السلسلة رقم 04

دساتير تايلور والنشر المحدود

السنة الجامعية : 2022 -2023

التمرين 1

اختصر العبارتين التاليتين:

$$\log\sqrt{\frac{1+thx}{1-thx}} \quad , \quad Argth\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}$$

التمرين 2

ليكن a عدادا حقيقيا موجبا.

1) أكتب دستور تايلور-لاغرانج لتابع الجيب تمام الزائدي في المجال $[0,a]$ مع باقي من الرتبة 5.

2) أثبت أن:

$$0 \le ch(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \le \frac{a^5}{5!}sh(a).$$

3) استنتج أن:

$$\frac{433}{384} \le ch(\frac{1}{2}) \le \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}.$$

التمرين 3

1) أكتب دستور تايلور-لاغرانج للتابع f المعرف على المجال $[4,5]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ بباقي من الرتبة 2.

2) استنتج أن: $\frac{7}{16} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{7}{16} + \frac{3}{256}$.

التمرين 4

ليكن $a \in \mathbb{R}$ و I مجال مفتوح يحوي a.

لنعتبر التابع $f \in C^2(I)$ بحيث المشتق $f^{(3)}$ موجود ومحدود في المجال I.

باستعمال دستور تايلور عند النقطة a من الرتبة 2، أحسب النهاية التالية:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

باخذ $a=0$. هل التابع $f(x) = x|x|$ من الصنف $C^2(I)$ ، ثم أحسب النهاية السابقة. ماذا تستنتج ؟

التمرين 5

باستعمال دستور تايلور-يونغ، أوجد النشر المحدود عند الصفر من الرتبة n للتوابع التالية:

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x$$
$$f(x) = chx, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f(x) = \ln(1-x).$$

التمرين 6

عين النشر المحدود عند النقطة 0 للتوابع التالية:

$$\begin{array}{llllll} \sin x\cos x & n=5, & (1+x)^{-\frac{1}{2}} & n=3, & \arctan x & n=5 \\ sh x\cos x & n=5, & e^x\sqrt{1-x} & n=4, & e^{\sin x} & n=5 \\ (1+2x)^x & n=5, & \ln(1+sh x) & n=4, & \frac{1}{th x}-\frac{1}{\tan x} & n=3. \end{array}$$

التمرين 7

عين النشر المحدود عند النقطة x_0 للتوابع التالية:

$$\begin{array}{llllll} \sin x & x_0=\frac{\pi}{4};n=3, & \cos x & x_0=\frac{\pi}{3};n=4, & e^x & x_0=1;n=4 \\ \frac{\ln x}{x^2} & x_0=1;n=4, & \sin x\cos 3x & x_0=\frac{\pi}{3};n=2, & \arctan x & x_0=1;n=3. \end{array}$$

التمرين 8

أوجد $DL(0,2)$ للتابع المعرف بـ:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}.$$

التمرين 9

أوجد $DL(0,4)$ للتابع المعرف بـ:

$$(\cos x)^{1+\sin x}.$$

التمرين 10

باستعمال النشر المحدود، أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-x^2\ln(1+\tfrac{1}{x})),\quad \lim_{x\to0}x^{\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x-x}},\quad \lim_{x\to0}(\tfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x,\quad \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}.$$

التمرين 11

أحسب النهاية عند النقطة 0 للتابع المعرف كما يلي:

$$u(x)=\frac{\ln(ch x)+\ln(\cos x)}{\sqrt{ch x}+\sqrt{\cos x}-2}.$$

التمرين 12

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x\cos x-1}{x},$$

1) أكتب النشر المحدود عند 0 من الرتبة 3 للتابع f.

2) احسب $\lim_{x\to0}f(x)$، ثم استنتج أن التابع f قابل للتمديد بالاستمرار عند 0.

