المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط

التخصص : السنة الأولى علوم دقيقة | الأعمال الموجهة | السلسلة 7 : حركيات 4

التمرين الأول

قطاران A و B يتحركان على سكتين متوازيتين بالسرعة $70\ km/h$ و $90\ km/h$ على الترتيب.

1- جد شعاع السرعة النسبي لـ B بالنسبة لـ A في الحالتين:

a- القطاران يتحركان في نفس الاتجاه.

b- القطاران يتحركان في اتجاهين متعاكسين.

2- ما هو في كل حالة مسار القطار B حسب مسافر في القطار A.

3- أعد نفس التمرين في الحالة التي تصنع فيها السكتين بينهما زاوية مقدارها $60°$.

التمرين الثاني

في معلم (O,XYZ) مرتبط بالمرجع $(\mathfrak{R})$، حركة نقطة مادية معرفة بالمعادلات الزمنية التالية :

$$x=o,\quad y=d,\quad z=-\frac{1}{2}gt^2+h$$

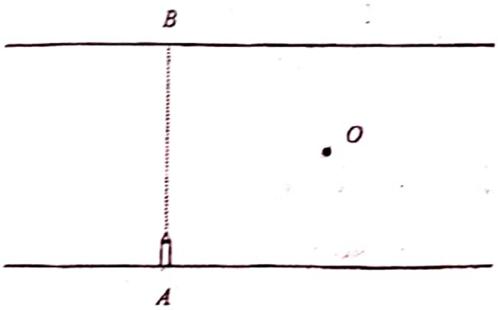
نعتبر الآن المرجع $(\mathfrak{R}')$ في حركة خطية انسحابية بسرعة ثابتة V_0 باتجاه المحور OY. في بداية الأزمنة المعلم المرتبط بالمرجع $(\mathfrak{R}')$ منطبق على المعلم المرتبط بـ $(\mathfrak{R})$.

إذا علمت أن $V_0=d\sqrt{\frac{g}{2h}}$ جد مسار المتحرك في المرجع $(\mathfrak{R}')$

التمرين الثالث

يريد رجل عبور نهر بواسطة قارب تجديف من النقطة A لضفة النهر إلى النقطة B المقابلة لها على الضفة الأخرى. عرض النهر $AB=6km$ و سرعة التيار المائي $2km/h$.

يوضع القارب حيث يكون محوره عموديا على الضفة في النقطة A و بعد مدة زمنية من التجديف يكتشف المجدف انه في النقطة 0 تبعد عن الضفتين بنفس البعد أنظر أسفله عندها يضطر لتغيير مساره فيوجه حينئذ محور قاربه باتجاه معين يمكنه من الوصول إلى B. مع العلم أن الرجل يجدف بسرعة ثابتة بالنسبة للماء قيمتها $4km/h$.



1- مثل النهر و الضفتين بالسلم: $1cm \to 0.6\ km$.

2- مثل متجهات السرعة $\vec{V}_{eau/sol}$; $\vec{V}_{bateau/eau}$; $\vec{V}_{bateau/sol}$ عند النقطة A و النقطة 0 بالسلم: $1cm \to 1\ km/h$. أحسب في كل مرة سرعة الجداف بالنسبة للأرض.

3- مثل مسار المجدف بين A و 0 و بين 0 و B.

4- أحسب الزمن المستغرق للوصول إلى النقطة B.

5- بكم يجب أن يمال القارب عند النقطة A كي ينتقل مباشرة وفق AB.

6- أحسب سرعته بالنسبة للضفة في هذه الحالة و الزمن المستغرق.

التمرين الرابع : ذبابة تتحرك بسرعة ثابتة v_0 فوق مؤشر الثواني لساعة حائطية, في اللحظة $t = 0$ كانت الذبابة في المركز O والمؤشر يشير إلى $0s$.

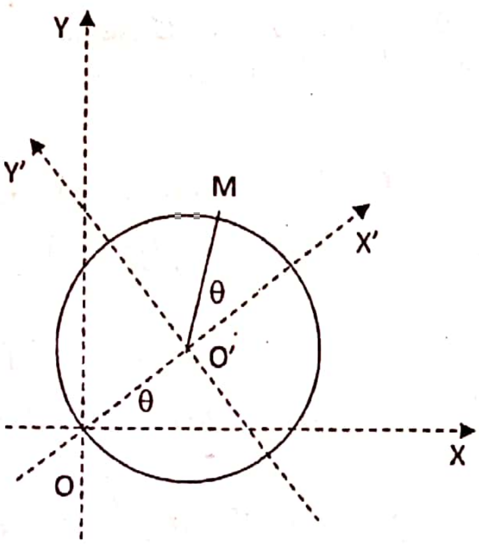
خلال دقيقة تصل الذبابة إلى طرف المؤشر الذي طوله 20cm.

1- أوجد عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$ للذبابة في الإحداثيات القطبية و أوجد مركباته S (60 ,45 ,30 , 15, 0)

2- مثل شعاع السرعة في اللحظات السابقة واعط شكل مسار الحركة.

3- أحسب مركبات شعاع التسارع في المعلم القطبي و مثله في اللحظات السابقة.

التمرين الخامس : عجلة نصف قطرها R ومركزها O′ تدور في المستوي(XOY) حول النقطة O بسرعة زاوية ثابتة ω . نرفق بمركزها O′ معلما (X′ O′ Y′) في اللحظة t = 0 المحوران OX و O′X′ متطابقان. متحرك M يدور على محيط العجلة بسرعة زاوية ثابتة ω في الجهة الموجبة حيث في اللحظة t = 0 كان M على OX و O′X′ .



1 – أوجد بطريقة مباشرة شعاعي السرعة والتسارع للمتحرك M بالنسبة إلى XOY (ابحث على $\overline{OM}$ ثم قم باشتقاقه).

