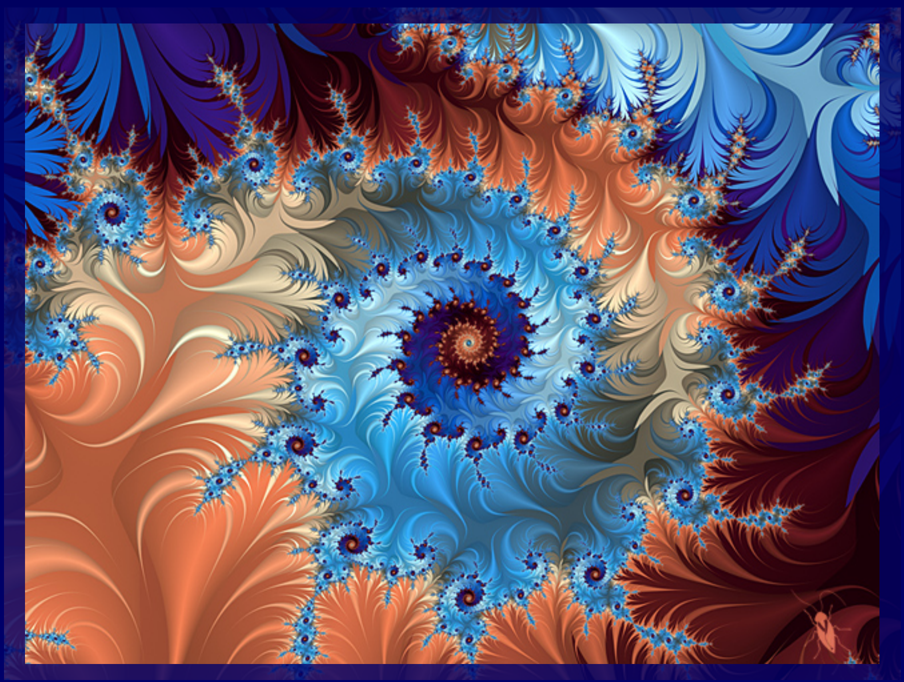
دروس في
الجبر
لطلبة السنة أولى جامعي

من إعداد الأستاذ : تلي محمد

أستاذ محاضر بالمدرسة العليا للأساتذة بالأغواط
mohamedtelli22@gmail.com

October 14, 2022



المحتويات

1 مدخل إلى المنطق الرياضي 5

I علاقتان أوليتان 5
1 الإنتماء 5
2 المساواة 5
II القضايا و الجمل المفتوحة 5
III االروابط المنطقية 6
1 النفي 6
2 االوصل و الفصل 6
3 الإستلزام و التكافؤ 7
4 خواص الروابط المنطقية 9
IV المكممات 10
1 المكمم الكلي و المكمم الجزئي 10
2 نفي المكمم الكلي و الجزئي 11
V أنماط البرهان 11
VI تمارين 12

مدخل إلى المنطق الرياضي

الهدف من هذا الفصل هو تحذيد قواعد معينة التي سنعتمد عليها في البراهين و الإستنباطات

I علاقتان أوليتان

1 الإنتماء

a عنصر من المجموعة E أو a ينتمي إلى E يرمز لها بالرمز : $a \in E$.

2 المساواة

إذا كان a و b يعنيان نفس الشيئ، نقول بأن a و b متساويان ونكتب : $a = b$.

II القضايا و الجمل المفتوحة

تعريف نسمي قضية كل جملة يمكننا الحكم عليها بالصحة "V" أو الخطأ "F"، لكن ليس الإثنان معا.

للتعبير عن القضايا نرمز إليها بالرموز $P, Q, \ldots$

مثال

- "الأغواط هي عاصمة الجزائر " قضية خاطئة .
- القضية "العدد 14 مضاعف للعدد 4 " خاطئة و القضية " 7 يقسم 14 " صحيحة.
- "محرز لاعب كرة قدم" قضية صحيحة.

الجمل التي نصادفها في أغلب الأحيان تكون أكثر عمومية. على سبيل المثال " العدد x يقبل القسمة على 3 " لا يمكننا القول أنها صحيحة أو خاطئة للأن صحتها أو خطأها تعتمد على قيمة العدد x و بالتالي ليست قضية نقول عنها جملة مفتوحة.

