السلسلة رقم 02 : المجموعات، العلاقات، الدوال، التطبيقات

التمرين 01 : لتكن A, B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E.
أكتب بأبسط شكل المجموعات الجزئية التالية :

- $[A \cup (A \cap B)] \cap B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \complement_E(A))$
- $\complement_E(A \cup B) \cap (C \cup \complement_E(A))$
- $[(A \cup B) \cap (B \cap C)] \cup (A \cup C)$
- $(A \cup B) \cap [(B \cap C) \cup (A \cup C)]$

التمرين 02: لتكن E, F مجموعتين كيفيتين غير خاليتين و $A \in \mathcal{P}(E), (B, C) \in [\mathcal{P}(F)]^2$.
برهن المساواة التالية :

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $\complement_{E \times F}(A \times B) = (\complement_E(A) \times B) \cup (A \times \complement_F(B)) \cup (\complement_E(A) \times \complement_F(B))$

التمرين 03: لتكن A, B مجموعتين جزئيتين منتهيتين من E.
برهن أنه إذا كان $A \subset B$ و $card(A) = card(B)$ فإن $A = B$.

التمرين 04: لتكن $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\}$ و $B = \{(t + 1, 4t + 3) : t \in \mathbb{R}\}$ برهن أن $A = B$.

التمرين 05: لتكن $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
برهن أن A لا تكتب على شكل جداء ديكارتي لمجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$.

التمرين 06: لتكن الدالتين f, g من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ معرفتين ب $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2 + 1$.
عين $f \circ g, g \circ f$ ماذا تستنتج؟

التمرين 07: لتكن f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ معرفة ب $f(x) = x^2$.

1- أحسب صورة المجموعة $A = [-1, 4]$ بالدالة f.

2- أحسب الصورة العكسية ل A بالدالة f.

التمرين 08: هل التطبيق $f_i, i = \overline{1, 11}$ متباينا؟ غامرا؟ تقابليا؟ في كل حالة من الحالات التالية

$f_1\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}\quad n \mapsto 2n$	$f_2\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\quad n \mapsto -n$	$f_3\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\quad x \mapsto x^2$
$f_4\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\quad x \mapsto x^2$	$f_5\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\quad x \mapsto x^2$	$f_6\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\quad (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
$f_7\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\quad n \mapsto n + 1$	$f_8\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}\quad n \mapsto n + 1$	$f_9\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\quad (x, y) \mapsto (x + y, xy)$
$f_{10}\ \mathbb{R} \to]-1, 1[\quad x \mapsto \frac{x}{1+\lvert x\rvert}$	$f_{11}\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}\quad f_{11}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ عدد زوجي}; \\ 0, & n \text{ عدد فردي}. \end{cases}$	

1- هل يمكن تعين $f_1 \circ f_2, f_1 \circ f_3, f_4 \circ f_5$؟

2- عين $f_1 \circ f_{11}, f_{11} \circ f_1$.

3- هات عبارة f_{10}^{-1}.

التمرين 09: لتكن الدالة f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ معرفة ب $f(x) = \frac{x}{x+1}$
عين $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ مرة}}$ بدلالة $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in \mathbb{R}$.

التمرين 10: نعرف في $\mathbb{Z}$ العلاقة $\mathcal{R}$ حيث :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \text{ يقبل القسمة على } 4$$

1- أثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

2- ليكن $n \in \mathbb{Z}$، نستعمل خواص القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ لمناقشة و تعين صنف تكافؤ n.

3- ماهي مجموعة حاصل القسمة.

التمرين 11: لتكن المجموعة E، و لتكن A مجموعة جزئية منها. نعرف في مجموعة أجزاء E العلاقة $\mathcal{R}$ حيث :

$$\forall (B,C) \in [\mathcal{P}(E)]^2 : B\mathcal{R}C \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

1- اثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

2- عين أصناف تكافؤ $A, \emptyset, E$.

التمرين 12: لتكن H نقطة من المستوي الإقليدي P. نضع $P^* = P \setminus \{H\}$ ونعرف العلاقة $\mathcal{R}$ ب :

$$M\mathcal{R}M' \Leftrightarrow \text{على إستقامة واحدة } M' \text{ و } M, H$$

1- أثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

2- عين أصنافها التكافؤية.