4) أدرس قابلية اشتقاق التابع $\tilde{f}$ على $\mathbb{R}$. (حيث $\tilde{f}$ التمديد بالاستمرار للتابع f على $\mathbb{R}$)

$2ch^2\frac{x}{2} = 2 + 2sh^2(\frac{x}{2})$

$2sh^2(\frac{x}{2}) = 2ch^2\frac{x}{2} - 2$

حل تمرين (01)

الحل: (1)

نعلم أن: (*) $chx = ch^2\frac{x}{2} + sh^2\frac{x}{2}$

ومن كون: $ch^2x - sh^2x = 1$

نجد: ('*) $ch^2\frac{x}{2} = 1 + sh^2\frac{x}{2}$

بتعويض ('*) في (*)

$chx = 1 + 2sh^2\frac{x}{2}$.

أي $chx - 1 = 2sh^2\frac{x}{2}$.

ومن جهة أخرى:

$chx = 1 + 2sh^2\frac{x}{2}$,

$= 1 + [2ch^2\frac{x}{2} - 2]$

$chx = -1 + 2ch^2\frac{x}{2}$.

إذن: $chx + 1 = 2ch^2\frac{x}{2}$

وعليه:

$$\operatorname{Arg}th\left(\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}\right) = \operatorname{Arg}th\left(\sqrt{\frac{\cancel{2}sh^2(\frac{x}{2})}{\cancel{2}ch^2(\frac{x}{2})}}\right)$$

$$= \operatorname{Arg}th\left(\sqrt{th^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \operatorname{Arg}th\left(\left|th\frac{x}{2}\right|\right) = \left|\frac{x}{2}\right|$$

(2)

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\log\left(\sqrt{\frac{1+thx}{1-thx}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\right)$$

$$= x.$$

حل التمرين: ② -

1) بما أن $ch(x)$ من الصنف $C^{\infty}(\mathbb{R})$ مفهوم
الصنف $C^{5}(\mathbb{R})$ إذن من الصنف $C^{5}([0,a])$
وبالتالي دستور تايلور لاغرانج لـ ch على $[0,a]$ هو:

$$ch(a) = ch(0) + \frac{a\,ch'(0)}{1!} + \frac{a^2}{2!}ch^{(2)}(0) + \frac{a^3}{3!}ch^{(3)}(0) + \frac{a^4}{4!}ch^{(4)}(0) + \frac{a^5}{5!}ch^{(5)}(c)$$

حيث $c \in]0,a[$

بما أن: $\forall x \in]0,a[: \begin{cases} ch'(x) = sh(x) \\ sh'(x) = ch(x) \end{cases}$

مع $\begin{cases} sh(0) = 0 \\ ch(0) = 1 \end{cases}$

فإن: $ch(a) = 1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!}sh(c)$ ①

2) من العلاقة ① نجد:

$$\frac{a^5}{5!}sh(c) = ch(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}$$

بما أن: $0 < c < a \Rightarrow sh(0) < sh(c) < sh(a)$

لأن sh متزايدة على $[0,a]$

$$\Rightarrow 0 \leq sh(c) \leq sh(a).$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{a^5}{5!} sh(c) \leq \frac{a^5}{5!} sh(a).$$

$$\Rightarrow 0 \leq ch(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!} sh(a).$$

3) من العلاقة ① نجد:

$$1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} \leq ch(a) \leq 1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} sh(a)$$

نعوض $a = \frac{1}{2}$ نجد:

$$1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} sh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{384} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{384} + \frac{1}{2^5 \times 5!} sh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{433}{384} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840} sh\left(\frac{1}{2}\right).$$

لدينا: $sh\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,5 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3840} sh\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{3840}$

ومنه: $\frac{433}{384} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$.

و هـ م.

و غير ق.ا عند كل نقطة من $\mathbb{R}$ ولتكن $D(0,2)$ لـ g

g ذات $g(x) = 1+x+x^2\varepsilon(x)$ بجوار 0 .

