الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الإخوة منتوري - قسنطينة 1

كلية العلوم الدقيقة - قسم الفيزياء

محاضرات في الفيزياء 1

ميكانيك النقطة المادية

موجهة لطلبة السنة الأولى نظام ل.م.د علوم وتقنيات

الأستاذة : د. بومعزة ليلى

2017/ 2018

الفهرس

الفهرس:

الفصل الأول: مذكرة رياضية

الفصل الثاني: الحساب الشعاعي

<u>الفصل الثالث: الحركيـــــــــــــات</u>

A-III حركة النقطة المادية

B-III الحركة النسبيـــــــة

الفصل الرابع: التحريـــــــــــــــــك

الفصل الخامس: العـــــــمل والطاقــــــة

الفصل الأول:

مذكرة رياضية

الفصل الأول: مذكرة رياضية

A- I الأبعاد و التجانس أو المعادلات ذات الأبعاد
Equations aux dimensions ou dimensions et homogénéité

1-A-I مقدمـــــة :

قال العالم اللورد كلفن « Lord Kelvin » : " إن المعرفة المجردة ليست كافية إلا إذا عبرنا عنها بالأرقام" لذا فقد استعمل الإنسان القياسات منذ فجر التاريخ كوسيلة عملية للتعرف على الظواهر الطبيعية المحيطة به ولتحديد أشياء يستعملها خلال حياته اليومية. فقد اخترع الإنسان أجهزة قياس الأطوال و الكيل منذ القدم لتنظيم أسلوب حياته الإقتصادية والإجتماعية وقد أصبح من الواضح أن حياتنا اليومية مليئة بأنواع عدة من القياسات مثلا :

- ساعة اليد لقياس الوقت.
- قيادة السيارة بأمان مرتبط بعدة أجهزة (عداد السرعة، مؤشر درجة الحرارة، مؤشر خزان الوقود، ...).

2-A-I الكميات الفيزيائيـــة :

هي الصفة الفيزيائية القابلة للقياس تسمى كمية فيزيائية مثلا : "اللون" لايعني كمية فيزيائية لكن "شدة اللون" أو طول موجة اللون" فهي كميات فيزيائية لأنها صفات يمكن قياسها.

كل عملية فيزيائية تعرف باستخدام طريقتين هما :

- التعريف من خلال طريقة قياسـها .
- التعريف من خلال طريقة حسابها.

مثال : نستخدم المسطرة لقياس المسافات. نستخدم ساعة الإيقاف « Chronomètre » لقياس الوقت بين حدثين. نلاحظ أن كلا من المسافة و الزمن عرفت من خلال طريقة القياس لكن لحســـــــاب السرعة :

$$V=\frac{x}{t}=\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

من هنا يتضح وجود نوعين من الكميات :

1-2- A-I الكميات الفيزيائيـــة الأساسية :

هي كميات معرفة بذاتها، أي لا تعتمد على غيرها في التعريف مثل : الكتلة ، المسافة ، الزمن، الشحنة ، درجة الحرارة و غيرها.

الكمية المقاسة	Quantité mesurée	الوحدة		الرمز
الطول أو البعد	Longueur	المتر	mètre	m
الكتلة	Masse	الكيلوجرام	Kilogramme	kg
الزمن	Temps	الثانية	Seconde	s
درجة الحرارة	Température	درجة الكلفين	Kelvin	k
التيار الكهربائي	Courant électrique	الأمبير	Ampère	A
كمية المادة	Quantité de matière	ألمول	Mole	mol
شدة الاستضاءة	Luminosité	القنديلة	Candela	Cd
الزاوية المسطحة	Angle plan	الراديان	Radian	rd

2-2- A-I الكميات الفيزيائيـــة المشتقـة :

هي كميات التي يتم اشتقاقها من الكميات الأساسية، وتعرف بدلالتها ، تسمى كذلك بالكميات المعرفة مثل: السرعة ، التسارع، القوة، الضغط، الكثافة.

الكمية المقاسة	Quantité mesurée	الوحدة من القانون الفيزيائي	الرمز
المساحة	Surface	الطول x الطول	m^2
الحجم	Volume	الطول x الطول x الطول	m^3
السرعة الخطية	Vitesse linéaire	الطول / الزمن	m/s
الذبذبة	La fréquence	1 / الزمن	Hz
الكثافة	Densité	الكتلة / الحجم	kg/m^3
التسارع	Accélération	السرعة / الزمن	m/s^2
القوة	Force	التسارع x الكتلة	N
الضغط	Pression	القوة / المساحة	N/m^2
التدفق	Débit	الحجم / الزمن	m^3/s

3-A- I نــــــظام الوحدات العالمي :

وجــب استعمال مقاييس معينة و موحدة عبر العالم فالمقادير تحدد بأبعاد و الأبعاد تقدر بوحدات.

1-3-A- I نـــــظام الوحدات SI :

اعتمد سنة 1946 من طرف اللجنة العالمية للأوزان والمقاييس ويطلق عليه كذلك نظام الوحدات MKSA أي: متر(**m**ètre), كغ (**k**ilogramme) , ثانية (**s**econde) , آمبير (**a**mpère).

وهو النظام الأكثر استخداما عبر العالم. يستخدم النظام العالمي SI سبع (7) وحدات أساسية هي :

- المتر: ويقاس بواسطته الطول ويرمز له بالحرف "م" ويحدد المتر الطولي بالطول الموجي لإشعاع ذرة الكريبتون Kr .

- الكيلوغرام : وتقاس بواسطته الكتلة ويرمز له بالحرف" **كغ**".

- الثانية : ويقاس بها الزمن ويرمز لها بالحرف" **ث** "وتحدد بمدة اشعاع ذرة السيزيوم Cs .

- الأمبير: ويقاس به شدة التيار الكهربائى المار في سلكيين مفصولان ومتوازيين في الفراغ ,.يرمز له بالحرف"أ".

- الكالفن: وتقاس به درجة الحرارة ويرمز له بالحرف" **ك**".

- القنديلة : وتقيس شدة الضوء وليس لها اختصار في الإنجليزية ("cd") وهي مقدار الإشعاع الناتج من ذرة البلاتين Pt المتجمدة.

- المول: وحدة لقياس كمية المادة ويستخدم عادة في الكيمياء، والمول هو عدد أفوجادرو تقريبا ($6.0221415 \text{ x } 10^{23}$) من الجزيئات الأساسية، سواء كان الحديث يدور عن ذرات أو جزيئات لمركب ما.

2-3-A- I نـــــظام الوحدات CGS :

اقترح من طرف المنظمة البريطانية لتطوير العلوم سنة 1847. هذا النظام أقل شيوعاً واستخداماً حيث أنه نظام الوحدات المصغر والمشتق من النظام العالمي وهو نظام CGS أي سنتمتر- غرام- ثانية.

$$\left.\begin{array}{l}\text{cm} : \text{لقياس الطول} \\ \text{g} : \text{لقياس الكتلة} \\ \text{s} : \text{لقياس الوقت}\end{array}\right\} \text{يستخدم في كيمياء المخابر}$$

المسافة وحدتها القدم ، الكتلة الباوند...

4-A- I معادلة الأبعـــــاد :

مصطلح البعد هو الأكثر تجريدا من نطاق وحدات القياس : فالكتلة هي بعد ، في حين الكيلوغرام هو وحدة لقياس الحجم في البعد الكمي. رمز لمعادلة الأبعاد بالكتابة الآتية :

$$[X] = \mathrm{M}^a\ \mathrm{L}^b\ \mathrm{T}^c\ \mathrm{I}^d$$

حيث:

Masse (Kg) الكتلة : **M^a**

Longeur (m) الطول **: L^b**

Temps (s) الزمن : **T^c**

Intensité (A) الكثافة: **I^d**

حيث:

$\pi = 3.14$, $[\pi] = 1$, $[4] = 1$, $[t] = \mathrm{T}$, $[m] = \mathrm{M}$, $[l] = \mathrm{L}$, $[i] = \mathrm{I}$

- بعض الكميات (المقادير) ليس لها أبعاد

مثال: معامل الانكسار للأشعة: $\mathbf{h = c/v} \rightarrow [\boldsymbol{h}] = \mathbf{1}$

I -1-4-A أمثلة على معادلة الأبعـــــاد

- السرعة الخطية (Vitesse linéaire)

$[V] = \mathrm{L\,T^{-1}}$, $V = \frac{dl}{dt} = l/t$ وحدتها $m\,s^{-1}$

- التسارع الخطي (Accélération linéaire)

$[a] = \mathrm{L\,T^{-2}}$, $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2l}{dt^2} = l/\,t^2$ وحدته $m\,s^{-2}$

- القوة (Force)

$[\mathrm{F}] = \mathrm{ML\,T^{-2}}$, $\vec{F} = m\,\vec{a}$ وحدتها $Kg\,m\,s^{-2}$

- العزم (Moment)

$[\mathrm{L}] = \mathrm{ML^2\,T^{-2}}$, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ وحدته $Kg\,m^2s^{-2}$

- كمية الحركة (Quantité du mouvement)

$[\mathrm{P}] = \mathrm{ML\,T^{-1}}$, $\vec{P} = m.\vec{v}$ وحدته $Kg\,ms^{-1}$

5-A- I تجانس الأبعـــــاد :

تحليل الأبعاد يساعد على التأكد من صحة القوانين الفيزيائية, و ذلك بتطابق الأبعاد بين طرفي القانون , كما يساعد على صياغة الصورة النهائية للعلاقة الرياضية اعتمادا على مبدأ تطابق الأبعاد كشرط لصحة العلاقة. حيث أن وحدة الطرف الأيمن للمعادلة يجب أن يساوي وحدة الطرف الأيسر للمعادلة، وإلا فإن المعادلة غير صحيحة .

مثال: لإثبات صحة أي معادلة يجب أن تكون أبعاد الطرف الأيسر تساوي أبعاد الطرف الأيمن ، فمثلاً دور النواس البسيط هو: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

فإذا كتبنا معادلة الأبعاد لهذا القانون فإننا نعتبر 2π عدد لا يعتمد على أي من الوحدات الأساسية وعلى ذلك فليس له وجود في معادلة الأبعاد.

أبعاد الطرف الأيمن هي

$$\sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

مثال :

ايجـــــاد بعد أو وحدة الجاذبية

لدينا من قانون الجـــــــذب العام : $F = G\ \frac{Mm}{r^2} = m\gamma$

G : معامل الجاذبية العام.

M ,m: كتلتان متجانستان

r: البعد بين m و M

γ : تسارع الجاذبية الناتجة بين m و M

$F = m\gamma = m\, d^2x/dt^2 \rightarrow [F] = MLT^{-2}$

$G = F\, r^2/Mm$

$$\Rightarrow [G] = \frac{[F][r^2]}{[M][m]} = \frac{MLT^{-2}\ L^2}{M^2} \Rightarrow [\mathbf{G}] = \mathbf{M^{-1}T^{-2}L^3}\ (\mathrm{Kg^{-1}s^{-2}m^3}).$$

B- I الدالة المتعددة المتغيرات و المؤثرات التفاضلية
Fonction à plusieurs variables et Operateurs différentiels

B- I- 1 - الدالة المتعددة المتغيرات :

هي دوال متعلقة بعدة متغيرات ، $f = f(x, y, z, t, \dots \dots)$

مثال : $f = x^2 - y^2 + 5xz$

B- I-2 - المشتق الجزئي:

لتكن دالة ذات متغيرات عديدة حيث: $f = x^2 - y^2 + 5xz$

- يمكن حساب المشتقات الجزئية بالنسبة لكل متغير بفرض باقي المتغيرات ثابتة:

المشتق الجزئي لــ x/f هو : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5z$

المشتق الجزئي لــ y/f هو : $\frac{\partial \text{f}}{\partial \text{y}} = -2y$

المشتق الجزئي لـــ z/f هو : $\frac{\partial f}{\partial z} = 5x$

B- I-3- المشتق الكلي :

يعطى المشتق الكلي ل $f(x, y, z)$ بالنسبة للزمن t بـــ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

B- I-4- التفاضل الجزئي و الكلي:

نفرض دالة متعددة المتغيرات $f(x, y, z)$ يمكن حساب التفاضل الجزئي و الكلي بحيث:

التفاضل جزئي لــ x/f هو: $\partial f_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx$

التفاضل جزئي لــ y/f هو: $\partial f_y = \frac{\partial f}{\partial y} dy$

التفاضل جزئي لــ z/f هو: $\partial f_z = \frac{\partial f}{\partial z} dz$

و التفاضل الكلي هو:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\mathrm{dx}} dx + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{dz}$$

مثال: $\mathrm{f} = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y} - \mathrm{z}^3$

$\mathrm{df} = 2\mathrm{xdx} + 2\mathrm{dy} - 3\mathrm{z}^2\mathrm{dz}$

I -B- 5 المؤثرات التفاضلية: (Operateurs différentiels)

- المؤثر: هو رمز رياضي يدل على عملية رياضية معينة يجب إجرائها على كل ما يلي هذا المؤثر. فمثلاً في التعبير $\sqrt{3}$ فإن علامة الجذر هي المؤثر الرياضي الذي يدل على عملية أخذ الجذر التربيعي للرقم 3. وبالمثل في التعبير الرياضي $\mathrm{d}(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 1)/\mathrm{dx}$ فإن d/dx هو المؤثر الرياضي الذي يدل على اشتقاق المقدار $(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 1)$.

- التفاضل الاتجاهي (الشعاعي): هو فرع من علم الرياضيات يدرس العديد من العمليات التفاضلية معرفة في الحقل الشعاعي أو السلمي. يهتم التفاضل الاتجاهي بالمجالات القياسية والتي تربط الكمية القياسية بكل نقطة في الفضاء، والمجال الاتجاهي الذي يربط كل متجه إلى كل نقطة في الفضاء. على سبيل المثال، إن حرارة قيمة الضغط الهواء على سطح الأرض يختلف من نقطة لأخرى لذلك يعبر عنها بكمية قياسية، أما تدفق الهواء والتيارات الهوائية هي عبارة عن قيمة متجهه في المجال الاتجاهي، ولذلك نربط متجه السرعة بكل نقطة من الفضاء المدروس.

I -B-6- مؤثر دل أو نابلا: في الرياضيات والفيزياء (Del) أو (nabla) هو مؤثر يستخدم خصيصا في حساب متجهات وهو مؤثر تفاضلي يمثل في صورة "نابلا" بغرض اختصار تعبيرات رياضية طويلة. فهو يسهل حساب المتجهات . عندما يطبق على دالة ذات بعد واحد فهو يعطي المشتقة التفاضلية كما نستخدمها في الحساب . وعندما يطبق (يؤثر) على حقل (أي دالة تعتمد على

أكثر من بعد واحد) فإن "دل" تعطي تدرج مجالا غير متجه وأحيانا أيضا تباعد أو دوران مجالا متجها.

- نعرف المؤثر نابلة $\vec{\nabla}$ (Nabla) ذو المركبات: $\vec{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

حيث : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

* العمليات الرئيسية الأربعة في التفاضل الشعاعي هي:

أ - مؤثر التدرج: (Gradient)

- إذا كانت $f(x, y, z)$ دالة سلمية فإن تدرجها مقدار شعاعي معرف كما يلي:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

مثال : أحسب تدرج الدالة $f(x, y, z) = f = 3x^2 y^3 z$

الجواب: $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = 6xy^3 z\, \vec{\imath} + 9x^2 y^2 z\, \vec{\jmath} + 3x^2 y^3\, \vec{k}$

ب- مؤثر التباعد: (Divergence)

يحسب التباعد لحقل متجهي بالجداء السلمي بين $\vec{\nabla}$ و شعاع $\vec{A}$ وفقا لما يلي:

$$div\, \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

حيث $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\overrightarrow{k}$

مثال : أحسب تباعد الدالة الشعاعية التالية: $\overrightarrow{V}(x, y, z) = 2xy\, \vec{\imath} - 3yz^2\, \vec{\jmath} + 9xy^3\, \vec{k}$

الجواب: $div\, \vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{A} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$

ج - مؤثر الدوران : (Rotationnel)

يعرف دوران المتجه عموما بأنه الجداء الشعاعي بين $\vec{\nabla}$ و شعاع $\vec{A}$.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}\;-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

مثال : أحسب دوران الشعاع: $\vec{V}(x,y,z)=2xy\,\vec{i}-3yz^2\,\vec{j}+9xy^3\,\vec{k}$

الجواب: $\overrightarrow{rot}\,\vec{V}=(27xy^2+6yz)\vec{i}\;-9y^3\,\vec{j}-2x\vec{k}$

ملاحظة: إذا كان$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\vec{0}$ نقول عن $\vec{A}$ أنه محافظ أو مشتق من كمون.

د - مؤثر لابلاس أو لابلاسيان (Laplacien)

وفقا لتعريف لابلاس تمثل "نابلا" $(\vec{\nabla})$ معدل تغير دالة بالنسبة لمتغير $(\vec{\nabla}\mathrm{A})$ ويعبر عن هذا التعريف بالصياغة الرياضية التالية:

$$\Delta\,\mathrm{A}=\vec{\nabla}^2\mathrm{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\mathrm{A}$$

يعرف لابلاسيان لحقل سلمي $\mathrm{A}(x,y,z)$ كالتالي:

$$\Rightarrow\Delta\mathrm{A}=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\Delta\mathrm{A}=\;div(\overrightarrow{grad}\;A)$$

يعرف لابلاسيان لحقل شعاعي $\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{A_x},\mathrm{A_y},\mathrm{A_z})$ كالتالي:

$$\Delta\vec{\mathrm{A}}=\;\overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\right)-\overrightarrow{rot}\;\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right)\Rightarrow\;\Delta\vec{\mathrm{A}}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$$

$$\Delta\vec{\mathrm{A}}=\left(\frac{\partial^2\mathrm{A_x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{A_x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathrm{A_x}}{\partial z^2}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial^2\mathrm{A_y}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{A_y}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathrm{A_y}}{\partial z^2}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial^2\mathrm{A_z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{A_z}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathrm{A_z}}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

$$\Delta\vec{\mathrm{A}}=\Delta\mathrm{A_x}\vec{\imath}+\Delta\mathrm{A_y}\vec{\jmath}+\Delta\mathrm{A_z}\vec{k}$$

مثال : أحسب لابلاسيان للدالة السلمية التالية: $f(x,y,z)=f\;=3x^2\,y^3\,z$.

الجواب: $\Delta\mathrm{f}=\;div\left(\overrightarrow{grad}\;f\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Rightarrow\Delta\mathrm{f}=6y^3\,z\;+18x^2\,yz$

C- I المعادلات التفاضلية
Equations différentielles

I -C- 1- <u>مقدمـــــــــة :</u>

في الرياضيات، المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات وتفاضلات لبعض الدوال الرياضية (التوابع الرياضية) وتظهر فيها بشكل متغيرات المعادلة. ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات. تبرز المعادلات التفاضلية بشكل كبير في تطبيقات الفيزياء والكيمياء، وحتى النماذج الرياضية المتعلقة بالعمليات الحيوية والاجتماعية والاقتصادية.

I -C-2- <u>تعريف:</u>

- المعادلة التفاضلية هي العلاقة التي تربط بين: متغير مستقل و ليكن x و متغير تابع و ليكن y(x) و واحدة او أكثر من المشتقات (y' , y'',y'''...y ^{n})

اي انها على الصورة العامة:

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{n}) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية.

- أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x, y مستقلان و كان z (x,y) متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x, y جزئيا , سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ,معادلة تفاضلية جزئية , وهي الصورة:

$$g(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots \dots . \frac{\partial^n z}{\partial x^n}) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية:

1) $y'''^{2} + 2y'^{3} - 5y = sin\theta$

2) $y' + xy = x^2$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = x$

- نلاحظ أن المعادلتين 1و 2 كلا منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة 3 معادلة تفاضلية جزئية.

- من الممكن تصنيف المعادلات إلى فئات مختلفة بحسب رتبة و درجة المعادلة :

رتبة المعادلة: هي رتبة أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة

درجة المعادلة: هي درجة (الأس) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوة الكسرية.

مثال 1:

$$(y''')^9 - 5y = x$$

المعادلة من الرتبة 3 والدرجة 9.

مثال 2:

- أوجد رتبة و درجة المعادلة تفاضلية: $y'' = (5 - 2y'')^{3/2}$

- بتربيع طرفي المعادلة $y''^2 = (5 - 2y'')^3$

المعادلة من الرتبة 2 والدرجة 3.

I -C-3- المعادلة التفاضلية

الدالة$\mathrm{y = y(x)}$ حل المعادلة التفاضلية : $F(x, y, y', y'', \dots y^n) = 0$ اذا كانت:

- قابلة للاشتقاق n مرة

- تحقق المعادلة التفاضلية أي : $F\left(x, y(x), y'(x), \dots y^n(x)\right) = 0$

مثال :

اثبت أن: $y(x) = c \sin\theta$ حل المعادلة التفاضلية : $y'' + y = 0$

حيث c ثابت.

الحل:

$$y(x) = c\sin\theta\ , \qquad y'(x) = c\cos\theta, \qquad y''^{(x)} = -c\sin\theta$$

و على ذلك نجد أن

$$y'' + y = -c\sin\theta + c\sin\theta = 0$$

* إذن $y(x) = c\sin\theta$ حل المعادلة التفاضلية : $y'' + y = 0$

I -C- 4- المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى , هي علاقة بين دالة (تعتبر مجهولة) y وبين مشتقاتها الأولى والمتغير x لــ y .

$$F(x, y, y') = 0$$

او : $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

أ) - المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة:

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

حيث أن $M(x)$ دالة لــ x فقط و $N(y)$ دالة لــ y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل , نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int \boldsymbol{M(x)dx} + \int \boldsymbol{N(y)dy} = \boldsymbol{c}$$

حيث c ثابت اختياري

ويسمى ذلك الحل بالحل العام , ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام. وإذا علم شرط ابتدائي , نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلا خاصا .

مثال 1:

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$x^2dx + y^2dy = 0$$

$$\int x^2dx + \int y^2dy = c \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = c \Rightarrow x^3 + y^3 = 3c = c'$$

$$x^3 + y^3 = c'$$

مثال 2 :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = 3x^2 - 1$

$$y = \int y'dx = \int (3x^2 - 1)dx$$

$$y = x^3 - x + c$$

ب) ـ المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للفصل:

تكون من الشكل: $M_1(x).N_1(y)dx + M_2(x).N_2(y)dy = 0$

للفصل نقسم المعادلة على: $N_1(y) \times M_2(x)$ نتحصل: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$

حلها هو : $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy^2dx + (1 - x^2)\,dy = 0$$

الحل

نقسم طرفي المعادلة على $y^2(1 - x^2)$ فنحصل على :

$$\frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كمايلي :

بتكامل الطرفين

$$\int \frac{xdx}{1 - x^2} + \int \frac{dy}{y^2} = c \Rightarrow -\frac{1}{2}ln(1 - x^2) - y^{-1} = c$$

$$ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - y^{-1} = c \Rightarrow y^{-1} = ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - c$$

و بتالي فان حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = (ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - c)^{-1}$$

I -C-5- المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية:

تكون من الشكل: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \ldots\ldots..(1)$

-ندرس هذه المعادلات في حالة: (a, b, c) ثوابت حقيقية.

فيكون حل المعادلة (1) عبارة عن مجموع حلين: الحل العام و الحل الخاص:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

✓ $\boldsymbol{y_h(x)}$ **: الحل العام (حل المعادلة المتجانسة):**

- نأخذ المعادلة (1) بدون طرف ثان :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

✓ $\boldsymbol{y_p(x)}$: **الحل الخاص**

- نأخذ المعادلة (1) بطرف ثان :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

***طريقة حل المعادلة المتجانسة (الحل العام)**

نبحث عن الحل من الشكل: $y = e^{rx}$ ، ثم نعوض في المعادلة نجد:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx}$$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx} \neq 0,\ (ar^2 + br + c) = 0$$

$(ar^2 + br + c) = 0$: تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

- لحل المعادلةالمميزة نبحث عن Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$ فنجد 3 حالات:

$\Delta > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

يوجد حلان للمعادلة: $r_1 \neq r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ y_2 = e^{r_2 x} \end{cases}$ حلي المعادلة المميزة (1) و هما مستقلين خطيا : $y_1/y_2 \neq cst$

فيكون الحل العام:

$$y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$$y_h(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(Ae^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x} + Be^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x}\right)$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $y'' - 4y' + 3y = 0$

توجد المعادلة المميزة

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$(r-3)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 3$$

حل المعادلة التفاضلية هو : $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

$$\therefore y = Ae^{x} + Be^{3x}$$

$\Delta = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

يوجد حل مضاعف للمعادلة: $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} = \alpha$

$\begin{cases} y_1 = xe^{\alpha x} \\ y_2 = e^{\alpha x} \end{cases}$ حلي المعادلة المميزة (1) و هما مستقلين خطيا :

$$y_h(x) = (Ax+B)e^{\alpha x} \Rightarrow y_h(x) = (Ax+B)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $y'' + 2y + y = 0$

توجد المعادلة المميزة:

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$$

حل المعادلة التفاضلية هو: $y = (Ax + B)e^{r\,x}$

$$\therefore y = (Ax + B)e^{-\,x}$$

$\underline{\Delta < 0}$: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

يوجد حلين مركبين بحيث: $(i^2 = -1)$ اي:

يوجد حلين للمعادلة: $r_1 \neq r_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

نضع: $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, $\alpha = \frac{-b}{2a}$

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة يكتب على الشكل:

$$y_h(x) = e^{\alpha\,x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $y'' + 16y = 0$

توجد المعادلة المميزة

$$r^2 + 16 = 0$$

$$\Delta = (0)^2 - 4.1.16 = -64 = 64i^2$$

$$r_1 = \frac{0 - \sqrt{64i^2}}{2} = -4i, \qquad r_2 = \frac{0 + \sqrt{64i^2}}{2} = 4i$$

$$\beta = 4 \ , \alpha = 0$$

حل المعادلة التفاضلية هو: $y = e^{\alpha\,x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

$$\Rightarrow y = e^{(0)x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$$

$$\therefore\ y = (A\ cos4x + Bsin4x)$$

***طريقة حل المعادلة المتجانسة (الحل الخاص) :**

إيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية يعتمد على شكل الطرف الثاني: f(x) الذي يكون على عدة أشكال، هنا نهتم و كمثال بدراسة الشكل العام أي حالة الطرف الثاني عبارة عن كثير الحدود من الدرجة (n) و الحل الخاص أيضا يكون عبارة عن كثير الحدود من الدرجة (n).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i\ X^i$$

- $a, b, c \neq 0$

$$y_p\ (x) = \sum_{i=0}^{n} C_i\ X^i$$

- $a, b \neq 0,\ c = 0$

$$y_p\ (x) = x\sum_{i=0}^{n} C_i\ X^i$$

- $a \neq 0, b\ , c = 0$

$$y_p\ (x) = x^2\sum_{i=0}^{n} C_i\ X^i$$

تمارين (Exercices)

- التمرين01

1- أعط معادلات الأبعاد للمقادير التالية : الشحنة الكهربائية Q, الكثافة السطحيةσ , الحقل الكهربائي $\vec{E}$, الكمون الكهربائي V , المقاومة الكهربائيةR , السعة C, القوة $\vec{F}$, الضغط P و الثابتk حيث $F = kx$, الحث الذاتي L.

2- تحقق من أن $RC, \frac{L}{R}, (LC)^{1/2}$ متجانسة مع بعضها البعض.

-التمرين02

أحسب المشتقات الجزئية للدوال التالية:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \quad , f_2(x,y) = xy^2 + \sin y \quad , f_3(x,y,z) = x^2 \log yz$$

$$f_4(x,y,z) = (x-y)/z \quad , f_5(x,y) = (x^2 - y^2)^{1/2}$$

التمرين 03

ليكن$\vec{r}$ شعاع في المعلم الديكارتي حيث:

$$\vec{r} = x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

أحسب ما يلي: $\overrightarrow{grad}\, r$, $div\,\vec{r}$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{r}$, $\vec{\nabla}^2 r$.

حلول التمارين

حل التمرين 01

- معادلات الأبعاد للمقادير:

- الشحنة الكهربائية Q : $Q = I.t \Rightarrow [Q] = [I][t] = IT$

- الكثافة السطحية σ : $\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow [\sigma] = ITL^{-2}$

- الحقل الكهربائي$\vec{E}$: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \Rightarrow [E] = \frac{[F]}{[Q]} \Rightarrow [E] = ML\,T^{-3}\,I^{-1}$

- الكمون الكهربائي V $\quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\Rightarrow [V] = [E][x] \Rightarrow [V] = ML^2\, T^{-3}\, I^{-1}$$

- المقاومة الكهربائيةR

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow [R] = [V]/[I] = ML^2\, T^{-3}\, I^{-2}$$

- السعة C :

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow [C] = [Q]/[V] = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$$

القوة $\vec{F}$

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad , [F] = [m]\,[a] = ML\, T^{-2}$$

-الضغط P

$$P = F/S \quad , [P] = ML^{-1}\, T^{-2}$$

k: ثابت صلابة النابض.

$$F = kx \Rightarrow [k] = \frac{[F]}{[x]} = M\, T^{-2}$$

- الحث الذاتي L

$$e = -L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow [L] = \frac{[e][t]}{[i]} \Rightarrow [L] = ML^2T^{-2}I^{-2}$$

-2

$$[R][C] = ML^2T^{-3}I^{-2}M^{-1}L^{-2}T^4I^2 = T$$

$$\frac{[L]}{[R]} = (ML^2T^{-2}I^{-2})/(ML^2T^{-3}I^{-2}) = T$$

$$[L]^{1/2}[C]^{1/2} = (ML^2T^{-2}I^{-2})^{1/2}(M^{-1}L^{-2}T^4I^2)^{1/2} = T$$

نلاحظ أن الكميات RC , $\frac{L}{R}$, $(LC)^{1/2}$ متجانسة مع بعضها البعض.

حل التمرين02

$$* \; f_1(x,y) = x^2 + y^2$$

$f'_1(x) = 2x,\ \ f'_1(y) = 2y \ \Rightarrow\ df_1(x,y) = 2xdx + 2ydy$

تمثل المشتقات الجزئية : $f'_1(x), f'_1(y)$

$f_1(x,y)$ يمثل التفاضل الكلي للدالة : $df_1(x,y)$

$* \ f_2(x,y) = xy^2 + \sin y$

$f'_2(x) = \mathrm{y}^2, \quad f'_2(y) = 2\mathrm{x}y + \cos \mathrm{y}$

$* \ f_3(x,y,z) = x^2 \log yz$

$f'_3(x) = 2x\log yz, \quad f'_3(y) = \frac{x^2z}{yz} = \frac{x^2}{y}, \quad f'_3(z) = \frac{x^2y}{yz} = \frac{x^2}{z}$

$* \ f_4(x,y,z) = \dfrac{(x-y)}{z} = \dfrac{x}{z} - \dfrac{y}{z}$

$f'_4(x) = \dfrac{z}{z^2} = \dfrac{1}{z} \ , \qquad f'_4(y) = -\dfrac{z}{z^2} = -\dfrac{1}{z}$

$f'_4(z) = \dfrac{(0-x)}{z^2} + \dfrac{y}{z^2} = (-x+y)/\, z^2$

$* \ f_5(x,y) = (x^2 - y^2)^{1/2} = \sqrt{x^2 - y^2}$

$f'_5(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \ f'_5(y) = \frac{1(-2y)}{2\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$

حل التمرين 03

- حساب $\overrightarrow{grad}\, r$:

$$\overrightarrow{grad}\, r = \vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

لدينا:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z}=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}$$

بالتالي نجد:

$$\overrightarrow{grad}\,r=\vec{\nabla}r=\frac{x}{r}\vec{\imath}+\frac{y}{r}\vec{\jmath}+\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{\vec{r}}{r}$$

- حساب $div\,\vec{r}$

$$div\,\vec{r}=\vec{\nabla}.\vec{r}=\frac{dx}{dx}+\frac{dy}{dy}+\frac{dz}{dz}=3$$

- حساب $\overrightarrow{rot}\,\vec{r}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{r}=\vec{\nabla}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{r}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{\imath}\;-\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

- حساب $\vec{\nabla}^2\mathrm{r}$

$$\vec{\nabla}^2\mathrm{r}=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

بالتالي نجد:

$$\vec{\nabla}^2\mathrm{r}=\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

الفصل الثاني:

الحساب الشعاعي

الفصل الثاني: الحساب الشعاعي
Le calcul vectoriel

II – 1 مقدمـــــة :

تصنف المقادير الفيزيائية إلى صنفين أساسيين :

- **المقادير السلمية أو العددية : Grandeurs Scalaires**

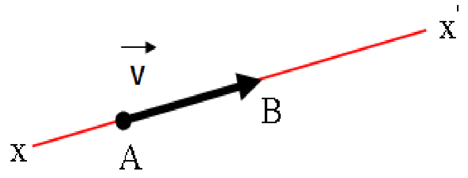
المقدار السلمي هو المقدار الذي يتعين لنا بتحديد قيمة واحدة فقط ولا نحتاج لتعريفه إلى أكثر من قيمة كأن نقول مثلاً الجسم A له كتلة مقدارها 500 g ويملك طاقة قدرها 40 Joule . هذا يعني بأن كتلة الجسم A محدّدة تمامًا وليس هناك إلتباس في قيمتها وطاقة الجسم معلومة للجميع وليس فيها إشكال وعندما نقول استغرقت حصة الدرس مدّة ساعة ونصف فالمدّة الزمنية واضحة ولا تحتاج لتفصيل وإذا قلنا بأن درجة حرارة الغرفة هي 15 °C، فإن هذا الكلام مفهوم ولا يحتاج لشرحٍ إضافي. إن الكتلة والطول والزمن والطاقة ودرجة الحرارة الخ.. كلها مقادير سلمية لأنها تتحدّد بقيمة واحدة ولا علاقة لها بالمعلم أو المرجع المستعمل، كما أنها لا تتغير عند تحويل جملة المحاور.