2 – أوجد شعاعي السرعة والتسارع للمتحرك M بالنسبة إلى X′ O′ Y′ .

3 – أوجد شعاعي سرعة وتسارع الجر (يعني سرعة وتسارع X′ O′ Y′ بالنسبة إلى XOY).

4 – تحقق من نتيجة السؤال الأول باستعمال مبدأ تركيب الحركات.

التمرين السادس عجلة دائرية نصف قطرها a مركزها C تتدحرج دون انزلاق على المحور OX (مع البقاء في المستوىXOY).

النقطة A من محيط العجلة تنطبق على المبدأ في اللحظة t = 0 s.

المركز C ينسحب بسرعة ثابتة V_0

1 - عين إحداثيات A بدلالة الزمن.

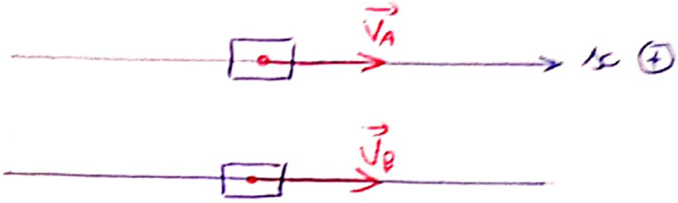
2 - أوجد سرعة A وطويلته و أدرس تغيراتها بدلالة الزمن.

3 - في أي الأوضاع تكون السرعة معدومة ؟

حل سلسلة الحركة النسبية ⑦

التمرين الأول :

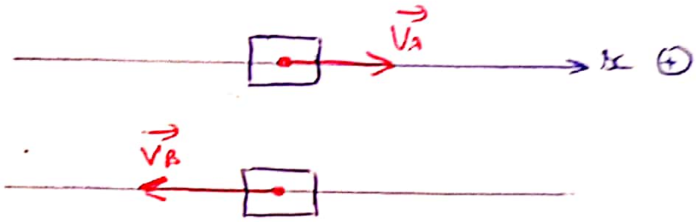
1- الحالة ①: القطاران يتحركان في نفس الاتجاه :



$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = 90\vec{i} - 70\vec{i} = 20\vec{i}$$

$$\boxed{V_{B/A} = 20\ km/h}$$

الحالة ②: القطاران يتحركان في جهتين متعاكستين :



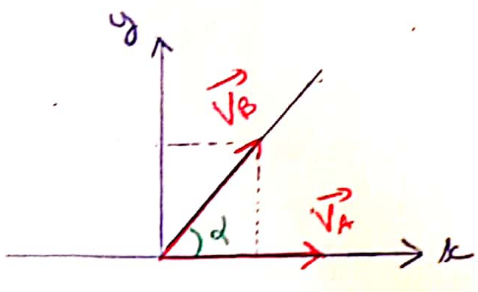
$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = -90\vec{i} - 70\vec{i} = -160\vec{i}$$

$$\boxed{V_{B/A} = 160\ km/h}$$

2- حالة مسار القطار B حسب مسافر في القطار A :

- المسار مستقيم موازي للسكتين: ① في الاتجاه الموجب ، ② في الاتجاه السالب .

3- بين القطارين زاوية $60°$:



الحالة ①: نفس الجهة : $\vec{V}_A = 70\vec{i}$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

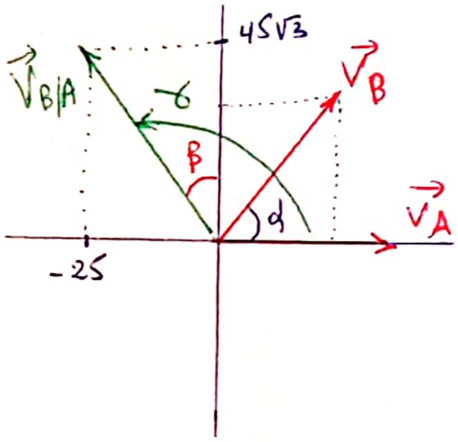
$$\vec{V}_B = 90\cos\alpha\,\vec{i} + 90\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_B = 45\vec{i} + 45\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_{B/A} = 45\vec{i} + 45\sqrt{3}\,\vec{j} - 70\vec{i}$$

$$\vec{V}_{B/A} = -25\vec{i} + 45\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$\boxed{V_{B/A} = 82\ km/h}$



- مسار B بالنسبة لـ A: هو محمول على $\vec{V}_{B/A}$

نبحث عن الزاوية θ:

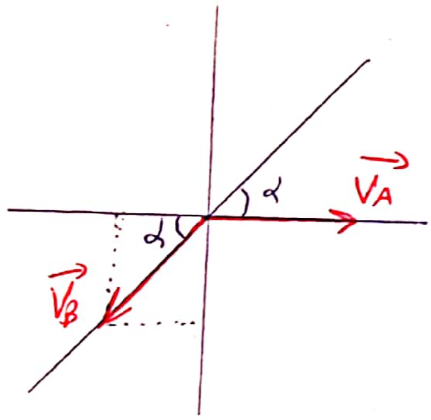
$$tg\beta = \frac{25}{45\sqrt{3}} = 0,32$$

$$\Rightarrow \beta = 17,74°$$

$$\theta = 90° + \beta = 90° + 17,74°$$

$$\boxed{\theta = 107,74°}$$

الحالة ②: جهتين متعاكستين:



$$\vec{V}_A = 70\vec{i}$$

$$\vec{V}_B = -90\cos\alpha\,\vec{i} - 90\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_{B/A} = -115\vec{i} - 45\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\boxed{V_{B/A} = 138,9\ km/h}$$