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

TD = تمرين 03 :

كتابة دستور تايلور - لاغرانج للتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ على المجال $[4,5]$ (الباقي من الرتبة 2)

بما أن f يقبل الاشتقاق مرتين فإنه

$$\exists\, c \in]4,5[\ : f(5) = f(4) - \frac{1}{16} + \frac{3}{8c^2\sqrt{c}}$$

ومنه =

$$\frac{3}{8c^2\sqrt{c}} = f(5) - f(4) + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$
$$= -\frac{7}{16} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

لدينا:

$$4 < c < 5 \Rightarrow \begin{cases} 16 < c^2 < 25 \\ 2 < \sqrt{c} < \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 32 < c^2\sqrt{c} < 25\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 256 < 8c^2\sqrt{c} < 200\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{200\sqrt{5}} < \frac{3}{8c^2\sqrt{c}} < \frac{3}{256}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{200\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{7}{16} < \frac{3}{256}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{200\sqrt{5}} + \frac{\pi}{16} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{3}{256} + \frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{16} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{3}{256} + \frac{\pi}{16}$$

ومن رتبة 2 يعني ابا في 3
واذا الباقي 3 إذن الباقي 3.

ت 4 :

ليكن $a \in \mathbb{R}$ و I مجال مفتوح يحوي a ولتكن $f \in C^2(I)$ بحيث $f^{(3)}$ موجود ومحدود في I

حساب

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

حل: لدينا نستعمل كتابة دستور تايلور عند a من رتبة 2 لكتابة f

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a+\theta h)$$

~~تذكير~~

ومنه:

$$f(a-h) = f(a+(-h)) = f(a) - h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) - \frac{h^3}{2!} f^{(3)}(a)$$

إذن

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = \frac{h^2 f''(a) + \frac{h^3}{3!}\left[f^{(3)}(a+\theta h) - f^{(3)}(a-\theta h)\right]}{h^2}$$

فإنه بالمرور الى النهاية نجد

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

تذكير :

ليكن $f \in C^{(n+1)}(I)$ حيث I مجال مغلق أو مفتوح ولتكن $x_0 \in I$ عند نقطة:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h).$$

$0 < \theta < 1$ h

(ليكن بالضرورة موجب.)

لما ناخذ 0 عدد:

هل $f(x)=x|x|$ من الصنف $C^2(I)$ ؟

1 حسب النهاية ما بعد التابع f

ماذا نستنتج ؟

لدينا

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\geq 0 \\ -x^2 & ; x\leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -\frac{x^2}{x} = 0$$

ومنه ق إ عند 0 .

أصبح نَ و نَ و $f'(x)$ وسوف و

لا تقبل الاشتقاق عند 0

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & , x>0 \\ -2x & ; x\leq 0 \end{cases}$$

حل ت 3 :

1) $f(x) = e^x$

لدينا : $e^x \in C^n(\mathbb{R})$ و

$$\begin{cases} \forall k \in [0,n] : (e^x)^{(k)} = e^x \\ (e^x)^{(k)}(0) = 1 . \end{cases}$$

بتطبيق دستور تايلور - يونغ عند 0 من الرتبة n نجد :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

أي النشر المحدود لـ e^x عند 0 من الرتبة n هو

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\frac{2 \times 3\cancel{(1-x)}^2}{(1-x)^6}$$

2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

لدينا $f \in C^n$ في جوار 0 ومنه :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \; ; \; f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{(1-x)^4}$$

إذن :

$$\begin{cases} \forall k \in [0,n] : \left(\frac{1}{(1-x)}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \\ f^{(k)}(0) = k! \end{cases}$$

بتطبيق دستور تايلور - يونغ عند 0 من الرتبة n نجد

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

أي النشر المحدود لـ $\frac{1}{1-x}$ بجوار 0 هو من الرتبة n

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

3) $f(x) = \ln(1-x)$.

لدينا $f \in C^n$ في جوار 0 ومنه:

$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$; $f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$; $f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}$

إذن:

$$\begin{cases} \forall k \in [1,n] : (\ln(1-x))^{(k)} = \dfrac{-(k-1)!}{(1-x)^k} \\ f^{(k)}(0) = -(k-1)! \end{cases}$$

بتطبيق دستور تايلور يونغ عند 0 من الرتبة n نجد:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \dots - \frac{(n-1)!}{n!}x^n + o(x^n)$$

ومنه النشر المحدود لـ f عند 0 من الرتبة n هو:

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n)$$

أي: $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$

4) $f(x) = \mathrm{ch}\,x$

لدينا: $f'(x) = \mathrm{sh}\,x$; $f^{(3)}(x) = \mathrm{sh}\,x$

$f^{(2)}(x) = \mathrm{ch}\,x$; $f^{(4)}(x) = \mathrm{ch}\,x$.