- **المقادير الشعاعية : Grandeurs Vectorielles**

المقدار الشعاعي هو المقدار الذي له قيمة واتجاه ونحتاج لمعرفته إلى تحديد القيمة والاتجاه والفيزياء تتعامل مع هذا النوع من المقادير بشكل كبير فالسرعة والتسارع والقوة كلها مقادير شعاعية. فإذا قلنا مثلاً نقذف جسم بسرعة ابتدائية قيمتها $v_0 = 10\ m/s$ هذه الجملة غير دقيقة من الناحية الفيزيائية. لأن اتجاه السرعة غير محدّد و مسار الحركة يعتمد على قيمة واتجاه تلك السرعة أي على شعاع السرعة $\overrightarrow{v_0}$. فإذا كانت السرعة شاقولية فإن المسار مستقيم و إذا كانت أفقية أو مائلة فإن المسار يكون منحني. إذن لتعيين المقدار الشعاعي نحتاج الى تحديد قيمته واتجاهه.

مثال : السرعة $\vec{V}$ ، المجال الكهربائي$\vec{E}$ ، المجال المغناطيسي$\vec{B}$.

II – 2 <u>مفهوم الشعـــاع:</u> A و **B** نقطتان منه ،



الثنائيـــــة (A,B) تعين لنا شعـــــــاعا نرمز له بــ :

$\overrightarrow{AB}$ أو نرمز له برمز آخر وليكن $\vec{V}$ حيث $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

<u>- مميزات الشعاع $\vec{V}$:</u>

- A هي نقطة تأثيره وهي بداية الشعاع $\vec{V}$.

- طويلة الشعاع $\vec{V}$ هي طول القطعة $[AB]$ و نرمز لها بـ : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\|$.

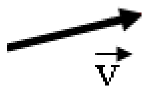
- منحى أو حامل الشعاع $\vec{V}$ هو منحى المستقيم (xx') .

- اتجاه الشعاع $\vec{V}$ من A نحو B.

II – 2 -1 <u>أنواع الأشعـــة</u> :

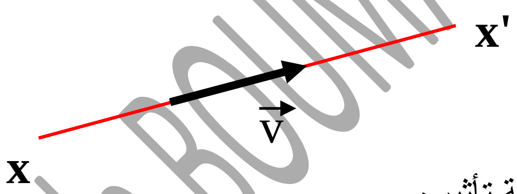
أ)-<u>**الشعاع الحر**</u> : هو كل شعاع حدد اتجاهه ، منحاه ، طويلته ، ولم تحدد نقطة تأثيره.

مثال : الشعاع $\vec{V}$.



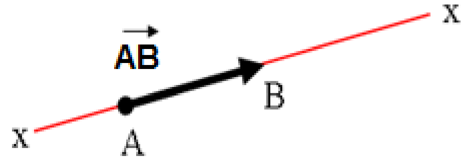
ب)-<u>**الشعاع المنزلق**</u> : هو كل شعاع حدد حامله ،اتجاهه ولم تحدد نقطة تأثيره.

مثال: الشعاع $\vec{V}$ المحمول على المحور (xx') .



ج)-<u>**الشعاع المقيد**</u> : هو كل شعاع حدد حامله ،اتجاهه و نقطة تأثيره.

مثال: الشعاع $\overrightarrow{AB}$ على المحور(xx').



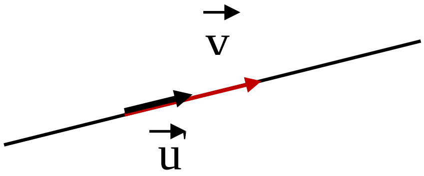
II – 2 -2 <u>شعاع الوحدة</u> : « Vecteur Unitaire »

كل شعاع يكتب على شكل طويلة هذا الشعاع في شعاع وحدته :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\|.\vec{u}$$

الشعاع $\vec{u}$ موازي للشعاع $\vec{V}$ و طويلته تساوي الواحد : $\|\vec{u}\| = 1$

مثال: $\vec{V} = 2\vec{u}$



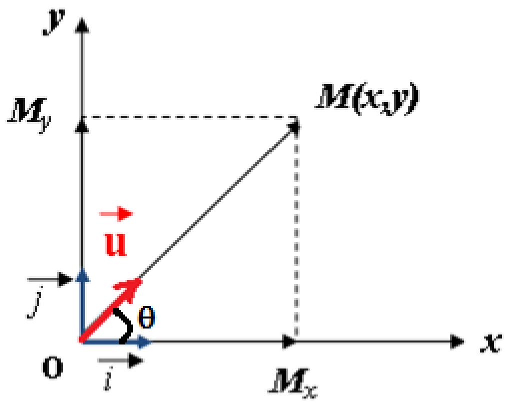
II – 2 -3 مركبات شعاع :

*** في المستوى :**

لتكن النقطة M معرفة في معلم (O, x ,y) المزود بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ وضعية النقطة M في المستوي (Oxy) معرفة بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ حيث :

M_x :هو إسقاط النقطة M على المحور (Ox).

M_y :هو إسقاط النقطة M على المحور (Oy).



$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} OM_x \\ OM_y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_x} = OM_x\,\vec{\imath} = OM\cos\theta\vec{\imath} \\ \overrightarrow{OM_y} = OM_y\,\vec{\jmath} = OM\sin\theta\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = \mathrm{OM}\cos\theta\vec{\imath} + OM\sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{OM} = \mathrm{OM}(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \\ \overrightarrow{OM} = \mathrm{OM}\,\vec{u} \end{cases}$$

من هنا نستنتج : $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$

حيث $\vec{u}$ هو شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$.

***في الفضاء :**

يمكن تمثيل النقطة M في معلم ثلاثي الأبعاد المعرف بـ (O,x,y,z) المزود بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ حيث تعرف النقطة M بالشعاع $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

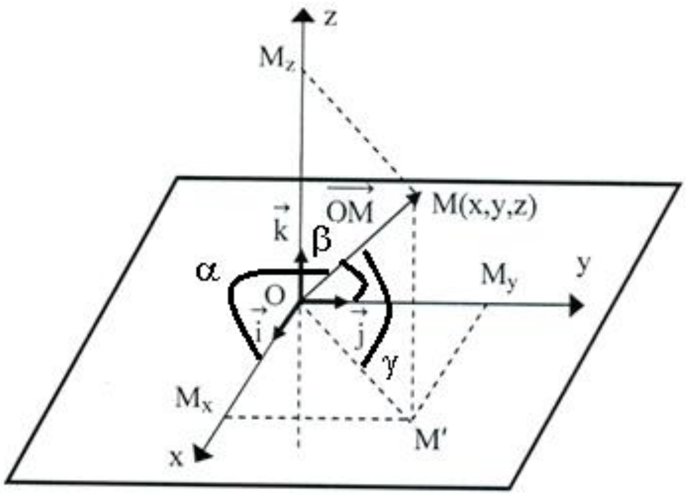
M_x , M_y, M_z هي إسقاطات النقطة M على المحاور Ox, Oy, Oz.

M′ : هي إسقاط النقطة M في المعلم (O,x,y).

نلاحظ من الرسم أن :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_z} + \overrightarrow{OM'}$ ولدينا : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_x} = OM\cos\alpha\,\vec{i} \\ \overrightarrow{OM_y} = OM\cos\beta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OM_z} = OM\cos\gamma\,\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = \mathrm{OM}\,(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}) \\ \overrightarrow{OM} = OM\,\vec{u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

تمثل $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ جيوب التمام الموجهة أو جيوب الإتجاه لحامل $\overrightarrow{OM}$ في المعلم (O,x,y,z) تحقق العلاقة: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

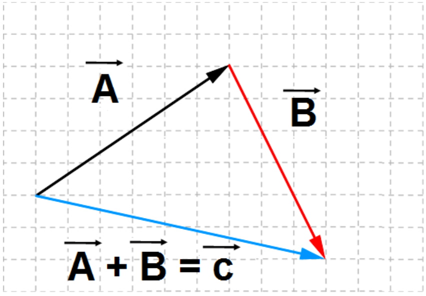
- طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{{OM_x}^2 + {OM_y}^2 + {OM_z}^2}$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(M_x - 0)^2 + (M_y - 0)^2 + (M_z - 0)^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\ .$$

II– 3 العمليات على الأشعة :

II – 1-3 جمـــــع الأشعة

II – 1-1-3 جمـــــع شعاعين :



أ)-الطريقة الهندسية :

جمع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو الشعاع $\vec{C}$ حيث : $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

نتحصل على الشعاع $\vec{C}$ بتطبيق قاعدة توازي الأضلاع.

ب)-الطريقة التحليلية :

تعطي عبارتي الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

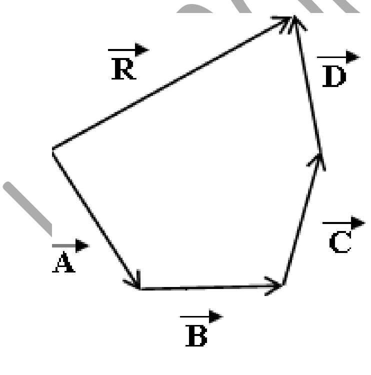
$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} \\ \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} \end{cases}, \qquad \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} = \underbrace{(A_x + B_x)}_{C_x}\vec{\imath} + \underbrace{(A_y + B_y)}_{C_y}\vec{\jmath}$$

$$\vec{C} = C_x\vec{\imath} + C_y\vec{\jmath}$$

II – 1-3-2- جمـــــع عدة أشعة :

عندما يكون الجمع لأكثر من شعاعين نستعمل الطريقة الهندسية التي تتطلب ربط الأشعة بحيث تكون نهاية الشعاع الأول بداية الشعاع الثاني وهكذا إلى آخر شعاع. ثم يتم ربط من أول شعاع إلى آخر شعاع.



مثال:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

II – 3-1-3 خصائص الجمع في الأشعة :

- تبديلي : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- تجميعي : $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

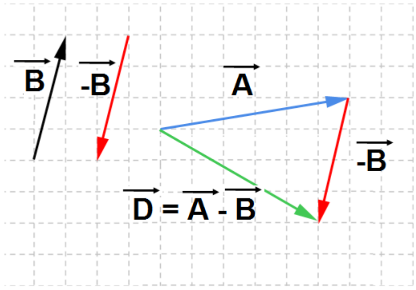
- العنصر الحيادي في عملية الجمع هو الشعاع المعدوم $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$.
- $\|\vec{A}+\vec{B}\| \neq \|\vec{A}\|+\|\vec{B}\|$.

II – 2-3 طـــــــرح الأشعة

II – 1-2-3 طـــــــرح شعاعين :

أ)-الطريقة الهندسية :

هندسيا يمثل الشعاع $\vec{D}$ الطرح بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث: $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ إن طرح الشعاع $\vec{B}$ من الشعاع $\vec{A}$ هو نفسه جمع الشعاعين $\vec{A}$ و $-\vec{B}$



ب)-الطريقة التحليلية :

تعطى مركبة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في معلم ثنائي الأبعاد بما يلي :

$$\begin{cases}\vec{A}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}\\ \vec{B}=B_x\vec{\imath}+B_y\vec{\jmath}\end{cases}$$

فإن الشعاع $\vec{D}$ يكتب على الشكل $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$

$$\vec{D}=(A_x-B_x)\vec{\imath}+(A_y-B_y)\vec{\jmath}$$

الطرح في الأشعة عملية ليست تبديلية أي أن : $\vec{A}-\vec{B}\neq\vec{B}-\vec{A}$

II– 3-3 ضرب شعاع بعدد حقيقي :

ليكن الشعاع $\vec{B}$ حيث : $\vec{B}=\lambda\vec{A}$.

- إذا كانت $\lambda>0$: موجبة ← $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لهما نفس الإتجاه .
- إذا كانت $\lambda<0$: سالبة ← $\vec{A}$ و $\vec{B}$ مختلفتان في الإتجاه .
- طويلة الشعاع $\vec{B}$ تكتب : $\|\vec{B}\|=\|\lambda\|\|\vec{A}\|$.

- حامله هو حامل الشعاع $\vec{A}$.

- خصائصه : $\lambda\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$

$$(\lambda+\beta)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\beta\vec{A}$$

II -4 الجداء السلمـــــــي : Produit scalaire

II-4-1 : تعريـــــــف :

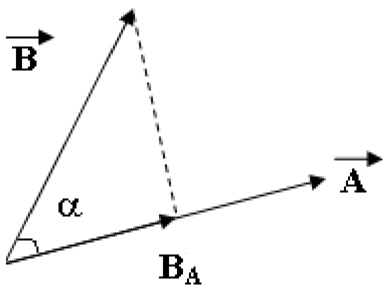
نعرف الجداء السلمي بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالمقدار السلمي :

$$\vec{A}\,.\,\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos\alpha$$

$\alpha(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$: هي الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

نتيجة الجداء السلمي هو قيمة سلمية (عدد حقيقي).

II-4-2 الشكل الهندسي للجداء السلمي:



يكتب الجداء السلمي بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بـ:

$$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\underbrace{\|\vec{B}\|.\cos\alpha}_{\|\overrightarrow{B_A}\|}$$

$\|\overrightarrow{B_A}\|$ هو إسقاط الشعاع $\vec{B}$ على الشعاع $\vec{A}$

$$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\overrightarrow{B_A}\|$$

*إذن الجداء السلمي لشعاعين يساوي جداء طويلة أحد الشعاعين في إسقاط طويلة الشعاع الآخر على حامل هذا الشعاع.

II-4-3 العبارة التحليلية للجداء السلمي :

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعان معرفان في القاعدة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ حيث:

$$\begin{cases}\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\\ \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\end{cases} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}\right).\left(B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\jmath} + B_z\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$$

حيث: $\vec{\imath}\,.\vec{\imath} = \vec{\jmath}\,.\vec{\jmath} = \vec{k}\,.\vec{k} = 1$

$$\vec{\imath}\,.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\,.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$$

4-4-II <u>خصائص الجداء السلمي</u>:

- تبديلي : $\vec{A}\,.\vec{B} = \vec{B}\,.\vec{A}$
- توزيعي بالنسبة للجمع $\left(\vec{A} + \vec{B}\right).\vec{C} = \vec{A}\,.\vec{C} + \vec{B}\,.\vec{C}$
- خطي : $\left(\alpha\vec{A}\right).\left(\beta\vec{B}\right) = (\alpha.\beta).(\vec{A}.\vec{B})$
- خاصية تعامد وتوازي شعاعين :

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \alpha\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{A} /\!/ \vec{B} \Rightarrow \alpha\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = A.B$$

5-4-II <u>تطبيقات الجداء السلمي في الهندسة</u>:

*إيجاد الزاوية α بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

لدينا : $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\,.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\,.\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

<u>مثال :</u>

احسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث :

$$\vec{B} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} \quad , \quad \vec{A} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$$

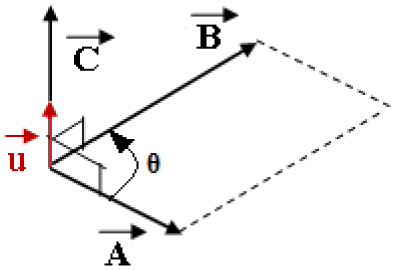
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{11} \ ,$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{8}{\sqrt{11}.\sqrt{26}} \Rightarrow \alpha = 61.76\,° .$$

5-II الجداء الشعاعي: Produit Vectoriel

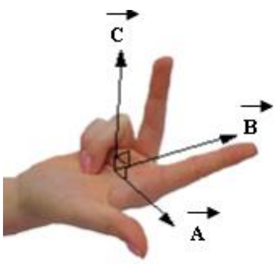
1-5-II : تعريـــــــف :



الجداء الشعاعي لـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو الشعاع $\vec{C}$ حيث: $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

$\vec{C} \perp \vec{A}$ و $\vec{C} \perp \vec{B}$ أي أن $\vec{C}$ عموديا على المستوي $(\vec{A}, \vec{B})$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| . \|\vec{B}\| . \sin\theta \, \vec{u}$$

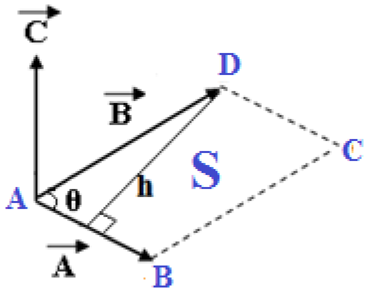


حيث $\vec{u}$ شعاع وحدة و يكون عمودي على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في نفس الوقت.

θ $(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

اتجاه الشعاع $\vec{C}$ يحدد بتطبيق قاعدة اليد اليمنى (الإبهام يشير الى $\vec{C}$).

2-5- II الشكل الهندسي للجداء الشعاعي :

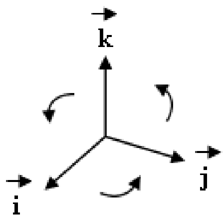


$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|.\underbrace{\|\vec{B}\| . \sin\theta}_{h}$$

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|.h = S_{abcd}$$

حيث:

S_{abcd} : هي مساحة متوازي الإضلاع المتكون من الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$



ملاحظة :

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$,   (خاصية التبديل الدائري) .

II -5-3 العبارة التحليلية للجداء الشعاعي :

نفرض أن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعان معرفان في القاعدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ليكن $\vec{C}$ هو الجداء الشعاعي بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{C} = \underbrace{(A_y\, B_z - B_y\, A_z)}_{C_x}\, \vec{i} - \underbrace{(A_x B_z - B_x\, A_z)}_{C_y}\, \vec{j} + \underbrace{(A_x B_y - B_x\, A_y)}_{C_z}\, \vec{k}$$

II-5-4 خصائص الجداء الشعاعي :

- تبديلي مضاد: $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- توزيعي بالنسبة للجمع $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{C})$
- غير تجميعي : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$
- الخاصية الخطية: $(\alpha\vec{A}) \wedge (\beta\vec{B}) = (\alpha.\beta).(\vec{A} \wedge \vec{B})$
- خاصية تعامد وتوازي شعاعين :

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \theta(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = A\,.\,B$$

$$\vec{A} /\!/ \vec{B} \Rightarrow \theta(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0 \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

II-5-5 – تطبيقات الجداء الشعاعي في الهندسة :

يستعمل الجداء الشعاعي في :

- حساب مساحة متوازي الأضلاع ABDC من خلال حساب $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|$.

- حساب مساحة المثلث ABD من خلال حساب $1/2.\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right|$

- إيجاد معادلة مستقيم (Δ) يمر بنقطتين A و B لمستوي Oxy اذا كانت النقطة $M \in (\Delta)$

اذن : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

مثال :

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k} \text{ و } \vec{B} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

أ- ما هي العلاقة بين x, y و z حتى يكون $\vec{A} \perp \vec{B}$ و $\vec{A} /\!/ \vec{B}$.

ب- ما هي قيم x, y و z حتى يكون $\vec{B}$ شعاع وحدة للشعاع $\vec{A}$.

الإجابة

أ-
$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0 \;\Rightarrow 2x + 3y - z = 0$$

$$\vec{A} /\!/ \vec{B} \;\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \;\Rightarrow\; (3z + y)\vec{\imath} + (-x - 2z)\vec{\jmath} + (2y - 3x)\,\vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 3z + y = 0 \\ -x - 2z = 0 \\ 2y - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow -6z = 2y = 3x$$

ب- $\vec{B}$ شعاع وحدة للشعاع $\vec{A}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad y = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad z = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

II -6- الجـــــــداء المختلط : Le Produit mixte

II -6-1 : تعريـــــــف :

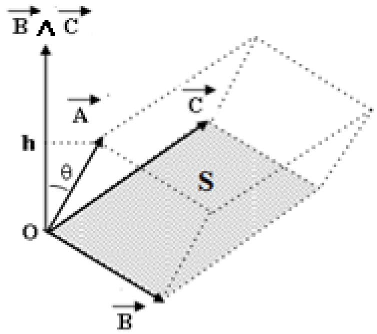
لتكن الأشعة $\vec{A}, \vec{B}$ و $\vec{C}$ معرفة في القاعدة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ الجداء المختلط لهذه الأشعة الثلاثة هو القيمة السلمية a حيث :

$$a = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$$

الجداء المختلط عبارة عن الجداء السلمي لأحد الأشعة مع الجداء الشعاعي للشعاعين الأخريين. هنا الترتيب مهم في الأشعة لذلك نعبر عن الجداء المختلط كذلك بـ : $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$

نتيجة الجداء المختلط هو قيمة سلمية.

II-6-2 الشكل الهندسي للجداء المختلط:



$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\wedge\vec{C}\|.\cos\theta$$

$S=\|\vec{B}\wedge\vec{C}\|$: مساحة القاعدة

$h=\|\vec{A}\|\cos\theta$: الإرتفاع

$V=S.h=\|\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})\|$.

V: هو حجم متوازي السطوح.

II -6-3 خصائص الجداء المختلط:

- التبديل الدائري : $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\wedge\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B})$
- يمكن كتابة : $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\wedge\vec{B}).\vec{C}$
- يكون الجداء المختلط معدوما إذا كان أحد الأشعة معدوم ($\vec{A}$, $\vec{B}$ أو $\vec{C}$).
- اذا كانت الأشعة $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ تنتمي الى نفس المستوى (ليس هنالك حجم).

II-7- الجـــــــداء الشعاعي المضاعف :

II-7-1 : تعريـــــــف :

$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ ثلاث أشعة معرفة في القاعدة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ يكتب الجداء الشعاعي المضاعف كما يلي :

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\vec{B}.\left(\vec{A}.\vec{C}\right)-\vec{C}.\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

II -8- إشتقاق الأشعـــــة :

II -8-1 تعريـــــــف :

ليكن $\vec{V}$ (t) شعاع يتعلق بالزمن، في هذه الحالة يمكن اشتقاق $\vec{V}$ بالنسبة للزمن t :

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

حيث :

$$\frac{dV_x}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V_x}(t+\Delta t) - \vec{V_x}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V_y}(t+\Delta t) - \vec{V_y}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V_z}(t+\Delta t) - \vec{V_z}(t)}{\Delta t}$$

2-8-II خصائص الإشتقاق :

- $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{dt} + \frac{d\vec{V}_2}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{V}) = \lambda\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\vec{V}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{V_1}.\vec{V_2}) = \vec{V}_1\frac{d}{dt}\vec{V_2} + \vec{V_2}\frac{d}{dt}\vec{V_1}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt}\wedge\vec{V_2} + \vec{V_1}\wedge\frac{d\vec{V_2}}{dt}$

II -9 جمل الإحداثيات :

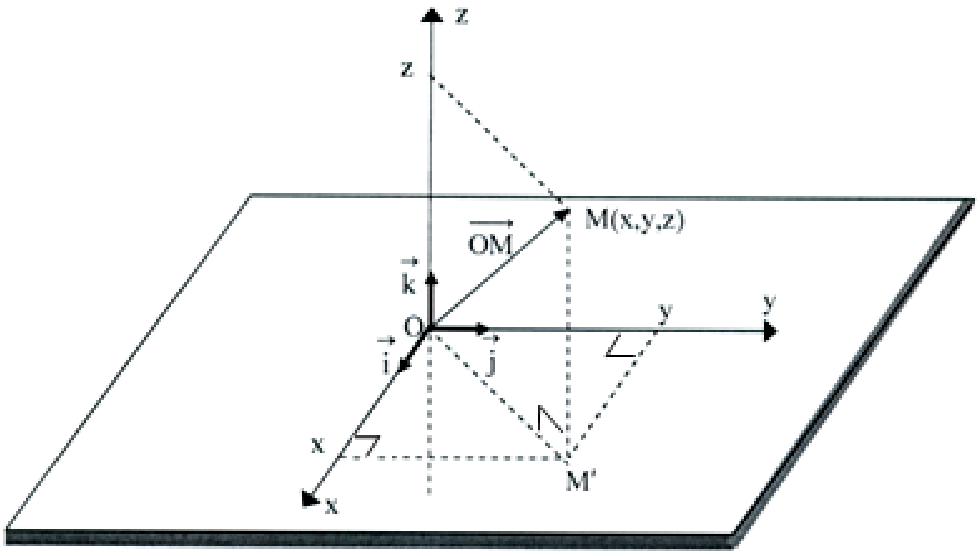
II -9-1 الإحداثيات الديكارتيـــــة : « Coordonnées cartésiennes »

لتكن M نقطة في معلم ثلاثي الأبعاد (O, X, Y, Z) المزود بالقاعدة المتعامدة والمتجانسة والمباشرة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. (x, y, z) هي الإحداثيات الديكارتية للنقطة M وفي نفس الوقت هي الإسقاطات العمودية على المحاور Oz, Oy, Ox كذلك هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{OM}$ بحيث:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$:

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



II -9-2 الإحداثيات القطبية : "Coordonnées polaires"

- في الإحداثيات القطبية ، وضعية النقطة M معرفة بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ ذات الطويلة ρ(t) وبواسطة الزاوية القطبية $\theta(t)$ التي تتغير بدلالة الزمن t إذن النقطة M معرفة بـــ:

$M(\rho, \theta)$ في القاعدة القطبية $(\vec{U}_\rho\ , \vec{U}_\theta)$ حيث:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho$$

عبارة $(\vec{U}_\rho\ , \vec{U}_\theta)$ في المعلم $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\,(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) \\ \overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho \Rightarrow \rho = \|\overrightarrow{OM}\| \end{cases} \Rightarrow \vec{U}_\rho = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) \Rightarrow \boxed{\vec{U}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}}$$

<u>عبارة (ρ, θ) بدلالة (x, y) :</u>

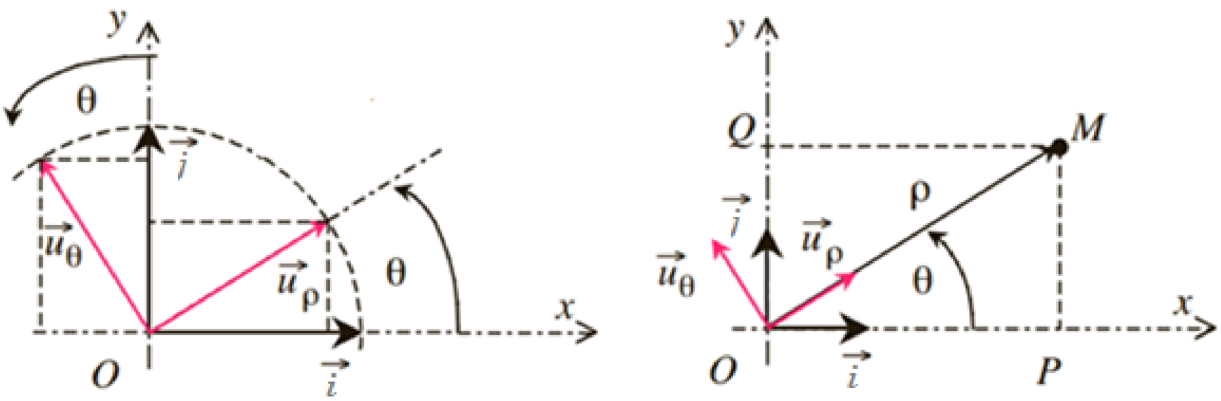
يمكن تحديد مركبات $M(\rho,\theta)$ في القاعدة الكارتيزية حيث :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad ,(\rho \geq 0)$$

$$x = \rho\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \theta = Arc\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \;, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$y = \rho\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \theta = Arc\sin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ أو

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = Arc\,\text{tg}\,\frac{y}{x}$$ أو



<u>مثال :</u>

- أوجدالإحداثيات الديكارتية للنقطة : $M_1\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$

للانتقال من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية أي:$(x,y) \leftarrow (\rho,\theta)$ لدينا:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ y = \rho\sin\theta = 6\sin\frac{\pi}{6} = 6\frac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

$$M_1(3\sqrt{3},3) \leftarrow M_1\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$$

II-9-3 الإحداثيات الأسطوانية : « Coordonnées cylindriques »

نظام الإحداثيات الأسطوانية هو نظام إحداثيات قطبي ثلاثي الأبعاد حيث يتم تمثيل نقطة M في نظام الإحداثيات الأسطوانية بالثلاثية $M(\rho,\theta,z)$ في القاعدة $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k})$.

يعبر عن النقطة M باستخدام مصطلحات النظام الديكارتي كما يلي:

ρ : البعد عن المحور Oz , $(\rho \geq 0)$.

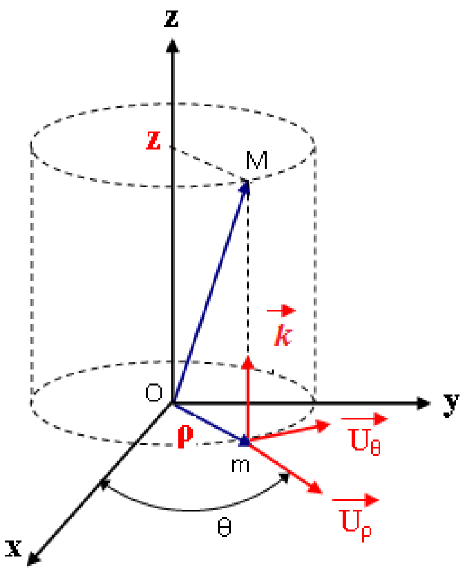
θ : زاوية الدوران حول المحور Oz, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

z: هو المسافة ذات الإشارة (الموجبة أو السالبة) بين المستوي Oxy و النقطة M $(-\infty \leq z \leq +\infty)$.

- يكتب شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ كما يلي :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{U_\rho} + z\,\vec{k}$$



عبارة $M(\rho,\theta,z)$ في المعلم الكارتيزي :

$$M\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = Arc\cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \theta = Arc\sin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \theta = Arc\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

ملاحظة : القاعدة $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k})$ متعامدة متجانسة ومباشرة حيث : $\vec{k} = \vec{U}_\rho \wedge \vec{U}_\theta$

حيث : القاعدة الأسطوانية متعامدة و متجانسة ومباشرة.

$$\begin{cases} \vec{U}_\rho = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{U}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

<u>مثال:</u>

أوجدالإحداثيات الأسطوانية للنقطة : $M(2,3,1)$-

للانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الأسطوانية أي: $(\rho,\theta,z) \leftarrow (x,y,z)$

لدينا:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\theta = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 56.30°$$

$$z = 1$$

$$M(\sqrt{13}, 56.30°, 1) \leftarrow M(2,3,1)$$

II -4-9 <u>الإحداثيات الكـــــــروية</u> : « Les coordonnées Sphériques »

يُحدد موضع النقطة المادية M في الإحداثيات الكروية بالتوابع السلمية (r,θ,φ) و تكتب المقادير الشعاعية وفق اتجاهات أشعة الوحدة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$.

يكتب شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية كما يلي :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

m هواسقاط M في المستوى Oxy .

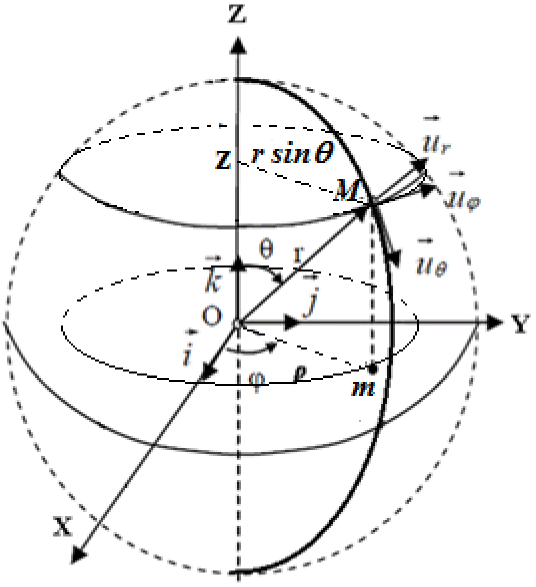
$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{Om}\|^2 + \|\overrightarrow{mM}\|^2 = \rho^2 + z^2$$

$$r^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta\ (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}): 0 \le \theta \le \pi$$

$$\varphi\ (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}): 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$0 \leq r \leq \infty$



$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

علما ان : $\rho = r\sin\theta$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

- إيجاد (r,θ,φ) في المعلم الديكارتي (O,X,Y,Z)

$$z = r\cos\theta\ , \quad x = \rho\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \pm Arc\cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\ Arc\ \text{tg}\ \dfrac{y}{x} \\ \theta = \mp\ Arc\cos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm\ Arc\ tg\dfrac{\rho}{z} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$ ....لدينا كذلك

أشعة الوحدة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ بدلالة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

عبارة $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الكروية : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{U}_r$

عبارة $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الكارتيزية : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

حيث :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r \Rightarrow \vec{U}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

$$\vec{U}_r = \frac{r\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + r\ \sin\theta\ sin\varphi\ \vec{\jmath} + r\cos\theta\ \vec{k}}{r}$$

$$\vec{U}_r = \ \sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \ \sin\theta\ sin\varphi\ \vec{\jmath} + \cos\theta\ \vec{k}$$

بما أن $\vec{U}_r \perp \vec{U}_\theta$:

- يكفي اضافة $\frac{\pi}{2}$ الى θ لإيجـــاد $\vec{U}_\theta$

$$\vec{U}_\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{k}$$

$$\vec{U}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi)\,\vec{\imath} + \ \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

- نحصل على $\vec{U}_\varphi$ بـ: $\vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta$

$$\vec{U}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

نلاحظ بالفعل أن القاعدة مباشرة.