التمرين 13: لتكن $E = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعة التطبيقات من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. و لنعرف في E العلاقتين $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ التاليتين :

$$f\mathcal{S}g \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}); f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$$

1- هل العلاقتان $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ تكافئيتان؟

2- نعرف في مجموعة حاصل القسمة $E/\mathcal{S}$ علاقة T على النحو :

$$\widehat{f}\mathrm{T}\widehat{g} \Leftrightarrow \exists f \in \widehat{f} \text{ و } g \in \widehat{g} : f\mathcal{R}g$$

أثبت أن T علاقة ترتيب و أن المجموعة $E/\mathcal{S}$ تقبل إزاء هذه العلاقة عنصرا أكبر.

سلسلة رقم 02:

(المجموعات، الدوال، العلاقات).

حل التمرين 01:

A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة غير خالية E.

لنبسط العبارات التالية:

- $[A\cup(A\cap B)]\cap B$
- $(A\cap B)\cup(A\cap C_E A)$
- $C_E(A\cup B)\cap(C\cup C_E(A))$

الحل:

- $[A\cup(A\cap B)]\cap B = A\cap B$
- $(A\cap B)\cup(A\cap C_E A) = (A\cap B)\cup\emptyset = (A\cap B)$
- $C_E(A\cup B)\cap(C\cup C_E A) = (C_E(A\cup B)\cap C)\cup(C_E(A\cup B)\cap C_E(A))$

$$= C_E(A\cup B)$$

حل التمرين الثاني:

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين

A جزء من E.

B و C جزئيتين من F.

برهن أن:

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$

$$E\times F = \{(x,y) \,/\, x\in E \text{ و } y\in F\}$$

$$A\times(B\cup C) = \{(x;y) \,/\, x\in A \text{ و } y\in(B\cup C)\}$$

$$= \{(x;y) \,\Big|\, \begin{matrix} x\in A \text{ و } y\in B \\ \text{أو} \\ x\in A \text{ و } y\in C \end{matrix}$$

$$= \left\{ (x;y) \in A\times B \text{ و } (x;y) \in A\times C \right.$$

$$= \{ (x;y) \in (A\times B) \cup (A\times C) \}$$

$$= (A\times B) \cup (A\times C)$$

التمرين 03:

لتكن مجموعة غير خالية E.

A، B جزئيتين من E

برهن أن

$$A=B \Leftarrow \begin{cases} A\subset B \\ card(A) = card(B) \end{cases}$$

ط 01: البرهان بالتراجع:

A، B جزئيتين منتهيتين بحيث

$A\subset B$

$|A|=|B|=n$

من أجل $n=0$ لدينا:

$A=B=\emptyset$

نفرض صحة الخاصية حتى الرتبة n ولنبرهن صحتها على $n+1$.

أي

$$\begin{cases} A\subset B \\ |A|=|B|=n+1 \end{cases}$$

نلاحظ أن:

$|A|=n+1\geq 1$

أي أن A تحتوي على الأقل عنصر x، بحيث

بسم الله

$A' = A - \{x\}$

$B' = B - \{x\}$

$A \subset B$

$A - \{x\} \subset \{B - \{x\}\}$

$A' \subset B'$ — ①

مجموعة ذو أسماء

$|A'| = |A| - 1$

$= n + 1 - 1$

$= n$

$= |B| - 1$

$= |B'|$

إذن

$|A'| = |B'| = n$ — ②

من ① و ② وفرضية التراجع نجد:

$A' = B'$

$A - \{x\} = B - \{x\}$

$A = B$

ط ٢ : البرهان بالخلف.

نفرض أن:

$$\begin{cases} A \neq B \\ \text{و} \\ A \subset B \end{cases}$$

يوجد على الأقل x .

بحيث

$x \notin A$ و $x \in B$

لدينا :

$|B| \geqslant |A| + 1$

$n \geqslant n+1$

$0 \geqslant 1$

تناقض

ط3 : البرهان المباشر :

نعلم أن

$B = A \,\dot{\cup}\, (B - A)$

$|B| = |A| + |B - A|$

أي :

$|B - A| = 0$

أي : $B \cap C_E^A = B - A = \emptyset$

$B - A = \{x \in B$ و $x \notin A\}$

$= \{x \in B$ و $x \in C_E A\}$

$= B \cap C_E A$

$B - A$

فرضا : $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

$A = B$

تعريف التطبيق والدالة:

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين و f علاقة ترفق بكل سابقة x من E صورة $f(x)$ من F.