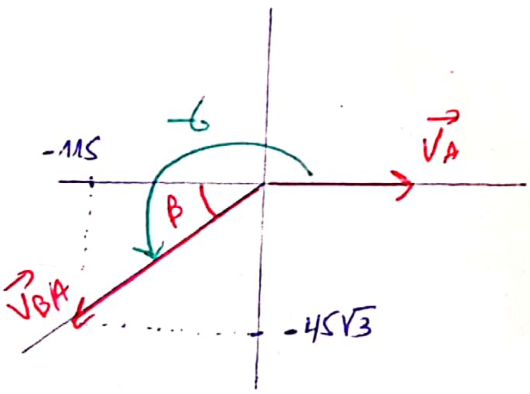
- مسار B بالنسبة لـ A: هو محمول على $\vec{V}_{B/A}$:

نبحث عن الزاوية θ:

$$tg\beta = \frac{115}{45\sqrt{3}} = 0,6782$$

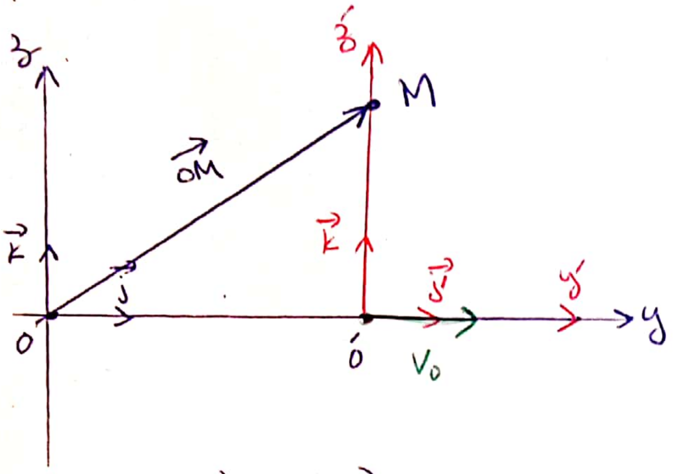
$$\Rightarrow \beta = 34,14°$$

$$\theta = 180° + \beta = 180° + 34,14°$$



$$\boxed{\theta = 214,14°}$$

التمرين الثاني :



لدينا : $\vec{OM} = 0\vec{i} + d\vec{j} - \left(\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}$

$\vec{V_e} = V_0\vec{j}$

$\vec{V_a} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)}{dt}$

$\vec{V_a} = -gt\vec{k}$

$\vec{V_a} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$

$\vec{V_r} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{R'}$

$\vec{V_r} = \vec{V_a} - \vec{V_e} =$

$\vec{V_r} = -V_0\vec{j} - gt\vec{k}$

بما أن الحركة انسحابية فقط فإن : $\vec{j'} = \vec{j}\ ,\ \vec{k'} = \vec{k}$

$$\vec{V_r} = -V_0\vec{j'} - gt\vec{k'}$$

$$\vec{O'M} = \int_{(R')} \vec{V_r}\,dt \Rightarrow \vec{O'M} = -V_0t\vec{j'} - \frac{1}{2}gt^2\vec{k'} + \vec{C}$$

$$t=0 \longrightarrow \vec{O'M} = \vec{OM} = d\vec{j'} + h\vec{k'}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = d\vec{j'} + h\vec{k'}$$

$$\vec{O'M} = (d - V_0t)\vec{j'} + \left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{k'}$$

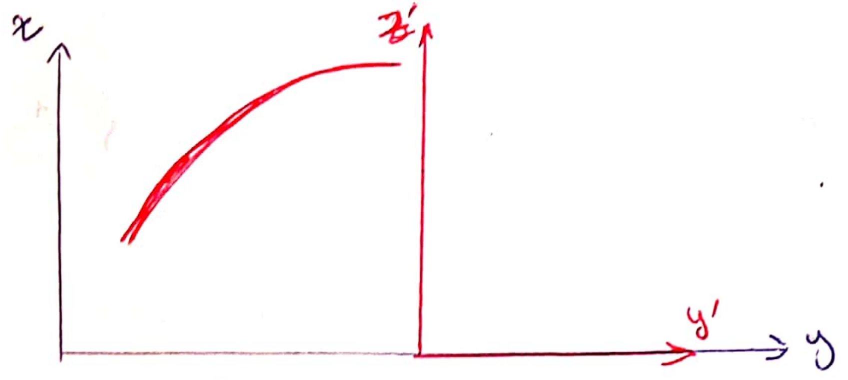
$$\begin{cases} y' = d - V_0t \quad \ldots\ldots (1) \\ z' = h - \frac{1}{2}gt^2 \ldots (2) \end{cases}$$

نخرج الزمن t من (1) ونعوضه في (2) :

$$t = \frac{d - y'}{V_0}$$

معادلة قطع مكافئ $\boxed{z' = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{d-y'}{V_0}\right)^2}$

- نلاحظ أن معامل y' سالب ⇐ للمنحنى نهاية عظمى


x
z'
y'
y

التمرين الثالث :

1- تمثيل النهر والتفتيش :