<u>مثال :</u>

- أوجدالإحداثيات الكارتيزية للنقطة : $M\left(5,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$

للانتقال من الإحداثيات الكروية إلى الإحداثيات الكارتيزية أي:

$$(x,y,z) \leftarrow (r,\theta,\varphi)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi = 5\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = 5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = r\sin\theta\sin\varphi = 5\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = 5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ z = 5\cos\frac{\pi}{6} = 5\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$M\left(5\frac{\sqrt{2}}{4}, 5\frac{\sqrt{2}}{4}, 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leftarrow M\left(5,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$$

10-II الإنتقالات العنصرية في جمل الإحداثيات :

1-10-IIالإحداثيات الديكارتية :

عبارة عن ثلاثية مباشرة متعامدة و متجانسة نرمز للإحداثيات الكارتيزية بالمقادير (x, y, z) والمبدأ عادة بــ O مزود بأشعة الوحدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ إحداثيات النقطة M في الفضاء تعطـــــــى بدلالة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث :

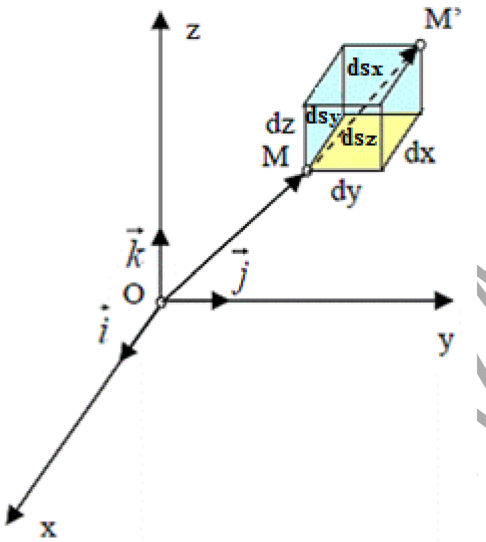
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

في الإحداثيات الكارتيزية الانتقال المتناهي في الصغر يمكن تحليله إلى ثلاثة انتقالات صغيرة جدًا وفق أشعة الوحدة حيث يكون انتقال النقطة M خلال زمن عنصري dt كما يلي :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

اي أن الإنتقال يكون على المحاور الثلاثة .

و الطول العنصري هو $\|\overrightarrow{dr}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$



المساحة العنصرية :

$$dS_x = dy.dz,\ \ dS_y = dx.dz,\ \ dS_z = dx.dy$$

الحجم العنصري :

$$dv = dx.dy.dz$$

2-10-II الإحداثيات القطبيـــــــة :

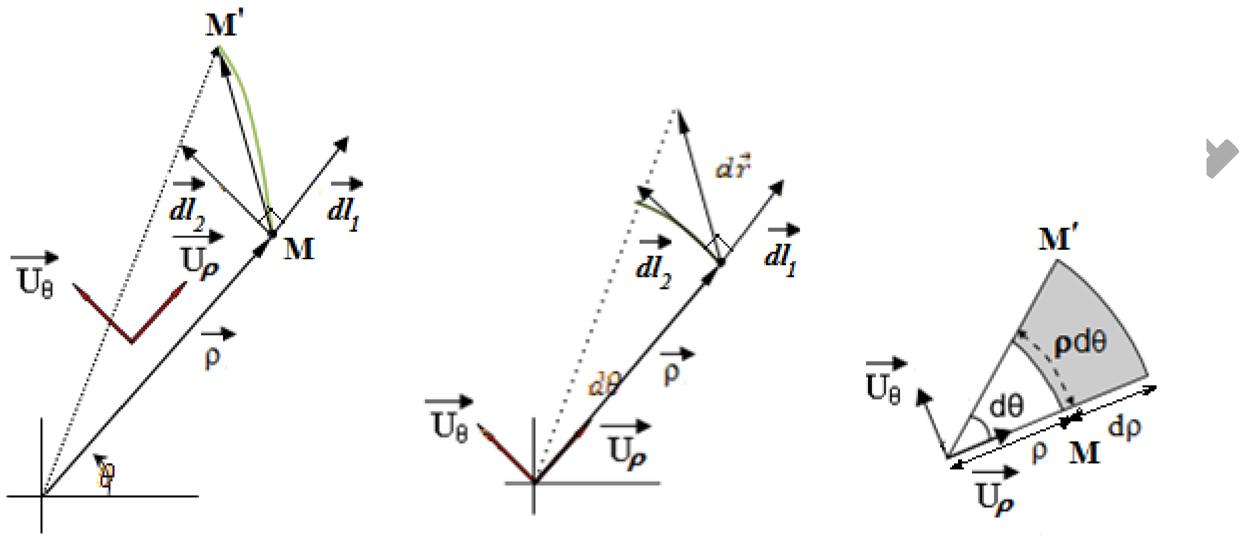
عندما تتم الحركة في مستوي، فإن تعيين موضع المتحرك M في الإحداثيات الكارتيزية يستدعي بعدين $x(t)$ و $y(t)$ مثلاً. لكن في بعض الحالات و لتبسيط الحساب نفضل استعمال المعلم القطبي وهو معلم إحداثياته $(\rho(t)\,, \theta(t))$ تُدعى الإحداثيات القطبية وأشعة وحدته $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$.

لتكن النقطة $M\ (\rho\ , \theta)$ معرفة في القاعدة القطبية $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$ حيث يكتب شعاع الموضع :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{U}_\rho$$

*- الانتقال العنصري في الإحداثيات القطبية يكافئ مجموع انتقاليين عنصريين متعامدين فيما بينهما أحدهما قطري و الآخر عرضي.

$$d\vec{r} = \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'}$$



$$d\vec{r} = dl_1\vec{U}_\rho + dl_2\vec{U}_\theta$$

الانتقال القطري $\overrightarrow{dl_1}$: هو انتقال ناتج عن تغير ρ في الطول بالمقدار $d\rho$ مع ثبات الزاوية θ فهو وفق اتجاه $\vec{U}_\rho$.

$$\overrightarrow{dl_1} = d\rho\,\vec{U}_\rho$$

الانتقال العرضي $\overrightarrow{dl_2}$: هو انتقال ناتج عن تغير $\vec{\rho}$ في الاتجاه بسبب تغير الزاوية θ بالمقدار $d\theta$ مع ثبات الطول ρ و التغير في هذه الحالة يتم وفق دائرة نصف قطرها ρ بإزاحة عنصرية $dl_2 = \rho d\theta$ محمولة على $\vec{U}_\theta$.

$$\overrightarrow{dl_2} = \rho d\theta\,\vec{U}_\theta$$

- أما الانتقال العنصري الكلي فهو المجموع:

$$d\vec{r} = \overrightarrow{dOM} = d\rho\,\vec{U}_\rho + \rho d\theta\vec{U}_\theta$$

طول الانتقال العنصري

$$\left\|\overrightarrow{dr}\right\| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}$$

مثال :

- أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها R.

الإجابة

– محيط الدائرة : $dl = \int_0^{2\pi} R\, d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow l = 2\pi R$

- مساحة الدائرة : $dS = \rho d\rho\, d\theta$

$$S = \int_0^R \rho\ d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \ \Rightarrow\ S = \pi R^2$$

II-10-3. الإحداثيات الأسطوانية :

$M(\rho,\theta,z)$ معرفة في المعلم $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$, يكتب شعاع الموضع كما يلي :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}$$

الانتقال العنصري في الإحداثيات الاسطوانية يكافئ مجموع ثلاثة انتقالات عنصرية متعامدة في الاتجاهات الثلاث $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$.

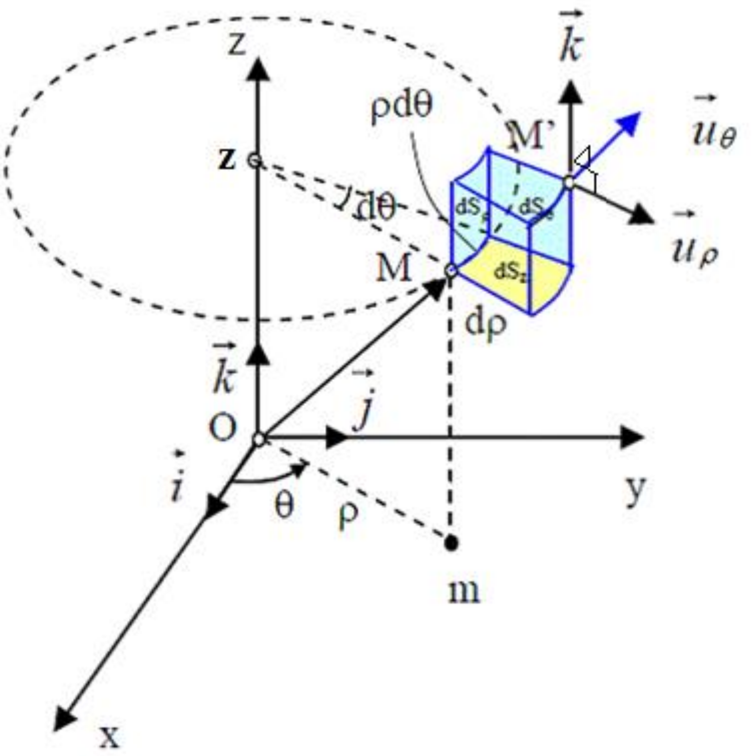
يكون انتقال M العنصري في القاعدة $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ بالتغيير في كل من :

$$\rho \to d\rho, \quad \theta \to \rho d\theta, \qquad z \to dz$$

انتقال الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في المعلم $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ يكون كما يلي :

$$\overrightarrow{dOM} = d\vec{r} = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\theta\, \vec{U}_\theta + dz\,\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{dr}\| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$



مثال:

- أحسب باستعمال الإحداثيات الأسطوانية المساحة الجانبية و حجم الاسطوانة للاسطوانة نصف قطرها R.

الإجابة

* المساحة الجانبية للاسطوانة

$$dS = Rd\theta dz \Rightarrow S = \iint Rd\theta dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h} dz$$

$$\Rightarrow S = 2\pi Rh$$

* حجم الأسطوانية

$$dV = \rho d\rho d\theta dz \Rightarrow V = \iiint \rho d\rho d\theta dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h$$

4-10-II الإحداثيات الكروية :

تعرف $M(r,\theta,\varphi)$ في القاعدة الكروية $(\vec{U}_r,\vec{U}_\theta,\vec{U}_\varphi)$ بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{U}_r$$

يكون انتقال M العنصري في القاعدة $(\vec{U}_r,\vec{U}_\theta,\vec{U}_\varphi)$ بالتغيير في كل من :

$$r \to dr, \quad \theta \to r d\theta, \qquad \varphi \to \rho d\varphi$$

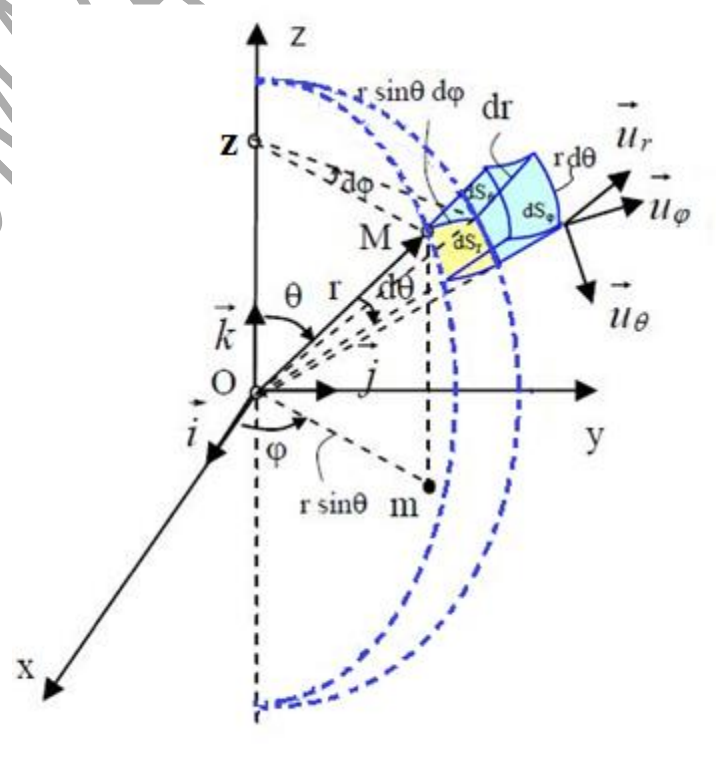
يكون انتقال M في الفضاء بالتحرك في كل الإتجاهات حيث أن شعاع الانتقال أو الإزاحة يكتب :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{U}_r + r\,d\theta\,\vec{U}_\theta + \rho d\varphi\,\vec{U}_\varphi$$

بما أن $\rho = r\sin\theta$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{U}_r + r\,d\theta\,\vec{U}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{U}_\varphi$$

$$\|\overrightarrow{dr}\| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2}$$



مثال :

احسب باستعمال الإحداثيات الكروية مساحة و حجم كرة نصف قطرها R.

الإجابة

*مساحة الكرة

$$dS = R^2 sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

$$S = \iint R^2 sin\theta \; d\theta \; d\varphi = R^2 \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [-cos\theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow S = 4\pi R^2$$

*حجم الكرة

$$dV = dr.r\, d\theta.r\, sin\theta d\varphi \Rightarrow V = \iiint r^2 dr\, sin\theta d\theta.d\varphi$$

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} sin\,\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-cos\theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

تمارين (Exercices)

تمرين 01:

- في المعلم المتعامد و المتجانس (O, X, Y, Z) ، تعطى الأشعة كمايلي:

$$\overrightarrow{V_1} = 3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}, \qquad \overrightarrow{V_2} = 2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - 4\,\vec{k}, \qquad \overrightarrow{V_3} = 5\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$$

1- أحسب طويلة كل من: $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$

2- أحسب مركبات و طويلة الأشعة: $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث:

$$\vec{B} = 2\,\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} \quad \text{و} \quad \vec{A} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$$

3- عين شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{C}$ حيث: $\vec{C} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3}$

4- أحسب الجداء السلمي لــ $\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_3}$ ثم استنتج الزاوية المحصورة بينهما.

5- أحسب الجداء الشعاعي $\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}$.

تمرين 02:

تعطى إحداثيات النقاط A, B, C, D في المعلم المتعامد و المتجانس (O, X, Y, Z) كمايلي:

$$D(-3,-3,2)\ ,\ C(-2,0,1)\ ,\ B(2,2,-2)\ ,\ A(1,-2,0)$$

1- أوجد الأشعة: $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{CD}$

2- أوجد الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ عمودي على المستوي : $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$

3- برهن أن $\overrightarrow{V_3} = \vec{\jmath} - \vec{k}$ ينتمي إلى المستوي. $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$

4- إذا كان $\overrightarrow{V_3} = X\,\overrightarrow{V_1} - Y\,\overrightarrow{V_2}$ ،أوجد (X, Y) .

تمرين 03:

في معلم متعامد و متجانس (O, X, Y, Z) نعتبر النقطتين $P(2,-1,3)$ و $Q(5,1,-1)$

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ و أعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q .

2- أوجد $\vec{U}$ شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OA}$ حيث $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$.

3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_1 , A_2 و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات (Oxy), (Oxz) و (Oyz) .

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي (Oxy) بحيث يكون:

أ -الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$.

ب -الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$.

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$.

تمرين 04:

لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ التابعة للزمن: $\vec{V}(t) = V_x(t)\,\vec{\imath} + V_y(t)\,\vec{\jmath} + V_z(t)\,\vec{k}$

1- بين في الحالة العامة أن : $\|d\vec{V}/dt\| \neq d\|\vec{V}\|/dt$ متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة $\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = \|\vec{V}\|.d\|\vec{V}\|/dt$ صحيحة مهما كانت عبارة $\vec{V}(t)$

3- إذا كانت $\|\vec{V}\| = Cst$ بين أن $\vec{V}(t) \perp d\vec{V}/dt$

4- إذا كانت عبارة الدالة $\vec{V}(t)$ من الشكل:

$$\vec{V}(t) = (3t^2 + 2)\,\vec{\imath} + (t^3 - 5)\,\vec{\jmath} - (3t^2 - 5t)\,\vec{k}$$

أ -أحسب : $\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$ و $\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2}$

ب -أحسب : $\|d\vec{V}/dt\|$ و $d\|\vec{V}\|/dt$, ماذا تلاحظ.

ج - حالة خاصة : $t = 5s$, تحقق من نتيجة السؤال السابق.

تمرين 05:

- تتحرك النقطة M على مسار معادلته في الإحداثيات القطبية من الشكل : $\rho = a.\theta$ حيث أن a ثابت موجب.

- شكل جدول تغير ρ بدلالة θ ثم أرسم هذا المسار في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$.

التمرين 06:

تكتب معادلة مسار النقطة المادية M في جملة الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة $\rho = \mathrm{Cst}$ و $z = a.\theta$ حيث أن a ثابت موجب .أرسم هذا المسار من أجل $0 \le \theta \le 4\pi$ ثم مثل أشعة الوحدة عند النقطة $(\theta_0 = 4\pi + \frac{\pi}{3})$.

حلول التمارين

حل التمرين 01:

$\overrightarrow{V_1} = 3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k},\qquad \overrightarrow{V_2} = 2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - 4\,\vec{k},\qquad \overrightarrow{V_3} = 5\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$

1- حساب طويلة الأشعة $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$:

$$\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6.40$$

$$\|\overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29} = 5.38$$

$$\|\overrightarrow{V_3}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{35} = 5.91$$

2- حساب مركبات و طويلة الأشعة: $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث:

$$\vec{B} = 2\,\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} \quad \text{و} \quad \vec{A} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$$

$\vec{A} = 10\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k} \Rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{10^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{113} = 10.63$

$\vec{B} = 9\,\vec{\imath} - 12\,\vec{\jmath} + 15\,\vec{k} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 15^2} = \sqrt{450} = 21.21$

3- تعيين شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{C}$ حيث: $\vec{C} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3}$

$$\vec{C} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} = 8\,\vec{\imath} - 5\,\vec{\jmath} + 7\,\vec{k}$$

$$\vec{C} = \|\vec{C}\|.\vec{U}_C \Rightarrow \vec{U}_C = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{8\,\vec{\imath} - 5\,\vec{\jmath} + 7\,\vec{k}}{\sqrt{64 + 25 + 49}}$$

$$\vec{U}_C = \frac{8}{\sqrt{138}}\vec{\imath} - \frac{5}{\sqrt{138}}\vec{\jmath} + \frac{7}{\sqrt{138}}\vec{k}$$

4- حساب الجداء السلمي لـ $\overrightarrow{V_1}\,.\,\overrightarrow{V_3}$

$$\overrightarrow{V_1}\,.\overrightarrow{V_3} = x_1\,x_3 + y_1\,y_3 + z_1\,z_3 \Rightarrow \overrightarrow{V_1}\,.\overrightarrow{V_3} = 15+4+12 \Rightarrow \overrightarrow{V_1}\,.\overrightarrow{V_3} = 31$$

- استنتاج الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{V_3}$ و $\overrightarrow{V_1}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{V_1}\,.\overrightarrow{V_3}}{\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_3}\|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{31}{\sqrt{41}\,.\sqrt{35}} \quad \Rightarrow \alpha = 35.08$$

5- حساب الجداء الشعاعي $\overrightarrow{V_2}\wedge\overrightarrow{V_3}$.

$$\overrightarrow{V_2}\wedge\overrightarrow{V_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_2}\wedge\overrightarrow{V_3} = (9-4)\vec{i} - (6+20)\vec{j} + (-2-15)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_2}\wedge\overrightarrow{V_3} = 5\,\vec{i} - 26\,\vec{j} - 17\,\vec{k}$$

حل التمرين 02:

1- إيجاد الأشعة: $\overrightarrow{V_2},\ \overrightarrow{V_1}$:

$$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2} \Leftarrow \vec{V} \perp \left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right) \qquad -2$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_3}.\vec{V} = 0 \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{V_3} \perp \vec{V} \Leftarrow \overrightarrow{V_3} \in \left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right) \quad -3$$

$$\overrightarrow{V_3}.\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{V_3} \in (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$$

4- إيجاد (X, Y) ..

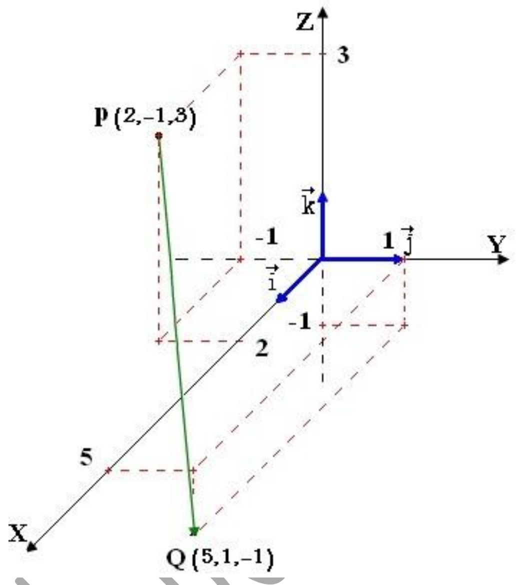
$$\overrightarrow{V_3} = X\,\overrightarrow{V_1} - Y\,\overrightarrow{V_2}$$

$$\overrightarrow{v_3} = X\,(\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}) - Y\,(-\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k})$$

$$\overrightarrow{v_3} = (X+Y)\vec{\imath} + (4X+3Y)\vec{\jmath} + (-2X-Y)\vec{k} = \vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$\begin{cases} X + Y = 0 \\ 4X + 3Y = 1 \\ -2X - Y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -Y \\ 4X + 3Y = 1 \Rightarrow X = 1 \\ Y = -1 \end{cases}$$

حل التمرين 03:



1- مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هي:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} X_Q - X_P \\ Y_Q - Y_P \\ Z_Q - Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1+1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- المسافة بين P و Q هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{PQ}$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

2-الشعاع $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$ نحصل على شعاع الوحدة $\vec{U}$ *كما يلي:*

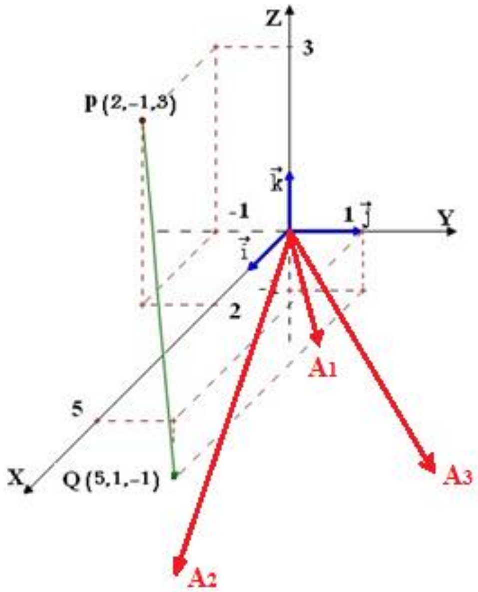
$$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} \\ -4/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

3- تكون النقاط $A_1(3,2,0)$, $A_2(3,0,-4)$ و $A_3(0,2,-4)$ وتكون الأشعة:

– $\overrightarrow{OA_1}$ يقع في المستوي (Oxy) .

– $\overrightarrow{OA_2}$ يقع في المستوي (Oxz)

– $\overrightarrow{OA_3}$ يقع في المستوي (Oyz)



4- إحداثيات النقطة $B(x, y)$

أ -الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

$$\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA_2} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}).\left(3\vec{\imath} - 4\vec{k}\right) = 3x = 0$$

أي $x = 0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (Oy).

ب -الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عمودي على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$.

$$\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA_3} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}).\left(2\vec{\jmath} - 4\vec{k}\right) = 2y = 0$$

أي $y = 0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (Ox).

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازي للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$:

$$2x - 3y = 0 \Leftarrow x/3 = y/2 \Leftarrow \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA_1} = \vec{0}$$

أي تمثل معادلة مستقيم في المستوي (Oxy) ميله $2/3$.

حل التمرين 04:

-1 $$\vec{V}(t) = V_x(t)\,\vec{\imath} + V_y(t)\,\vec{\jmath} + V_z(t)\,\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|d\vec{V}/dt\| = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2} = \frac{V_x\frac{dV_x}{dt} + V_y\frac{dV_y}{dt} + V_z\frac{dV_z}{dt}}{\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}}$$ و

- يمكن إعادة كتابة العلاقة الأخيرة من الشكل:

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}\|.\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.\cos(\vec{V}, d\vec{V}/dt)}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.\mathrm{Cos}(\vec{V}, d\vec{V}/dt)$$

- نلاحظ إذن أن : $\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \neq \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|$ و تحدث المساواة إذا كانت الزاوية $(\widehat{\vec{V}, d\vec{V}/dt}) = 0$ وهي حالة خاصة.

2- لتكن عبارة الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{V} = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|.\mathrm{Cos}\,(\vec{V},\vec{V}) = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|$

نشتقها فنجد:

$$\frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = \frac{d(\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|)}{dt} = 2\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = 2\|\vec{V}\|\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \Rightarrow \vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = \|\vec{V}\|\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

3- في حالة $\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = 0 \Leftarrow \|\vec{V}\| = \mathrm{Cst}$

و حسب العلاقة المبرهنة في (2) نجد: $\vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt} \Leftarrow \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Leftarrow$

4- لدينا: $\vec{V}(t) = (3t^2 + 2)\,\vec{\imath} + (t^3 - 5)\,\vec{\jmath} - (3t^2 - 5t)\,\vec{k}$

أ- $\frac{d\vec{V}}{dt} = (6t)\,\vec{\imath} + (3t^2)\,\vec{\jmath} - (6t - 5)\,\vec{k}$ و $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2} = 6\,\vec{\imath} + 6t\,\vec{\jmath} - 6\,\vec{k}$

ب- $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{(6t)^2 + (3t^2)^2 + (6t - 5)^2}$ و

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{d(\sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (t^3 - 5)^2 + (3t^2 - 5t)^2}}{dt}$$

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{3\,t^5 + 36\,t^3 - 60\,t^2 + 37\,t}{\sqrt{(3t^2 + 2\,)^2 + (t^3 - 5)^2 + (3t^2 - 5t\,)^2}}$$

نلاحظ أن: $\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \neq \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|$

ج -في حالة $t = 5s$ نجد أن:

$$\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{(6\times 5\,)^2 + (3\times 25)^2 + (6\times 5 - 5\,)^2} = \sqrt{7150} = 84.56$$

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{3\,(5)^5 + 36\,(5)^3 - 60\,(5)^2 + 37\,(5)}{\sqrt{(3(5)^2 + 2\,)^2 + ((5)^3 - 5)^2 + (3(5)^2 - 5(5)\,)^2}} = 83.128$$

نلاحظ الفرق بين القيمتين.

<u>حل التمرين 05 :</u>

- جدول تغير ρ بدلالة θ لمعادلة المسار $\rho = a.\theta$ في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$

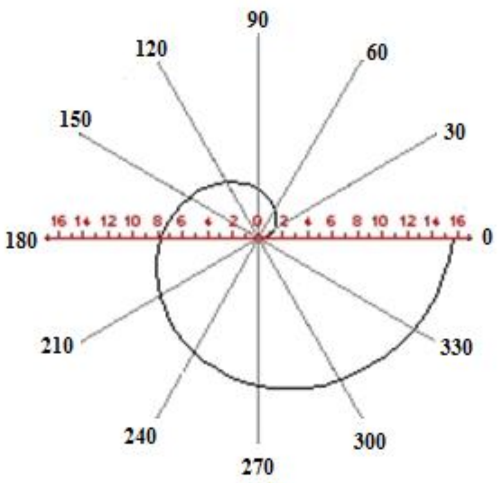
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$
ρ	0	$\frac{a\pi}{6}$	$\frac{a\pi}{4}$	$\frac{a\pi}{3}$	$\frac{a\pi}{2}$	$\frac{2a\pi}{3}$	$\frac{3a\pi}{4}$	$\frac{5a\pi}{6}$	$a\pi$	$\frac{7a\pi}{6}$	$\frac{5a\pi}{4}$

$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\frac{4a\pi}{3}$	$\frac{3a\pi}{2}$	$\frac{5a\pi}{3}$	$\frac{7a\pi}{4}$	$\frac{11a\pi}{6}$	$2a\pi$

- من الناحية العملية يجب تحديد قيمة الثابت a لكي نستطيع رسم المنحني، نأخذ مثلا $a = 2.5$

θ	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
ρ	0	1.31	2.62	3.92	5.23	6.54	7.85	9.16	10.47	11.78	13.08	14.39	15.70

- رسم المسار $\rho = a.\theta$ في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$



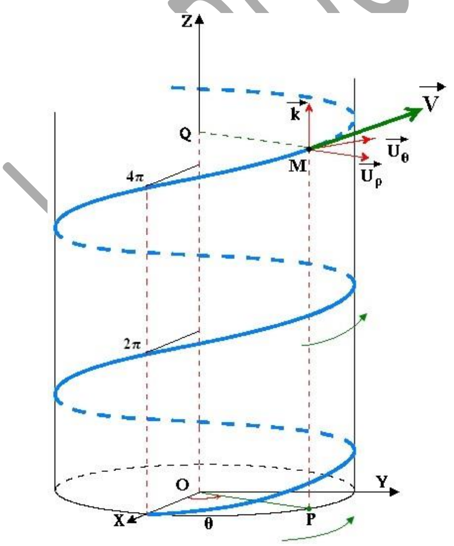
حل التمرين 06

-هنا الحركة لولبية تصاعدية منتظمة تتم على مسار منتظم متكئ على أسطوانة شاقولية محورها OZ . المسافة الشاقولية بين حلقتين متتاليتين تكون دائما ثابتة و تساوي $2a\pi$.

عند الزاوية $\theta_0 = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ تكون النقطة M

قد قامت بدورتين كاملتين و زاوية $\frac{\pi}{3}$

- نلاحظ كذلك أن السرعة تكون مائلة و تصنع زاوية معينة مع شعاع الوحدة $\vec{U}_\theta$.



الفصل الثالث:

الحركيـــــــات

الفصل الثالث -A

حركة النقطة المادية

الفصل الثالث: الحركيـــــــــــــــات

A-III حركة النقطة المادية
Cinématique du point matériel

1-A-III مقدمـــــــة :

الحركيات هو العلم الذي يدرس حركة الجسيمات دون التطرق إلى القوى التي تُسبب هذه الحركات. والنقطة المادية تُمثل الجسيم المتحرك والجسيم هو جسم طبيعي له كتلة و يُفترض أن أبعاده الطبيعية متناهية في الصغر ، فهو عبارة عن نقطة مادية لا أبعاد لها.

نتيجة لهذه الفرضية فإنه يُمكن إهمال جميع تأثيرات دوارن الجسم الذي نعتبره كجسيم حول أي محور مار منه وعلى هذا فإنه يُمكن تصور الجسم على أنه نقطة في الفراغ و يُدعى **بالنقطة المادية** و يُطلق على هذه النقطة أحيانًا إسم **المتحرك**.

بشكل خاص نهتم في هذا الفصل بدراسة حركة النقطة المادية التي تعرف كعنصر مادي ليس له أبعاد. نقول عن الجسم أنه يتحرك اذا كانت وضعيته تتغير بدلالة الزمن بالنسبة لجسم آخر.

نقوم هنا بعرض بعض المفاهيم التي ترد في هذا الفصل:

- الحركة و السكون مفهومان نسبيان: لذلك لدراسة حركة أي جسم مادي لابد من اختيار معلم أو جعله إسناد يعطينا المسافات و الأبعاد كذلك نحتاج الى مقدار حقيقي يدعى الزمن لتحديد لحظات مرور المتحرك بمختلف النقاط .
- النقطة المادية : هي أصغر جسم مادي ليس له أبعاد يحدد بإحداثياته بالنسبة الى معلم معطى يمكن اعتبارها (قطار ، طائرة ، كوكب ....).
- المسار : جملة نقاط تشغلها النقطة المادية تدريجيا خلال الزمن وقد يكون للمسار وجود مادي كالطريق الذي تتبعه السيارة وقد لا يكون له وجود مادي (مسار القذيفة) وعادة ما نعبر عن المسار بمعادلة تربط بين إحداثيات المتحرك مستقلة عن الزمن.

