دستور تايلور والنشر المحدود

دستور تايلور بباقي لاغرانج:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة باستمرار على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 فإنه من أجل كل عدد x من I، يوجد عددًا c محصورًا بين x_0 و x بحيث:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \dots(I)$$

نسمي العلاقة (I) نشر أو دستور تايلور بباقي لاغرانج من الرتبة n للدالة f بجوار x_0.

- يمكن كتابة العلاقة (I) كذلك: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

حيث: $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ يسمى الجزء الكثير حدودي

و $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ يسمى الباقي.

دستور ماك لوران (حالة خاصة):

في الحالة $x_0=0$، نسمي العلاقة (I) بدستور ماك لوران من الرتبة n للدالة f، فيكتب من الشكل:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ملاحظات:

1- دستور تايلور للدالة f بجوار x_0 هو تعميم لنظرية التزايدات المنتهية، فنلاحظ ذلك بأخذ $n=0$ في دستور تايلور حيث:
$$f(x)=f(x_0)+f'(c)\frac{x-x_0}{1!}$$
أي يوجد c محصور بين x_0 و x بحيث: $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$

2- إذا كانت الدالة f كثيرة حدود من الدرجة n فإن الباقي $R_n(x)=0$، وبالتالي:
$$f(x)=P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

3- يُستعمل دستور ماك لوران في أغلب الأحيان في حساب القيم التقريبية.

أمثلة:

1) لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=e^x$.
لننشر الدالة f حسب دستور تايلور من الرتبة 4 بجوار 1:
- إن الدالة f تقبل الاشتقاق 5 مرات باستمرار على $\mathbb{R}$، وبالتالي، من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد c محصورًا بين 1 و x بحيث:
$$e^x=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e}{6}(x-1)^3+\frac{e}{24}(x-1)^4+\frac{e^c}{120}(x-1)^5$$

2) لتكن الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-3x^2+2x+4$
لننشر الدالة g حسب دستور تايلور من الرتبة الثالثة بجوار 2:
لدينا: $g'(x)=3x^2-6x+2$ ، $g''(x)=6x-6$ ، $g^{(3)}(x)=6$ ، $g^{(4)}(x)=0$
وبالتالي: $g(x)=g(2)+g'(2)(x-2)+\frac{g''(2)}{2}(x-2)^2+\frac{g^{(3)}(2)}{6}(x-2)^3$
أي: $g(x)=4+2(x-2)+3(x-2)^2+(x-2)^3$

تطبيق 1:
لتكن الدالة f المعرّفة على $]-1,+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(1+x)$
أنشر الدالة f حسب دستور ماك لوران من الرتبة n بباقي لاغرانج حيث $n\in\mathbb{N}$.

الحل: لنحسب بعض المشتقات المتتالية للدالة f:

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$ ، $f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$ ، $f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ ، $f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$ ، ...

فيمكن أن نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n مع $n\geq 1$

أن :
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

وذلك بالتراجع:

- فمن أجل $n=1$ ، لدينا ، $f'(x)=\frac{1\times 1}{1+x}=\frac{1}{1+x}$ محققة
- نفرض أن
$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

ولنثبت أن
$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

لدينا:
$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot\frac{-n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n مع $n\geq 1$ ، أن $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

وبالتالي، فمن أجل كل عدد x من $]1,+\infty[$ يوجد عدداً c محصوراً بين 0 و x بحيث يكون:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+\dots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ومنه،
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\times\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

تطبيق 2 : أوجد تقريب للعدد $\sin(0,01)$.

الحل: لنأخذ الدالة $f: x\mapsto \sin x$ ، ولننشرها حسب دستور ماك لوران من الرتبة 3:

لدينا في البداية، $f'(x)=\cos x$ ، $f''(x)=-\sin x$ ، $f^{(3)}(x)=-\cos x$ ، $f^{(4)}(x)=\sin x$ ،

فمن أجل كل عدد حقيقي x (في جوار 0) يوجد عدداً c محصوراً بين 0 و x بحيث يكون:

$$f(x)=0+1x+0\times\frac{x^2}{2}-1\frac{x^3}{6}+f^{(4)}(c)\frac{x^4}{24}$$

يصبح:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + (\sin c)\frac{x^4}{24}$$

ثم ناخذ $x=0{,}01$، فنلاحظ أن الباقي $(\sin c)\frac{(0{,}01)^4}{24}$ صغيرا، فيهمل، لنجد:

$$\sin(0{,}01) \simeq 0{,}01 - \frac{(0{,}01)^3}{6}$$

أي $\sin(0{,}01) \simeq 0{,}00999983333$

د- دستور تايلور بباقي يونغ:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة باستمرار على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ يشمل عددا x_0 فإنه من أجل كل x من I، توجد دالة ε معرفة على I و $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ بحيث:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+ (x-x_0)^n \varepsilon(x) \quad \ldots (\text{II})$$