$AB = 6\,Km$

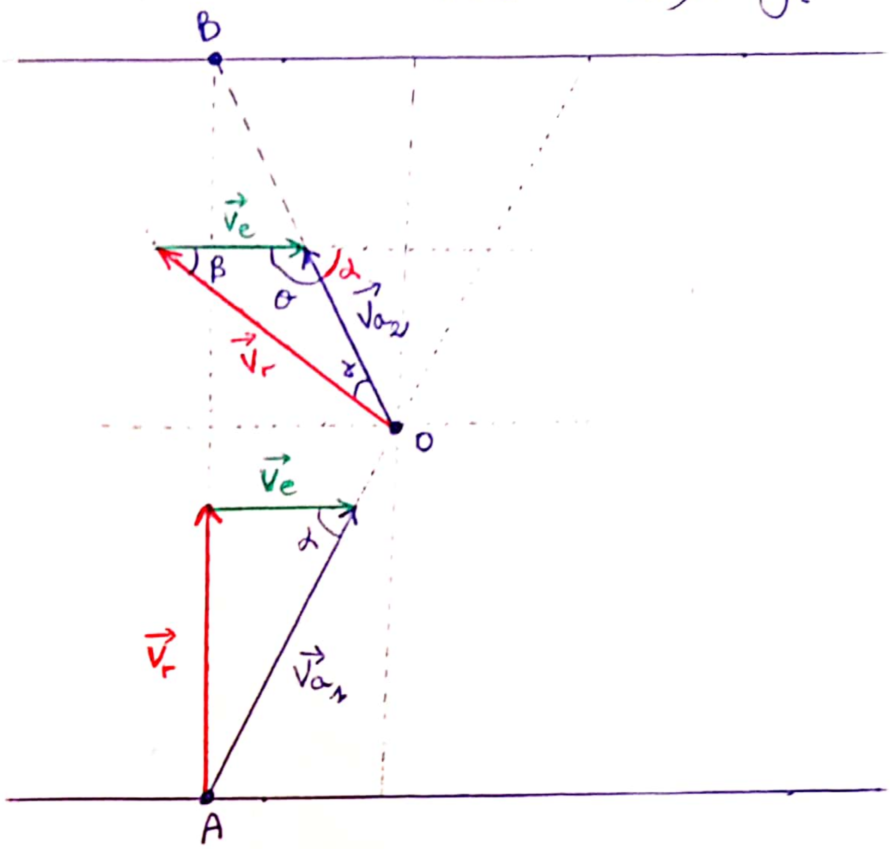
$\vec{V}_{eau/sol} = \vec{V}_{R'/R} = \vec{V}_e$

$\vec{V}_{bteau/eau} = \vec{V}_{M/R'} = \vec{V}_r$

$\vec{V}_{bateau/sol} = \vec{V}_{M/R} = \vec{V}_a$.

$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

$\vec{V}_r = 4\vec{j}$, $\vec{V}_e = 2\vec{i}$



2- حساب سرعة الجداف بالنسبة للأرض V_a :

أ- عند النقطة A :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = 4\vec{j} + 2\vec{i}$$

$$V_a = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \boxed{V_{a_1} = 4,47\,Km/h}$$

$$tg\,\alpha = \frac{V_r}{V_e} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 63,43^\circ}$$

ب- عند النقطة O :

- بالإسقاطات نحصل على مثلث غير قائم معرف بالزوايا : γ ، θ ، β

$$\frac{V_r}{\sin\theta} = \frac{V_e}{\sin\gamma} = \frac{V_a}{\sin\beta} \quad \cdots\cdots (1) \cdots$$ (خاصية في المثلث الكيفي)

- نلاحظ في المثلث بالأعلى : $\theta + \alpha = 180^\circ$

$$\theta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 63,43^\circ$$

$$\boxed{\theta = 116,57^\circ}$$

من المساواة (1) لدينا :

$$\frac{V_r}{\sin\theta} = \frac{V_e}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{V_e}{V_r}\sin\theta$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{4}\sin(116,57) = 0,447$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 26,55^\circ}$$

- لدينا مجموع زوايا المثلث $= 180^\circ$ اذن :

$$\gamma + \beta + \theta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - (\gamma + \theta) = 180^\circ - (26,55 + 116,57)$$

$$\boxed{\beta = 36,88^\circ}$$

- لحساب V_a نستعمل العلاقة ① :

$$\frac{V_a}{\sin\beta} = \frac{V_r}{\sin\theta} \Rightarrow V_a = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}\cdot V_r$$

$$V_a = \frac{\sin(36,88)}{\sin(116,57)} \times 4 \Rightarrow \boxed{V_{a_2} = 2,68 \ km/h}$$

- طريقة ② :

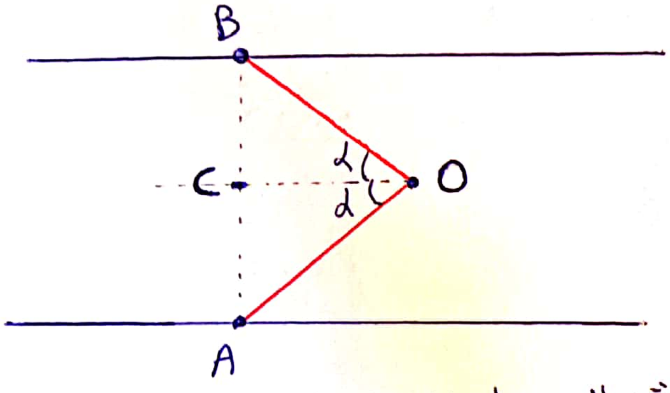
لدينا خاصية في المثلث الغير قائم : $V_a^2 = V_r^2 + V_e^2 - 2V_rV_e\cos\beta$

$$V_a^2 = 4^2 + 2^2 - 2.4.2\cos(36,88) = 7,2$$

$$\boxed{V_{a_2} = 2,68 \ km/h}$$

3 - مسار المجذف بين A و O وبين O و B :

- المسار محمول على V_a :