- الزمن : هو وسيط يعبر عنه رياضيا بواسطة متغير حقيقي موجب حيث تكون إحداثيات النقطة المادية تابعة له ونرمز له بـــ t.

هنالك فرضية في علم الفيزياء الكلاسيكي تنص على ان كل الميقاتيات (les horloges) (أدوات قياس الزمن) متواقتة (synchronisées) اي انها تعطينا نفس الزمن في معلمين مختلفين. وهذا يكون صحيح من اجل الحركات البطيئة نسبيا، اي ان سرعتها صغيرة جدا امام سرعة الضوء و إلا نلجأ الى نظرية أدق و هي نسبية انشطا ين.

III-A-2- مميزات الحركـــــــة :

لدراسة حركة الأجسام ، ينبغي على المشاهد تحديد معلم تُنسب إليه الحركة. المقصود بالمعلم هو كل مرجع أو رمز ثابت يعود إليه المراقب في تعيين الموضع ، و قد يحتاج هذا المراقب إلى ساعة لقياس الزمن حتى يتمكن من ضبط الظاهرة الفيزيائية المدروسة.

نُذكر بأن هناك العديد من نُظم الإحداثيات، والتعبير عن طبيعة حركة جسم ما قد يأخذ أشكالاً مختلفة في أنظمة الإحداثيات المختلفة. كما تكون لبعض مسائل الميكانيك تناظرات معينة تفرض علينا استعمال جملة إحداثيات خاصة لتسهيل الحساب. لذلك نتطرق إلى بعض نُظم الإحداثيات الأكثر استعمالاً في الميكانيك ومنها الإحداثيات الكارتيزية ، القطبية ، الأسطوانية ، الكروية والذاتية.

تتغير حركة النقطة المادية بثلاث مقادير شعاعية :

***شعاع الموضع.**

***شعاع السرعـة.**

***شعاع التسارع.**

III-A-3 - عبارة شعاع الموضع السرعة و التسارع في الإحداثيات الديكارتية:

1- شعاع الموضع:

يعرف موضع نقطة مادية M في لحظة t في معلم كارتيزي $R(O,X,Y,Z)$ بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

حيث : $x(t), y(t), z(t)$ هي المعادلات الزمنية للحركة.

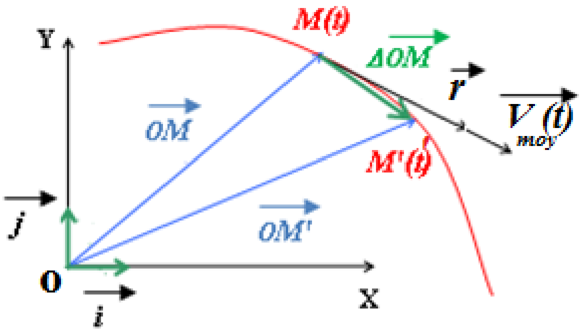
2- شعاع السرعة :

يوجد نوعين من السرعات :

أ)- شعاع السرعة المتوسطة:

السرعة المتوسطة لمتحرك بين زمنيين t و 't متعلقة بالموضعين M و 'M معرفة بالنسبة :

$$\left(\overrightarrow{V_{moy}}\right)_t^{t'} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'}(t')-\overrightarrow{OM}(t)}{t'-t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}}{\Delta t}$$

$\overrightarrow{MM'}$: شعاع الإنتقال.

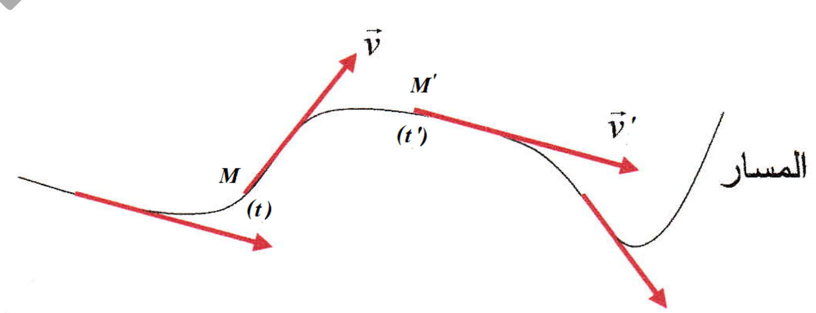
ب)- شعاع السرعة اللحظيـــة:

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t أنه مشتقة شعاع الموضع بالنسبة للزمـــــن :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$



شعاع السرعة اللحظية

- يكون شعاع السرعة مماسيا للمسار عند M اتجاهه في اتجاه الحركة. إذا كانت طويلة السرعة ثابتة نقول أن الحركة منتظمــــــة.

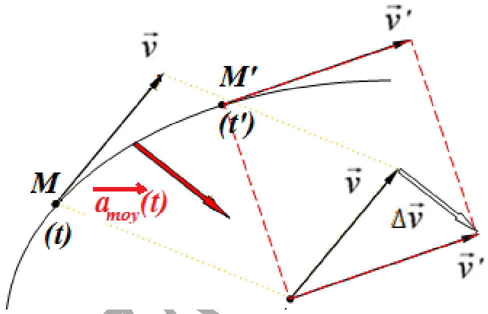
3 ـ شعاع التسارع :

يوجد نوعين من التسارعات و نرمز للتسارع ب $\vec{a}$ أو $\vec{\gamma}$.

أ) ـ شعاع التسارع المتوسط :

إذا اعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t́ المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ خلال السرعة اللحظية $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ فان شعاع التسارع المتوسط معرف كما يلي :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$



- شعاع التسارع المتوسطة $\vec{a}_{moy}$ موازي لـ $\Delta\vec{V}$ و يتجه نحو تقعر المسار.

ب)- شعاع التسارع اللحظي :

-يعرف شعاع التسارع اللحظي أنه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

- إذا كانت $\vec{a} = \vec{0}$ ← الحركة منتظمة أو ساكنة .

- $\vec{a} = \overrightarrow{Cst}$ ← الحركة متغيرة بانتظام .

- إذا كان : $\vec{a}$ و $\vec{V}$ في نفس الاتجاه ← الحركة متسارعة $(\vec{a}.\vec{V} > 0)$.

- إذا كان : $\vec{a}$ و $\vec{V}$ في اتجاهين متعاكسين ← الحركة متباطئة $(\vec{a}.\vec{V} < 0)$.

4 - معادلة المسار:

هي علاقة مكتوبة على الشكل : $f(x, y, z) = 0$

مثال: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

- هي عبارة عن كرة مركزها O ونصف قطرها R في المعلم الديكارتي (O, X, Y, Z).

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

هي معادلة دائرة نصف قطرها R و مركزها 0 في المعلم الديكارتي (O, X, Y).

مثال :

تعطى إحداثيات المتحرك M بحيث:

$$\begin{cases} x = at \\ y = at(1 - \alpha t) \end{cases}$$

a, α: ثابتان موجبان

t: الزمن

1- أوجد أشعة الموضع، السرعة و التسارع.

2- أوجد معادلة المسار و طبيعته.

الإجابة

1- شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = at \\ y = at(1 - \alpha t) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = at\,\vec{i} + at(1 - \alpha t)\vec{j}$$

شعاع السرعة:

$$\vec{V} \begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = a - 2a\alpha t \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = a\,\vec{i} + (a - 2a\alpha t)\,\vec{j}$$

شعاع التسارع :

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=-2a\alpha\end{cases}\Rightarrow\ \vec{a}=-2a\alpha\,\vec{j}$$

2- معادلة المسار و طبيعته:

$$x=at\Rightarrow t=x/a$$

$$y=at(1-\alpha t)=a\left(\frac{x}{a}\right)\left(1-\alpha\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$y=x\left(1-\alpha\frac{x}{a}\right)=x-\frac{\alpha}{a}x^2\ \Rightarrow\ \mathbf{y=-\frac{\alpha}{a}x^2+x}$$

* المسار قطع مكافئ.

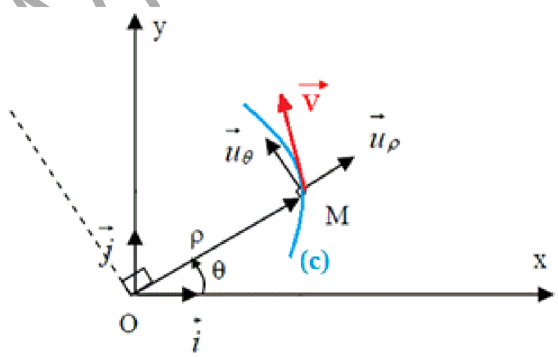
III-A- 4- عبارة شعاع الموضع السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية:

1- شعاع الموضع:

M نقطة مادية مسارها المنحنى (c) شعاع الموضع في المعلم القطبي$(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta)$ يكتب كما يلي :

$$\overrightarrow{OM}=\ \rho\,.\vec{U}_\rho$$

- هي المعادلة الزمنية للحركة في المعلم القطبي $\rho(t)$ و $\theta(t)$.



- $\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta$ هي أشعة الوحدة في المعلم القطبي حيث أن :

$$\vec{U}_\rho=\ \cos\theta\vec{\imath}+\ \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{U}_\theta=-\ \sin\theta\vec{\imath}+\cos\theta\vec{\jmath}$$

2- شعاع السرعة :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[\rho(t).\vec{U}_\rho(t)]$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt}\,\vec{U}_\rho + \rho(t)\frac{d\vec{U}_\rho\ (t)}{dt}$$

<u>نحتاج الى حساب الإشتقاق</u>:

$$\frac{d\vec{U}_\rho(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta(t)\vec{\imath} + \sin\theta(t)\vec{\jmath}\,) = -\frac{d\theta}{dt}\,sin\theta(t)\vec{\imath} + \frac{d\theta}{dt}cos\theta(t)\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{U}_\rho(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{U}_\theta} \quad ou \quad \boxed{\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{U}_\theta}$$

ومنه عبارة $\vec{V}(t)$:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{U}_\rho + \rho(t).\frac{d\theta}{dt}\,.\vec{U}_\theta$$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \rho.\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta}$$

$\dot{\theta}$: هي السرعة الزاوية للنقطة المادية M .

$V_\rho = \dot{\rho}$: المركبة القطرية لشعاع السرعة .

$V_\theta = \rho\dot{\theta}$: هي المركبة العرضية لشعاع السرعة.

- شعاع السرعة في الإحداثيات القطبية له مركبتان:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\rho}} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{\theta}}}$$

<u>3 - شعاع التسارع :</u>

لإيجـــــــــاد عبارة التسارع نشتق العبارة السابقة لشعاع السرعة.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta\right)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\,\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$$

نحتاج الى اشتقاق عبارة $\vec{U}_\theta$:

$$\vec{U}_\theta = -\sin\theta(t)\vec{\imath} + cos\theta(t)\,\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,cos\theta(t)\vec{\imath} - \frac{d\theta}{dt}sin\theta(t)\vec{\jmath} = \frac{-d\theta}{dt}(cos\theta(t)\vec{\imath} + \sin\theta(t)\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}.\vec{U}_\rho \text{ أو } \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{U}_\rho$$

إذن عبارة $\vec{a}$ (t):

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}[\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta] + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}[-\dot{\theta}\,\vec{U}_\rho]$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho$$

$$\vec{a}(t) = \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)}_{a_\rho}\vec{U}_\rho + \underbrace{(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})}_{a_\theta}\vec{U}_\theta$$

a_ρ : المركبة القطرية لشعاع التسارع.

a_θ : المركبة العرضية لشعاع التسارع.

$\ddot{\theta}$: التسارع الزاوي للنقطة M .

شعاع التسارع في الإحداثيات القطبية له مركبتان:

$$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta}$$

A-III - 5 - عبارة شعاع الموضع السرعة و التسارع في الإحداثيات الأسطوانية:

1 - شعاع الموضع:

عندما تحدث الحركة على مستوى اسطواني أو دوامة نستخدم دائما الإحداثيات الأسطوانية التي نعرفها بالنسبة للإحداثيات الديكارتية حيث يحدد موضع المتحرك M.

- إحداثياته القطبية ρ و θ لمسقط M في المستوي (Oxy).

- إحداثياته المحورية z.

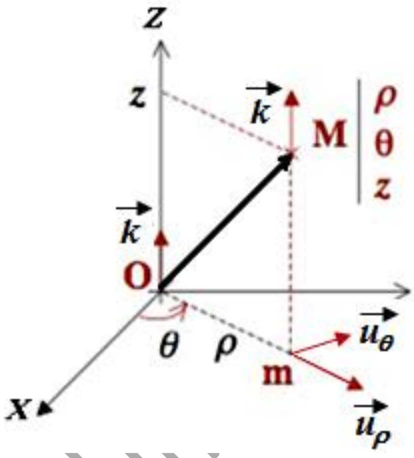
نلاحظ من هنا أن الإحداثيات الأسطوانية ما هي إلا امتداد للإحداثيات القطبية في معلم ثلاثي الأبعاد.

يعطى شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بــ:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}$$

ملاحظة:

– الشعاع $\vec{U}_\rho$ متعلق بالزمن t و هو ثابت في الطول و غير ثابت في الاتجاه.



2- شعاع السرعة :

نقوم باشتقاق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ لإيجاد شعاع السرعة $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{U}_\rho + z\vec{k})$$

$$\vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

كما لاحظنا هنا أن نصف القطر القطبي ρ هو تابع زمني، أما الشعاع $\vec{k}$ فهو ثابت عكس $\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta$ المتغيرة بدلالة الزمن.

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{V} = \vec{V}_\rho + \vec{V}_\theta + \vec{V}_z}$$

* مركبات شعاع السرعة في الإحداثيات الاسطوانية:

$V_\rho = \frac{d\rho}{dt}$: المركبة القطرية.

$V_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt}$: المركبة العرضية.

$V_z = \frac{dz}{dt}$: المركبة المحورية.

3 - شعاع التسارع :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{z}\vec{k})$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{U}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

* مركبات شعاع التسارع في الإحداثيات الاسطوانية هي:

$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$: المركبة القطرية.

$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$: المركبة العرضية.

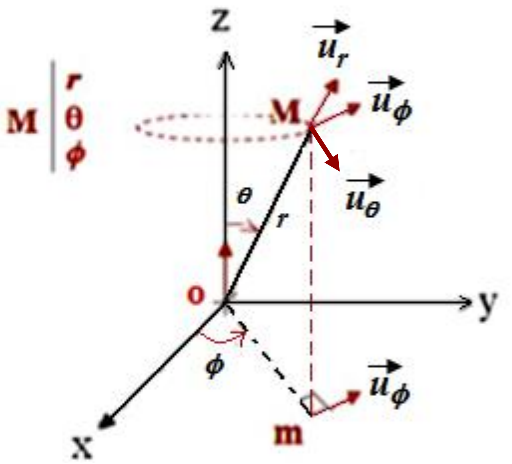
$a_z = \ddot{z}$: المركبة المحورية.

$$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z}$$

A-III - 6 - عبارة شعاع الموضع السرعة و التسارع في الإحداثيات الكروية:

1- شعاع الموضع:

$M(r, \theta, \varphi)$ نقطة في جملة الإحداثيات الكروية المرفقة بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ حيث نعرف شعاع الموضع: $\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r$



2- شعاع السرعة :

- نحصل على شعاع السرعة باشتقاق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزمن علمًا أن أشعة الوحدة $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ متعلقة بالزمن.

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{U}_r) = \dot{r}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

- نذكر بعبارات أشعة الوحدة في القاعدة الكروية $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\varphi)$ بدلالة أشعة الوحدة للمعلم الكارتيزي.

$$\begin{cases} \vec{U}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{U}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{U}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

علما أن : $\vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta$

$\theta(Oz, OM), \varphi(Ox, Om)$ تسمية الزوايا قد تختلف من مرجع إلى آخر.

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k})$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{U}_\varphi$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{U}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\vec{V} = \vec{V}_r + \overrightarrow{V_\theta} + \vec{V}_\varphi}$$

حيث : $\vec{V}_r, \overrightarrow{V_\theta}, \vec{V}_\varphi$ المركبات الكروية لشعاع السرعة .

3 - شعاع التسارع :

نشــــــــتق عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\varphi}.sin\theta\vec{U}_\varphi)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\frac{d\vec{U}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}.sin\theta\vec{U}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi$$
$$+ r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta.\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt}$$

وباستعمال اشتقاق الدوال المتعددة المتغيرات نجد :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{U}_\varphi \\ \frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{U}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{U}_\varphi \\ \frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{U}_\rho \end{cases}$$

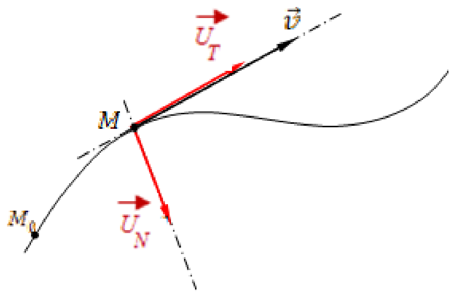
بالتعويض نجد :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\dot{\varphi}\sin\theta)^2\right)\vec{U}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{U}_\theta +$$
$$(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\,sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\,cos\theta)\vec{U}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{a}_r + \overrightarrow{a_\theta} + \vec{a}_\varphi}$$

حيث : $\vec{a}_r, \overrightarrow{a_\theta}, \vec{a}_\varphi$ المركبات الكروية لشعاع التسارع $\vec{a}$.

A-III - 7 - الحركة المنحنية و الإحداثيات الذاتية :



تمثل الإحداثيات الذاتية في معلمٍ متعامد مرتبط بالمتحرك أحد محاوره موازية لشعاع السرعة وفق اتجاه الحركة و هو المحور المماسي وشعاع وحدته $\vec{U}_T$ و الآخر عمودي عليه و موجّه داخل الانحناء وشعاع وحدته $\vec{U}_N$.

يمكن لنا تحديد موضع المتحرك على المسار نفسه بما نسميه : الفاصلة المنحنية.

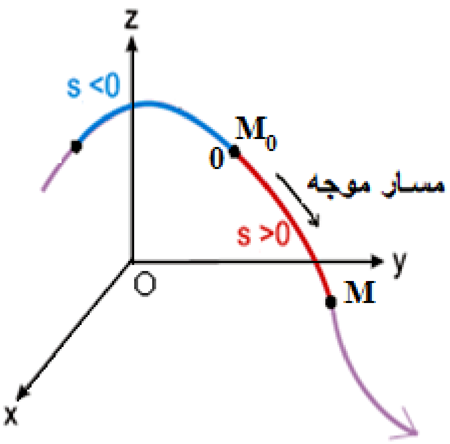
* يوجه المسار بكيفية اختيارية (الاتجاه الموجب هو جهة الحركة).

*نختار نقطة ثابتة M_0 كبداية على المسار S.

- تعرف الإحداثية المنحنية بأنها المقدار الجبري S للقوس المنتمي للمسار من M_0 الى M.

$$S = S(t) = \widehat{MoM}\ (t)$$

كما تمثل هذه العبارة المعادلة الزمنية للحركة.



*السرعة المتوسطة : $\overrightarrow{V_{moy}} = \dfrac{S(t') - S(t)}{t' - t} = \dfrac{\widehat{MM'}}{t' - t} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

*طويلة السرعة اللحظيـــــــــة : $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{dS}{dt} = \dot{S}$

*شعاع السرعة اللحظيـــــــــة : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dS} \cdot \dfrac{dS}{dt}$

حيث:

$\dfrac{dS}{dt} = \dot{S} = V$: شدة السرعة اللحظيـــــــة

$\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dS} = \vec{U}_T$: شعاع الوحدة المماسي في اتجاه الحركة .

$$\vec{V} = \|\vec{V}\| . \vec{U}_T = \frac{dS}{dt} . \vec{U}_T$$

***شعاع التسارع اللحظي :** $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\|\vec{V}\| . \vec{U}_T\right) = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} . \vec{U}_T + \|\vec{V}\| \frac{d\vec{U_T}}{dt}$

$$\frac{d\vec{U}_T}{dt} = \frac{d\vec{U}_T}{d\theta} . \frac{d\theta}{dt} = \vec{U}_N . \frac{V}{R}$$

$$\vec{a} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} \vec{U}_T + \frac{V^2}{R} \vec{U}_N$$

$\vec{U}_N$: شعاع الوحدة الناظمي في اتجاه تقعر المسار.

نسمي المعلم $(\vec{U}_T, \vec{U}_N)$ المعلم الذاتي حيث : $\vec{U}_T \perp \vec{U}_N$

$$\vec{a} = a_T \ \vec{U}_T + a_N . \vec{U}_N$$

$a_T = \frac{dV}{dt}$: التسارع المماسي.

$a_N = \frac{V^2}{R}$: التسارع الناظمي.

R : نصف قطر الانحناء في النقطة M.

طويلة شعاع التسارع : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

كذلك نستطيع ايجاد قيمة a_N : $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$.

من هنا نستنتج عبارة نصف قطر الإنحناء R:

$$a_N = \frac{V^2}{R} = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_T^2}}$$

ـ مركز التسارعات :

هو النقطة (C) التي تتجه نحوها جميع التسارعات (في أي لحظة كانت) بحيث:

إذا كانت M نقطة كيفية من المسار يكون لدينا:

$$\forall t: \ \overrightarrow{CM} /\!/ \vec{a}(M) \Rightarrow \overrightarrow{CM} \wedge \vec{a}(M) = \vec{0}$$

إذا كانت الحركة دائرية منتظمة فإن التسارع المركزي

$$\overrightarrow{CM} /\!/ \vec{U}_N \Leftarrow \vec{a} = \vec{a}_N$$

$\Leftarrow$ C هو مركز الدائرة أو المسار.

إذا كان التسارع $\vec{a}$ يتجه نحو نقطة ثابتة C فنقول عن الحركة أنها ذات تسارع مركزي.

A-III - 8 - دراســـــــــة الحركات في المستوى :

1 - الحركة المستقيمة:

أ) - حركة المستقيمة المنتظمة $\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{cst}$ على محوره Ox :

- نقول عن الحركة أنها مستقيمـــــة منتظمة إذا كان مسارها مستقيمـــــــا و شعاع سرعتها ثابتـــــــا و بالتالي شعاع تسارعها معـــــــدوما.

ندرس الحركة على محور واحد Ox

الشروط الإبتدائية : $t = 0,\quad x = x_0,\ V = V_0$

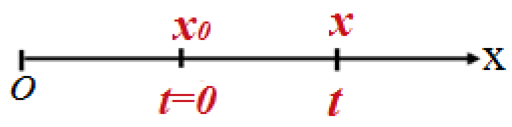
$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_0 \Rightarrow dx = V_0 dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} V_0 dt \Rightarrow (x - x_0) = V_0(t - 0)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x = V_0 t + x_0}$$

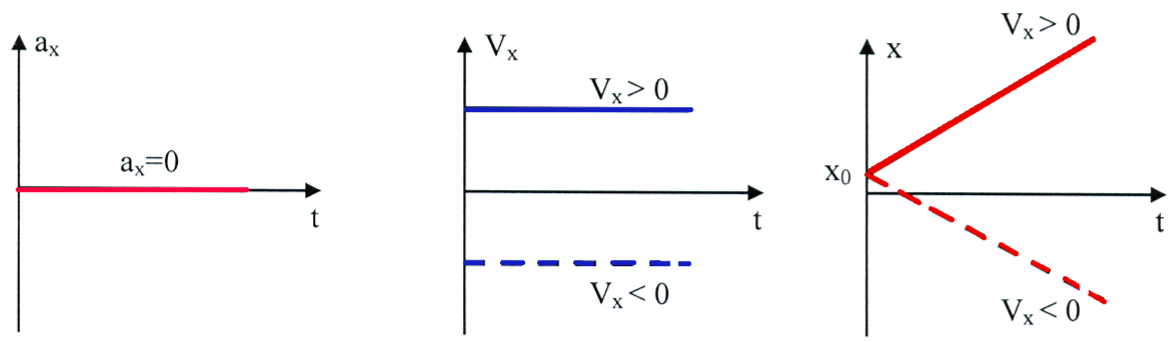
x : الفاصلة اللحظية.

x_0 : الفاصلة الإبتدائية .



معلم الحركة

- **مخططات الحركة :**



ب) - حركة المستقيمة المتغيرة بانتظام $\vec{a} = \overrightarrow{cst} = \overrightarrow{a_0}$ على محوره Ox :

تكون الحركة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما والتسارع ثابتا. ندرسها على محور واحد (OA) انطلاقا من عبارة a :

الشروط الإبتدائية : $t = 0 , \quad x = x_0 \quad ,V = V_0$

$$a_0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_0 dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t=0}^{t} a_0 dt \Rightarrow [v]_{v_0}^{v} = a_0 \, [t]_{t=0}^{t} \Rightarrow V - V_0 = a_0 t$$

$$\Rightarrow V = a_0 t + V_0$$

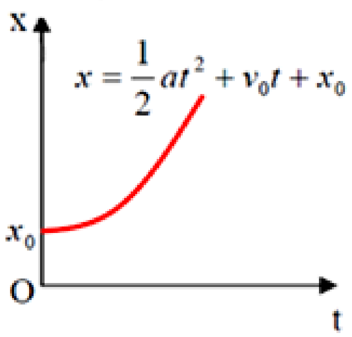
لدينا كذلك :

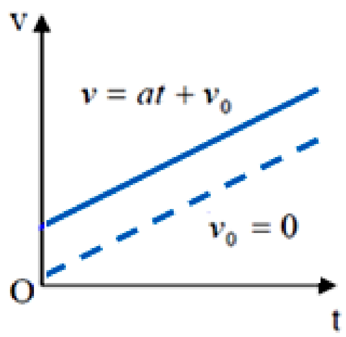
$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V\,dt = (a_0 \mathrm{t} + V_0)\,\mathrm{dt}$$

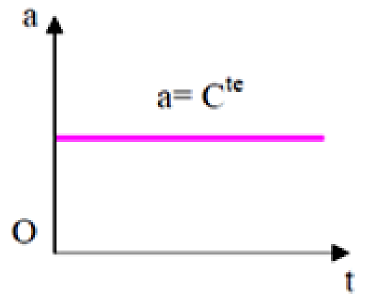
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} a_0 t \;\; dt + \int_{t=0}^{t} V_0 \, dt$$

$$x - x_0 = a_0 \frac{t^2}{2} + V_0 t \Rightarrow x = \frac{1}{2} a_0 \, t^2 + V_0 \, t + \, x_0$$

- مخططات الحركة :







3- الحركة الدائرية :

- المسار عبارة عن دائرة نصف قطرها R ومركزها 0 يمكن دراسة الحركة في الإحداثيات القطبية أو الذاتية.

أ)- عبارة شعاع السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية :

– شعاع الموضع : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho = R\vec{U}_\rho$

– شعاع السرعة : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{U}_\theta$

– شعاع التسارع : $\vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{U}_\theta$

$$\boldsymbol{\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_\rho + \vec{\gamma}_\theta}$$

ب)- عبارة شعاع السرعة و التسارع في الإحداثيات المنحنية :

$$S(t) = R\,\theta(t)$$

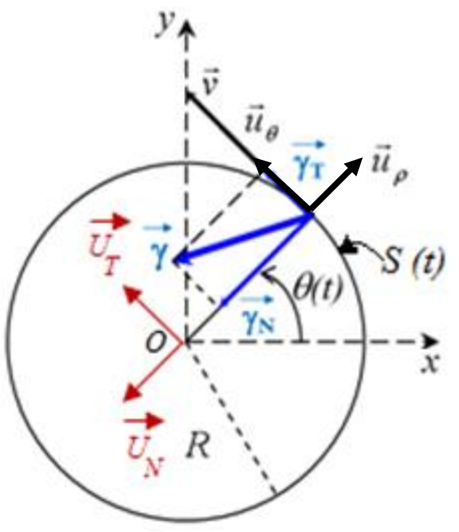
– شعاع السرعة : $\vec{V} = V\vec{U}_T = \dfrac{ds}{dt}\vec{U}_T = R\dot{\theta}\vec{U}_T$

– شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + \frac{V^2}{R}\vec{U}_N$$

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{U}_T + R\dot{\theta}^2\vec{U}_N$$

$$\boldsymbol{\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N}$$



* نلاحظ من الرسم أن :

$$\vec{U}_\rho = -\vec{U}_N \quad , \quad \vec{U}_T = \vec{U}_\theta$$

$$\|\vec{U}_\rho\| = \|\vec{U}_N\| \;, \quad \|\vec{U}_T\| = \|\vec{U}_\theta\|$$

ج)- المعادلة الزمنية للحركة الدائرية المنتظمة :

الحركة الدائرية المنتظمة هي حركة مسارها دائري و سرعتها الزاوية ثابتة.

$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_{S_0}^{S} ds = \int_{t=0}^{t} V dt \Rightarrow S - S_0 = Vt \Rightarrow S = Vt + S_0$$

بما أن : $S = R\theta$

$$S = Vt + S_0 \Rightarrow R\theta = Vt + R\theta_0 \Rightarrow \theta = \frac{V}{R}t + \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0 \Rightarrow \theta = \dot{\theta}t + \theta_0$$

لدينا :

$$S = R\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$V = R\omega \Rightarrow \frac{V}{R} = \omega$$

ω : هي السرعة الزاوية و تمثل الزاوية الممسوحة خلال وحدة الزمن (rad/s).

د)- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام :

هي حركة مسارها دائري و تسارعها الزاوي ثابت :

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{dt}} = Cst = c$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{dt}} = \ddot{\theta} \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, dt \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + c$$

نختار كشروط ابتدائية: $t = 0,\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(0) + c$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 + c \Rightarrow \dot{\theta}_0 = cst = c$$

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta}dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} (\ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0) dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0}$$

4- الحركة المستقيمة الجيبيــــــة:

- يمكن الحصول على الحركة الجيبية المستقيمة بإسقاط الحركة الدائرية على $x'ox$.

إسقاط النقطة M يعطي الفاصلة $x(t)$.

حيث : $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

أو حتي $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$

حيث :

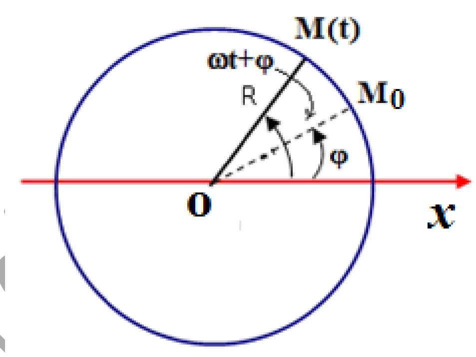
$x(t)$: الفاصلة أو المطال اللحظي.

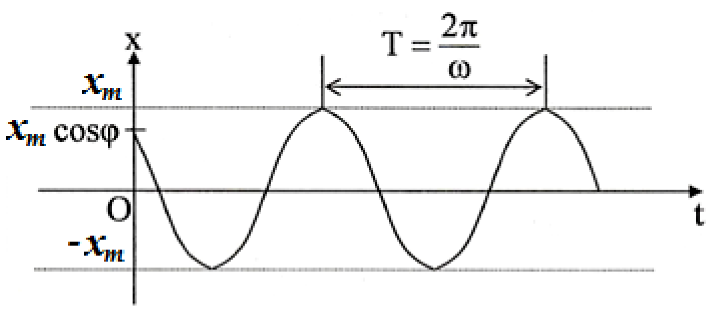
x_m : سعة الحركة أو المطال الأعظمي.

ω: نبض الحركة .

φ : الطور أو الصفحة الإبتدائية .

$(\omega t + \varphi)$الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية. :





أ) - السرعة : نشتـــــــق المعادلة الزمنية :

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega\, x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

التسارع يتناسب طـــــــردا مع المطال و يعاكسه في الإتجاه.

ب) - المعادلة التفاضلية للحركة :

انطلاقا من معادلة التسارع : $a = -\omega^2 x$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها يكون من الشكل :

$$x = A\cos\omega t = B\sin\omega t$$

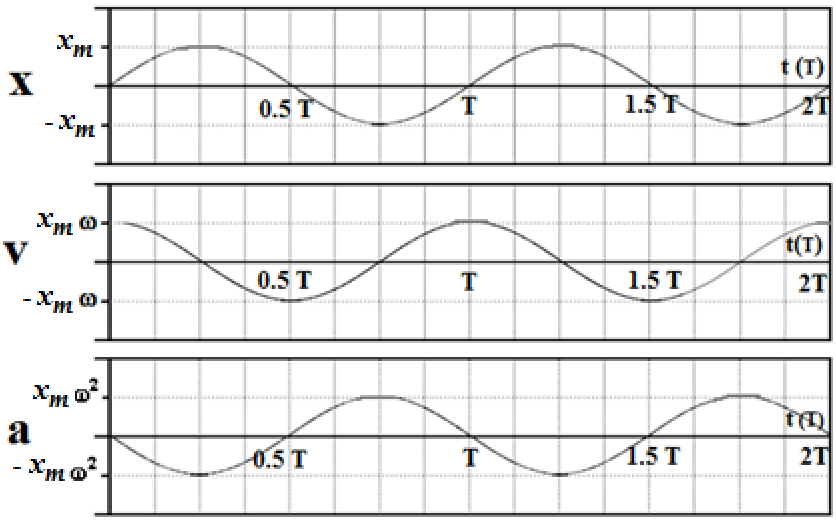
يمكن كتابة هذه المعادلة بعد التحويلات المثلثية على الشكل : $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

- نحدد ثابت التفاضل x_mوφ بمعرفة الشروط الإبتدائية لكل من المطال x_0 و السرعةv_0 الإبتدائيين حيث نحصل على جملة معادلتين ذات مجهولين تسمح لنا بتعيين x_m وφ .