تعريف لتكن E مجموعة، نسمي جملة مفتوحة كل جملة تحتوي على أحرف تسمى بالمتغيرات بحيث عندما نعوض كل هذه المتغيرات بعناصر من E نحصل على قضية. نرمز إلى الجمل المفتوحة التي تتعلق بالمتغير x بالرمز $P(x)$.

مثال

-$P(w)$ جملة مفتوحة معرفة كمايلي "w ولاية جزائرية ".

- $P($الأغواط$)$ صحيحة.
- $P($لندن$)$ خاطئة.

-$P(x,y)$ جملة مفتوحة معرفة كمايلي "x=3+y" $(x,y$ أعداد حقيقية$)$.

- $P(2,-1)$ صحيحة.
- $P(3,17)$ خاطئة.

III الروابط المنطقية

تسمح الروابط المنطقية بإنشاء قضايا منطقية جديدة إنطلاقا من قضايا منطقية أولية $P, Q, R, \ldots$ التي يمكننا تحديد قيمة حقيقتها إنطلاقا من قيم الحقيقة للقضايا الأولية $P, Q, R, \ldots$

1 النفي

تعريف نفي القضية P هي القضية التي نرمز لها بالرمز $\overline{P}$. وهي خاطئة إذا كانت P صحيحة و صحيحة إذا كانت P خاطئة

يمكننا أن نلخص قيم الحقيقة ل $\overline{P}$ في جدول يسمى بجدول الحقيقة

P	$\overline{P}$
F	V
V	F

يمكننا أن نرمز إلى صحيح بالعدد 1 و خاطئ بالعدد 0.

2 الوصل و الفصل

تعريف لتكن P و Q قضيتين

- القضية $P \wedge Q$ تسمى بالوصل وتقرأ P و Q وهي صحيحة إذا كان P و Q صحيحتين معا.
- القضية $P \vee Q$ تسمى بالفصل و تقرأ P أو Q وهي خاطئة في حالة واحدة وهي P و Q خاطئتين معا.

جدولي الحقيقة لرابطي الوصل و الفصل

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

3 الإستلزام و التكافؤ

تعريف

لتكن P و Q قضيتين

- القضية $P \Rightarrow Q$ تسم بإستلزام P نحو Q، و تقرأ P يستلزم Q وهي خاطئة في حالة واحدة وهي P خاطئة و Q صحيحة.
- القضية $P \Leftrightarrow Q$ تسمى بالتكافؤ P نحو Q، و تقرأ P يكافئ Q وهي صحيحة إذا كان P و Q لديهما نفس قيمة الحقيقة.

جدولي الحقيقة للإستلزام و التكافؤ

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

مثال

- "محرز ليس لاعب كرة قدم". هذه القضية هي نفي للقضية "محرز لاعب كرة قدم".
- "$2 > 5$ و $2 = 3$" هو وصل للقضيتين "$2 > 5$"،"$2 = 3$".
- "اليوم غائم أو ممطر" هو فصل للقضيتين "اليوم غائم"،"اليوم ممطر".
- "كل عدد طبيعي زوجي هو عدد أولي" هذه القضية هي إستلزام للقضيتين "عدد زوجي"،"عدد أولي".
- "إذا و فقط إذا كان x عدد طبيعي فردي فإن x يقبل القسمة على 3" هو تكافؤ للقضيتين "x عدد فردي"،"x يقبل القسمة على 3".

4 خواص الروابط المنطقية

خاصية

لتكن P و Q قضيتين
لدينا التكافوئين المنطقيين التاليين، يسميان بقانون مورغان

$$(\overline{P \vee Q}) \equiv (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \qquad (1.1)$$

$$(\overline{P \wedge Q}) \equiv (\overline{P} \vee \overline{Q}) \qquad (1.2)$$

برهان

نبرهن تكافؤ المنطقي (1.1) بإستعمال جدول الحقيقة لكل من $(\overline{P \vee Q})$ و $(\overline{P} \wedge \overline{Q})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	F	F	F

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$
F	F	F	V
F	V	V	F
V	F	V	F
V	V	V	F

من العمود الأخير لكل جدول نستنتج التكافؤ المنطقي (1.1).