تسمى العلاقة (II) بدستور تايلور بباقي يونغ للدالة f من الرتبة n بجوار x_0،

ملاحظات:

1- يمكن كتابة العلاقة (II) على الشكل التالي:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + O\left((x-x_0)^n\right)$$

حيث $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{O((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$

وحالة خاصة، دستور ماك لوران بباقي يونغ للدالة f من الرتبة n:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^n)$$

مع $\lim\limits_{x \to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$

2- يستعمل دستور تايلور بباقي يونغ في أغلب الأحيان في حساب النهايات.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \cos x$.
لننشر الدالة f حسب دستور تايلور بجوار π إلى الرتبة 4 بجوار π:

لدينا: $f'(x) = -\sin x$ ، $f''(x) = -\cos x$ ، $f^{(3)}(x) = \sin x$ ، $f^{(4)}(x) = \cos x$

وبالتالي:

$$f(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4 + O\left((x-\pi)^4\right)$$

حيث $\lim_{x \to \pi} \frac{O\left((x-\pi)^4\right)}{(x-\pi)^4} = 0$

ومنه:

$$\cos x = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + O\left((x-\pi)^4\right)$$

حيث $\lim_{x \to \pi} \frac{O\left((x-\pi)^4\right)}{(x-\pi)^4} = 0$

تطبيق: لنعتبر الدالة f المعرفة على $]-1, 1[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

2) أنشر الدالة f حسب دستور ماك لوران بباقي يونغ من الرتبة n.

الحل:

1) نستعمل البرهان بالتراجع:

- من أجل $n=0$ ، $f^{(0)}(x) = \frac{0!}{(1-x)^1} = \frac{1}{1-x} = f(x)$ محققة
- نفرض أن $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

ولنثبت أن $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

لدينا:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = n!\,\frac{(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

وإذن، من أجل كل عدد طبيعي n: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

2) من السؤال 1) ينتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق n مرة و باستمرار على المجال $]-1,1[$، وبالتالي توجد دالة ε معرفة على هذا المجال و $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ بحيث:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

أو بالكتابة التالية:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+O(x^n)$$

مع $\lim\limits_{x\to 0}\frac{O(x^n)}{x^n}=0$

أي:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+O(x^n)$$

مع $\lim\limits_{x\to 0}\frac{O(x^n)}{x^n}=0$

النشر المحدود:

1- النشر المحدود في جوار عدد حقيقي:

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ يشمل عددا x_0 (أو معرف على $I-\{x_0\}$) و n عدد طبيعي.

نقول أن الدالة f تقبل نشرا محدودا من الرتبة n عند x_0 (أو في جوار x_0) إذا وجدت أعداد حقيقية $a_0, a_1, \dots, a_n$ بحيث، من أجل كل عدد حقيقي x من I (أو من $I-\{x_0\}$) فإن:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+O((x-x_0)^n)$$

مع $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{O((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=0$

يسمى $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ بالجزء الأساسي أو الرئيسي للنشر المحدود

ويسمى $R(x)=O((x-x_0)^n)$ بباقي النشر.

ملاحظات:

1- يمكن تحويل النشر المحدود للدالة f في جوار $x_0\neq 0$ إلى نشر محدود للدالة f في جوار 0، باستعمال المتغير $t=x-x_0$، ويصبح $f(x)=f(t+x_0)$

ج) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة باستمرار على المجال المفتوح I يشمل العدد x_0 فإن دستور تايلور بباقي يونغ من الرتبة n للدالة f في جوار x_0 هو النشر المحدود من الرتبة n للدالة f عند x_0 حيث

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{مع} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

بمعنى آخر: نشر تايلور يستلزم النشر المحدود والعكس غير صحيح عموماً.

أمثلة:

1) نعلم أن نشر الدالة $x \mapsto e^x$ حسب دستور تايلور بباقي يونغ من الرتبة الأولى في جوار 0 هو:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

وهو يمثل النشر المحدود من الرتبة الأولى للدالة f عند 0،

ولدينا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 0$$

ج) لنعيّن النشر المحدود للدالة $f : x \mapsto \sin x$ من الرتبة الثالثة عند π:

من أجل ذلك نضع $t = x - \pi$

(بما أن x في جوار π فإن t في جوار 0)

ويكون لدينا:

$$f(x) = f(t + \pi)$$

أي:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(t + \pi) \\ &= -\sin t \\ &= -\left(0 + \frac{1}{1}t + 0 - \frac{1}{6}t^3\right) + o(t^3) \\ &= -t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

ومنه:

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{1}{6}(x - \pi)^3 + o((x - \pi)^3)$$

مع

$$\lim_{x \to \pi} \frac{o((x - \pi)^3)}{(x - \pi)^3} = 0$$

2- النشر المحدود في جوار ما لانهاية:

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من الشكل $]a,+\infty[$ (أو $]-\infty,a[$) و n عدد طبيعي.
نقول أن الدالة f تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار $+\infty$ (أو في جوار $-\infty$) إذا وفقط إذا قبلت الدالة $g: t \mapsto f(\frac{1}{t})$ (حيث $x=\frac{1}{t}$) نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار 0.