نقول عن f أنها تطبيق (على التوالي دالة) إذا كل سابقة من E لها صورة وحيدة F (على الأكثر).

حل التمرين 04:

$$A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,;\, 4x-y=1\}$$

$$B=\{(t+1,4t+3) \,;\, t\in\mathbb{R}\}$$

نبرهن أن $A=B$

أي نثبت أن $A\subset B$.

و $B\subset A$.

① $B\subset A$

ليكن: $(x;y)\in R$

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=4t+3 \end{cases} ,\ t\in\mathbb{R}$$

$$4x-y=4t+4-4t-3=1$$

ومنه $(x;y)\in B$

ومنه $B\subset A$

ج . $A \subset B$:

$(x;y) \in A$ $4x-y=1$

بما أن $x \in \mathbb{R}$ فإن $t \in \mathbb{R}$ تحقق

$x=t+1 \Rightarrow t=x-1$

$4x-y=4(t+1)-y=4t+4-y=1$

$y=4t+3$

ومنه : $(x;y)=(t+1;4t+3)$

إذن $A=B$

حل التمرين 05:

نفرض وجود مجموعتين $A,B \subset \mathbb{R}$ بحيث $F = A \times B$

نلاحظ أن $(1,0) \in F$ و منه $1 \in A$ و أيضا $(0,1) \in F$ ومنه $1 \in B$ و عليه $F = A \times B$ $(1,1) \in A \times B = F$ و هذا تناقض لان $(1,1) \notin F$.

ت 06 =

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= 2g(x) - 1$

$= 2x^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2x^2 + 1$

$g \circ f = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1$

$= (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + 1$

$= \qquad = 4x^2 - 4x + 2$

نلاحظ أن $g \circ f \neq f \circ g$

الاستنتاج =

و ليست دالة عكسية لـ f

العملية (o) ليست عملية تبديلية بين الدوال

حل تمرين 07

1- حساب صورة المجموعة $A=[-1;4]$ بالدالة f

$A=[-1;4]$

2- $f(A)=\{f(x) ; x\in A\}$

$=\{x^2 ; x\in[-1;4]\}$

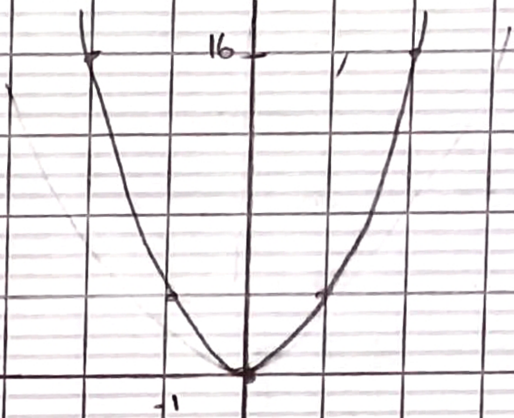
$=\{x^2 ; -1\leq x\leq 4\}$

$=\{x^2 ; -1\leq x\leq 0 ; 0\leq x\leq 4\}$

$=\{x^2 ; 0\leq x^2\leq 1 ; 0\leq x^2\leq 16\}$

$=\{x^2 ; 0\leq x^2\leq 16\}$

$=[0;16]$



$f^{-1}(A)=\{x ; f(x)\in A\}=\{x ; f(x)\in[-1;4]\}$

$=\{x ; -1\leq x^2\leq 4\}$

$=\{x ; 0\leq x^2\leq 4\}$

$=\{x ; 0\leq |x|\leq 2\}$

$=[-2;2]$

ت 08 : س 2 :

f_1 :

ليس غامر لأن 1 ليس له سابقة.

متباين كون نختار x_1, x_2 حيث

$$f_1(x_1) = f_1(x_2)$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2 .$$

$f_2 \; \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad x \mapsto -x \quad f_2$

1 - التباين : نختار n, m من $\mathbb{Z}$ بحيث

$$f(n) = f(m)$$

$$-n = -m$$

$$n = m$$

ومنه f_2 متباين.