بنفس الطريقة نبرهن التكافؤ المنطقي (1.2). ■

خاصية

لتكن P, Q, R ثلاث قضايا
لدينا أيضا التكافوئين المنطقيين التاليين :

$$(P \wedge (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge R) \vee (P \wedge R)) \qquad (1.3)$$

$$(P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \qquad (1.4)$$

الوصل توزيعي على الفصل و الفصل توزيعي على الفصل

برهان

نبرهن التكافؤ المنطقي (1.3) بإستعمال جدول الحقيقة لكل من $(P \wedge (Q \vee R))$ و $((P \wedge R) \vee (P \wedge R))$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
F	F	F	F	F
F	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	V	V	V	F
V	F	F	F	F
V	F	V	V	V
V	V	F	V	V
V	V	V	V	V

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V

من العمود الأخير لكل جدول نستنتج التكافؤ المنطقي (1.3).
بنفس الطريقة نبرهن التكافؤ المنطقي (1.4). ■

خاصية

لتكن P و Q قضيتين. لدينا التكافؤات المنطقية التالية :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{P} \vee Q) \qquad (1.5)$$

$$(\overline{P \Rightarrow Q}) \equiv (P \wedge \overline{Q}) \qquad (1.6)$$

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \qquad (1.7)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \qquad (1.8)$$

برهان

-نبرهن التكافؤ المنطقي (1.5) بإستعمال جدول الحقيقة لكل من $(P \Rightarrow Q)$ و $(\overline{P} \vee Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
F	F	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
V	V	F	V

من العمود الأخير لكل جدول نستنتج التكافؤ المنطقي (1.5).

- إثبات التكافؤ المنطقي (1.6)

من (1.5) لدينا

$$\begin{aligned} \overline{P \Rightarrow Q} &\equiv \overline{\overline{P} \vee Q} \\ &\equiv P \wedge \overline{Q}. \end{aligned}$$

- إثبات التكافؤ (1.7)، لدينا

$$\begin{aligned} \overline{Q} \Rightarrow \overline{P} &\equiv Q \vee \overline{P} \\ &\equiv \overline{P} \vee Q \\ &\equiv P \Rightarrow Q. \end{aligned}$$

- للبرهان على (1.8) نرسم جدول الحقيقة لكل من القضيتين $(P \Leftrightarrow Q)$ و $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

من العمود الأخير لكل جدول نستنتج التكافؤ المنطقي (1.8). ■

IV المكممات

1 المكمم الكلي و المكمم الجزئي

تعريف

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة معرفة على E

- المكمم "مهما يكن" أو "من أجل كل"، نرمز له بالرمز $\forall$ يعرف الجملة $\forall x \in E, P(x)$ صحيحة من أجل كل x من E يحقق $P(x)$.

- المكمم "يوجد" نرمز له بالرمز $\exists$، يعرف الجملة $\exists x \in E, P(x)$ صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق $P(x)$.

مثال

-القضية "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$" صحيحة لأن مربع أي عدد حقيقي موجب.

- القضية $\exists n \in \mathbb{N} : n - 5 > 0$ صحيحة لأنه يكفي أخذ أي عدد طبيعي أكبر تماما من 5.

- القضية $\forall n \in \mathbb{N} : (n-3)n \geq 0$ خاطئة لأنها غير محققة مثلا من أجل العدد الطبيعي 1.

ملاحظة

إن ترتيب المكممات مهم على سبيل المثال القضيتان التاليتين مختلفتين فأولى خاطئة و الثانية صحيحة

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x > y$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x > y$

2 نفي المكمم الكلي و الجزئي

لدينا القاعدة التالية

قاعدة

$$\overline{\exists x \in E : P(x)} \equiv \forall x \in E : \overline{P(x)}$$

$$\overline{\forall x \in E : P(x)} \equiv \exists x \in E : \overline{P(x)}$$

مثال

-نفي القضية الأولى في المثال السابق هو $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.

- نفي القضية الثانية في المثال السابق هو $\forall x \in \mathbb{N} : x - 5 \leq 0$

V أنماط البرهان

VI تمارين

01 أوجد القضايا أو الجمل المفتوحة P و Q بحيث

1 $Q \Rightarrow P$ صحيحة و $P \Rightarrow Q$ صحيحة.