إذن:

$$\begin{cases} \forall k \in [0,n] : \mathrm{ch}^{(k)}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}\,x & \text{زوجي } k \\ \mathrm{sh}\,x & \text{فردي } k \end{cases} \\ \mathrm{ch}^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 ; & \text{زوجي } k \\ 0 ; & \text{فردي } k \end{cases} \end{cases}$$

بتطبيق دستور تايلور يونغ عند 0 من الرتبة n نجد :

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

حيث $p = \left[\frac{n}{2}\right]$

ومنه النشر المحدود ل f عند 0 من الرتبة n موجود

$$ch\, x = \sum_{k=0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\, x^{2p}.$$

TD تطبيق

Exo6:

$$\sin x \cdot \cos x = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^6) \right] \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \right].$$

$f(x) = (1+2x)^x$

$= x \ln(1+2x)$

نعلم أن ,

$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + O(y^4)$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + O(y^4)$

نضع $y = 2x$ نجد ,

$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)$

$e^{x\ln(1+2x)} = e^{2x^2 - 2x^3 + O(x^4)}$ ومنه

نضع $y = 2x^2 - 2x^3$

$= 1 + (2x^2 - 2x^3) + \frac{1}{2}(2x^2 - 2x^3)^2$

$= x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + O(x^6)$

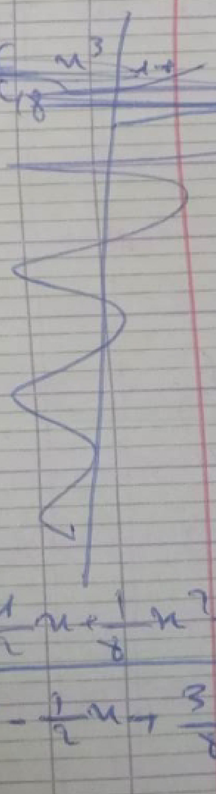
$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{120}x^5 + O(x^6)$

$1 - g(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + O(x^4)$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3}$

$\frac{1}{2}x \cancel{- \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{48}x^3}$



$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{48}x^3$ | $\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3$

$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^3$ | $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3$

$\frac{3}{8}x^2 - \frac{6}{48}x^3$

$\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}$

$\frac{-15}{48}x^3$

$f(x) = \dots$

الرتبة ، العدد

$DL(x_0, n) \; ; \; x_0 \neq 0$

① $t = x - x_0$ أي $x = t + x_0$

② النشر المحدود بجوار 0 من الرتبة n للتابع :

$h(t) = f(t + x_0)$

③ ومنه النشر المحدود لـ f بجوار x_0 من الرتبة n هو :

$f(x) = h(x - x_0)$

ت 7 :

① $f(x) = e^x : DL(1, 4)$

الرتبة ، العدد

~~نجتمع~~

$h(t) = f(t+1) = e^{t+1}$

① نشر بجوار 0 التابع h من الرتبة 4 لدينا :

$h(t) = e^{t+1} = e \cdot e^t$

$= e \cdot \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}\right) + o(t^4)$

② النشر المحدود لـ f بجوار 1 من الرتبة 4 هو :

$f(x) = h(x - 1)$

$= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24}\right) + o\left((x-1)^4\right)$

ت 7 :

② $f(x) = \cos x \quad DL\left(\frac{\pi}{3}, 4\right)$

$h(t) = f\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

① ننشر بجوار 0 التابع h من الرتبة 4 لدينا :

$h(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos t \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin t \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$$

$$=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$h(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\right)-\frac{\sqrt3}{2}\left(t-\frac{t^3}{6}\right)+o(t^4)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}t-\frac{t^2}{4}+\frac{\sqrt3}{12}t^3+\frac{t^4}{48}+o(t^4)$$

② ومنه النشر المحدود $x\to\cos x$ بجوار $\frac{\pi}{3}$ من الرتبة 4 هو

$$\cos x=h\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt3}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