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = x_m \cos\varphi \\ V_0 = -x_m \sin\varphi \end{cases}$$

ج)- مخطط الحركة:

من أجل : $\varphi = \frac{\pi}{2}$



مخطط الحركـة

تمارين (Exercices)

تمرين 01:

ينتقل جسم نقطي M وفق المعادلات:

$$\begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 3t + 4 \end{cases}$$

1-أوجد معادلة المسار و طبيعته.

2- أوجد أشعة الموضع $\overrightarrow{OM}$، السرعة $\vec{V}$ و التسارع $\vec{\gamma}$.

تمرين 02:

يتحرك الجسم M وفق المعادلات:

$$\begin{cases} \rho = 2ae^{\theta} \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

a,ω: ثابتان موجبان

1- أوجد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية ثم الديكارتية.

2- أوجد شدة $\vec{V}$ و $\vec{\gamma}$ ثم احسب γ_T, γ_N و نصف قطر الانحناء R .

3- احسب طول المسار L(θ) علما أن L(0)=0

تمرين 03:

تعطى إحداثيات المتحرك M بـ:

$$\begin{cases} x = R(1 + \cos 2\theta) \\ y = R \sin 2\theta \end{cases} , \quad \theta = \omega t$$

R و ω ثابتان موجبان

1- أوجد في الإحداثيات الديكارتية معادلة المسار و أرسمه ثم أوجد أشعة السرعة $\vec{V}$ و التسارع $\vec{\gamma}$.

2- أوجد في الإحداثيات القطبية معادلة المسار ثم أشعة الموضع $\overrightarrow{OM}$، السرعة $\vec{V}$ و التسارع $\vec{\gamma}$.

3- بين أن الحركة ذات تسارع مركزي و حدد هذا المركز.

تمرين 04:

- نعرف شعاع الموضع لنقطة مادية بالمعادلة التالية:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

لدينا : $x(t) = R\cos(\omega t)$, $\quad y(t) = R\sin(\omega t)$, $\quad z(t) = V_0\, t$

V_0, R و ω : ثوابت موجبة

1- أوجد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات الديكارتية ثم الاسطوانية .

2- أوجد معادلة المسار و طبيعته.

3- عين الزاوية بين شعاع السرعة $\vec{V}$ و $\overrightarrow{Oz}$

4- أوجد الفاصلة المنحنية $S(t)$ ثم بين بدون حساب أن الحركة ذات تسارع مركزي في حالة $V_0 = 0$.

حلول التمارين

حل التمرين 01

$$\begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 3t + 4 \end{cases}$$

1- معادلة المسار و طبيعته.

$$x = 5t \Rightarrow t = x/5$$

$$y = 3t + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + 4$$

معادلة المسار من الشكل: $y = Ax + B$

- و التي تمثل معادلة مستقيم لا يمر بالمبدأ ميله $\frac{3}{5}$ و يقطع محور التراتيب في النقطة (0,4).

2- عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t + 4 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = 5t\vec{i} + (3t + 4)\vec{j}$$

- عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

- عبارة شعاع التسارع $\vec{\gamma}$.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{0}$$

- نلاحظ أنه سواء من عبارة السرعة الثابتة الاتجاه والمقدار أو من عبارة التسارع المعدوم فان الحركة مستقيمة منتظمة.

حل التمرين 02

1- في الإحداثيات القطبية

– شعاع الموضع : $\overrightarrow{OM} = \rho \,.\vec{U}_\rho = 2\mathrm{ae}^{\theta}\vec{U}_\rho$

– شعاع السرعة : $\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\mathrm{ae}^{\theta}\vec{U}_\rho\right) = 2a\omega\,\mathrm{e}^{\theta}\left(\vec{U}_\rho + \vec{U}_\theta\right)$

شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2a\omega\,\mathrm{e}^{\theta}(\vec{U}_\rho + \vec{U}_\theta)\right) = 4a\omega^2 e^{\theta}\vec{U}_\theta$$

-في الإحداثيات الديكارتية

– شعاع الموضع

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = 2\mathrm{ae}^{\theta}(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$$

– شعاع السرعة : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2\mathrm{a\omega e}^{\theta}[(\cos\theta - \sin\theta)\vec{\imath} + (\cos\theta + \sin\theta)\vec{\jmath}]$

– شعاع التسارع : $\vec{a} = \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 4a\,\omega^2 e^{\theta}(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})$

-2 شدة $\vec{V}$: $\|\vec{V}\| = 2\sqrt{2}\,a\omega\,\mathrm{e}^{\theta}$

شدة $\vec{\gamma}$: $\|\vec{\gamma}\| = 4a\omega^2\mathrm{e}^{\theta}$

- حساب γ_T, γ_N و R

$$a_T = \gamma_T = \frac{dV}{dt} = 2\sqrt{2}\, a\omega^2 \mathrm{e}^{\theta}$$

$$a_N = \gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T^2} = 2\sqrt{2}\, a\omega^2 \mathrm{e}^{\theta}$$

من هنا نستنتج عبارة نصف قطر الانحناء R:

$$R = \frac{V^2}{\gamma_N} = 2\sqrt{2}\, a\, \mathrm{e}^{\theta}$$

3- طول المسار $L(\theta)$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dL}{dt} = 2\sqrt{2}\, a\omega\, \mathrm{e}^{\theta} \Rightarrow dL = 2\sqrt{2}\, a\omega\, \mathrm{e}^{\theta} dt$$

$$\Rightarrow \int dL = 2\sqrt{2}\, a \int \mathrm{e}^{\theta}\, (\omega\, dt) = 2\sqrt{2}\, a\, \mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{Cst}$$

$$[\mathrm{L}(\theta = 0) = 0 \Rightarrow \mathrm{Cst} = -2\sqrt{2}\, a\,] \Rightarrow \mathrm{L} = 2\sqrt{2}\, a(\mathrm{e}^{\theta} - 1)$$

<u>حل التمرين03</u>

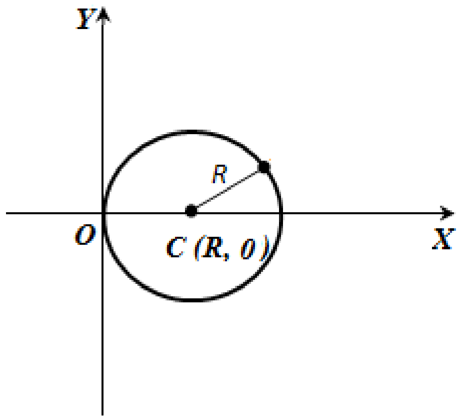
1- إيجاد معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية :

$$\begin{cases} x = R(1 + \cos 2\theta) \\ y = R\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - R = R\cos 2\theta \\ y = R\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow (x - R)^2 + y^2 = R^2$$

المسار عبارة عن دائرة مركزها $C\,(R, 0)$ و نصف قطرها R.

عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = R(1 + \cos 2\theta) \\ y = R\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = R(1 + \cos 2\theta)\vec{\imath} + R\sin 2\theta\, \vec{\jmath}$$



- عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -(2R\omega \sin 2\theta)\vec{\imath} + (2R\omega\, cos2\theta)\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = 2R\omega\, [-\sin 2\theta\vec{\imath} + cos2\theta\vec{\jmath}]$$

- عبارة شعاع التسارع $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -4\, R\, \omega^2\, [\cos 2\theta\, \vec{\imath} + sin2\theta\, \vec{\jmath}]$$

2- إيجاد معادلة المسار في الإحداثيات القطبية :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,.\vec{U}_\rho \quad : \text{أين} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{R^2(1 + \cos 2\theta)^2 + R^2(\sin 2\theta)^2}$$

$$\rho = R\sqrt{1 + 2\cos 2\theta + (cos^2 2\theta + sin^2 2\theta)} = R\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}$$

$$= R\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}$$

لدينا : $\cos 2\theta = 1 - 2sin^2\theta$

$$\rho = R\sqrt{2(1 + 1 - 2sin^2\theta)} = 2R\sqrt{1 - sin^2\theta)} = 2R\sqrt{cos^2\theta} = 2R|\cos\theta|$$

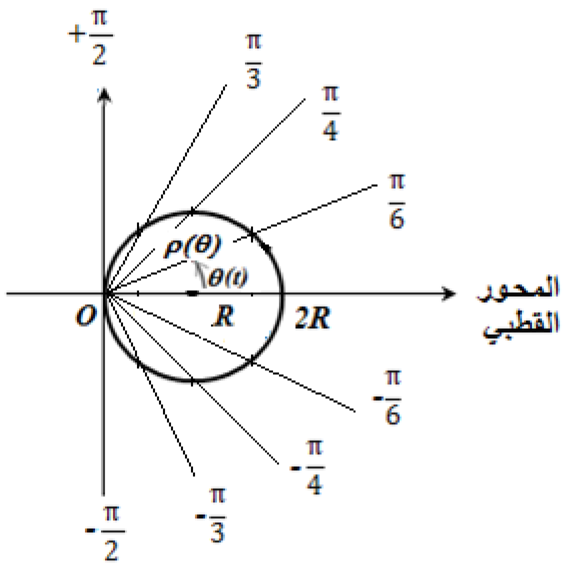
$$\Rightarrow \rho = 2R\, cos\theta$$

$$\begin{cases}\rho = 2R\,cos\theta \\ \theta = \omega t\end{cases}$$

- جدول تغير ρ بدلالة θ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho\,(\theta)$	0	R	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{3}$	2R	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R	0

المسار عبارة عن دائرة مركزها $C\,(R,0)$ و نصف قطرها R.



- في الإحداثيات القطبية:

– شعاع الموضع :
$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{U}_\rho = 2R\,cos\theta\,\vec{U}_\rho$$

– شعاع السرعة :
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2R\omega\left(-\sin\theta\,\vec{U}_\rho + \cos\theta\,\vec{U}_\theta\right)$$

– شعاع التسارع :
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -4\,R\,\omega^2\left(\cos\theta\ \vec{U}_\rho + \sin\theta\,\vec{U}_\theta\right)$$

3- الحركة ذات تسارع مركزي :

- ليكن مركزالتسارعات C'

مركز التسارعات يكون بحيث : $\overrightarrow{C'M} /\!/ \vec{\gamma}(M)$

$$\forall t:\ \overrightarrow{C'M} /\!/ \vec{\gamma}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} \wedge \vec{\gamma}(M) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{C'M} \wedge \vec{\gamma}(M) = -4\,R\,\omega^2 \begin{pmatrix} \mathrm{R}(1+\cos 2\theta) - \mathrm{x}_{C'} \\ \mathrm{R}\sin 2\theta - \mathrm{y}_{C'} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4\,R\,\omega^2 \cos 2\theta\,(Rsin2\theta - \mathrm{y}_{C'}) = -4\,R\,\omega^2 \sin 2\theta\,(\mathrm{R}(1+\cos 2\theta) - \mathrm{x}_{C'})$$

$$\Rightarrow \mathrm{y}_{C'} \cos 2\theta - (R - \mathrm{x}_{C'}) \sin 2\theta = 0$$

- الحل الرياضي: $\forall\ t, \theta$

$$\begin{cases} \mathrm{y}_{C'} = 0 \\ R - \mathrm{x}_{C'} = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ إحداثيات المركز C' :

$$\begin{cases} \mathrm{y}_{C'} = 0 \\ \mathrm{x}_{C'} = R \end{cases}$$

أي أن : $C'(R, 0) = C(R, 0)$

-إذن نقطة المركز هي نفسها النقطة C و هو نقطة ثابتة فالحركة ذات تسارع مركزي.

حل التمرين 04

لدينا : $x(t) = Rcos\,(\omega t), \quad y(t) = Rsin\,(\omega t), \quad z(t) = V_0\,t$

ω و $R\ ,V_0$: ثوابت موجبة

1- إيجاد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات الديكارتية

$$\theta = \omega t$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = Rcos\,\theta \\ y(t) = Rsin\,\theta \\ z(t) = V_0\,t \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{\imath} + Rsin\theta\,\vec{\jmath} + V_0\,t\ \vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (-R\omega\,sin\theta)\vec{\imath} + (R\omega\,cos\theta)\vec{\jmath} + V_0\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = (-R\omega^2 \cos\theta)\vec{i} + (-R\omega^2\, sin\theta)\,\vec{j}$$

- إيجاد أشعة الموضع، السرعة و التسارع في الإحداثيات الاسطوانية .

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{U}_\rho + z\vec{k}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2(cos^2\theta + sin^2\theta)} = R$$

$$\Rightarrow \rho = R$$

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{U}_\rho + V_0\, t\, \vec{k}$$

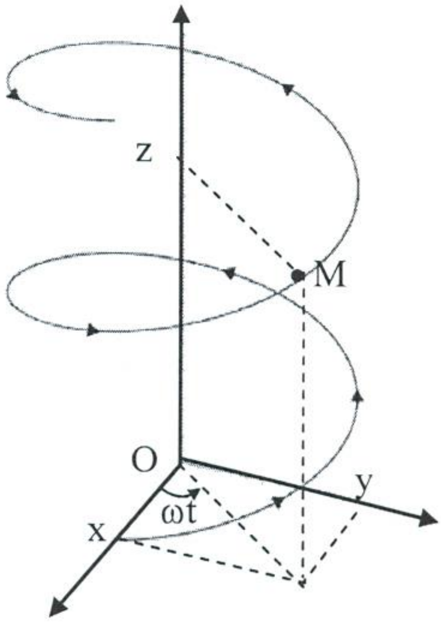
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\vec{U}_\theta + V_0\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -R\omega^2\,\vec{U}_\rho$$

2- معادلة المسار و طبيعته:

$$\begin{cases} x(t) = Rcos\,\theta \\ y(t) = Rsin\,\theta \\ z(t) = V_0\, t \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$



- في المستوي Oxy المسار عبارة عن دائرة مركزها $C\,(0,0)$ و نصف قطرها R.

و بما أن المتحرك ينتقل وفق $\overrightarrow{Oz}$ حركة متغيرة بدلالة الزمن t $(z(t) = V_0\, t)$ فالمسار الكلي أسطواني أو لولبي وفق $\overrightarrow{Oz}$ (متصاعد نحو الاعلى).

3- تعيين الزاوية بين شعاع السرعة $\vec{V}$ و $\overrightarrow{Oz}$

$$\vec{V}.\vec{k} = \|\vec{V}\|\|\vec{k}\| \cos\alpha = V\cos\alpha = V_0 \Rightarrow \cos\alpha = V_0 / V$$

$$\alpha = Arc\cos(V_0 / V) \Rightarrow \alpha = Arc\cos V_0 / \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}$$

4 إيجاد الفاصلة المنحنية $S(t)$

$$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = V.dt$$

$$S = \int \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}\ dt \Rightarrow S = \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}\ .t + C$$

$$S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

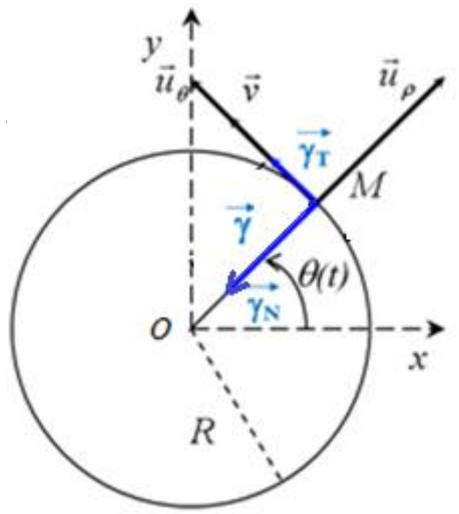
$$S(t) = \sqrt{(R\omega)^2 + V_0{}^2}\ .t$$

- ثم بين بدون حساب أن الحركة ذات تسارع مركزي في حالة $V_0 = 0$

<u>في حالة V_0</u> : الحركة تكون في المستوي Oxy

من عبارة التسارع $\vec{\gamma} = -R\omega^2\,\vec{U}_\rho$ نلاحظ أن التسارع $\vec{\gamma}$ يتجه دائما عكس $\vec{U}_\rho$ أي عكس $\overrightarrow{OM}$ الذي بدوره يتجه نحو (O).

$\therefore$ من هنا نستنتج أن $\vec{\gamma}$ تتجه دوما نحو (O) مركز المعلم. إذن الحركة ذات تسارع مركزي و مركز التسارعات هو المركز(O).



الفصل الثالث - B

الحركة النسبيـــــــــة

B-III الحركة النسبيــــــــــة
Mouvement relatif

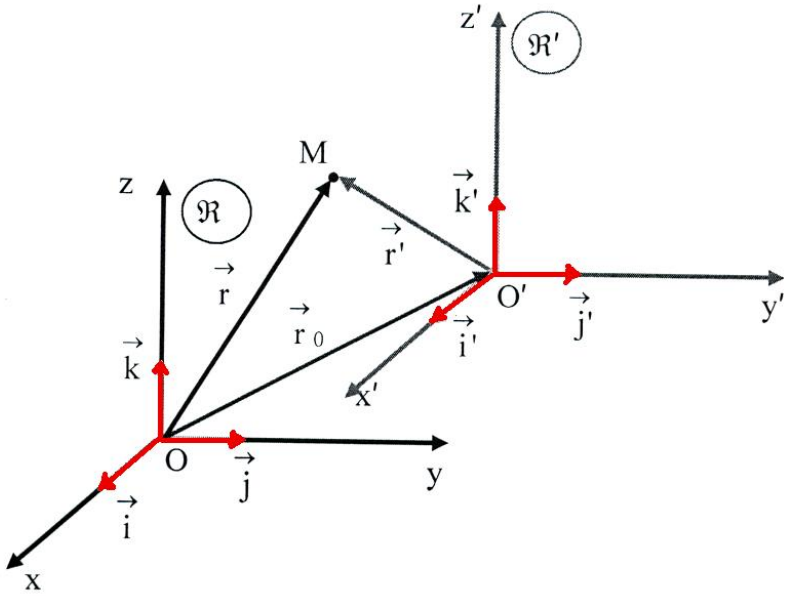
1-B-III - مقدمــــــــة :

ندرس في هذا الفصل مفهوم الحركة النسبية في حالة حركة نقطة مادية M بالنسبة لمعلمين (R) و(R') إحداهما معلم ثابت (مطلق) والآخر معلم متحرك (نسبي) حيث :

R : المعلم الثابت (المطلق) R(Oxyz) (Repère absolu) وقاعدته $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

R' : المعلم المتحرك (النسبي) R'(O'x'y'z') (Repère relatif) وقاعدته $\left(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\right)$

M: النقطة أو الجسم المتحرك Point matériel en mouvement



- حركة M بالنسبة الى R: حركة مطلقة :Mouvement absolu.
- حركة M بالنسبة الى R' : حركة نسبية :Mouvement relatif.
- حركة R' بالنسبة الى R: حركة مكتسبة :Mouvement d'entrainement.

2-B-III - المقادير المطلقة:

دراسة حركة النقطة M في المعلم الثابت أو المطلق $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

1- شعاع الموضع $\overrightarrow{\mathbf{OM}}(\mathbf{t})$:

هو شعاع موضع الجسم M بالنسبة للمعلم المطلق (الثابت) (R) و يكتب على الشكل :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

2- شعاع السرعة المطلقة $\vec{V}_a(t)$:

هو شعاع سرعة الجسم M بالنسبة للمعلم المطلق (R) و يكتب على الشكل :

$$\overrightarrow{V_a}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_a}(t) = \overrightarrow{V_a}(t)/R = \vec{V}_a = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

3- شعاع التسارع المطلق $\vec{a}_a(t)$:

هو شعاع تسارع M بالنسبة للمعلم المطلق (R) و يكتب على الشكل :

$$\overrightarrow{a_a}(t) = \frac{d\overrightarrow{V_a}(t)}{dt}/R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_a}(t) = \overrightarrow{a_a}(t)/R = \vec{a}_a = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

3-B-III المقادير النسبية:

هي دراسة الحركة في المعلم النسبي $R'(O'x'y'z')$ و هو متحرك بالنسبة للمعلم المطلق $R(Oxyz)$.

1- شعاع الموضع $\overrightarrow{\mathbf{OM}'}(\mathbf{t})$:

هو شعاع موضع الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي (R') ويكتب على الشكل :

$$\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\vec{\imath}' + y'(t)\vec{\jmath}' + z'(t)\overrightarrow{k'}$$

2 -شعاع السرعة النسبية $\vec{v}_r(t)$:

هو شعاع سرعة الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي (R').

$$\vec{V}_r(t) = \vec{V}(t)/\acute{R} = \vec{V_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R' = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\vec{V_r}(t) = \vec{V_r}(t)/R' = \vec{V_r} = \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'$$

3 - شعاع التسارع النسبي $\vec{a}_r(t)$:

هو شعاع تسارع الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي (R').

$$\vec{a_r}(t) = \frac{d\vec{V_r}(t)}{dt}/R' = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/R' = \frac{d^2\acute{x}}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2\acute{y}}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2\acute{z}}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a_r}(t) = \vec{a_r}(t)/R' = \vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

يجب أن ننتبه إلى أن أشعة الواحدة $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ تكون ثابتة داخل المعلم النسبي غير أنها متغيرة داخل المعلم المطلق و بالتالي يجب أخذها بالاعتبار عند الاشتقاق داخل هذا المعلم.

4-B-III - علاقات التركيب:

تتحرك النقطة M بالنسبة لمعلمين إحداهما ثابت (R) و الآخر متحرك $(\acute{R})$ يتحرك بالنسبة للمعلم (R) بحركة كيفية (دورانية أو انسحابية).

1 - أشعة الموضع :

تكتب علاقة تركيبة أشعة الوضع كما يلي :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t)$$

2- أشعة السرعــات :

$$\vec{V}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}/R = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}/R$$

$$\vec{V}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R + \frac{d}{dt}(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}')$$

$$\vec{V}_a(t) = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R + \acute{x}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \acute{y}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \acute{z}\frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\overrightarrow{V_e}(t)} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'}_{\overrightarrow{V_r}(t)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_a}(t)/R = \overrightarrow{V_e}(t)R'/R + \overrightarrow{V_r}(t)/R'}$$

$$\overrightarrow{V_e}(t)\frac{R'}{R} = \frac{\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}}{R} + \vec{\omega}_{\frac{\acute{R}}{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}(t), \qquad \overrightarrow{V_r}(t)/R' = \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}/R'$$

$\overrightarrow{V_r}(t)$: السرعة النسبية.

$\overrightarrow{V_e}(t)$: السرعة المكتسبة (سرعة الجر) هي سرعة المعلم R'/R.

$\overrightarrow{V_a}(t)$: السرعة المطلقة.

ملاحظة: $\overrightarrow{V_e}$ تتعلق من جهة بالشعاع $\overrightarrow{OO'}$ و بإحداثيات النقطة المتحركة و بدوران المعلم النسبي داخل المعلم المطلق من جهة ثانية. أي حركة كيفية للمعلم النسبي، يمكن تحليلها إلى مجموع حركتين؛ إنسحابية ودورانية.

3- أشعة التسارعات :

تكتب علاقة تركيب التسارعات كما يلي :

$$\vec{a}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}/R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R = \frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}/R + \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/R$$

$$\vec{a}_a(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R + \acute{x}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \acute{y}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \acute{z}\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]$$

$$\vec{a}_a(t) = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R + \acute{x}\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + \acute{y}\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + \acute{z}\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}}_{\overrightarrow{a_e}(t)} + \underbrace{\frac{d^2\acute{x}}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2\acute{y}}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2\acute{z}}{dt^2}\vec{k}}_{\overrightarrow{a_r}(t)}$$

$$\underbrace{+2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}(t)}.$$

$$\overrightarrow{a_a}(t)/R = \overrightarrow{a_e}(t)R'/R + \overrightarrow{a_r}(t)/R' + \overrightarrow{a_c}(t)/R'$$

$$\overrightarrow{a_e}(t)R'/R = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R \ + \vec{\omega}_{\frac{R'}{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\frac{R'}{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + \frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{a_c}(t)/R' = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{V}_r$$

حيث :

$\vec{a}_a$: شعاع التسارع المطلق

$\vec{a}_r$: شعاع التسارع النسبي

$\vec{a}_e$: شعاع التسارع المكتسب (أو الجر)

$\vec{a}_c$: شعاع التسارع كوريوليس أو الإضافي

5-B-III - حركة المعلم النسبي إنسحابية :

1- أشعة السرعــات :

في هذه الحالة تكون الأشعة $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k'})$ ثابتة في المعلم المطلق و مشتقاتها معدومة، لنجد:

$$\vec{V}_e(t) = \vec{V}_T(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R$$

$\vec{V}_T(t)$: هي سرعة الانسحاب

- من هنا يكتب شعاع السرعة المطلقة كما يلي:

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_T} + \overrightarrow{V_r}$$

*** حالة خاصة:**

إذا كانت سرعة الانسحاب ثابتة، يمكن أن نختار المعلمين متوازيين لهما نفس المحور Ox و الانسحاب يتم وفق هذا المحور في هذه الحالة، نكتب العلاقة بين حركتي النقطة في المعلمين من الشكل:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + V_T.t \\ y(t) = y'(t) \\ z(t) = z'(t) \end{cases}$$

مجموعة المعالم التي تتحرك في ما بينها حركة انسحابية منتظمة تعرف باسم المعالم العطالية أو المعالم الغليلية ، تملك أهمية خاصة في الميكانيك.

2- أشعة التسارعات :

الأشعة $(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ ثابتة في المعلم المطلق و بالتالي يكون تسارع كوريوليس معدوما و التسارع المكتسب يأخذ الشكل:

$$\overrightarrow{a_e}(t) = \overrightarrow{a_T}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R$$

$\overrightarrow{a_T}(t)$: هو تسارع الانسحاب

- من هنا يكتب شعاع التسارع المطلق كما يلي :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_r}$$

III-B-6- حركة المعلم النسبي دورانية :

1- أشعة الدوران اللحظية

في هذه الحالة تكون O' ثابتة، نأخذها متطابقة مع O في حين تدور أشعة الواحدة $(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ حول محور لحظي $\Delta(t)$ مرتبط بالمعلم المطلق و بالتالي نكتب أشعة الدوران اللحظية للمعلم (R') بالنسبة للمعلم (R) في حالة الحركة الدائرية كما يلي :

$$\frac{d\vec{i'}}{dt}/R = \frac{d\vec{i'}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{\omega}.\vec{j'} = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{i'}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{i'}}{dt}/R = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{i'} \;,\; \frac{d\vec{j'}}{dt}/R = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{j'}, \quad \frac{d\vec{k'}}{dt}/R = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{k'}$$

$\vec{\omega}_{R'/R} = \frac{d\theta}{dt}$: شعاع السرعة الزاوية لدوران محاور المعلم النسبي R` بالنسبة للمعلم المطلق R

2- أشعة السرعـــات :

تصبح السرعة المكتسبة:

$$\overrightarrow{V_e} = \acute{x}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \acute{y}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \acute{z}\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega}_{\acute{R}/R} \wedge (x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}')$$

$$\overrightarrow{V_e}(t) = \vec{V}_{Rot}(t) = \vec{\omega}_{\acute{R}/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{V}_{Rot}(t)$: السرعة المكتسبة نتيجة دوران المعلم النسبي

$\vec{\omega}$: شعاع السرعة الزاوية لدوران محاور المعلم النسبي R'/R

من هنا تعطى عبارة السرعة المطلقة:

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V}_{Rot}(t)$$

3- أشعة التسارعات:

O' ثابتة و متطابقة مع O والأشعة $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \overrightarrow{k'})$ تدور حول محور لحظي $\Delta(t)$ بالتالي نكتب:

$$\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} = \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\imath'}\right)$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} = \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{\jmath'}\right)$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2} = \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k'}\right)$$

$\vec{a}_e$: تسارع الجر

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{Rot}} = \dot{\vec{\omega}}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

$\vec{a}_c$: تسارع كريوليس $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}$

$\vec{a}_r$: التسارع النسبي $\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}/R'$

$\vec{a}_a$: التسارع المطلق:

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{\omega}}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R}\wedge(\vec{\omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r + \vec{a}_r$$

ملاحظة :

- إذا كانت M نقطة ثابتة في المعلم المتحرك $(\acute{R})$

$\vec{V}_r = \vec{V}(t)/R' = \vec{0}$ كذلك : $\vec{a}_c = \vec{0}$

- إذا كانت حركة المعلم المتحرك $(\acute{R})$ انسحابية منتظمة بالنسبة للمعلم الثابت (R) فإن :

$$\vec{\omega}_{\acute{R}/R} = \vec{0} \text{ و } \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0} \Leftarrow \begin{cases} \vec{a}_e = \vec{0} \\ \vec{a}_c = \vec{0} \end{cases} \Leftarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r$$

في هذه الحالة نقول أن المعلم$(\acute{R})$ هو معلم غاليلي أو عطالي لأن التسارع المطلق يساوي دائما التسارع النسبي.

B-III -7- حركة المعلم النسبى كيفية :

هي عبارة عن تركيب لحركتين، إنسحابية و دورانية، و تكون السرعة المكتسبة هي مجموع سرعتي الانسحاب و الدوران:

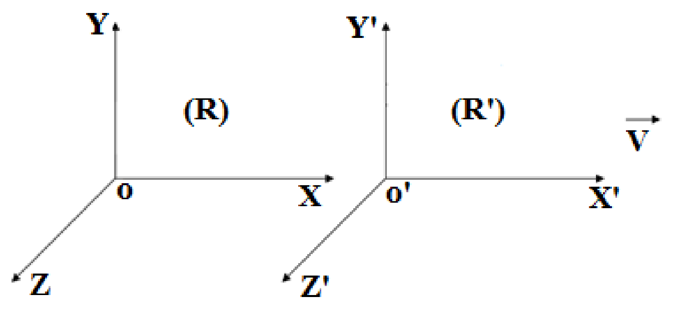
$$\vec{V}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}/R + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{V}_T(t) + \vec{V}_{Rot}(t)$$

التسارع المطلق يكتب من الشكل:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_T + \dot{\vec{\omega}}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{a}_r$$

B-III -8- تطبيقات :

***الحركة الإنسحابية الخطية :**



لدينا $(R') /\!/ (R)$:

$$\boxed{\vec{\omega}_{\acute{R}/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\imath}' /\!/ \vec{\imath}\ , \vec{\jmath}' /\!/ \vec{\jmath}\ , \vec{k}' /\!/ \vec{k}}$$

شعاع السرعة :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R' = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' = \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{V}}_a = \vec{\mathbf{V}}_r + \vec{\mathbf{V}}(\boldsymbol{O'})/\boldsymbol{R}$$

شعاع التسارع :

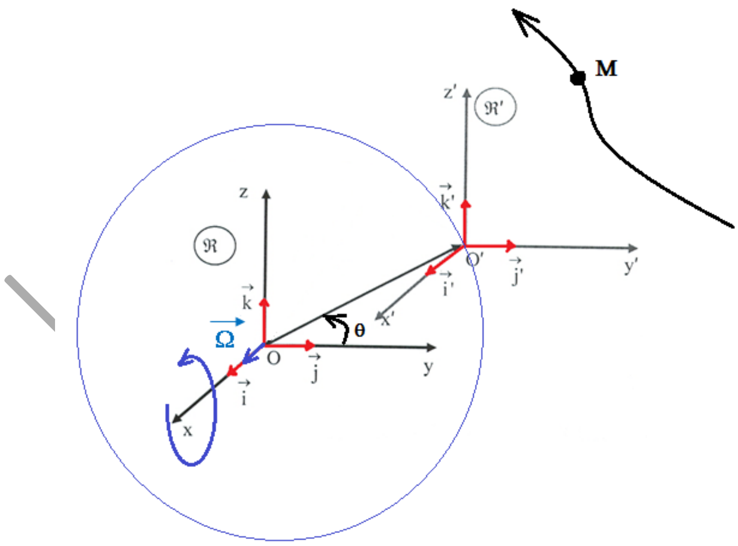
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}/R' = \ddot{x}'\vec{i} + \ddot{y}'\vec{j} + \ddot{z}'\vec{k}$$

$$\vec{a}_e = a(O')_{/R} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \frac{d\vec{V}(O')}{dt}/R$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{a}}_a = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\boldsymbol{a}}\,(\mathbf{O'})/\mathbf{R}$$



***الحركة الإنسحابية الدورانية**

لدينا $(R')/\!/(R)$:

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{i}' /\!/ \vec{i}\ , \\ \vec{j}' /\!/ \vec{j}\ , \\ \vec{k}' /\!/ \vec{k} \end{array}}$$

شعاع السرعة :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OO'}$$

حيث : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{\imath}' = \dot{\theta}\vec{\imath}$

$\vec{\Omega}$: تمثل سرعة الدوران للنقطة 'O و ليس سرعة الدوران المعلم النسبي 'R بالنسبة للمعلم المطلق R، أي أن: $\dot{\theta} \neq \vec{\omega}_{R'/R}$

$$\mathbf{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OO'}}$$

شعاع التسارع :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}/R' = \ddot{x}'\vec{\imath} + \ddot{y}'\vec{\jmath} + \ddot{z}'\vec{k}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}(O')_{/R} = \frac{d\vec{V}(O')}{dt}/R = \ddot{\theta}\vec{\imath} \wedge \overrightarrow{OO'} + \dot{\theta}\vec{\imath} \wedge \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R$$

لدينا : $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OO'} = \dot{\theta}\vec{\imath} \wedge \overrightarrow{OO'}$

$$\vec{a}_e = \ddot{\theta}\vec{\imath} \wedge \overrightarrow{OO'} + \dot{\theta}\vec{\imath} \wedge (\dot{\theta}\vec{\imath} \wedge \overrightarrow{OO'})$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{0}$$

$$\mathbf{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}(O')_{/R}}$$

تمارين (Exercices)

تمرين 01:

تعطى إحداثيات متحرك في معلم ديكارتي ثابت بــ:

$$(R)\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases} \qquad (R')\begin{cases} x' = t^2 + t - 1 \\ y' = -2t^4 + 5 \\ z' = 3t^2 - 1 \end{cases}$$

- علما أن محاور المعلمين تبقى دوما متوازية

- اوجد طبيعة حركة (R'/R) و ما نوع هذه الحركة.

