(\cos\theta - \cos\theta_M)$$

- نشتق الطرفين نجد:

$$\Rightarrow l.\cancel{2}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = \cancel{2}g(-\cancel{\dot{\theta}}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow l\ddot{\theta} = g(-\sin\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

- في حالة الزاوية صغيرة جدًا فإن: $\sin\theta \simeq \theta$

ءاذن تصبح العلاقة:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

وهي من الشكل: $\boxed{\ddot{\theta} + w^2\theta = 0}$ ، بحيث، $w^2 = \frac{g}{l}$

إذن الحركة دورانية جيبية.

* عبارة الدور T:

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad , \quad w = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

1-3)- استنتاج النسبة بين الدور الجديد T_1 والدور T في حالة ضاعفنا طول الخيط أربع مرات:

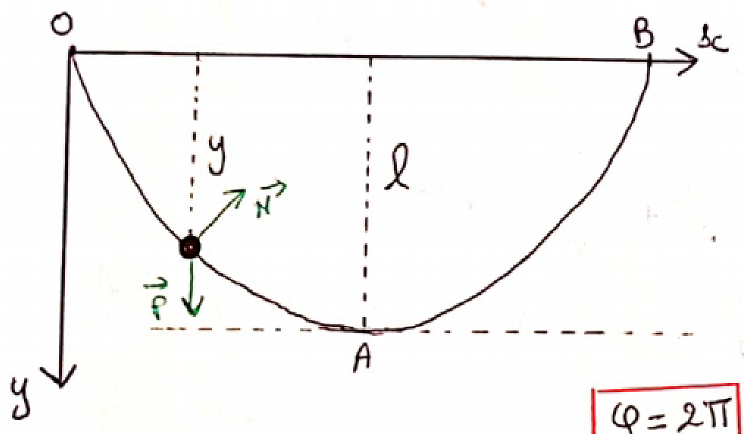
- نعوض l بـ: $4l$ في عبارة T نجد:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{g}} \Rightarrow T_1 = 4\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T} = 2 \Rightarrow \boxed{T_1 = 2T}$$

2)- لدينا:
$$\begin{cases} x = l(\varphi - \sin\varphi) \\ y = l(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

2-1)- ايجاد قيمة φ التي تعدم y بعد لحظة الإنطلاق :



$$y=0 \Rightarrow l(1-\cos\varphi)=0$$

$$\Rightarrow 1-\cos\varphi=0 \Rightarrow \cos\varphi=1$$

$$\Rightarrow \varphi=0 \ , \ \varphi=2\pi$$

- لدينا : $\varphi=0$ توافق لحظة الإنطلاق
والمطلوب φ بعد لحظة الإنطلاق ، اذن : $\boxed{\varphi=2\pi}$
وذلك عند النقطة B ويكون المتحرك قد أنجز نصف هزة ومنه يصبح الزمن
مساوي لـ : $\boxed{t=\frac{T_2}{2}}$ ، (T_2 هو الزمن اللازم لإنجاز دورة كاملة وبما أن المتحرك
انجز نصف دورة فقط فإن $t=\frac{T_2}{2}$).

2-2)- عبارة سرعة الكتلة بدلالة y ، g عند النقطة A :

- نطبق نظرية الطاقة الحركية :

$$Ec_A - Ec_0 = \sum_{0\to A} W(\vec{F})$$

$$Ec_A - \cancel{Ec_0}^{\,0} = \underset{0\to A}{W(\vec{P})} + \underset{0\to A}{\cancel{W(\vec{N})}^{\,0}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_A^2 = +\cancel{m}gy \Rightarrow \boxed{V_A=\sqrt{2gy}}$$

- تطبيق عددي ، $(y=l)$: $\boxed{V_A=\sqrt{2gl}}$

3-2)- ايجاد عبارة تغير φ مع الزمن :

$$V_A=\sqrt{2gy} \Rightarrow V_A^2=2gy$$

$$\vec{V}_A=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j} \Rightarrow V_A^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2gy$$

- نضرب طرفي المعادلة في : $\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2$ نجد :

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = 2gy \cdot \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gy$$

- لدينا :

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(l(\varphi - \sin\varphi)\right) = l(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(l(1-\cos\varphi)\right) = l\sin\varphi$$

- نعوض في العلاقة نجد :

$$\Rightarrow l^2(1-\cos\varphi)^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + l^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gl(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \left(l^2 - 2l^2\cos\varphi + l^2\sin^2\varphi + l^2\cos^2\varphi\right)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gl(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow l^2(1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1})\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gl(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow l^2(2 - 2\cos\varphi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gl(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}l^{\cancel{2}}(1-\cos\varphi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \cancel{2}g\cancel{l}(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- بالتكامل نجد :

$$\int \frac{d\varphi}{dt} = \int\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C$$

$$\rightarrow t=0 \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t}$$

-(4-2 استنتاج العلاقة بين T_2 و T :

Scanné avec CamScanner

- من السؤال (1-3) وجدنا : $T_1 = 2T$ ...... ①

- من السؤال (2-1) وجدنا : $\varphi = 2\pi \,,\ t = \frac{T_2}{2}$ ...... ②

- من السؤال (2-3) وجدنا : $\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$ ...... ③

نعوض ② في ③ نجد :

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{T_2}{2} \Rightarrow T_2 = 4\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Rightarrow T_2 = 2\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) = 2T$$

إذن نجد :

$$\boxed{T_2 = 2T = T_1}$$

- الإستنتاج : دور هذه الحركة الإهتزازية T_2 يساوي دور نواس بسيط T_1 طوله $4l$.