$f(x)=\arctan x$ $DL(1,3)$

باستعمال دستور تايلور-يونغ بجوار 1 من الرتبة 3.

$$\arctan x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$$

IV

تحليل

النشر المحدود:

مثال 8:

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$= e^{\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right]$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + o(x^5)$$

~~exo 9~~ : 07 ~~j~~

~~$f(x)$~~

DL (0,4)

$(\cos x)^{1+\sin x}$

$g(x) = e^{(1+\sin x)\ln(\cos x)}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$

$\ln(\cos x) = \ln\Big(1 + \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{y} + \mathcal{O}(x^5)\Big)$

$= y - \frac{y^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$

$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)$

$\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \mathcal{O}(x^3)$

$f(x) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{24} + \mathcal{O}(x^3)}$

$= e^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^2}{24} + \mathcal{O}(x^3)\right)$

DL $x_0 = 0$, ...

$$\boxed{f(x) = e^{-\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{24} x^2 + \mathcal{O}(x^3)}$$

$f(x) = e^{\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

$\lim_{x \to 0} e^{\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6}}{x}\right)}$

$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{3}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)}$

$\underbrace{\ln\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)}_{-\frac{x^2}{6}} \sim -\frac{x^2}{6}$

$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{3}{x^2}\cdot\left(-\frac{x^2}{6}\right)}$

$= e^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{\ln(y+1)}{y} = 1$ ← مبرهنة

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \vartheta(x^8)$.

$f(x) = \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$f(x) = e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}$

تطبيق TD

تمرين 3:

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}}$

~~$f(x) = \sqrt{x+2} - 2$.~~

1b:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$g(x) = \sqrt{3x-5}$

$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$.

~~$(1+\sin x) = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \vartheta(x^4)$~~

~~$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \vartheta(x^5)$.~~

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \vartheta(x^5)$.

$(1+\sin x) = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \vartheta(x^4)$

$(1+\sin x) \ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + \vartheta(x^5) - \frac{x^2}{2}\left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + \vartheta(x^5)\right)$

$g(x) = e$

$= 1 + g + \frac{g^2}{2}$.

Exo 10

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$= e^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{-1}{6}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - x$

$\left(\begin{array}{l} x \to +\infty \\ y \to 0^+ \end{array} \right)$, $y = \frac{1}{x}$: نضع

$\lim_{y \to 0} \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - 1} - \frac{1}{y}$

$= \lim_{y \to 0} \sqrt{\frac{1 + y - y^2}{y^2}} - \frac{1}{y}$

$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}}{y} - \frac{1}{y} \right)$

$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

نضع :

$f(x) = \sqrt{x+2} = 2 + \frac{(x-2)}{4} + o(x^2)$

$g(x) = \sqrt{3x-5} = 1 + \frac{3}{2}(x-2) + o(x^2)$

$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{4}(x-2)}{-\frac{3}{2}(x-2)}$

$= \frac{-1}{6}$

$y = x - 2$ نضع :2b

$x \to 2$, $y \to 0$

$\lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{4+y} - 2}{1 - \sqrt{1+3y}}$

$= \lim_{y \to 0} \frac{2\sqrt{1 + \frac{y}{4}} - 2}{1 - \sqrt{1+3y}}$

$= \lim_{y \to 0} \frac{2\left(1 + \frac{y}{8}\right) - 2}{1 - \left(1 + \frac{3}{2}y\right)}$

$= \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{4}}{-\frac{3}{2}y}$

2006

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \vartheta}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + \vartheta$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}}{\frac{x^4}{24}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\cos x)}{\sqrt{\operatorname{ch} x} + \sqrt{\cos x} - 2}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \vartheta(x^5)$$

$$\ln(\operatorname{ch} x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + \vartheta(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \vartheta(x^5)$$

$$\ln(\cos x) = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{-x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + \vartheta(x^5)$$

$$\sqrt{\operatorname{ch} x} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \vartheta}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + \vartheta(x^5)$$

EX N°-12 /

$$f(x) = \frac{e^{x} \cos x - 1}{x}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$e^{x} \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O_1\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O_2\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O_3$$

$$\boxed{e^{x} \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + O(x^5)}$$