تمرين 02:

يسقط جسم M من أعلى عمارة على شخص متوقف على الطريق. عندما يكون الجسم على ارتفاع h من الطريق ينطلق الشخص جاريا بحركة متسارعة تسارعها γ. أوجد عبارة:

1- شعاع التسارع النسبي $\vec{\gamma}_r$ للجسم M .

2- شعاع السرعة النسبية $\vec{V}_r$ للجسم M.

3- مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص .

حلول التمارين

حل التمرين 01

* طبيعة حركة (R'/R) :

$$\overrightarrow{V_a}\,(M/R) = \overrightarrow{V_e}(R'/R) + \overrightarrow{V_r}\,(M/R')$$

-إيجاد $\overrightarrow{V_e}(R'/R)$

$$\overrightarrow{V_e}(R'/R) = \overrightarrow{V_a}\,(M/R) - \overrightarrow{V_r}\,(M/R')$$

$$(\overrightarrow{OM})\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{V_a}\,(M/R)\begin{cases} \dot{x} = 2t - 4 \\ \dot{y} = -8t^3 \\ \dot{z} = 6t \end{cases}$$

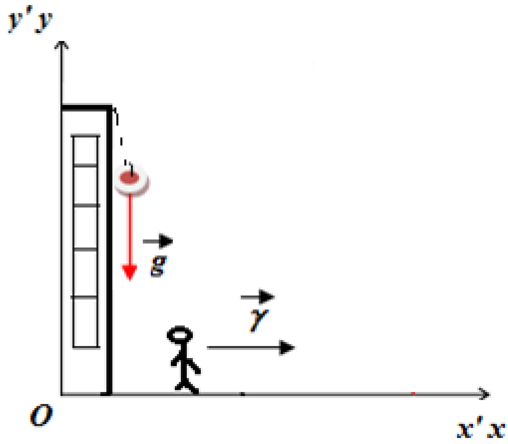
$$(\overrightarrow{OM}')\begin{cases} x' = t^2 + t - 1 \\ y' = -2t^4 + 5 \\ z' = 3t^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{V_r}\,(M/R')\begin{cases} \dot{x}' = 2t + 1 \\ \dot{y}' = -8t^3 \\ \dot{z}' = 6t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_e}(R'/R)\begin{cases} \dot{x} - \dot{x}' = -5 \\ \dot{y} - \dot{y}' = 0 \\ \dot{z} - \dot{z}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{V_e}(R'/R) = -5\vec{i}$$

- نلاحظ أن السرعة المكتسبة ثابتة هذا يدل أن حركة (R'/R) مستقيمة منتظمة .

∴ إذن المعلمان عطاليان (غاليان).

حل التمرين 02



R: المعلم الثابت (المطلق) هو العمارة .

R' : المعلم المتحرك (النسبي) هو الشخص.

M: النقطة أو الجسم المتحرك.

أشعة السرعـــات :

$$\overrightarrow{V_a}(t)_{M/R} = \overrightarrow{V_e}(t)_{R'/R} + \overrightarrow{V_r}(t)_{M/R'}$$

أشعة التسارعات :

$$\vec{\gamma}_a(t)_{M/R} = \vec{\gamma}_e(t)_{R'/R} + \vec{\gamma}_r(t)_{M/R'} + \vec{\gamma}_c(t)_{M/R'}$$

1- إيجاد شعاع التسارع النسبي $\vec{\gamma}_r$ للجسم M :

$$\vec{\gamma}_c(t)_{M/R'} = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r} \quad ,(\ \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}\ ) \Rightarrow \vec{\gamma}_c(t)_{M/R'} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_r(t)_{M/R'} = \vec{\gamma}_a(t)_{M/R} - \vec{\gamma}_e(t)_{R'/R}$$

$$\vec{\gamma}_a(t)_{M/R} = \vec{\gamma}_a(t)_{M/\text{العمارة}} = -g\vec{j}$$

لأن الجسم M يسقط سقوطا حرا من أعلى العمارة.

$$\vec{\gamma}_e(t)_{R'/R} = \vec{\gamma}_e(t)_{\text{العمارة}/\text{الشخص}} = \gamma\vec{i}$$

لأن الشخص يتحرك بحركة متسارعة .

$$\vec{\gamma}_r(t)_{M/R'} = -(\gamma\vec{i} + g\vec{j})$$

2- إيجاد شعاع السرعة النسبية $\vec{V}_r$ للجسم M .

$$\vec{\gamma}_r(t)_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/R'$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{V_r} = \vec{\gamma}_r\, dt \Rightarrow \overrightarrow{V_r} = \int \vec{\gamma}_r\, dt = \int(-\gamma\vec{i} - g\vec{j})\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V_r} = -(\gamma t\,\vec{i} + gt\,\vec{j})$$

3- مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص:

أي: مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للمعلم المتحرك (النسبي) R' .

- يجب إيجاد مركبات الشعاع $\overrightarrow{O'M}$

$$\overrightarrow{V_r}(t)_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R' \Rightarrow$$

$$d\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V_r}(t)_{M/R'}\, dt \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \int(-\gamma t\ \vec{i} - gt\,\vec{j})dt$$

$$\overrightarrow{O'M} = \left(-\gamma\,\frac{t^2}{2}\right)\vec{i} + \left(h - g\frac{t^2}{2}\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{O'M}\begin{cases} x' = -\gamma\,\dfrac{t^2}{2} \\ y' = h - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

إيجاد معادلة المسار

$$x' = -\gamma\,\frac{t^2}{2} \Rightarrow t^2 = -\frac{2x'}{\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y' = h - g\frac{t^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

- نعوض المعادلة 2 في المعادلة 1 نجد:

$$y' = h - \frac{1}{2} g \left(-\frac{2x'}{\gamma} \right) \quad = h + \frac{g}{\gamma}\, x'$$

$$y' = \frac{g}{\gamma}\, x' + h$$

$\therefore$ مسار الجسم المتحرك M بالنسبة للشخص عبارة عن خط مستقيم مائل و ميله $\frac{g}{\gamma}$.

الفصل الرابع:

التحريـــــــــك

الفصل الرابع: التحريـــــــــــــك

IV- تحريك النقطـــــة المادية
Dynamique du point matériel

1-IV – مقدمـــــة :

الدِّينَامِيكَا أو التحريك هي إحدى فروع الرياضيات التطبيقية (على وجه التحديد الميكانيكا الكلاسيكية) التي تختص بدراسة القوى و العزوم وتأثيرها على حركة الأجسام أي الحركة ومسبباتها. على العكس من علم الحركيات الذي يهتم بدراسة حركة الأجسام بدلالة الزمن دون التطرق إلى مسبباتها. وقد وضع إسحاق نيوتن القوانين الفيزيائية الأساسية الحاكمة لعلم الديناميكا والتي تعرف باسم قوانين نيوتن للحركة في معالم محددة تدعى المعالم الغاليلية.

***مفاهيم أساسية:**

- العطالة (القصور الذاتي): مصطلح فيزيائي يعني مقاومة الجسم الساكن للحركة ومقاومة الجسم المتحرك بتزويده بعجلة ثابتة أو تغيير اتجاهه، ولقد عبر نيوتن عن هذا المصطلح في قانونه الأول المعروف بقانون القصور الذاتي أو العطالة. وهو خاصية مقاومة الجسم المادي لتغيير حالته من السكون إلى الحركة بسرعة منتظمة على خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حالته أي أن كل جسم مادي قاصر عن تغيير حالته من السكون أو الحركة ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حالته.

- المعلم العطالي:

- المعلم العطالي هو المعلم الذي يتحقق فيه مبدأ العطالة.

- تدعـــــى الجمل التي يكون فيها مبدأ العطالة صالحا بالجمل الغاليلية أو العطالية وفيه تنتقل الجسيمة بسرعة ثابتة. نقول عن المعلم (R) أنه عطالي وأن الجسم في عطالة بالنسبة للمعلم (R) .

- بفرض أن (R) معلم عطالي و(R') معلمًا آخر له حركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{v}$ بالنسبة للمعلم (R). إذا كان الجسم المعزول في عطالة بالنسبة للمعلم (R) فإنه حتمًا في عطالة بالنسبة للمعلم (R').

- هناك عدد لا نهائي من المعالم العطالية في حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها البعض وهي كلها متكافئة ولا وجود لمعلم مطلق مفضل.

- المعالم العطالية هي المعالم التي لا تتسارع و لا تدور.

<u>أمثلة عن بعض المعالم</u>

في الحقيقة في الفراغ المطلق، لا توجد هذه الجمل (المعالم الغاليلية) فهناك معالم مقربة فقط أهمها:

<u>-معلم كوبرنيك:</u>

هو معلم مرتبط بالمجموعة الشمسية، مركزه هو مركز كتل المجموعة، و محاوره موجهة نحو نجوم بعيدة تعتبر من وجهة نظرنا ثابتة.

<u>-معلم كيبلر:</u>

مركز المعلم هو مركز عطالة الشمس و محاوره تعطى بثلاث نجوم بعيدة و تبدو ثابتة.

<u>-المعلم الأرضي</u>:

محاوره مرتبطة بالأرض و مركزه نقطة من نقاط الأرض.

تدور الكواكب ، و منها الأرض حول الشمس، فإذا أردنا دراسة حركة كوكب من على سطح الأرض فإننا نجد مسارًا معقدًا و ليس في مقدورنا تفسيره.

<u>سؤال:</u> هل يمكن اعتبار المعلم الأرضي معلمًا عطاليًا ؟

من الناحية النظرية لا يمكن اعتبار المعلم المرتبط بالأرض معلمًا عطاليًا لأن الأرض تدور بسرعة زاوية ومركزها لا يتحرك بسرعة منتظمة نتيجة لتفاعلها مع الشمس و بقية الكواكب الأخرى ، لكن من الناحية العملية يمكن اعتبار المعلم المرتبط بالأرض معلمًا عطاليًا إذا تعلق الأمر بتجارب ذات مدّة زمنية قصيرة تجرى في المعلم المخبري بجوار سطح الأرض وفق ارتفاعات لا تتعدى عشرات الأمتار.

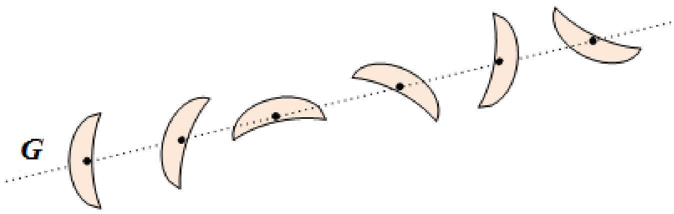
ـ أهمية الكتلة في التحريك:

يمكن تعريف الكتلة بأنها كمية المادة الموجودة في جسم ما. وكلما كبرت كتلة الجسم كان تحريكه أو تغيير اتجاهه وسرعته أصعب. فإيقاف قاطرة متحركة، على سبيل المثال، يحتاج إلى جهد أكبر من إيقاف سيارة تسير بالسرعة ذاته، والسبب في ذلك هو العلاقة بين القصور الذاتي والكتلة، ويعرف علماء الفيزياء الكتلة عادة بأنها قياس للقصور الذاتي عِوضًا عن قياس المادة. الكتلة إذن عبارة عن عامل يُفرق بين جسم و آخر و تميز عطالة الجسم. و هي مقدار المقاومة التي يُبديها الجسم اتجاه أي تغير في السرعة ، و هذا المقدار الذي لم يدخل في الدراسة الحركية للأجسام ، هو من الأهمية بمكان في الدراسة التحريكية .

ـ إذن الكتلة تُعبر عن كمية المادة التي يحتويها الجسم و هي مقدار محفوظ في إطار الميكانيك الكلاسيكي و تُعبر عن عطالة الجسم.

***ـ مركز العطالة** : Centre d'inertie

إذا كانت لدينا جملة من النقاط المادية ، و كانت بعيدة عن كل التأثيرات الخارجية الأخرى) أي جملة معزولة . (فإن التجارب تبين بأن هذه الجملة المعزولة تتميز بنقطة واحدة على الأقل ساكنة أو لها حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمعلم عطالي.



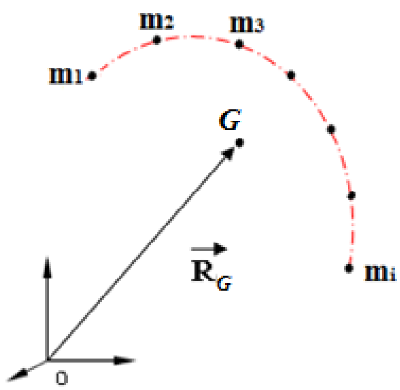
تسمى هذه النقطة مركز عطالة الجملة و يرمز لها غالبًا بالرمز " G".

توضح التجارب في الميكانيك الكلاسيكي أن مركز العطالة G منطبق على مركز الكتلة ، أي مركز الأبعاد المتناسبة بين نقاطها.

مركز العطالة G لجملة جسيمات m_1، m_2 .... m_i يوافق نقطة مركز الأبعاد المتناسبة بينهما .

ونحصل على شعاع موضع مركز العطالة بالعلاقة التالية:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{R_G} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

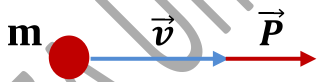


كمية الحركة (شعاع الدفع الخطي) La quantité de mouvement

كمية الحركة (شعاع الدفع الخطي) مقدار شعاعي له نفس اتجاه السرعة ، و هو مقدار فيزيائي هام لأنه يجمع بين عنصرين يميزان الحالة الحركية للجسيم و هما كتلته و سرعته.

يُعرّف شعاع الدفع الخطي لنقطة مادية كتلتها m و سرعتها $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم (R) كما يلي:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$



- شعاع الدفع الخطي الإجمالي لجملة نقاط مادية كتلة كل منها m_i و سرعة كل منها $\vec{v}_i$ هو مجموع الدفع الخطي لكل نقطة مادية

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{P}_i$$

انحفاظ كمية الحركة (الدفع الخطي)

في معلم عطالي (R)، إذا كانت الجملة معزولة أو شبه معزولة فإنه يكون لدينا:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

بما أن : $\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

-إذن: $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{Cst} \Rightarrow m\vec{v} = \overrightarrow{Cst}$

شعاع الدفع الخطي الكلي لجملة معزولة محفوظ دومًا ، أي ثابت في القيمة و ثابت في الاتجاه.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_\mathrm{i} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots = \overrightarrow{Cst}$$

- حفظ الدفع الخطي هو مبدأ عام في الفيزياء ، متعلق بإحدى الخصائص الأساسية للفضاء. ولا يُعرف أي استثناء لهذا المبدأ ، ففي التصادمات الذرية يحدث في الغالب تبادل في البروتونات أو النيترونات بين النوى ، فتكون عندئذ الكتل النهائية للجسيمات متباينة تمامًا عن الكتل الابتدائية.

و في الواقع ، إذا ظهر مبدأ حفظ الدفع الخطي غير محقق في تجربة ما، يبدأ الفيزيائيون مباشرة في البحث عن جسيم مختفي أو مجهول يمكن أن يكون هو المسؤول عن التغيرات الظاهرية في كمية الحركة. و هذا النوع من البحث هو الذي سمح للفيزيائيين بالتعرف على النيترون و البروتون والفوتون وجسيمات أولية أخرى.

2-IV – القوانين الثلاثة لنيوتن :

1-القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة أو القصور الذاتي) – Première"loi"de"Newton" Principe "d’inertie

ينص هذا القانون على أنّ الجسم الساكن يظل ساكناً، والجسم المتحرك الذي يكون بسرعة محددة أي ثابتة على خط مستقيم يستمر ويبقى بحركته بالسرعة والاتجاه نفسه بالنسبة لمعلمٍ (R) ، إنْ لم تؤثر قوة خارجية عليه تجبره على تغيير ذلك. يصف هذا القانون ميل الأجسام للمحافظة على حالتها الحركيّة وممانعة تغييرها، ويطلق على هذه الظاهرة خاصيّة القصور الذاتي أو مبدأ العطالة ، لذا يسمى قانون نيوتن الأول بقانون القصور الذاتي أو مبدأ العطالة ، وهذه الخاصية تعتمد على كتلة القصور للجسم وتزداد بازديادها، وهذا يعني أنّ تغيير الحالة الحركية للجسم تكون أصعب كلما كانت كتلة القصور له أكبر.

2 - القانون الثاني لنيوتن : "المبدأ الأساسي للتحريك" – Deuxième"loi"de"Newton"

في معلم عطالي (R) ، يتناسب تغير الدفع الخطي لجسيم مع محصلة القوى التي يخضع لها . و يكون لهذا التغير نفس الحامل و نفس اتجاه محصلة القوى المطبقة $\sum\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{\mathrm{dt}}$.

***الكتلة متغيرة :** إذا كانت كتلة الجسم متغيرة يكتب القانون كما يلي :

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{\mathrm{dt}}=\frac{d(m\vec{v})}{\mathrm{dt}}=\ \vec{v}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\Rightarrow\vec{F}=\ \vec{v}\frac{dm}{dt}+\ m\vec{\gamma}\qquad,\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}}$$

$\vec{P}$: تمثل كمية الحركة (شعاع الدفع الخطي) لجسيمة

***الكتلة ثابتة :** إذا كانت كتلة الجسم ثابتة فإن المبدأ الأساسي للتحريك يصبح:

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{V}}{dt}\Rightarrow\vec{F}=m\vec{\gamma}$$

كل جسم كتلته m وله تسارع $\vec{\gamma}$ يكون خاضعا لقوة خارجية $\vec{F}$ حيث :

$$\vec{F}=\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{\gamma}$$

يتناسب تسارع الجسم والذي يكتسبه نتيجة لقوة دفع ما، تناسباً طردياً مع مجموع القوى المؤثّرة عليه ويكون في اتجاهها، ويوضح هذا القانون ماهية العلاقة بين القوة المؤثرة على جسم معين ومقدار التغير في الحالة الحركية له (تسارعه).

m: كل نقطة مادية ترفق بمقدار سلمي موجب يسمى الكتلة m (وهي كمية المادة الموجودة فيها)

$\vec{F}$: كل فعل خارجي مطبق على نقطة مادية موجودة في الموضع $\boldsymbol{M}$ تعرف بشعاع القوة $\vec{F}$ مطبق على M.

$\therefore$ هذا القانون يعتبر بمثابة حجر الأساس في الميكانيك وضعه العالم إسحاق نيوتن و هو يصف الحركة انطلاقا من مفهوم القوة.

حالات خاصة:

-إذا كانت محصلة القوى ثابتة: $\vec{F}=\overrightarrow{Cst}$ فإن التسارع $\vec{\gamma}=\frac{\vec{F}}{m}$ هو كذلك ثابت و حركة الجسم تكون مستقيمة متغيرة بانتظام.

-إذا كانت محصلة القوى معدومة: $\vec{F}=\vec{0}$ فإن التسارع $\vec{\gamma}=\vec{0}$ وبالتالي حركة الجسم تكون عطالية $\vec{v}=\overrightarrow{Cst}$ (القانون الأول لنيوتن هو حالة خاصة من القانون الثاني).

صلاحية القانون الثاني للحركة:

- القانون الثاني لنيوتن لا يصلح إلا في معلم عطالي.
- عند تطبيق هذا القانون على الأجسام المادية يجب اعتبار هذه الأجسام نقاطًا مادية لا أبعاد لها.
- يصلح هذا القانون ويعطي نتائج جيدة فقط على الأجسام التي لا تتعدى سرعتها عشر سرعة الضوء

3-القانون الثالث لنيوتن: "مبدأ الفعل ورد الفعل" Troisième loi de Newton

Principe de l'action et de la réaction

لفهم الكثير من الحركات الموجودة في الطبيعة مثل حركة القمر حول الأرض و الأرض حول الشمس و حركة الأقمار الاصطناعية والإلكترونات حول النواة .. الخ . نلجأ إلى مسألة التأثير بين جسمين، حيث نرجع المسألة إلى جمُلة ميكانيكية معزولة تتألف من جسمين A وB يتبادلان التأثير فيما بينهما ، لذلك نحتاج إلى قانون يصف هذه المسألة.

***مسألة التأثير بين جسمين:**

إذا أثر جسم "1" على جسم "2" بقوة $\vec{F}_{12}$ فإن الجسم "2" يؤثر على الجسم "1" بقوة $\vec{F}_{21}$ تساوي $\vec{F}_{12}$ في الشدة و تعاكسها في الاتجاه.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

هذا يبقى صالحًا مهما كانت الحالة الحركية للجسم 1 بالنسبة للجسم 2.

أهم خصائص مبدأ الفعلين المتبادلين:

- هاتين القوتين لهما نفس الحامل.
- هاتين القوتين لهما نفس طبيعة التأثير (تجاذبية أو تباعدية).
- القوتين متزامنتين أي تحدثان في آن واحد.
- لا يمكن اعتبار أحدهما سببًا للآخر.

IV- 3- القوى في الطبيعة :

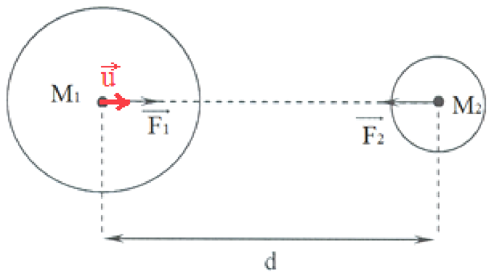
1- تعريف القوة : طبقا لقانون نيوتن الثاني، تعرف القوة بأنها مقدار الجهد أو الضغط المبذول المتسبب في تسارع الجسم. وتستخدم لوصف التأثير الذي يؤدي لتسارع الجسم الحر، والتي قد تكون قوة شد أو دفع ونتيجة لها يتغير اتجاه الجسم وسرعته وقد تسبب له تشوها مؤقتا أو دائما. وبشكل عام تسبب القوة تغيرا في حركة الجسم.

تنقسم القوة في الطبيعة الى قسمين :

2 – القوى ذات التأثير عن بعد : (القوى الأساسية)

أ)- قوة الجاذبية :

- **قانون الجاذبية الكونية:** يفسر هذا القانون قوة التجاذب بين جسمين ذي كتلتين M_1 و M_2 تفصل بينهما مسافة d حيث تنشأ بينهما قوتي تجاذب :



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = G\frac{M_1M_2}{d^2}\vec{u} \Rightarrow F_1 = G\frac{M_1M_2}{d^2}$$

حيث :

G: ثابت الجاذبية الكونية $G = 6.67x10^{-11}\mathrm{Nm}^2.\mathrm{Kg}^{-2}$

- حقل الجاذبية :

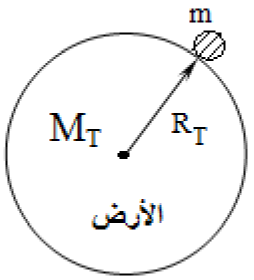
- قوة الجاذبية الأرضية هي الثقل. بفضل قانون الجذب العام لنيوتن وقانون القوة للثقل يمكن تحديد عبارة $\vec{g}$.

* على سطح الأرض :

$$\vec{F} = \vec{P} = G\frac{M_T.m}{R_T^2} = mg_0$$

$$\Rightarrow \boxed{g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}}$$

حيث :



M_T : كتلة الأرض $M_T = 5{,}98x10^{24}kg$

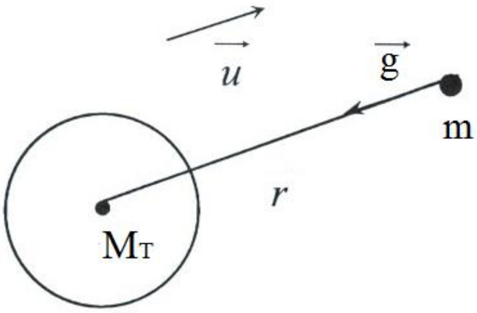
R_T : نصف قطر الأرض $R_T = 6{,}37 \, . 10^6 m$

ت ع : $g_0 = 9{,}8 \, N.kg^{-1}$

* على ارتفاع z من سطح الأرض : شعاع حقل الجاذبية الأرضية على ارتفاع z من سطح الأرض أي على بعد $r = R_T + z$ من مركز الأرض نحصل عليه كما يلي :

-على سطح الأرض:

$$P_0 = mg_0 = \frac{GmM_T}{R_T^2}$$



- على بعد z من سطح الأرض :

$$P = mg = G\,\frac{mM_T}{r^2}$$

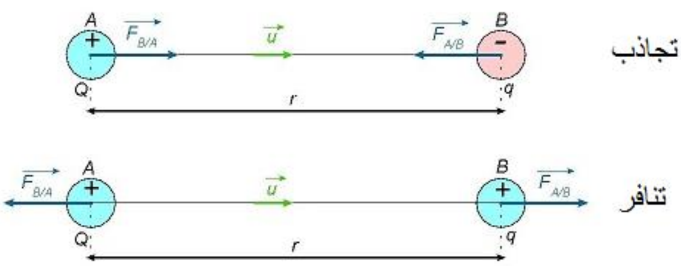
ومنه $g = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$

أما العبارة الشعاعية فهي $\vec{g} = -g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}$

ب) ـ القوة الكهروساكنة :

تكون بين الشحن الكهربائية:

$$\vec{F}_{Q\rightarrow q} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u} = q\vec{E}$$



ج) ـ القوة الكهرومغناطسية :

هي قوة تأثر على شحنة q موجودة في حقل كهربائي $\vec{E}$ وحقل مغناطسي $\vec{B}$ وتدعى بقوة لورنتز Lorentz.

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}).$$

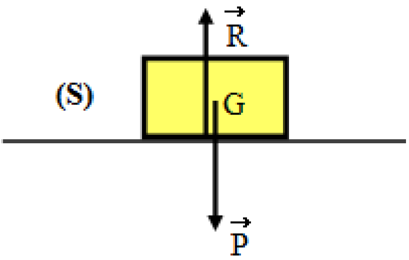
$\vec{V}$: سرعة الشحنة q

د)ـ القوة النووية :

تكون داخل النواة حيث تحافظ على تماسكها.

3 – القوى ذات التأثير عن قرب :

أ)ـ قوة رد فعل لحامل صلب أملس (بدون احتكاك) :



لدينا جسم (د) موضوع فوق طاولة :

$\vec{P}$: قوة ثقل الجسم الناتجة عن الجاذبية.

$\vec{R}$: قوة معاكسة لثقل الجسم (تمثل رد فعل الطاولة على الجسم).

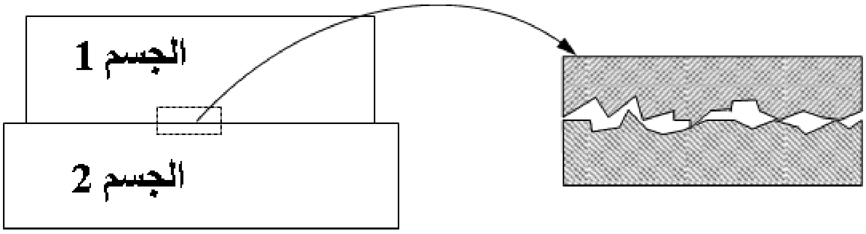
إذن الجسم يبقى في حالة سكون ومنه : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

ب) قوى الاحتكاك : Forces de frottement

الاحتكاك هو القوة المقاومة التي تحدث عند تحرك سطحين متلاصقين باتجاهين متعاكسين عندما يكون بينهما قوة ضاغطة تعمل على تلاحمهما معا (وزن أحد الجسمين مثلا) و تنتج كمية من الحرارة. يحدث الاحتكاك بين المواد الصلبة السائلة و الغازية أو أي تشكيلة منهم.

ويرجع العلماء الفيزيائيون منشأ قوى الاحتكاك إلى وجود نتوءات وتجويفات مجهرية في سطوح الأجسام مهما بلغت نعومتها ، وينتج عن تداخل هذه النتوءات والتجويفات لكل من السطحين ما يسمى بقوة الاحتكاك. يمكن تفسير ظاهرة الاحتكاك في ضوء خشونة الأسطح حيث تتخلل نتوءات أحد السطحين أخاديد السطح الآخر، وبالتالي فإننا نلاقي مقاومة عند محاولة تحريك أحد الجسمين على الجسم الآخر . وهذه المقاومة تظهر في صورة قوة تماسية تعيق الحركة ونطلق عليها اسم قوة

الاحتكاك .وعندما يبدأ أحد الجسمين بالانزلاق فوق الجسم الآخر فإنه لن يتوفر الوقت الكافي للسطحين لكي يتلاحما تمامًا حيث ستكون بعض النتوءات غير متداخلة مع الأخاديد، ونتيجة لذلك فإننا نحتاج إلى قوة أقل للمحافظة على تحرك الجسم من تلك التي نحتاجها لجعله على وشك الحركة.



انواع الإحتكاك:

*<u>**الاحتكاك الصلب الساكن**</u>:Frottement statique solide

- قبل أن نبدأ بتعريفه سوف نوضح الأمر بمثال من الواقع:

إذا قمت بمحاولة سحب أو تحريك قطعة أثاث، ولتكن طاولة ثقيلة إلى حدا ما، بالطبع هذه الطاولة كانت موجودة منذ فترة في هذا المكان على سطح الأرض، هنا اختزنت الطاولة قوة احتكاك ساكنه بداخل جزيئاتها، عندما تحاول تحريكها فسوف يكون الأمر صعب للغاية وربما تفشل، ليس لأن الطاولة ثقيلة، ولكن لأنها اكتسبت قوة احتكاك سكوني أكبر من قوتك أنت في تحريكها، وهذه القوة اكتسبتها الطاولة من تلامسها لسطح الأرض أو سطح أخر، وبقائها عليه لفترة طويلة. وبعد هذا المثال يمكننا تعريف قوة الاحتكاك السكوني بسهولة فهي عبارة عن ..*(تلك القوة التي اكتسابها الجسم نتيجة ملامسة جسم أخر ساكن ، فإذا كان الجسم غير ملامس أي جسم أخر وساكن في الخلاء فسوف تنعدم قوة الاحتكاك وتختفي)*.

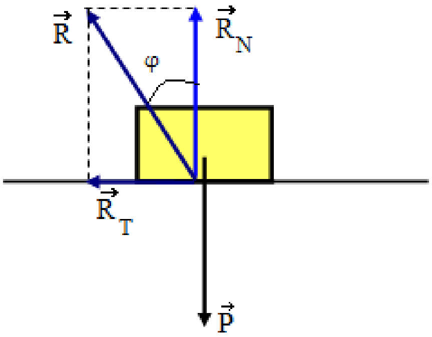
*- ينشأ الاحتكاك السكوني من ملامسة أو اتصال جسم ساكن ما بسطح أو جسم آخر. في هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك $\vec{R}_T$ معاكسة للحركة مماسية للمسار وطويلتها تتناسب مع طويلة رد الفعل الناظمي $\vec{R}_N$.