2 $Q \Rightarrow P$ خاطئة و $P \Rightarrow Q$ صحيحة.

3 $Q \Rightarrow P$ خاطئة و $P \Rightarrow Q$ خاطئة.

02 لتكن A,B و C ثلاث قضايا. برهن أن القضيتين $A \wedge (B \vee C)$ و $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ متكافئتين.

03 ليكن P و Q قضيتين. برهن أن القضيتين $\overline{P \Rightarrow Q}$ و $P \wedge \overline{Q}$ متكافئتين.

04 نذكر أن العدد الطبيعي p يقسم n ونرمز لها بالرمز $p|n$ إذا وجد عدد طبيعي k بحيث $n = k \times p$.

1 هل $6|n$ هو شرط ضروري من أجل n عدد زوجي ؟

2 هل $6|n$ هو شرط كافي ليكون n عدد زوجي ؟

05 لتكن f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
أكتب الجمل المفتوحة التالية بإستعمال المكممات:

1 الدالة f ثابتة.

2 الدالة f متناقصة.

3 الدالة f محدودة.

4 الدالة f لا تنعدم.

5 الدالة f تقبل قيمة حدية كبرى على $\mathbb{R}$.

06 ليكن لدينا القضايا التالية :

Q_1^{xy} . $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ : \ x + y \geq 0$

Q_2^{xy} . $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ \ x + y > 0$

Q_3^{xy} . $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ : \ x + y > 0$

Q_4^{xy} . $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ : \ y^2 > x$

هل هي قضايا صحيحة ؟ هل هي خاطئة ؟ انفها.

07 ليكن $x \in \mathbb{Z}$; برهن أنه إذا كان x^2 عدد فردي فإن x عدد فردي.

08 برهن أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية.

09 ليكن $\lambda < 0$، برهن أن

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \max\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \min\{x,y\}.$$

10 برهن أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ :\ 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

السلسلة رقم 01 : مدخل إلى المنطق الرياضي

التمرين 01 : أوجد القضايا أو الجمل المفتوحة P و Q بحيث

1- $P \Rightarrow Q$ صحيحة و $Q \Rightarrow P$ صحيحة.

2- $P \Rightarrow Q$ خاطئة و $Q \Rightarrow P$ صحيحة.

3- $P \Rightarrow Q$ خاطئة و $Q \Rightarrow P$ خاطئة.

التمرين 02: لتكن A,B و C ثلاث قضايا. برهن أن القضيتين $A \wedge (B \vee C)$ و $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ متكافئتين.
التمرين 03: ليكن P و Q قضيتين. برهن أن القضيتين $\overline{P \Rightarrow Q}$ و $P \wedge \overline{Q}$ متكافئتين.
التمرين 04: نذكر أن العدد الطبيعي p يقسم n ونرمز لها بالرمز $p|n$ إذا وجد عدد طبيعي k بحيث $n = k \times p$.

1- هل $6|n$ هو شرط ضروري من أجل n عدد زوجي ؟

2- هل $6|n$ هو شرط كافي ليكون n عدد زوجي ؟

التمرين 05: لتكن f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
أكتب الجمل المفتوحة التالية بإستعمال المكممات:

1- الدالة f ثابتة.

2- الدالة f متناقصة.

3- الدالة f محدودة.

4- الدالة f لا تنعدم.

5- الدالة f تقبل قيمة حدية كبرى على $\mathbb{R}$.

التمرين 06: ليكن لدينا القضايا التالية :

Q_1^{xy}. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ : \ x + y \geq 0.$

Q_2^{xy}. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ \ x + y > 0.$

Q_3^{xy}. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ : \ x + y > 0.$

Q_4^{xy}. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ : \ y^2 > x.$

هل هي قضايا صحيحة ؟ هل هي خاطئة ؟ انفها.
التمرين 07: ليكن $x \in \mathbb{Z}$; برهن أنه إذا كان x^2 عدد فردي فإن x عدد فردي.
التمرين 08: برهن أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غيلر منتهية.
التمرين 09:ليكن $\lambda < 0$، برهن أن

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \max\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \min\{x, y\}.$$

التمرين 10: برهن أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$