4 - حساب الزمن المستغرق للوصول إلى النقطة B :

$$t_{AB} = t_{AO} + t_{OB}$$

$$t_{AO} = \frac{AO}{V_{a_1}} \quad , \quad t_{OB} = \frac{OB}{V_{a_2}}$$

- نحسب المسافتين : AO و OB :

$$\sin\alpha = \frac{CA}{AO} \Rightarrow AO = \frac{CA}{\sin\alpha}$$

$$AO = \frac{3}{\sin(63{,}43)} \Rightarrow \boxed{AO = 3{,}35\,m}$$

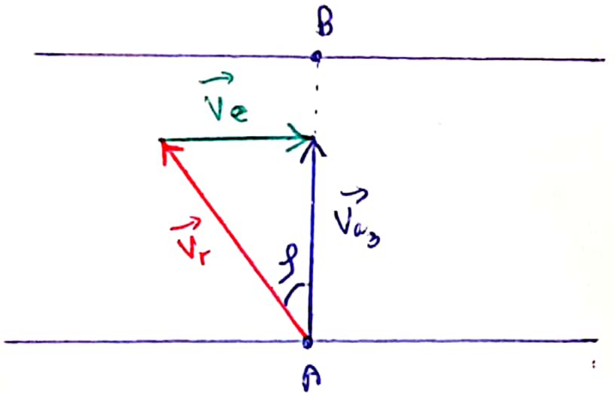
- نلاحظ أن المثلث AOB متساوي الساقين، إذن :

$$\boxed{AO = OB = 3{,}35\,m}$$

$$t_{AO} = \frac{3{,}35}{4{,}47} = 0{,}75\,h \quad ; \quad t_{OB} = \frac{3{,}35}{2{,}71} = 1{,}236\,h$$

$$t_{AB} = 0{,}75 + 1{,}236 \Rightarrow \boxed{t_{AB} \simeq 2\,h}$$

5- زاوية الميلان لكي ينتقل القارب مباشرة وفق AB :



$$\sin\beta = \frac{V_e}{V_r} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$\boxed{\beta = 30°}$$

أي لا بد أن يُمال القارب بزاوية $\beta = 30°$ لكي ينتقل مباشرة وفق AB .

6- حساب سرعة القارب بالنسبة للضفة :

$$V_{a_3} = V_r \cos\beta = 4\cos 30°$$

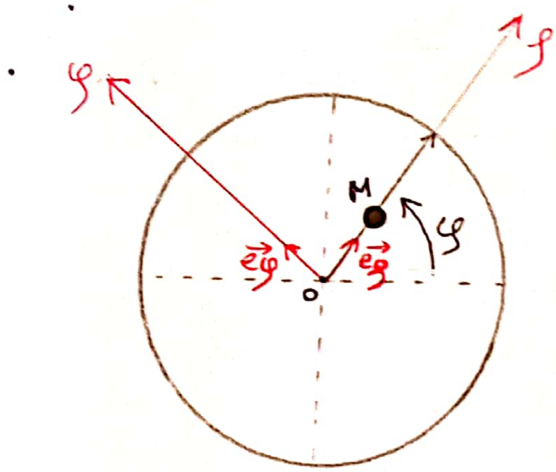
$$\boxed{V_{a_3} = 3{,}46\,km/h}$$

- يمكن حساب V_{a_3} بتطبيق نظرية فيثاغورث أيضاً . يعني : $V_r^2 = V_{a_3}^2 + V_e^2$.

- حساب الزمن المستغرق t_{AB} :

$$t_{AB} = \frac{AB}{V_{a_3}} = \frac{6}{3{,}46}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{AB} = 1{,}73\,h}$$



التمرين الرابع :

1) - ايجاد عبارة السرعة $\vec{V}$ للذبابة في الإحداثيات القطبية :

$$\vec{OM} = \rho \cdot \vec{e}_\rho$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho \quad \left(\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\rho = V_0 t + \rho_0$$

$$t=0 \rightarrow \rho = 0 \rightarrow \rho_0 = 0$$

$$\boxed{\rho = V_0 t \Rightarrow \dot{\rho} = V_0}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-2\pi}{60} = -\frac{\pi}{30}$$

(المؤشر في 60 ثانية يقطع دورة كاملة أي 2π في الجهة المعاكسة لـ φ)

نكامل الطرفين نجد :

$$\varphi = -\frac{\pi}{30} t + \varphi_0$$

$$t=0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

(عندما يكون المؤشر عند (0) فإن $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{30} t + \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = -\frac{\pi}{30}}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = V_0\,\vec{e}_\rho - \frac{\pi}{30}\rho\,\vec{e}_\varphi$$

$$t = 60 \rightarrow \rho = 20cm = 0{,}2m$$

(عند الزمن t=60s يقطع M طول المؤشر: 20cm)

$$0{,}2 = V_0 \times 60 \Rightarrow V_0 = \frac{1}{300}\,m/s$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{1}{300}\vec{e}_\rho - \frac{\pi}{9000} t\,\vec{e}_\varphi}$$

* مركبات شعاع السرعة في الأزمنة : (60, 45, 30, 15, 0) s :

لدينا :

$$\begin{cases} V_\rho = \frac{1}{300} \\ V_\varphi = -\frac{\pi}{9000} t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \rho = \frac{1}{300} t \end{cases}$$