حيث يعرف معامل الاحتكاك كما يلي :

$$\mu = tg\varphi = \frac{\|\overrightarrow{R_T}\|}{\|\overrightarrow{R_N}\|}$$

حيث رد الفعل للحامل هو : $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$

- لما يكون جسمان مماسيين و ساكنان نسبيا ، تكون هنالك قوة احتكاك سكونية لازمة لتحريك أحد الجسمين حيث :



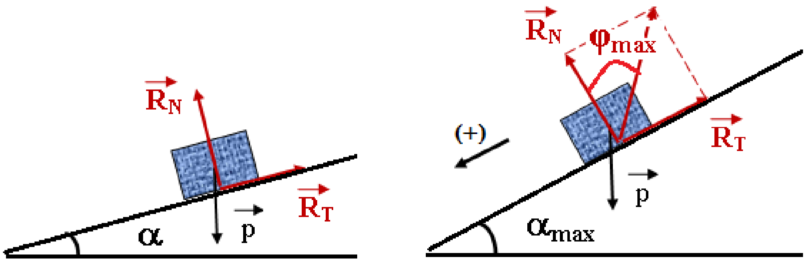
$$\|\vec{R}_T\| = \mu_S.\|\vec{R}_N\|$$

$$\vec{R}_T = -\mu_S.R_N.\vec{U}_T$$

حيث :

μ_S: هو معامل الاحتكاك السكوني.

$$\mu_s = \text{tg}\,\varphi_{max}$$

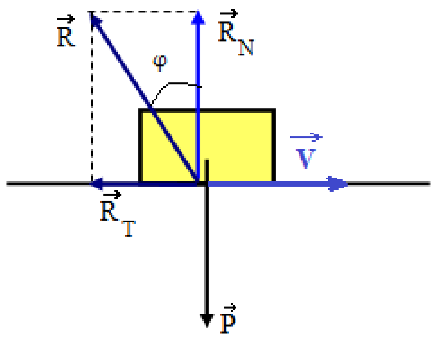


لا توجد حركة للقيمة α الجسم يبدأ يتحرك من اجل قيمة α_{max}

*<u>**الإحتكاك الصلب الحركي :**</u> Le frottement cinétique solide

كالعادة لكي نصل للمفهوم سوف نقوم بعرض مثال أولاً (عندما تقوم بقيادة السيارة و فجاءة ترفع قدمك من على دواسة الوقود، سوف تقل حركة السيارة ولكن سوف تستمر في السير حتى تقوم بوضع قدمك على دواسة المكابح، وهنا سوف تتوقف السيارة تمام ، ومن هنا تظهر قوة الاحتكاك التي جعلت سيارتك تستمر في الحركة برغم من رفع قدمك من على دواسة الوقود) وبذلك فإن مفهوم قوة الاحتكاك هنا هي : *تلك القوة التي تظهر عندما يتحرك جسمان متلاصقان، أي يتحرك الجسم على سطح الجسم الاخر (المتلاصق معه).*

- إذا كان الجسمان المتلامسان في حالة حركة نسبية ، تكون هنالك قوة احتكاك لازمة و لإبقائها على هذه الحركة :



$$\|\vec{R}_T\| = \mu_c.\|\vec{R}_N\|$$

$$\vec{R}_T = -\mu_c.R_N.\vec{U}_T$$

$$\Rightarrow \vec{R}_T = -\mu_c.R_N.\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

هنا μ_c : يمثل معامل الإحتكاك الحركي.

*من هنا نلاحظ أن مفهومي الاحتكاك الحركي و الاحتكاك السكوني مختلفان عن بعضهما ، ففي حالة يكون الجسم متحرك و في الحالة الأخرى يكون الجسم ساكنا.

-عادة ما يكون معامل الإحتكاك السكوني أكبر من معامل الإحتكاك الحركي.

$$\boldsymbol{\mu_s > \mu_c}$$

-* مقارنة بين كل من الإحتكاك السكوني والإحتكاك الحركي: " الإحتكاك السكوني أقوى من الإحتكاك الحركي" وهذا لأن عندما يحاول الإنسان سحب طاولة ساكنه، سوف يكون الأمر صعب عليه في البداية ويضطر إلى الإستعانه بشخص أخر، ولكن بعد أن تحركت الطاولة عن طريق سحب الشخصين معاً، يمكن للشخص أن يحاول تحريكها وسحبها بمفرده مرة اخرى، وسوف يجد نفسه قادر ويصاب بحالة من الذهول لماذا لم اتمكن في البداية من سحبها بمفردي، في الحقيقة هنا يإتي دور الإحتكاك السكوني والحركي ففي البداية كانت الطاولة تمثل الإحتكاك السكوني وهو أقوى، ولكن عندما تحركت وأصبحت إحتكاك حركي فأصبح قوة الأحتكاك بها أقل، وتمكنت من تحريكها بمفردك بسهولة وهنا نؤكد على أن قوة الإحتكاك هي التي تحكمت في قوة الإنسان في تحريك الطاولة وليس ثقل ووزن الطاولة.

*__الإحتكاك الميوعي :__ **Le frottement visqueux**- حين ينتقل جسم صلب في مائع (غاز أو سائل) بسرعة ضعيفة نسبيا تنشأ قوة احتكاك تحسب بالقانون التالي :

$$\vec{f} = -k\eta\vec{V}$$

$\vec{V}$: سرعة الجسم

η : معامل اللزوجة ويتعلق بالمائع(kg/ms)

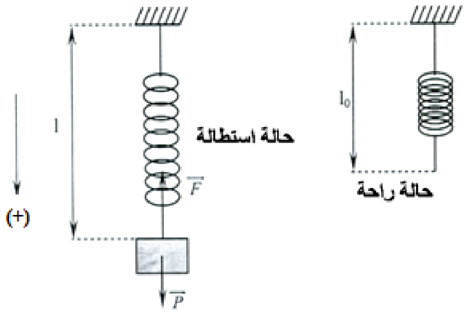
k : ثابت يتعلق بشكل الجسم (m)

- مثلا بالنسبة لكرة نجد : $k = 6\pi R$ حسب ستوكس Stokess

في هذه الحالة: $\vec{f} = -6\pi R\eta\vec{V}$

ج) -القوى المرنة: Les forces élastiques

نجدها في الحركات التوافقية لأن القوى المرنة تحدث حركات دورية. كما عرفنا سابقا عبارة التسارع في الحركات المستقيمة الجيبية يكتب كما يلي :



$$\vec{a} = -\omega^2\,\overrightarrow{OM}$$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = -m\omega^2\,\overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$$

نتحصل على قانون القوة بالإسقاط على المحورOx .

$$F = -kx$$

حيث : k ثابت الإرجاع أو ثابت المرونة للنابض.

د)- قوى التوتر : Forces de tension

نجدها في حالات كثيرة, مثلا الحركة التوافقية للنواس.

IV- 4- العزم الحركي : Le moment cinétique

أ)- عزم القوة: Moment d'une force

هي كمية فيزيائية تعبر عن مقدرة القوة على إحداث حركة دورا نية للجسم حول محور الدوران.

مثال: القوة المبذولة عند فتح الباب، فتح صنبور الماء، ربط صامولة بمفتاح الربط.

حيث ينتج عن القوة عزم الدوران وهي تختلف عن القوة في تحريك الأجسام.

∴ إذا أردت جعل الجسم يدور فأنت تستخدم عزم القوة لأنه مسبب للدوران.

<u>*- عزم القوة (بالنسبة لمحور (Δ)):</u>

ليكن المحور**(Δ)** ، شعاع وحدته $\vec{u}$. **(Δ)** و $\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه و لتكن 'O' نقطة من المحور**(Δ)**.

- نسمي عزم القوة المطبق في النقطة M بالنسبة للمحور **(Δ)** المقدار السلمي:

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}).\vec{u}$$

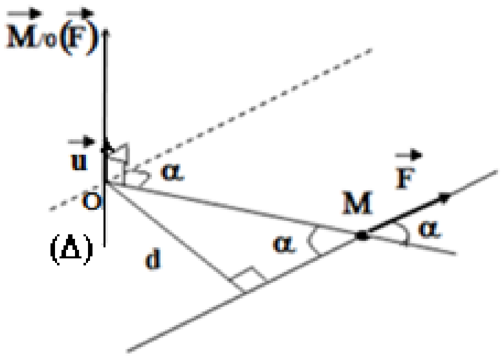
<u>*- عزم القوة (بالنسبة لنقطة O):</u>

- عزم القوة $\vec{F}$ المطبقة على النقطة M بالنسبة الى النقطة O يكون معرف كما يلي:

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\|\vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\| . \|\vec{F}\|. sin\alpha = d\|\vec{F}\|$$

$\vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})$: يمثل عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة O.



<u>ب) - العزم الحركي:</u>

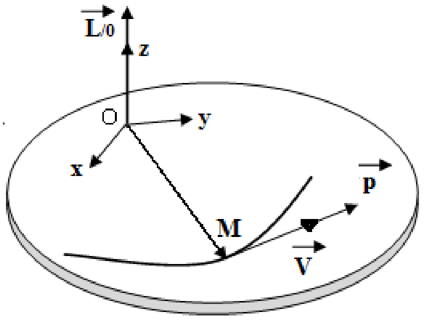
- العزم الحركي، وسيلة مهمَّة مساعدةٌ للمبدأ الأساسي في التحريك. فهي تسمح بإيجاد معادلة الحركة، خاصّة في حالة نقطة مادية تتحرّك حول محور ما.

<u>*- العزم الحركي (بالنسبة لنقطة من الفضاء) :</u>

لتكن O نقطة من الفضاء (ليس ضروريا أن تكون ساكنة في مرجع R). نسمي العزم الحركي لنقطة مادية كتلتها m وكمية حركتها $\vec{P}$ موجودة في النقطة M بالنسبة للنقطة O المقدار الشعاعي :

$$\vec{L}_{/0} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathrm{P}}$$

- نظرا للتشابه بين هذه العبارة وعبارة عزم القوة يمكن أن نقول أن العزم الحركي هو عزم كمية الحركة : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathrm{P}} \Leftrightarrow \vec{M}_{/0}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$



***- العزم الحركي (بالنسبة لمحور (Δ)):**

- نسمي العزم الحركي المطبق في النقطة M بالنسبة للمحور (Δ) المقدار السلمي:

$$L_{/\Delta} = \vec{L}_{/0}.\vec{u}$$

ج)- نظرية العزم الحركي:

في نقطة ثابتة O من مرجع غاليلي, المشتقة بالنسبة للزمن للعزم الحركي لنقطة مادية يساوي عزم القوة المطبقة عليه في هذه النقطة.

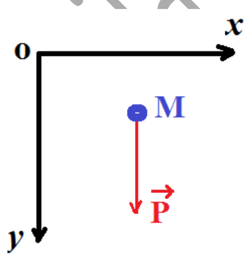
$$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{Rg} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

خصائصه :

- $\vec{L}_{/0} = \overrightarrow{Cst} \Rightarrow \forall t, \overrightarrow{OM} \mathbin{/\!/} \sum \vec{F}_{ext}$
- لما $\vec{L}_{/0}$ يكون ثابتا ⇐ الحركة تكون مستوية.
- لما $\vec{L}_{/0} = \vec{0}$ ⇐ الحركة تكون مستقيمة ⇐ $\overrightarrow{OM} \mathbin{/\!/} \vec{V}$

مثال:

تهتز نقطة مادية M كتلتها m حول محور أفقي oz عمودي على المستوي الشاقولي (ox,oy) للحركة موضعها معرف في كل لحظة بإحداثياتها الديكارتية. أحسب:



1- عزم الثقل $\vec{p}$ بالنسبة للنقطة " O" ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة m,x,g.

2- العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة "O" ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة m,x,y,x^2,y^2.

3- جد معادلة الحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي على النقطة M.

الإجابة:

1- حساب عزم الثقل $\vec{p}$ بالنسبة للنقطة " O".

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \\ \vec{p} = mg\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}\vec{P} = \overrightarrow{OM}\,\Lambda\,\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = (xmg)\overrightarrow{k}$$

- حساب عزم الثقل $\vec{p}$ بالنسبة للمحور OZ :

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\overrightarrow{F}).\vec{u}$$

$$\mathcal{M}_{/OZ}(\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}(\overrightarrow{p}).\vec{k} = xmg$$

2- حساب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة "O" :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \\ \vec{P} = m\,\vec{V}_x + m\,\vec{V}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{/_0} = \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ m\dot{x} & m\dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m(x\dot{y} - \dot{x}y)\vec{k}$$

- حساب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للمحور OZ :

$$L_{/\Delta} = \vec{L}_{/0}.\vec{u}$$

$$L_{/OZ} = \vec{L}_{/0}.\overrightarrow{k} \Rightarrow L_{/OZ} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

3) بتطبيق نظرية العزم الحركي لدينا:

$$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{Rg} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F}_{ext})$$

$$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{Rg} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{P}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m(x\dot{y} - \dot{x}y)\vec{k}\right) = (xmg)\overrightarrow{k}$$

$$\Rightarrow m(\dot{x}\dot{y} - x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y} - \ddot{x}y)\vec{k} = (xmg)\vec{k}$$

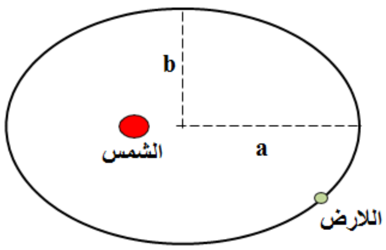
$$\Rightarrow x\ddot{y} - y\ddot{x} = gx$$

IV -5- حركة الكواكب : قوانين " كيبلر " Les lois de Kepler

قام كيبلر بملاحظة معظم كواكب المجموعة الشمسية، مستفيدا ممن سبقوه (كوبرنيك و غاليلي،..) ، ثم استخرج القوانين الثلاثة المشهورة باسمه :

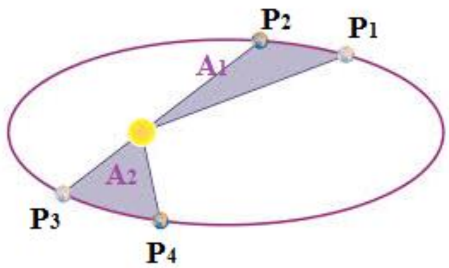
1- قانون كيبلر الأول (قانون المدارات)

نص القانون: " يدور الكوكب حول الشمس على مسار بشكل قطع ناقص حيث مركز الشمس يمثل إحدى بؤرتيه " .



2 - قانون كيبلر الثاني (قانون المساحات)

نص القانون: " إن نصف القطر الذي يربط بين مركز الشمس S و مركز الكوكب P يقطع مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية " .



توضيح:

إذا كانت المساحة $A_1=A_2$ هذا يعني أن المدّة الزمنية لحركة الكوكب من P1 إلى P2 تكون مساوية لمدّة حركته من P3 إلى P4 .و حتى يقطع الكوكب مسافات مختلفة في أزمنة متساوية ، هذا يعني أن سرعته تكون أكبر في المواضع بين P3 وP4 و تقل كلما ابتعد الكوكب عن الشمس.

3 - قانون كيبلر الثالث (قانون الدوران)

نص القانون: " إن مربع دور T الكوكب الذي يدور حول الشمس يتناسب مع مكعب نصف القطر الأكبر للقطع الناقص ".

$$T^2/a^3=k$$

الثابت k لا يتعلق بكتلة الكوكب الذي يدور بل له علاقة بالكوكب المركزي.

ملاحظات:

- القانون الثالث يعني أن دور الكواكب حول الشمس هو ثابت لا يتعلق بكتلة الكواكب ، و إنما يتعلق بكتلة الشمس التي هي في المركز.
- قوانين كيبلر تُطبق كذلك على الأقمار الطبيعية و الاصطناعية.

6-IV - تطبيقات عامة حول القانون الأساسي للتحريك

1- حركة القذيفة في مجال الجاذبية :

تنطلق قذيفة كتلتها m من نقطة O بسرعة ابتدائية $\vec{V}_0$ في اللحظة $t=0$ ندرس الحركة في معلم متعامد ومتجانس (O,X,Y) نعتبره غاليليا (لأن مدة حركة القذيفة جد قصيرة). تعمل سرعة القذيفة $\vec{V}_0$ زاوية α مع مسارها. في حالة ما إذا كان الجسم خاضع لقوة ثقله $\vec{p}$ و قوة مقاومة الهواء $\vec{f}$ حيث : $\vec{f} = -K\vec{V}$ ، K ثابت وهي معاكسة للحركة.

*- دراسة حركة القذيفة :

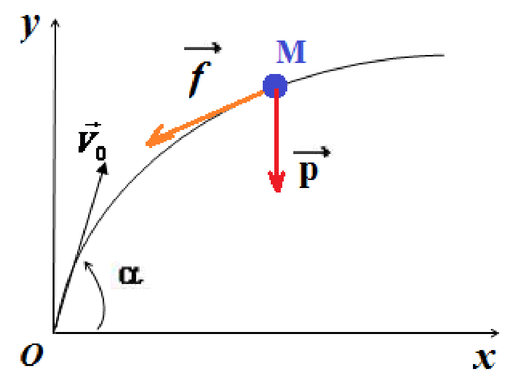
تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

*المجموعة المدروسة (القذيفة)

*اختيار المعلم المناسب (O,X,Y) نعتبره غاليليا لأن حركة القذيفة مستوية (تتم في المستوي الذي يضم $(O\vec{x}$ و $O\vec{y})$

*القوى المؤثرة : الكرية تخضع لوزنها $\vec{P}$ و مقاومة الهواء $\vec{f}$.

$$\vec{V}_0 \begin{cases} V_{ox} = V_0 cos\alpha \\ V_{oy} = V_0 sin\alpha \end{cases}$$



*تطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{\gamma}$$

-المعادلات الزمنية للحركة :

إسقاط العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن في المعلم (O,X,Y)

*بالإسقاط على المحاور نجد: $\begin{cases} ox: -kV_x = m\gamma_x \\ oy: -kV_y - mg = m\gamma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\frac{dV_x}{dt} + kV_x = 0 \\ m\frac{dV_y}{dt} + kV_y = mg \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dV_x}{dt} + \frac{k}{m}V_x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ \frac{dV_y}{dt} + \frac{k}{m}V_y = -g \ldots\ldots\ldots.\ldots(2) \end{cases}$$

المعادلة (1) تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بدون طرف ثاني.

المعادلة (2) تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بوجود طرف ثاني.

*حل المعادلة (1): $\frac{dV_x}{dt} + \frac{k}{m}V_x = 0$

هي نفسها المعادلة: $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0$

المعادلة المميزة هي: $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \Delta = \left(\frac{k}{m}\right)^2 \quad \Rightarrow \Delta > 0$$

تقبل حلين: $r_1 = 0\ ,\ r_2 = -\frac{k}{m}$

حلها هو من الشكل: $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

$$x(t) = A + Be^{\frac{-k}{m}t}$$

* من الشروط الابتدائية لدينا:

$* \ t = 0, \qquad x = 0$

$$0 = A + Be^{\frac{-k}{m}(0)} \Rightarrow A = -B$$

$* \ t = 0, \qquad V_{0x} = V_0 \cos\alpha$

$$x(t) = A + Be^{\frac{-k}{m}t} \Rightarrow \dot{x}(t) = V_x = -\frac{k}{m}Be^{\frac{-k}{m}t} \Rightarrow V_0\cos\alpha = -\frac{k}{m}Be^{\frac{-k}{m}(0)}$$

$$\Rightarrow V_0\cos\alpha = -\frac{k}{m}B \Rightarrow B = -\frac{V_0 m}{k}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow A = -B = \frac{V_0 m}{k}\cos\alpha$$

لدينا : $x(t) = A + Be^{\frac{-k}{m}t}$

ومنه: $x(t) = \frac{V_0 m}{k}\cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$$\Rightarrow V_x(t) = +V_0\cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\Rightarrow \gamma_x(t) = -\frac{k}{m}V_0\cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t}$$

*حل المعادلة (2): $\frac{dV_y}{dt} + \frac{k}{m}V_y = -g$

هي نفسها المعادلة: $\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g$

فيكون حل المعادلة (2) عبارة عن مجموع حلين :الحل العام و الحل الخاص:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

<u>*- الحل العام y_h (حل المعادلة المتجانسة) :</u>

- حل المعادلة بدون طرف ثاني أي: $\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = 0$

الحل من الشكل: $y_h(t) = A' + B'e^{-\frac{k}{m}t}$

<u>*- الحل خاص</u>: y_P

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g$$

- إذا كان الطرف الثاني كثير الحدود درجته n فان y_P يكون عبارة عن كثير الحدود درجته n+1

و بما ان الطرف الثاني في حالتنا عبارة عن كثير حدود درجته صفر، نفرض أن

y_P كثير حدود من الدرجة الأولى وعليه:

$$y_p = C\ t \ \rightarrow \dot{y}_p = C = \rightarrow \ddot{y}_p = 0$$

*نعوض في المعادلة فنجد: $0 + \frac{k}{m}c = -g \ \rightarrow c = -\frac{gm}{k}$

إذن $y_p = -\frac{gm}{k}t$

فعليه فالحل الكلي: $y(t) = y_G(t) + y_p(t)$

$$y(t) = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\mathrm{t}} - \frac{gm}{k}t$$

<u>*من الشروط الابتدائية :</u>

<u>$* \ t = 0, \qquad y = 0$</u>

$$0 = A' + B'e^{\frac{-k}{m}(0)} - \frac{gm}{k}(0) \Rightarrow A' = -B'$$

<u>$* \ t = 0, \qquad V_{0y} = V_0 \sin\alpha$</u>

$$y(t) = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\mathrm{t}} - \frac{gm}{k}t \Rightarrow \dot{y}(t) = V_y = -\frac{k}{m}B'e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}$$

$$\dot{y}(0) = V_0 \sin\alpha = -\frac{k}{m}B'e^{-\frac{k}{m}(0)} - \frac{gm}{k}$$

$$\Rightarrow B' = -\frac{m}{k}(V_0 \sin\alpha + \frac{gm}{k})$$

$$\Rightarrow A' = -B' = \frac{m}{k}(V_0 \sin\alpha + \frac{gm}{k})$$

لدينا : $y(t) = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\mathrm{t}} - \frac{gm}{k}t$

ومنه: $y(t) = \frac{m}{k}\left(V_0 sin\alpha + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{gm}{k}t$

$$V_y = \left(V_0 sin\alpha + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$\gamma_y = \frac{-k}{m}\left(V_0 sin\alpha + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

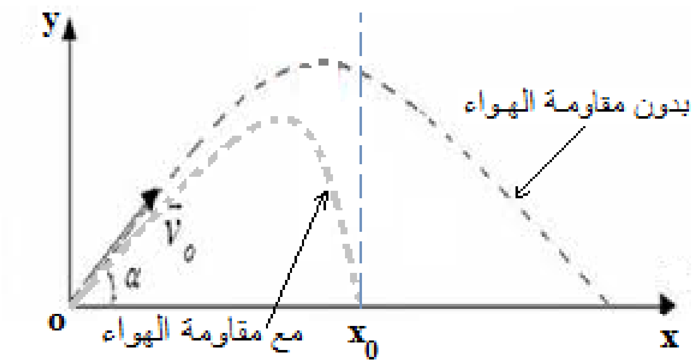
$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = \dfrac{V_0 m}{k}\cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ y(t) = \dfrac{m}{k}\left(V_0 sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \dfrac{gm}{k}t \end{cases}$$

إحداثيات متجه السرعة

$$\vec{V}_M = \begin{cases} V_x(t) = +V_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{k}{m}t} \\ V_y(t) = \left(V_0 sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$

إحداثيات متجه التسارع

$$\vec{\gamma}_M = \begin{cases} \gamma_x(t) = -\dfrac{k}{m} V_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{k}{m}t} \\ \gamma_y(t) = \dfrac{-k}{m}\left(V_0 sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} \end{cases}$$

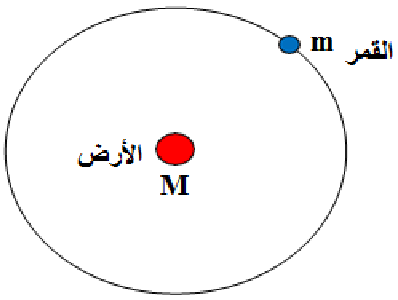


2- تطبيق قوانين نيوتن على حركة القمر حول الأرض :

لمعرفة القوة المتسببة في حركة كوكب القمر ذو الكتلة m و هو يدور حول كوكب الأرض ذو الكتلة M ، نتبع الطريقة التالية: نفرض أن الجملة (قمر + أرض) معزولة في هذا الفضاء . و سنحاول دراسة حركة القمر بالنسبة لمعلم أرضي مع اعتبار حركة القمر دائرية منتظمة حول الأرض.

** الدراسة النظرية:*

بفرض أن القمر يدور حول الأرض بحركة دائرية منتظمة، هذا يعني أن القمر خاضع لتسارع مركزي $\vec{a}$ شدّته :



$$a = \frac{v^2}{r}$$

و حسب القانون الثاني لنيوتن ، القمر يخضع لقوة شدّها:

$$F = ma = m\frac{v^2}{r}$$

بما أن الحركة دائرية فإن السرعة الخطية v لها علاقة بالدور T للحركة.

$$v = \frac{2\pi}{T}.r \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$$

هذا يعني أن:

$$F = \frac{4\pi^2}{T^2}mr$$

و حسب قانون كيبلر الثالث فإن مربع الدور يتناسب مع مكعب نصف القطر

$$\frac{T^2}{r^3} = k \Rightarrow T^2 = kr^3$$

و بتعويض T^2 عبارة في علاقة القوة نجد:

$$F = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$$

المقدار $\frac{4\pi^2}{k}$ له علاقة بالكوكب الموجود في المركز فقط ، وفي هذه الحالة له علاقة بكتلة الأرض فقط أي أن:

$$\frac{4\pi^2}{k} = GM$$

و منه عبارة القوة تصبح:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

-هذه العبارة تمثل قوة الجذب بين كتلتين m و M يبعدان عن بعضهما البعض بمسافة r اكتشفه إسحاق نيوتن سنة 1687 م و تم تعميمه على كل الأجسام التي لها كتل. تدعى هذه العلاقة بقانون الجاذبية الكونية.

نص القانون :

هناك قوة جذب بين كل جسمين لهما كتلتين m_A و m_B تفصل بين مركزيهما مسافة r تعطى بالعلاقة:

$$\left|\overrightarrow{F_{A/B}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{B/A}}\right| = G\,\frac{m_A\, m_B}{r^2}$$

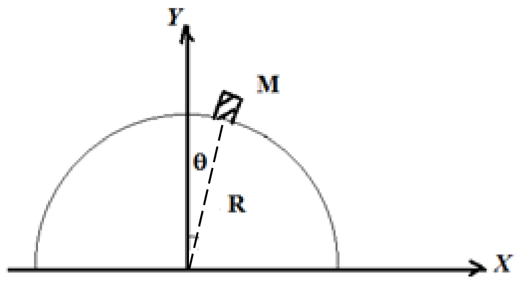
حيث G :ثابت الجاذبية الكونية وقيمته في جملة الوحدات الدولية هي:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \ \text{(S.I)}$$

تمارين (Exercices)

تمرين 01:

- جسم كتلته m موجود عند قمة نصف كرة من الجليد نصف قطرها R ينزلق دون احتكاك و دون سرعة ابتدائية.



1- حدد مجموع القوى التي تؤثرعلى الجسم، ثم أحسب قوة رد الفعل عند النقطة M بدلالة الزاوية θ, g و m حيث g يمثل تسارع جاذبية الأرض.

2- أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم الكرة.

تمرين 02:

يعطى شعاع الموضع لجسم كتلته 6 Kg بـــ:

$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\,\vec{\imath} + (-4t^3)\vec{\jmath} + (3t+2)\vec{k}$$

أوجد:

1 - القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم .

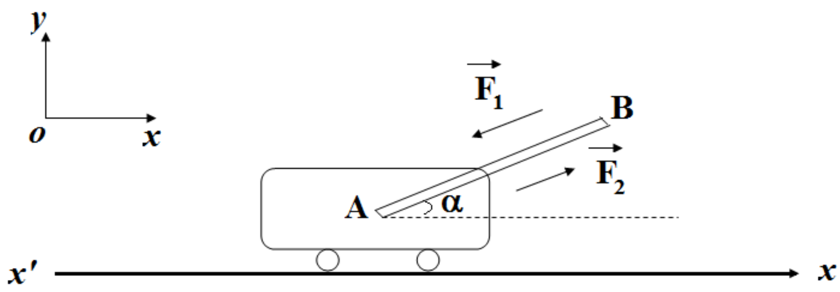
2- عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمبدأ .

3- كمية الحركة $\vec{P}$ للجسم و عزمه الحركي $\vec{L}_{/0}$ بالنسبة للمبدأ .

4- تأكد أن $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{\mathrm{dt}}$ و أن $\vec{M}_{/0}(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}}{\mathrm{dt}}$.

تمرين 03:

- يحرك رجل عربة كتلتها m على طريق أفقي خشن (معامل احتكاكه μ) فيدفعها بقوة $\vec{F}_1$ لتتحرك نحوى الأمام بتسارع $\vec{\gamma}$ ثم يدفعها بقوة $\vec{F}_2$ (بواسطة الذراع AB) نحو الخلف فتتحرك بنفس التسارع $\vec{\gamma}$. أثبت أن إحدى القوتين أكبر من الأخرى .



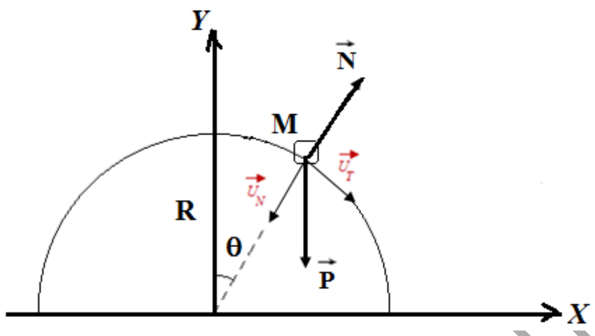
حلول التمارين

حل التمرين 01

مجموع القوى التي تؤثر على الجسم (عدم وجود احتكاك) هي:

- قوة الثقل $\vec{P}$

- قوة رد الفعل الناظمي $\vec{N}$



بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط في القاعدة الذاتية $\vec{U}_N, \vec{U}_T$ نجد:

وفق $\vec{U}_T$: $P\ sin\theta = m\ \gamma_T = m\dfrac{dV}{dt}$ ……………..(1)

وفق $\vec{U}_N$: $-N + P\ cos\theta = m\ \gamma_N = m\dfrac{V^2}{R}$ ………..(2)

- بما أن الحركة دائرية لدينا: $V = R\omega = R\dfrac{d\theta}{dt}$

حيث ω هي السرعة الزاوية لـ M.