2 - الغمر : نختار y من $\mathbb{Z}$ نضع $x = -y$

نجد :

$$f(x) = -x$$

$$-(-y) = y$$

ومنه f_2 غامر وعليه يكون f_2 تقابلي.

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$$

① التباين: ان f_3 ليس متباين لأن 2- و 2 سابقتان مختلفتان ولهما نفس الصورة (4)

② الغمر: f_3 ليس غامر لأن الأعداد السالبة ليس لها سوابق

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto x^2$$

1) التباين: f_4 ليس متباين لأن 1- و 1 سابقتان مختلفتان ولها نفس الصورة (1)

② الغمر: f_4 غامر ، نختار y من $\mathbb{R}_+$

نضع $x = \sqrt{y}$ نجد:

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y.$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto z^2$$

1) التباين: f_5 ليس متباين لأن 1 و 1- سابقتان مختلفتان ولهما نفس الصورة (1)

2) الغمر: f_5 غامر لأن: نختار y من $\mathbb{C}$

ونأخذ $x = \sqrt{y}$ نجد $f(x) = x^2$

$$f(x) = y$$

$f_6 \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x+y \,;\, x-y)$

١) التباين : نختار $(x;y)$ ، $(3;t)$

$f(x;y) = f(3;t)$

$(x+y \,;\, x-y) = (3+t \,;\, 3-t)$

أي : $x+y = 3+t$

و $x-y = 3-t$

بالجمع نجد :

$2x = 2\cdot 3$

$x = 3$

بالطرح نجد :

$2y = 2t$

$y = t$

وعليه f_6 متباين.

٢) الغمر :

نختار $(X;Y)$ من $\mathbb{R}^2$

هل توجد $(x;y)$ تحقق

$f(x;y) = (X;Y)$

$(x+y \,;\, x-y) = (X;Y)$

بالمطابقة نجد : $x+y = X$

$x-y = Y$

بالجمع نجد :

$2x = X+Y$

$x = \frac{X+Y}{2}$

وبالطرح نجد: $y = \frac{X + Y}{2}$

ومنه f_6 تقابلي

$f_7 \; \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad n \to n+1$

1) التباين: نختار n, m من $\mathbb{Z}$ بحيث

$f(n) = f(m)$

$n+1 = m+1$

$n = m$

وعليه فإن f_7 متباين.

2) الغمر: f_7 غامر إذا: نختار y من $\mathbb{Z}$.

نضع $x = y - 1$

$f(x) = x + 1$

$f(x) = y - 1 + 1$

$f(x) = y$

وعليه f_7 تقابلي.

$f_8 \; \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad n \to n+1$

1) التباين: نأخذ n, m بحيث

$f(n) = f(m)$

$n+1 = m+1$

$n = m$

وعليه f_8 متباين.

2) العكس: نأخذ $y = 0$ نجد f أنه لا يقبل سابقة

لأن: لو نفرض f أن له سابقة n نجد:

$n + 1 = 0$

$n = -1$ وهذا تناقض

لأن $n \in \mathbb{N}$ ومنه f_4 ليس غامر.

حل ت 10 :

$\forall x;y \in \mathbb{Z}$:

xRy

$\Updownarrow$

$x-y$ يقبل القسمة على 4.

① الانعكاس :

R انعكاسية لأنه من أجل كل x من $\mathbb{Z}$ ،

لدينا :

$x-x=0$

والصفر من مضاعفات 4.

② التناظر :

R متناظرة لأنه لو نفرض أنه يوجد x و y بحيث :

xRy

فإن : $x-y$ مضاعف لـ 4

أي $x-y=4k \;/\; k\in\mathbb{Z}$

نضرب في -1

$y-x=4\underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{Z}}$

إذن $y-x$ مضاعف لـ 4.