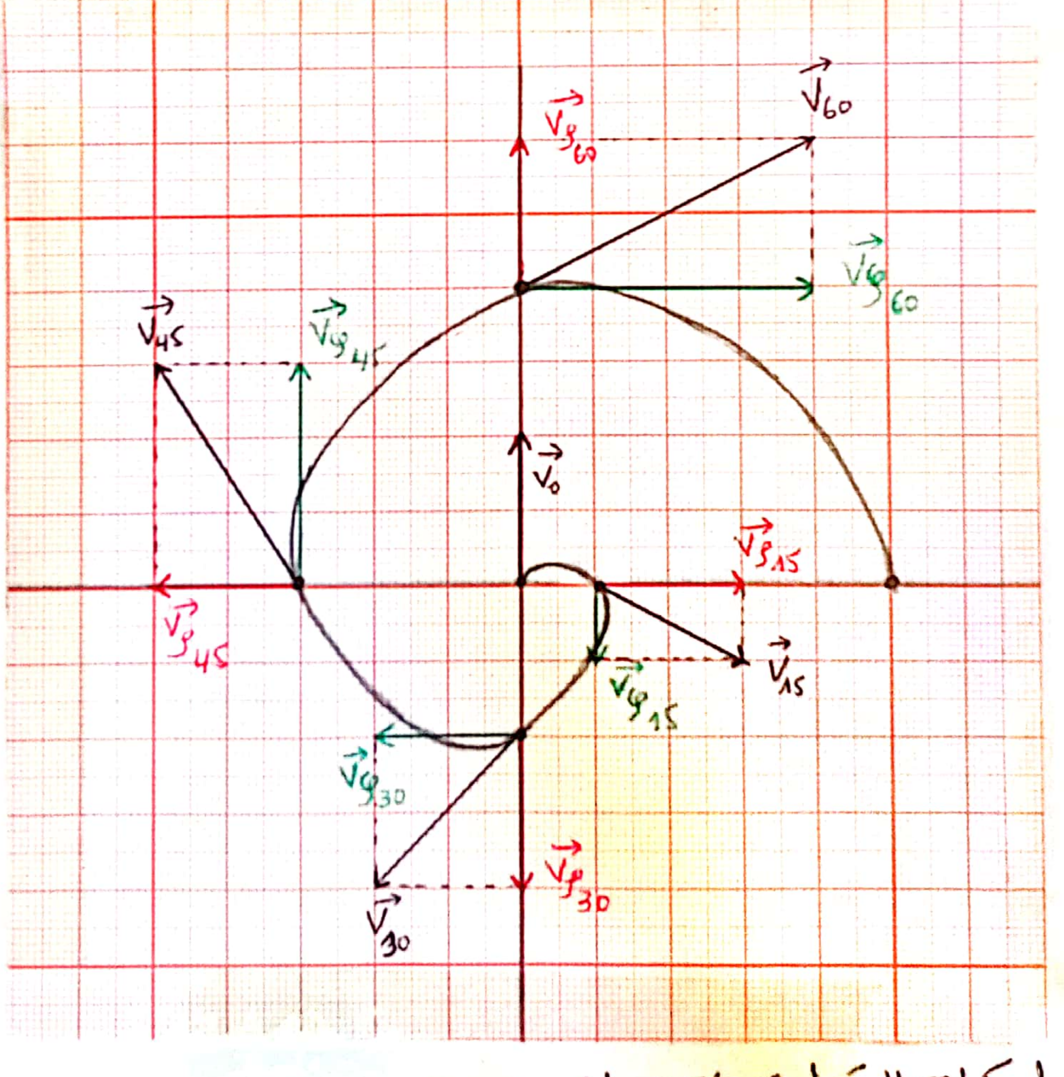
t(s)	0	15	30	45	60
V_ρ	$1/300$	$1/300$	$1/300$	$1/300$	$1/300$
V_φ	0	$-1/600$	$-1/300$	$-1/200$	$-1/150$
ρ	0	$1/20$	$1/10$	$3/20$	$1/5$

2- لكي نرسم لا بد من اختيار سلم للرسم، نضع :

- نرسم المركبات $\vec{V}_\rho$ و $\vec{V}_\varphi$ ثم نرسم شعاع السرعة الذي هو المحصلة.
- المسار يكون مماسيًا لشعاع السرعة $\vec{V}$.

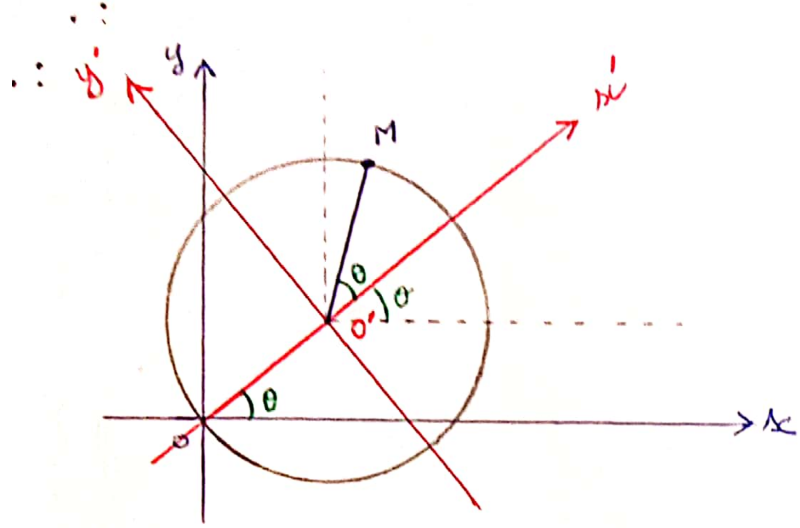
$$1\,cm \longrightarrow \frac{1}{600}$$
بالنسبة لـ : V_ρ و V_φ

$$1\,cm \longrightarrow \frac{1}{20}$$
بالنسبة لـ : ρ



3- بالنسبة لمركبات التسارع نقوم بإشتقاق شعاع السرعة ونعيد نفس العملية أي ايجاد المركبات في اللحظات s (60 , 45 , 30 , 15 , 0) ، ثم نقوم بتمثيلها .