مثال: لننشر الدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{x}{x-1}$ من الرتبة الثالثة في جوار $+\infty$:
نضع $t=\frac{1}{x}$، وما دام x في جوار $+\infty$ فإن t في جوار 0، ولدينا:

$$f(x)=f(\tfrac{1}{t})=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}=\frac{1}{1-t}$$
$$=1+t+t^2+t^3+o(t^3)$$

إذن:
$$f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$ (في جوار $+\infty$)

3- العمليات على النشور المحدودة:

لتكن f و g دالتان كل منهما تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار عدد حقيقي x_0 من الشكل:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$
$$=P(x)+o((x-x_0)^n)$$
$$g(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\dots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$
$$=Q(x)+o((x-x_0)^n)$$

أ- المجموع والجداء:

- الدالة $f+g$ تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار x_0 من الشكل:
$$(f+g)(x)=K(x)+o((x-x_0)^n)$$
حيث: $K(x)=P(x)+Q(x)$

- الدالة $f\times g$ تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار x_0 من الشكل:
$$(f\times g)(x)=S(x)+o((x-x_0)^n)$$
حيث: $S(x)=P(x)\times Q(x)$ محتفظاً فقط بالحدود التي درجتها أصغر أو تساوي n.

أمثلة :
1) النشر المحدود لكل من $x\mapsto e^x$ و $x\mapsto e^{-x}$ من الرتبة الرابعة في جوار 0 كمايلي :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

فالنشر المحدود لكل من $x\mapsto \mathrm{ch}x$ و $x\mapsto \mathrm{sh}x$ من الرتبة الرابعة في جوار 0 كمايلي :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

2) النشر المحدود لكل من $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sqrt{1+x}$ من الرتبة الثانية في جوار 0 كمايلي :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

فالنشر المحدود للدالة $x\mapsto \sqrt{1+x}\cos x$ من الرتبة الثانية في جوار 0 كمايلي :

$$\sqrt{1+x}\cos x = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

ب - حاصل القسمة : إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 من الشكل

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = L(x) + o((x-x_0)^n)$$

حيث $L(x)$ حاصل قسمة $P(x)$ على $Q(x)$ حسب القوى المتزايدة و بدرجة أصغر أو تساوي n.

مثال : النشر المحدود لكل من $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x$ من الرتبة الثالثة في جوار 0 كمايلي :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{و} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

فالنشر المحدود للدالة $x\mapsto \tan x$ من الرتبة الثالثة في جوار 0 كمايلي :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} \\ \hline -\left(x - \frac{x^3}{2}\right) & x + \frac{x^3}{3} \\ \hline \frac{x^3}{3} & \end{array}$$

جـ- التركيب: لتكن f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 من الشكل $f(x)=P(x)+o((x-x_0)^n)$ حيث $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_1$
ولتكن g دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_1 من الشكل $g(x)=Q(x)+o((x-x_1)^n)$.
إن الدالة $g\circ f$ تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 من الشكل $(g\circ f)(x)=K(x)+o((x-x_0)^n)$ حيث $K(x)=(Q\circ P)(x)$ محتفظا فقط بالحدود التي درجتها أصغر أو تساوي n.

مثال: لنعين النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار 0 للدالة

$$x\longmapsto \sin(\ln(1+x))$$

لدينا: (في جوار 0)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$$

والنشر المحدود للدالة $x\longmapsto \sin x$ من الرتبة الثالثة في جوار 0:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

فالنشر المحدود للدالة $x\longmapsto \sin(\ln(1+x))$ من الرتبة الثالثة في جوار 0:

$$\sin(\ln(1+x))=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+o(x^3)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

4- حساب النهايات باستعمال النشور المحدودة:

النشر المحدود من الطرق المهمة لإزالة حالات عدم التعيين في حساب النهايات.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{o(x)}{x}\right)=1$$

تطبيق: احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$$

الحل:

نلاحظ في البداية أنها حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$، لإزالتها نستعمل النشر المحدود.

لدينا المقام:

$$3x^2\sin^2 x = 3x^2(x)^2 + o(x^4)$$
$$= 3x^4 + o(x^4)$$

(ينشر المقام من الرتبة 4 في جوار 0)

ثم ننشر البسط من الرتبة الرابعة في جوار 0

لدينا:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$
$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4)$$
$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

وبالتالي:

$$\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$
$$= -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{3 + \frac{o(x^4)}{x^4}}$$
$$= -\frac{5}{36}$$