ومنه : yRx

③ التعدي :

اشتكل x و y و 3 بحيث :

xRy

و

$yR3$

أ-ب :

$\exists K_1 \in \mathbb{Z} : \quad x - y = 4K_1$

$\exists K_2 \in \mathbb{Z} : \quad y - z = 4K_2$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$x - z = 4\underbrace{(K_1 - K_2)}_{\in \mathbb{Z}}$$

ومنه $\quad xRz$

n عدد طبيعي

$\dot{0} = \{y \in \mathbb{Z} ; yR0\}$

$= \{y \in \mathbb{Z} : y = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

$= 4\mathbb{Z} + 0$

$= \{\dots -8, -4, 0; 4, 8; \dots\}$

$\dot{1} = \{y \in \mathbb{Z} : yR1\}$

$= \{y \in \mathbb{Z} : y - 1 = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{y \in \mathbb{Z} : y = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$= 4\mathbb{Z} + 1 = \{-7, -3, 1, 5, 9 \dots\}$

استنتاج :

$\dot{n} = 4\mathbb{Z} + n$

$\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$

حل ت 11:

1) إثبات أن R علاقة تكافؤ.

• R إنعكاسية

من أجل كل B من $P(E)$ نعلم أن $A \cap B = A \cap B$ ومنه BRB

• R تناظرية

ليكن B و C من $P(E)$ حيث

$BRC \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

$\Rightarrow A \cap C = A \cap B$

$\Rightarrow CRB$

• R متعدية

لنفرض أن لدينا D، C، B من $P(E)$ حيث:

$BRC \wedge CRD$

$BRC \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

$CRD \Rightarrow A \cap C = A \cap D$

إذن: $A \cap B = A \cap D$

ومنه: BRD.

2) تعيين صفوف تكافؤ A، $\emptyset$، E

صنف تكافؤ A:

$\dot{A} = \{B \in P(E) . BRA\}$

$= \{B \in P(E) ; B \cap A = A \cap A\}$

$= \{B \in P(E) ; B \cap A = A\}$

$= \{B \in P(E) = A \subset B\}$

صنف تكافؤ $\emptyset$ =

$$\dot{\emptyset} = \{B \in P(E) \,;\, B R \emptyset\}$$
$$= \{B \in P(E) \,;\, A \cap B = A \cap \emptyset\}$$
$$= \{B \in P(E) \,;\, A \cap B = \emptyset\}$$
$$= \{B \in P(E) \,;\, B \subset C_E^A\}$$

صنف تكافؤ E :

$$\dot{E} = \{B \in P(E) \,;\, B R E\}$$
$$= \{B \in P(E) \,;\, A \cap B = A \cap E\}$$
$$= \{B \in P(E) \,;\, A \cap B = A\}$$
$$= \{B \in P(E) \,;\, A \subset B\}$$

طريقة استنتاجية :

بما أن $A \subset E$ فإن

$E \in \dot{A}$

إذن $\dot{E} = \dot{A}$

[redacted]

حل التمرين 12

تمرين : لتكن H نقطة من المستوي P. نضع P^* هو P-{H} و لنعرف على P^* العلاقة R التالية ، من أجل كل M,N من P^* :

NRM ، إذا وفقط إذا كانت النقاط الثلاث N,M,H على استقامة واحدة.

ملاحظة : لاحظ –أيها الصغير – أننا يمكن أن نغير الشرط (النقاط الثلاث N,M,H على استقامة واحدة) بالشرط (N تنتمي إلى المستقيم (MH)) و نكتب : $N \in (MH)$

1. برهن أن R علاقة تكافؤ.

2. عين مجموعة صفوف التكافؤ P^*/R

الإجابة : (4ن)

أ. إن R انعكاسية لأنه نمن أجل كل N من P^* لدينا وضوحا أن $N \in (NH)$ ،

إذن NRN (0.5ن)

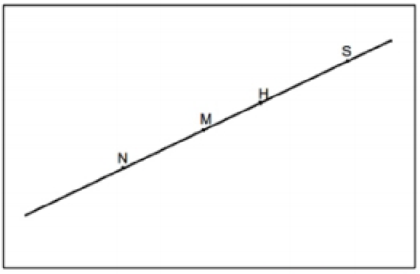
ب. إن R تناظرية هذا لأنه إذا كان لدينا $N \in (MH)$ فهذا يعني أن $M \in (NH)$ (0.5ن)