التمرين الخامس :



1- نلاحظ أن الزاوية التي مسحتها النقطة M في المعلم المتحرك $o'x'y'$ هي : $\theta = wt$ ، بينما الزاوية التي مسحتها M في المعلم الساكن oxy هي : $2\theta = 2wt$

- إيجاد $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$\vec{OO'} = R\cos wt\,\vec{i} + R\sin wt\,\vec{j}$$

$$\vec{O'M} = R\cos 2wt\,\vec{i} + R\sin 2wt\,\vec{j} \quad \text{(في المعلم الساكن)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OM} = R\left[(\cos wt + \cos 2wt)\vec{i} + (\sin wt + \sin 2wt)\vec{j}\right]} \quad \text{....} (A)$$

- شعاع السرعة $\vec{V_a}$ (المطلقة)

$$\vec{V_a}\Big)_R = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\left[(-w\sin wt - 2w\sin 2wt)\vec{i} + (w\cos wt + 2w\cos 2wt)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_a} = -Rw(\sin wt + 2\sin 2wt)\vec{i} + Rw(\cos wt + 2\cos 2wt)\vec{j}} \quad \text{....} (B)$$

- شعاع التسارع $\vec{\gamma_a}$ (المطلق) :

$$\vec{\gamma_a}\Big)_R = \frac{d^2\vec{OM}}{dt} = -Rw(w\cos wt + 4w\cos 2wt)\vec{i} + Rw(-w\sin wt - 4\sin 2wt)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma_a} = -Rw^2(\cos wt + 4\cos 2wt)\vec{i} - Rw^2(\sin wt + 4\sin 2wt)\vec{j}} \quad \text{...} (C)$$

2- شعاع السرعة $\vec{V_r}$ (النسبية) :

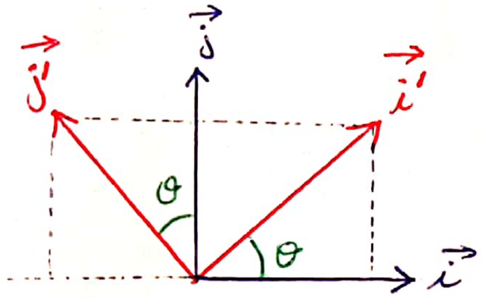
$$\vec{O'M} = R(\cos wt\,\vec{i'} + \sin wt\,\vec{j'}) \quad \text{(في المعلم المتحرك)}$$

$$\vec{V_r}\Big)_{R'} = \frac{d\vec{O'M}}{dt} = Rw(-\sin wt\,\vec{i'} + \cos wt\,\vec{j'})$$

- شعاع التسارع $\vec{\gamma}$ (النسبي) :

$$\vec{\gamma_r}\Big)_{R'} = \frac{d^2\vec{O'M}}{dt} = -Rw^2(\cos wt\,\vec{i'} + \sin wt\,\vec{j'})$$

لدينا بالإسقاط نجد :



$$\begin{cases} \vec{i'} = \cos wt\,\vec{i} + \sin wt\,\vec{j} \\ \vec{j'} = -\sin wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j} \end{cases}$$

- نعوض في عبارة السرعة والتسارع نجد :

$$\vec{V_r} = Rw\left(-\sin wt(\cos wt\,\vec{i} + \sin wt\,\vec{j}) + \cos wt(-\sin wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j})\right)$$

$$\vec{V_r} = Rw\left((-\sin wt\cos wt\,\vec{i} - \sin^2 wt\,\vec{j}) + (-\cos wt\sin wt\,\vec{i} + \cos^2 wt\,\vec{j})\right)$$

$$\vec{V_r} = Rw\left(-2\underbrace{\sin wt\cos wt}_{\frac{1}{2}\sin 2wt}\,\vec{i} + (\underbrace{\cos^2 wt - \sin^2 w}_{\cos 2wt})\,\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{V_r} = Rw(-\sin 2wt\,\vec{i} + \cos 2wt\,\vec{j})} \ldots\ldots (D)$$

$$\vec{\gamma_r} = -Rw^2\left(\cos wt(\cos wt\,\vec{i} + \sin wt\,\vec{j}) + \sin wt(-\sin wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j})\right)$$

$$= -Rw^2(\cos^2 wt\,\vec{i} + \cos wt\sin wt\,\vec{j} - \sin^2 wt\,\vec{i} + \sin wt\cos wt\,\vec{j})$$

$$= -Rw^2\left((\underbrace{\cos^2 wt - \sin^2 wt}_{\cos 2wt})\,\vec{i} + 2\underbrace{\sin wt\cos wt}_{\frac{1}{2}\sin 2wt}\,\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{\gamma_r} = -Rw^2(\cos 2wt\,\vec{i} + \sin 2wt\,\vec{j})} \ldots\ldots (E)$$

3 - شعاع سرعة الجر $\vec{V_e}$:

$$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \qquad (\vec{\Omega} = \vec{w})$$

$$\frac{d\vec{OO'}}{dt} = -Rw\sin wt + Rw\cos wt \ldots\ldots (1)$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} = w\vec{k} \wedge (R\cos 2wt\,\vec{i} + R\sin 2wt\,\vec{j})$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \hline 0 & 0 & w \\ R\cos 2wt & R\sin 2wt & 0 \end{array} \leftarrow \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} = wR(-\sin 2wt\,\vec{i} + \cos 2wt\,\vec{j}) \ldots\ldots (2)$$

بجمع ① و ② نجد :

$$\boxed{\vec{V_e} = -R\omega(\sin\omega t + \sin 2\omega t)\vec{i} + R\omega(\cos\omega t + \cos 2\omega t)\vec{j}} \cdots\cdots (F)$$

- شعاع تسارع الجر $\vec{\gamma_e}$:

$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{O'M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{O'M})$$

$$\boxed{\vec{\gamma_e} = -R\omega^2(\cos\omega t + \cos 2\omega t)\vec{i} - R\omega^2(\sin\omega t + \sin 2\omega t)\vec{j}} \cdots (G)$$

- شعاع تسارع كوريوليس $\vec{\gamma_c}$:

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V_r}$$

$$\boxed{\vec{\gamma_c} = -2R\omega^2(\cos 2\omega t\,\vec{i} + \sin 2\omega t\,\vec{j})} \cdots (K)$$

4 - التحقق :

- تركيب السرعات : $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

$$\vec{V_a} = R\omega(-\sin 2\omega t\,\vec{i} + \cos 2\omega t\,\vec{j}) + (-R\omega(\sin\omega t + \sin 2\omega t)\vec{i} + R\omega(\cos\omega t + \cos 2\omega t)\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V_a} = -R\omega(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t)\vec{i} + R\omega(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t)\vec{j}} \cdots (L)$$

وهي توافق العبارة (B).