ج. إن R متعدية . التبرير : نفرض أنه لدينا ثلاث نقاط N,M,S بحيث NRM و MRS ، عندئذ يكون :

$$N \in (MH) \; ; \; M \in (SH)$$

و هذا يستلزم أن :

$$N \in (SH)$$



إذن NRS (0.5ن)

2. تعيين مجموعة صفوف التكافؤ P^*/R

لتعيين P^*/R نعين أولا أحد عناصرها (أي نختار نقطة كيفية M و نحدد صف تكافئها ثم نحاول أن نستنتج من خلال ذلك عناصر P^*/R)

لتكن M نقطة من P^* و لنشير بـ cl(M) إلى صف تكافئها . لدينا :

$$cl(M)=\{N \in P^* \; ; NRM\}$$

$$=\{N \in P^* \; ; N \in (MH)\}=(MH)$$

أي أن صف M وفق R ما هو إلا المستقيم (MH) ، مما نستنتج من هذا أن عناصر P^*/R هي جميع المستقيمات من P^* التي تمر من H.

(2ن)

حل التمرين 13

تمرين : لتكن $E=A(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ مجموعة التطبيقات التي تنطلق من $\mathfrak{R}$ نحو $\mathfrak{R}$. نعرف عليها العلاقتين R و S التاليتين : من أجل كل f,g من E لدينا :

$$fSg \iff f(\mathfrak{R})=g(\mathfrak{R})$$

$$fSg \iff f(\mathfrak{R}) \subseteq g(\mathfrak{R})$$

هل العلاقتان R و S تكافئيتان؟

الإجابة : إن R علاقة تكافؤ، هذا لأنه من أجل كل f,g,h من E لدينا : $f(\mathfrak{R})=f(\mathfrak{R})$ (أي أن R انعكاسية) ، و كذلك إذا كان $f(\mathfrak{R})=g(\mathfrak{R})$ فهذا يدل وضوحا أن $g(\mathfrak{R})=f(\mathfrak{R})$ (أي أن R تناظرية) ، و إذا فرضنا أن $f(\mathfrak{R})=g(\mathfrak{R})$ و $g(\mathfrak{R})=h(\mathfrak{R})$ فهذا يستلزم مباشرة أن $f(\mathfrak{R})=h(\mathfrak{R})$ (أي أن R متعدية) (1.5 ن)

أما بالنسبة لـ S فهي انعكاسية (هذا لأن $f(\mathfrak{R}) \subseteq f(\mathfrak{R})$ مهما يكن f من E) و هي متعدية أيضا (هذا لأنه إذا كان لدينا $f(\mathfrak{R}) \subseteq g(\mathfrak{R})$ و $g(\mathfrak{R}) \subseteq h(\mathfrak{R})$ فهذا يستلزم لنا مباشرة أن $f(\mathfrak{R}) \subseteq h(\mathfrak{R})$ (بسبب تعدي الاحتواء) (1ن)

☚ إلا أنها ليست " تناظرية" هذا لأنه إذا كان لدينا $f(\mathfrak{R}) \subseteq g(\mathfrak{R})$ فليس بالضرورة يكون $g(\mathfrak{R}) \subseteq f(\mathfrak{R})$

مثال مضاد : نعتبر التطبيقين :

$$f(x)=x^2+1 \; ; \; g(x)=x^2$$

يمكن أن تتحقق (أيها الذكي) بكل سهولة من أن fRg إلا أن g ليس له علاقة بـ f. (0.75 ن)

☚ و هي أيضا "ليست ضد تناظرية" هذا لأنه إذا كان لدينا $f(\mathfrak{R}) \subseteq g(\mathfrak{R})$ و $g(\mathfrak{R}) \subseteq f(\mathfrak{R})$ فهذا يستلزم أن $f(\mathfrak{R})=g(\mathfrak{R})$ ، و هذه الأخيرة لا تعني أبدا أن f=g

مثال مضاد :

نعتبر التطبيقين :

$$f(x)=x^2; \; g(x)=x^4$$

يمكن أن تتحقق (أيها المجتهد) بكل سهولة من أن $f(\mathfrak{R})=g(\mathfrak{R})=\mathfrak{R}^+$ إلا أن f لا يساوي g.

(0.75 ن)