- تركيب التسارعات :

$$\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$$

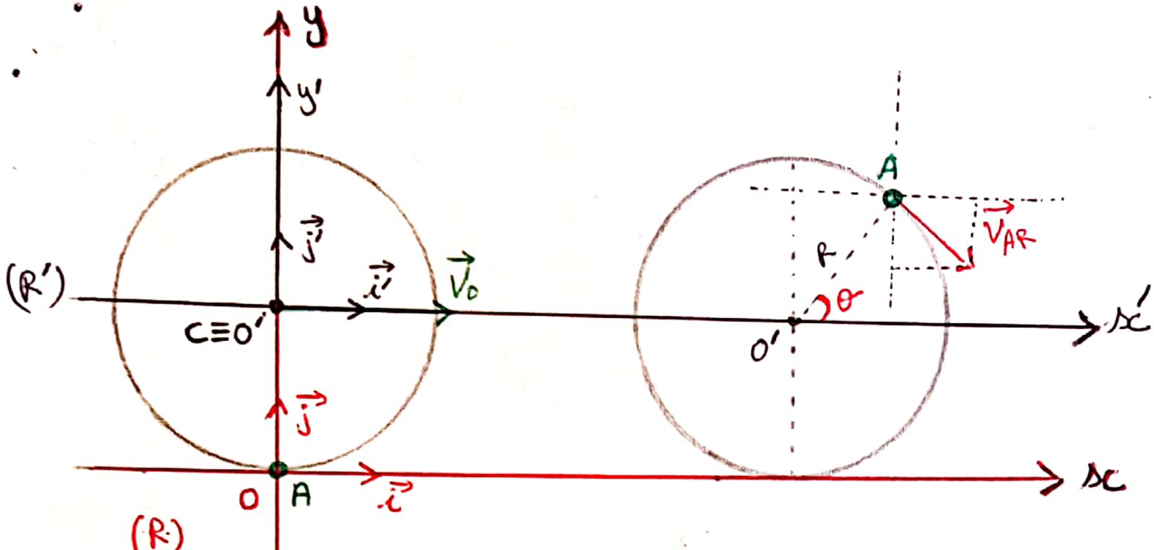
$$\vec{\gamma_a} = -R\omega^2(\cos 2\omega t\,\vec{i} + \sin 2\omega t\,\vec{j}) + (-R\omega^2(\cos\omega t + \cos 2\omega t)\vec{i} - R\omega^2(\sin\omega t + \sin 2\omega t)\vec{j})$$
$$+ (-2R\omega^2(\cos 2\omega t\,\vec{i} + \sin 2\omega t\,\vec{j}))$$

$$\boxed{\vec{\gamma_a} = -R\omega^2(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t)\vec{i} - R\omega^2(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t\,\vec{j})} \cdots (M)$$

وهي توافق العبارة (C).

التمرين السادس :

- المعلم (R) ساكن
- المعلم (R') متحرك



- لدينا : $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

$$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \cancel{\vec{\Omega}}^{\,0} \wedge \vec{O'M} \quad \dots \text{(لا يوجد دوران)}$$

$$\left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{OC}}{dt}\right)_R \Rightarrow \boxed{\vec{V_e} = V_0\,\vec{i}}$$

- نلاحظ أن حركة A بالنسبة لـ O' : دائرية

ملاحظة : في حالة حركة تدحرج دون انزلاق تصبح سرعة انسحاب المركز (C) تساوي عدديًا سرعة دوران نقاط المحيط ، ونكتب : $|\vec{V_{AR}}| = V_0$

$$\vec{V_{AR}} = V_0 \sin\theta\,\vec{i} - V_0 \cos\theta\,\vec{j} = \vec{V_r}$$

$$\Rightarrow \vec{V_a} = (V_0 + V_0 \sin\theta)\,\vec{i} - V_0 \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_a} = V_0\,(1 + \sin\theta)\,\vec{i} - V_0 \cos\theta\,\vec{j}}$$

- إيجاد احداثيات (A) :

$$\vec{OA} = \int_{(R)} \vec{V_a}\,dt$$

$$\vec{OA} = V_0\left(t - \frac{1}{\dot\theta}\cos\theta\right)\vec{i} - \frac{V_0}{\dot\theta}\sin\theta\,\vec{j} + \vec{C}$$

$$t = 0 \rightarrow \vec{OA} = \vec{0} \rightarrow \vec{C} = \frac{V_0}{\dot\theta}\,\vec{j}$$

لدينا : $V_0 = R\omega = R\dot\theta$

$$\Rightarrow R = \frac{V_0}{\dot\theta}$$

في الأخير نجد:

$$\boxed{\vec{OA} = (V_0 t + R\cos\theta)\vec{i} + R(1+\sin\theta)\vec{j}}$$

- طويلة السرعة:

$$V_a = V_A = \sqrt{V_0^2(t+\sin\theta)^2 + V_0^2\cos^2\theta}$$

$$V_a = V_A = V_0\sqrt{1+\sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_A = V_0\sqrt{2(1+\sin\theta)}}$$

- دراسة الزيادة والنقصان:

* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$: $(1+\sin\theta)$ يزيد $\longrightarrow V_A \nearrow$

* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$: $(1+\sin\theta)$ ينقص $\longrightarrow V_A \searrow$

* $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$: $(1+\sin\theta)$ ينقص $\longrightarrow V_A \searrow$

* $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$: $(1+\sin\theta)$ يزيد $\longrightarrow V_A \nearrow$

- دراسة الإنعدام:

$$V_A = 0 \Rightarrow 1+\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = -1$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi K$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi K$$