نضرب (1) في $\dfrac{d\theta}{dt}$:

$$mg\ sin\theta\ \frac{d\theta}{dt} = m\frac{dV}{dt}\frac{d\theta}{dt} = m\frac{dV}{dt}\frac{V}{R}$$

$$\Rightarrow g\ sin\theta\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{dV}{dt}\ \frac{V}{R}$$

$$\int_0^\theta g\ sin\theta\ d\theta = \frac{1}{R}\int_0^V\ V\ dV\ \ \Rightarrow Rg\int_0^\theta\ sin\theta\ d\theta = \int_0^V V\ dV$$

$$\Rightarrow V^2 = 2\mathrm{R}g\ (1 - cos\theta)$$

من (2) نستنتج عبارة رد الفعل N :

$$N = mg\ (3cos\theta - 2)$$

2- إيجاد الزاوية التي يغادر بها الجسم الكرة:

أثناء المغادرة $N = 0$

$$mg\ (3cos\theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = arc\cos 2/3 = 48.19°.$$

حل التمرين 02

1-القوة المؤثرة على الجسم:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F} = 36\,\vec{\imath} - 144t\,\vec{\jmath}$$

2-عزم القوة بالنسبة للمبدأ:

$$\vec{M}_{/0}(\vec{F}) = \vec{r} \wedge\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{/0}(\vec{F}) = (432t^2 + 288t)\,\vec{\imath} + (108t + 72)\vec{\jmath} + (-288t^3 + 864t^2)\vec{k}$$

3- كمية الحركة الجسم:

$$\vec{P} = m\vec{v} = 36(t-1)\,\vec{\imath} - 72t^2\,\vec{\jmath} + 18\,\vec{k}$$

4 -العزم الحركي بالنسبة للمبدأ:

$$\vec{L}_{/0} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t - 36 & -72t^2 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = (144t^3 + 144t^2)\,\vec{\imath} + (54\,t^2 + 72t - 72)\vec{\jmath} + (-72t^4 + 288t^3)\vec{k}$$

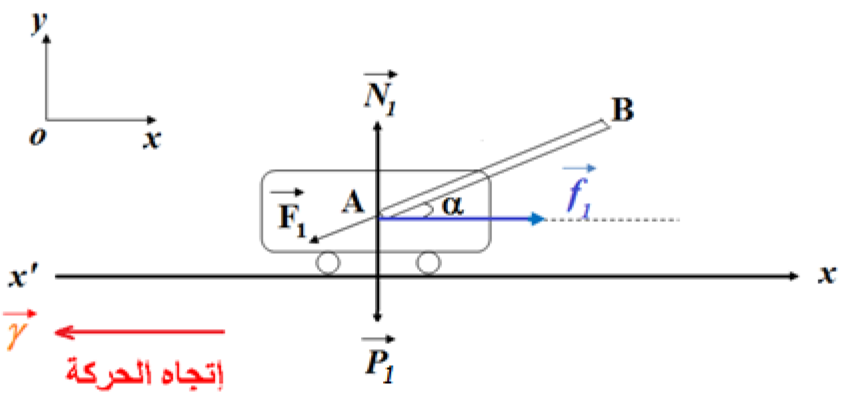
$$\vec{P} = 36(t-1)\,\vec{\imath} - 72t^2\,\vec{\jmath} + 18\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{P}}{\mathrm{dt}} = 36\,\vec{\imath} - 144t\,\vec{\jmath} \;=\; \vec{F}$$

كذلك $\vec{M}_{/0}(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}}{\mathrm{dt}}$

حل التمرين 03

1- حالة الدفع نحو الأمام:



بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{f}_1 = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور Ox, Oy نجد:

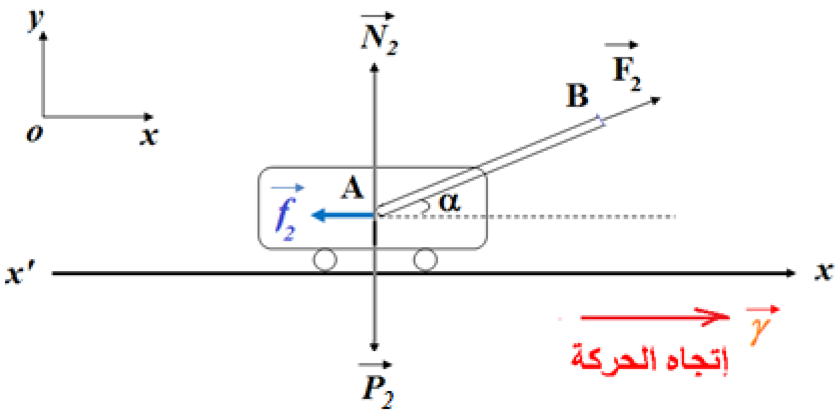
$$Ox: \;\; f_1 - F_1 cos\alpha = -m\gamma \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Oy: \;\; N_1 - P_1 - F_1 sin\alpha = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

لدينا : $f_1 = \mu\ N_1$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{m(\gamma + \mu\, g)}{cos\alpha - \mu\, sin\alpha}$$

<u>- حالة السحب نحو الخلف:</u>



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{f}_2 = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور Ox, Oy نجد:

$$Ox: \ -f_2 + F_2 cos\alpha = m\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$Oy: \ N_2 - P_2 + F_2 sin\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

لدينا : $f_2 = \mu\ N_2$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{m(\gamma + \mu\, g)}{cos\alpha + \mu\, sin\alpha}$$

∴ نلاحظ أن:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{cos\alpha + \mu\, sin\alpha}{cos\alpha - \mu\, sin\alpha} > 1 \Rightarrow F_1 > F_2$$

لأن:

$$cos\alpha + \mu\, sin\alpha \ > \ cos\alpha - \mu\, sin\alpha$$

الفصل الخامس:

العـــــمل والطاقـــــة

الفصل الخامس: العـــــــمل والطاقـــــة

Travail et Energie

1-V – مقدمـــــــة :

العمل (الشغل) الميكانيكي في علم الفيزياء هو كمية الطاقة اللازمة لتحريك جسم ما بقوة ما وبمسافة ما.

العمل الميكانيكي يتوقف على:

- شدة القوة $\vec{F}$ المنجزة للعمل.
- مقدار الانتقال لنقطة تأثيرها من A إلى B
- الزاوية (α) المحصورة بين شعاع القوة $\vec{F}$ و شعاع الانتقال $\overrightarrow{AB}$

تعريف القوة الثابتة: نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها ثابتة إذا كانت :

- ثابتة في القيمة (الشدة).
- ثابتة في الاتجاه .

الطاقـة: تُعرَّف في الفيزياء بأنها القدرة على أداء شغل. فمثلاً زيادة سرعة سيارة أو رفع حجر يتطلب شغلاً. وتقاس الطاقة والشغل بالوحدات نفسها. ويخلط الناس كثيرًا بين الطاقة والقدرة والقوة. فالقدرة هي معدّل بذل الشغل. والقوة هي الدفع أو الجذب المبذول على الجسم. وتؤدي القوة شغلاً طالما أنها تحرّك الجسم، ويمكن تعيين كمية الشغل بشدة القوة المستخدمة والمسافة التي يتحركها الجسم. والطاقة التي تقترِن بالحركة تُسمّى الطاقة الميكانيكية.

2-V – تعريف عمل قوة:

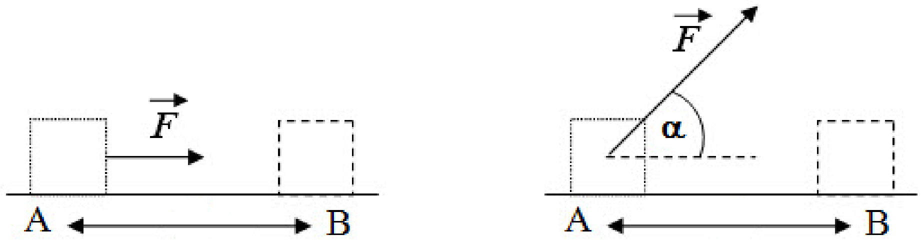
1- تعريف عمل قوة ثابتة:

- إن عمل قوة ثابتة $\vec{F}$ عندما تنتقل نقطة ثابتة تأثيرها من A إلى النقطة B يعطى بالجداء السلمي :

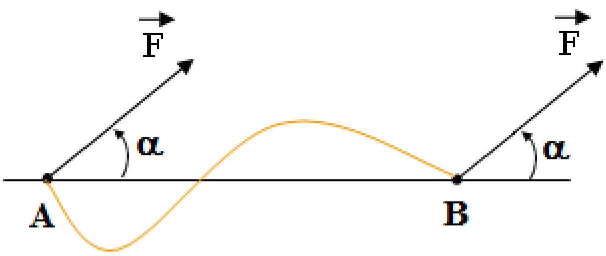
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\,.\overrightarrow{AB} = F.AB.cos\alpha$$

وحدة قياس العمل في نظام الوحدات الدولية هي الجول ويرمز له بـ : J حيث: $1\ \text{Joule} = 1\text{Nm}$

وفي الكهرباء نستعمل الإلكترون فولط : $1\ ev = 1{,}6\,.\,10^{-19}\,Joule$



ملاحظة: عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع لنقطة التأثير من A إلى B، أي أن العمل $W_{A\to B}(\vec{F})$ له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيم أو منحني.



2- تعريف عمل قوة غير ثابتة:

إذا كانت القوة $\vec{F}$ متغيرة في الشدّة فإن عملها لا يساوي $\vec{F}\,.\overrightarrow{AB}$ بل يجب تقسيم المسار إلى انتقالات عنصرية $d\vec{r}$ و ندعو عمل القوة خلال الانتقال العنصري بالعمل العنصري dW.

أ)- العمل العنصري :

ليكن الجسم M ينتقل على مسار كيفي خلال فترة زمنية صغيرة dt ينتقل خلالها من الموضع M الى الموضع 'M يعبر عن هذا الإنتقال بـ $d\vec{r}$ حيث :

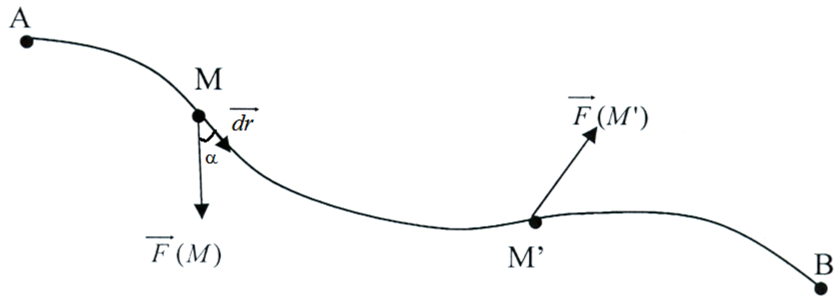
$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$$

يعرف العمل العنصري للقوة $\vec{F}$ بـــ :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = F.dr.cos\alpha$$

حيث: $F.cos\alpha = F_T$

F_T : المركبة المماسية للقوة المؤثرة في هذه الحالة : $dW = F_T.dr$



هذا يعني أن المركبة المماسية للقوة المؤثرة هي التي تعمل. أما المركبة العمودية على المسار لا تعمل أي أن عملها يساوي الصفر.

$*\theta = \frac{\pi}{2},\quad \vec{F} \perp \overrightarrow{dr} \quad \Leftarrow \quad dW = 0$

كل قوة عمودية على مسار الحركة يكون عملها معدوما.

$* \; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن : $dW > 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ قوة محركة $\Leftarrow$ العمل محرك.

$* \; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن : $dW < 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ قوة مقاومة $\Leftarrow$ العمل مقاوم.

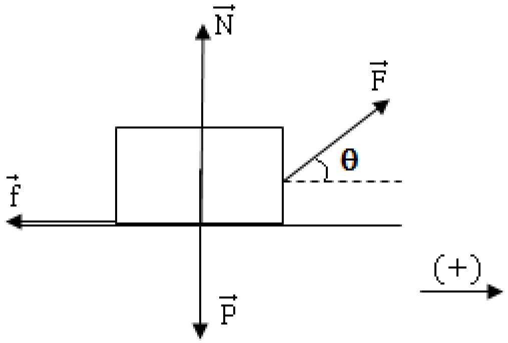
*اذا كانت $\vec{F}$ ثابتة : $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A})$

$$* \; \theta = 0,\; \vec{F} /\!/ d\vec{r} \Leftarrow W = \int_A^B F.dr$$

<u>مثال :</u>

الجسم الممثل على الشكل خاضع لأربع قوى ثابتة وهو ينتقل على مستوى أفقي.

ليكن S انتقال الجسم:



- عمل القوة $\vec{F}$: $w_{\vec{F}} = F.S\cos\theta$

- عمل القوة المقاومة $\vec{f}$: $w_{\vec{f}} = -f.S$

- عمل الثقل $\vec{P}$: $w_{\vec{P}} = 0$

- عمل القوة الناظمية $\vec{N}$: $w_{\vec{N}} = 0$

V- 3– العبارة التحليلية للعمل :

أ)- الإحداثيات الديكارتية :

نكتب عبارة القوة كما يلي : $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$

و نكتب عبارة الانتقال العنصري كما يلي : $d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

فنحصل على العبارة التحليلية للعمل العنصري:

$$w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

ب)- الإحداثيات الأسطوانية :

عبارة القوة : $\vec{F} = F_\rho\vec{U}_\rho + F_\theta\vec{U}_\theta + F_z\vec{k}$

عبارة الانتقال العنصري : $\overrightarrow{dr} = d\rho\,\vec{U}_\rho + \rho d\theta\,\vec{U}_\theta + dz\,\vec{k}$

العبارة التحليلية للعمل العنصري : $W = \int F_\rho\,d\rho + \int F_\theta \rho\,d\theta + \int F_z\,dz$

ج)- الإحداثيات الذاتية :

عبارة القوة : $\vec{F} = F_T\vec{U}_T + F_N\vec{U}_N$

عبارة الانتقال العنصري : $\overrightarrow{dr} = ds\,\vec{U}_T = vdt\,\vec{U}_T$

العبارة التحليلية للعمل العنصري : $W = \int F_T.v.dt$

د)- الإحداثيات الكروية :

عبارة القوة : $\vec{F} = F_r\vec{U}_r + F_\theta\vec{U}_\theta + F_\varphi\vec{U}_\varphi$

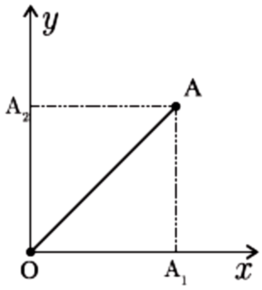
عبارة الانتقال العنصري : $d\vec{r} = dr\,\vec{U}_r + rd\theta\,\vec{U}_\theta + rsin\theta d\varphi\,\vec{U}_\varphi$

العبارة التحليلية للعمل العنصري : $W = \int F_r\,dr + \int F_\theta\,rd\theta + \int F_\varphi\,rsin\theta\,d\varphi$

مثال:

لتكن القوّة $\vec{F}$ معطاة بالعلاقة التالية:

$$\vec{F} = a(x+2y)\,\vec{i} + bxy\,\vec{j}$$



ولنحسب عمل هذه القوّة لدى انتقالها بين النقطتين O(0,0) و A(1,1) (لإحداثيّات m) وذلك بإتباع طريق مستقيم مباشر من O إلى A (انظر الشكل) . ثم بإتباع الطريق OA_1A حيث A_1 مسقط A على المحور OX.

- الحل:

$$w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy$$

$$w = \int a(x+2y)\,dx + \int bxy\,dy$$

* إذا اتّبعنا الطريق المستقيمة المباشرة OA نلاحظ أن ثّمة علاقة بين x و y أثناء هذا الانتقال، هي معادلة المستقيم OA وهي: $x = y$ فنستنتج من ذلك أنّ $dx = dy$ ومن ثَمَّ:

$$w = \int a(x+2x)\,dx + \int bxx\,dx = \int (3ax + bx^2)\,dx$$

ويكون عمل القوّة $\vec{F}$ أثناء الانتقال من O إلى A على المستقيم OA:

$$w_{OA} = \int_0^A dw = \int_0^A (3ax + bx^2)\,dx = 3a\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + b\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$w_{OA} = \frac{3a}{2} + \frac{b}{3}$$

* أمّا على المسار OA_1A فيمكن اعتبار عمل القوّة $\vec{F}$ مجموع عملين، الأوّل أثناء الانتقال OA_1 والآخر لدى الانتقال A_1A .

ونلاحظ أنّه أثناء الانتقال OA_1 (على المحور Ox) تبقى قيمة $y = 0$ ثابتة $\Leftarrow dy = 0$.

على حين تتغيّر x من 0 إلى1.

$$w_{OA_1} = \int_0^{A_1} a(x+2(0))\,dx = \int_0^1 ax\,dx = a\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{2}$$

على حين تظلّ قيمة $x = 1$ ثابتة أثناء الانتقال A_1A ومن ثَمَّ $dx = 0$ على حين تتغيّر y من 0 إلى 1.

$$w_{A_1A} = \int_{A_1}^{A} a((1)+2y)\,(0) + b(1)y\,dy = \int_0^1 by\,dy = b\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{b}{2}$$

*- نستنتج مما سبق أنّ عمل القوّة $\vec{F}$ أثناء الانتقال OA_1A هو:

$$w_{OA_1A} = w_{OA_1} + w_{A_1A} \Rightarrow w_{OA_1A} = \frac{a+b}{2}$$

نلاحظ أن: $w_{OA_1A} \neq w_{OA}$ مختلفان في الحالة العامّة (لقيم a وb).

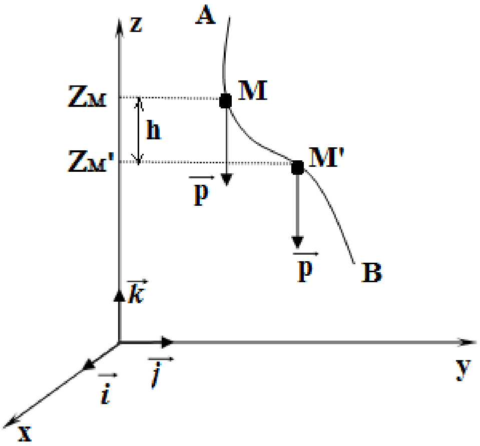
V- 4 - أمثلة على بعض أعمال القوى:

أ)- عمل قوة الثقل :

ليكن جسم M ينتقل تحت تأثير ثقله وفق مسار MM' في معلم ثلاثي الأبعاد $R(O,X,Y,Z)$ المزود بأشعة الوحدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$\vec{P}$ قوة الثقل تعطى بالعلاقة $\vec{P} = -m\vec{g}$ وتمثل قوة جذب الأرض لهذا الجسم .

قوة الثقل $\vec{P}$ تكون دائمًا شاقولية نحو الأسفل نقطة تأثيرها هي مركز الثقل لهذا الجسم. عندما ينتقل الجسم من النقطة M إلى M' فإن:

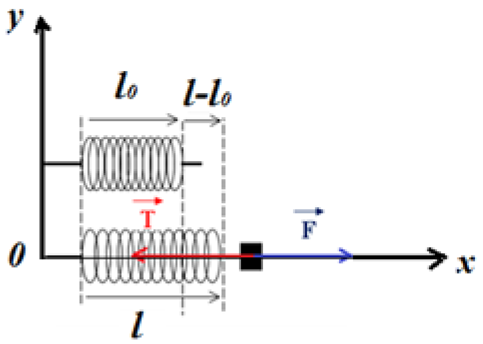


$$W_{\vec{P}} = \int_{M}^{M'} \vec{P}.\overrightarrow{dl} \,, \quad \begin{cases} \vec{P} = -mg\vec{k} \\ \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \end{cases}$$

$$W_{\vec{P}} = -\int_{M}^{M'} mg\,dz = -mg\int_{M}^{M'} dz = -mg(Z_{M'} - Z_M) = mg(Z_M - Z_{M'})$$

$$h = Z_M - Z_{M'} \Rightarrow W_{\vec{P}} = mgh$$

ب)- عمل قوة المرونة :



ليكن لدينا نابض تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$

l_0 : طول النابض وهو في حالة راحة.

l: طول النابض تحت تأثير القوة $\vec{F}$

لتكن $\vec{T}$ هي قوة إرجاع النابض

في حالة التوازن : $\vec{F} = \vec{T}$

$$\vec{F} = -kx\,\vec{\imath}$$

- عند حساب عمل النابض نجد :

$$W_{\vec{F}} = \int \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx\,\vec{\imath}).(dx\,\vec{\imath}) = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$W_{\vec{F}} = -\frac{1}{2}\,k\,(x_2^2 - x_1^2) \Rightarrow W_{\vec{F}} = \frac{1}{2}\,k\,X^2$$

V- 5- الإستطاعة (القدرة) : *La puissance*

1- تعريف : تعرف الاستطاعة بأنها مشتق العمل بالنسبة للزمن.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} \Rightarrow P = \vec{F}.\vec{v}$$

- حيث $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على الجسم.

$\vec{v}$: سرعة الجسم المتحرك.

وحدة الإستطاعة هي الواط $(watt)$ حيث $1\,w = 1\,J/s = 1Nm/s$

V- 6 - الطاقة الحركية *Energie cinétique:*

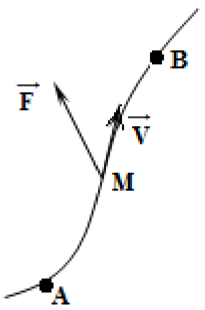
1- تعريف : نعرّف الطاقة الحركية لنقطة مادية M كتلتها m ومتحركة بسرعة$\vec{v}$ بالمقدار E_c

حيث:
$$E_C = \tfrac{1}{2}mV^2 = \frac{P^2}{2m}$$

حيث : $\vec{P} = m\vec{V}$ (كمية الحركة).

- الطاقة الحركية هي نوع من الطاقة التي يملكها الجسم بسبب حركته.

- لتكن النقطة المادية M كتلتها m تتحرك بين النقطتين A و B تحت تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$ حسب المبدأ الأساسي للتحريك لدينا:



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

خلال الانتقال العنصري ل $\vec{F}$ ، تكتب الأعمال العنصرية كما يلي:

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{l} = m\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}\,dt.$$

لان:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{V}(t).dt$$

ينتج عنه:

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{l} = d(\tfrac{1}{2}mV^2)$$

يكون العمل المنجز خلال الانتقال بين النقطتين A و B:

$$W_{\vec{F}} = W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B d(\tfrac{1}{2}mV^2) = \int_A^B dE_C = E_C(B) - E_C(A)$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_C$$

∴ الطاقة الحركية هي نتيجة حركة جسم ما أثناء خضوعه لقوة $\vec{F}$.

وحدة الطاقة الحركية هي الجول.

2- بعض خصائص الطاقة الحركية:

- كل جسم في حالة حركة فإنه يملك طاقة حركية .
- الطاقة الحركية تتناسب طردًا مع كتلة الجسم m.
- الطاقة الحركية تتناسب طردًا مع مربع سرعة الجسم V
- الطاقة الحركية تتعلق بالمعلم الذي نَدرس من خلاله الحركة.

ملاحظة: إن عبارة الطاقة الحركية المعطاة هنا صالحة فقط في حالة الحركة الانسحابية للجسم.

3 - نظرية الطاقة الحركية :

النص : في معلم غاليلي التغيير في الطاقة الحركية لنقطة مادية بين موضعين A وB يساوي عمل محصلة القوى المؤثرة على هذه النقطة خلال انتقالها بين A وB .

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = W_{A\to B}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}})$$

عمل جميع القوى المحافظة و الغير محافظة.

أ) - القوى المحافظة و الغير محافظة :

- نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها محافظة أو مشتقة من كمون إذا كان عملها مستقلا عن المسلك المتبع ويتعلق فقط بنقطتي البداية والنهاية. في هذه الحالة نقول أن $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة (مشتقة من كمون) وتسمى $\vec{F}$ قوة محافظة يرمز لها بــ $\vec{F}_C$.

مثال : - قوة الـــــثقل, - قوة ارجاع النابض , - قوة الجاذبيـــــة, أي قوة ثابتة بصفة عامة.

نبرهن في هذه الحالة أنّه يوجد تابع سلّمي $U(x,y,z)$ بحيث:

$$\text{قوة محافظة } \vec{F} \Leftrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U$$

ندعو المقدار السلّمي $U(x,y,z)$ الطاقة الكامنة الموافقة للقوّة $\vec{F}$

- نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها غير محافظة اذا كان عملها يتعلق بالمسار المتبع يرمز لها بــ $\vec{F}_{NC}$. غالبا، القوى غير المحافظة هي قوى الإحتكاك، التي تقاوم حركة الأجسام، و تكون مسؤولة عن تعطيل

الحركة و تخامدها، و تؤدي إلى تبديد الطاقة الحركية ضياع أو تحويل غير مفيد (إلى حرارة تضيع في الوسط المحيط ، و تعتبر المستهلك الأساسي للطاقة المستخدمة).

V- 7- الطاقة الكامنـــة *Energie potentielle*:

1– تعريف: الطاقة الكامنة هي الطاقة الموجودة في الجسم بسبب وضعه أو حالته. وهي تمثل الشغل الذي بُذِل فعلاً، وتسمّى أحياناً الطاقة المختزنة. فإذا رفعنا صندوقاً من الأرض إلى منضدة، فإن طاقة وضع الجسم سوف تزداد بمقدار كمية الشغل اللازمة لرفعه إلى منضدة. ويمكن تحويل الطاقة الكامنة إلى أشكال أخرى من الطاقة. فإذا ما دفعنا الصندوق من فوق المنضدة فسوف يبدأ في السقوط وتتحول طاقته الكامنة إلى طاقة حركية.

- إن عمل القوى المحافظة لا يتعلق بالمسار المتبع، يتعلق فقط بنقطة البداية ونقطة النهاية. يمكن التعبير عن عمل هذه القوى من خلال دالــــة تسمى الطاقة الكامنة E_P

$$E_P\,(B) - E_P(A) = -W_{AB}(\overrightarrow{\mathrm{F}_C})$$

$$\Delta E_P = -W_{A\to B}\left(\overrightarrow{\mathrm{F}_C}\right)$$

$\vec{F}_C$ قوة محافظة.

في حالة التغيرات الصغيرة : $\Delta E_P = dE_P$

نستعمل عبارة العمل العنصري : $dE_P = -\vec{F}_C\,.\,d\vec{l}$

و نعلم انه في الإحداثيات الديكارتية:

$$E_P = E_P(x,y,z) \Rightarrow dE_P = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

- من جهة أخرى :

$$dE_P = -\vec{F}_C\,.\,d\vec{l} = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

بمطابقة مركبات $\vec{F}$ نكتب:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \text{ و } F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \text{ و } F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

شعاعيا لدينا:

$$dE_P = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{k}\right).(dx\,\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\,\vec{k})$$

$$dE_P = \quad -\overrightarrow{grad}\ E_p \quad . \ d\vec{l}$$

في النهاية نستنتج أن:

$$\vec{F}_C = \ -\overrightarrow{grad}\ E_p \Leftrightarrow E_p = -\int \vec{F}_C.\overrightarrow{dl} + C$$

C بثابت تقريبي .

2- أمثلة عن الطاقة الكامنة لقوى محافظة :

أ) ـ الطاقة الكامنة الثقالية :

عندما نقوم برفع جسم ما من سطح الأرض إلى ارتفاع معين ، فإنه يستدعي منا أن نبذل شغلاً ضد الجاذبية الأرضية و الجسم يبدأ في تخزين هذا العمل المبذول على هيئة طاقة كامنة (أو طاقة الوضع). هذا الشكل من أشكال الطاقة مرتبط بحقل الجاذبية الأرضية و هذه الطاقة تدعى الطاقة الكامنة الثقالية. كما تتعلق هذه الطاقة بالارتفاع عن سطح الأرض. الجسم يكتسب هذه الطاقة عندما يزداد ارتفاعه عن سطح الأرض. وعندما نترك الجسم ليسقط لحاله فإن الطاقة الكامنة المخزنة فيه تتحول بشكل تدريجي إلى طاقة حركية وينتج عن ذلك زيادة سرعة الجسم مع انخفاض الارتفاع.

* في حالة صعود جسم نحو الأعلى لدينا: $\vec{F} = \vec{p} = -mg\vec{k}$

$$E_p(z) = -\int \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} + C = -\int -mg\ dz + C$$

$$E_P\ (z) = mgz + \mathrm{C}$$

نختار عند $0 = z ,0 = E_P \Leftrightarrow 0 = \mathrm{C}$

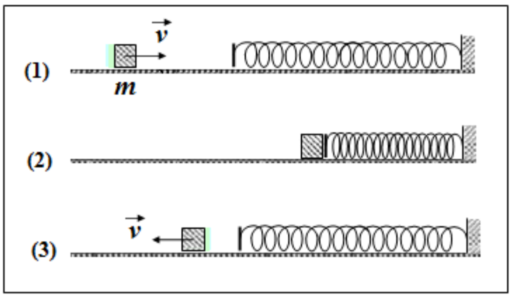
$$E_P\ (z) = mgz$$

ملاحظة:

في الحالة العامة إذا ارتفع الجسم عن موضعه الأصلي فإن طاقته الكامنة الثقالية تزداد وإذا انخفض الجسم عن ارتفاعه الأصلي فإن طاقته الكامنة الثقالية تنقص.

ب) الطاقة الكامنة المرونية :

ليكن نابض في حالة راحة ، وقد ثبتت بدايته وتركت نهايته حرّة ، لنفرض أن كتلته مهملة ، وأنه يمكن أن يتحرك على مستوى أفقي دون احتكاك. فإذا اندفع جسم صلب كتلته M و سرعته $\vec{V}$ حاملها يوازي محور النابض واصطدم بنهاية النابض تتناقص سرعة الجسم الصلب، وبالتالي طاقته الحركية وتتضاغط حلقات النابض بسبب المرونة التي تنشأ فيه .فيبذل النابض قوة معاكسة شدّتها تتغير بتغير المطال ، ويبدأ في تخزين طاقة لا تلبث أن تظهر بدفع النابض للجسم الصلب مرّة أخرى .هذه الطاقة نسميها الطاقة الكامنة المرونية للنابض الحلزوني ورمزها E_p .



لدينا قوة توتر النابض : $\vec{F} = \vec{T} = -kx\,\vec{i}$

$$E_p = -\int \vec{F}\,.\,\overrightarrow{dr} + C = -\int -k\,x\,dx + C$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 + C$$

عند توازن النابض: $E_p = 0\,, x = 0$

$$0 = 0 + C \;\Rightarrow C = 0 \Rightarrow E_p = ½kx^2$$

ملاحظة:

- وحدة الطاقة الكامنة المرونية هي الجول (J).
- وحدة ثابت المرونة k للنابض الحلزوني هي النيوتن على المتر(N/m).
- مقدار الاستطالة أو الانضغاط للنابض يقدر بالمتر(m).

ج)- الطاقة الكامنة للقوة الكهربائية :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{Qq}{r^2}\;\vec{u} = k\;\frac{Qq}{r^2}\;\vec{u}$$

بإتباع زمن المبدأ السابق نجد : $E_p = -kQq\frac{1}{r} + c$

من أجل r كبير جدا:

$$r \to \infty , \qquad E_p \to 0 \Rightarrow c = 0$$

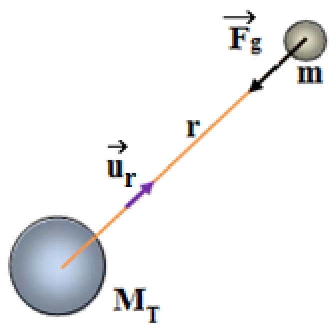
الكمون معدوم في الملا نهاية : $E_p = 0$

$$E_p = -kQq\frac{1}{r}$$

د) ـ الطاقة الكامنة للقوة الجاذبية :

ليكن لدينا جسم كتلته m يتحرك تحت تأثير القوة الجاذبية $\vec{F}_g$ التي تطبقها الأرض عليها وهي قوة محافظة.

$$\vec{F}_g(r) = -\frac{GM_Tm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$



حيث : $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{F}_g(r) = -\frac{GM_Tm}{r^2}.\frac{\vec{r}}{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}_g(r) = -\frac{GM_Tm}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F}_g(r) = -gr\vec{a}d\, E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\overrightarrow{u_r}$$

$$\frac{dE_p}{dr} = G\frac{M_Tm}{r^2} \Rightarrow E_p(r) = \int G\frac{M_Tm}{r^2}dr \Rightarrow E_p(r) = -G\frac{M_Tm}{r} + C$$

من أجل r كبير جدا:

$$r \to \infty , \qquad E_p \to 0 \Rightarrow C = 0$$

الكمون معدوم في الملا نهاية : $E_p = 0$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{GM_Tm}{r}$$

* **خواص القوى المشتقة من كمون** :

- من اجل القوى المحافظة $\vec{F}_C$ يكون العمل معدوما داخل مجال مغلق : $\oint dW = 0$

- دوران القوى المحافظة معدوم. $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}_C=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{\nabla}\wedge\left(-\vec{\nabla}.\vec{E}_p\right)=\vec{0}$$

- في حالة القوى المشتقة من الطاقة الكامنة فإن عملها يساوي ويعاكس التغيير في الطاقة الكامنة على نفس المسار.

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{\mathrm{F}_C})=-\,\Delta E_p$$

V- 8- الطاقة الميكانيكية *Energie mécanique*:

1– تعريف: الطاقة الميكانيكية هي الطاقة الناتجة عن الحركة، أي بسبب تأثير القوة على الأجسام. والطاقة الحركية هي الطاقة التي يتمتع بها الجسم لأنه يتحرك. وتتناسب طاقة حركة الجسم طردياً مع كتلته ومربع سرعته. ولهذا، فإنّ للقطار الذي يتحرّك بسرعة 80 كم في الساعة طاقة تعادل أربعة أمثال طاقة قطار آخر يتحرّك بسرعة 40 كم في الساعة. والقطار الساكن ليس له طاقة حركية.

- لتكن جملة متحركة بين نقطتين A و B تحت تأثير قوى محافظة وغيرمحافظة.

وفقا لنظرية الطاقة الحركية فإن :

$$\Delta E_C=E_C(B)-E_C(A)=\sum W_{A\to B}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}})$$

$$E_C\,(B)-E_C(A)=\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right)+\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

$\vec{F}_C$: قوة محافظة

$\vec{F}_{NC}$: قوة غير محافظة

اذن : $E_C\,(B)-E_C(A)=-\left(E_P\,(B)-E_P(A)\right)+\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$

لأن : $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right)=\left(E_P\,(A)-E_P(B)\right)=\Delta E_P$

ينتج: $\left(E_C\,(B)+E_P(B)\right)-\left(E_C\,(A)+E_P(A)\right)=\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$

هكذا ندخل كمية فيزيائية جديدة التي نطلق عليها الطاقة الكلية حيث :

E_M : الطاقة الميكانيكية (الكلية) $E_M = E_C + E_P$

E_C : الطاقة الحركية

E_P : الطاقة الكامنــة

إذن بين النقطتين A و B :

$$\left(E_M(B) - E_M(A)\right) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

$$\Delta E_M = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

مثال :

- حالة السقوط الحر : $E_M = ½\ mv^2 + mgh$
- حالة النابض : $E_M = ½\, mv^2 + ½\ k\,x^2$

2 - مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية:

أ) - في حالة القوى المحافظة :

إذا كان الجسم في حالة سقوط حر أي خاضعا لثقله فقط و ترك يسقط من ارتفاع معين ، فإن طاقته الكامنة الثقالية تتناقص بينما طاقته الحركية تزداد . لكن مجموع هاتين الطاقتين يبقى ثابتًا طوال الحركة ، فهو مقدار محفوظ (الطاقة الميكانيكية محفوظة خلال الزمن)، و يُعبر عنه بالعلاقة:

$$E_M = E_C + E_P = cte$$

أي ان:

$$\Delta E_M = 0$$

∴ هذا يعني أن التغير في الطاقة الحركية يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية.

$$\Delta E_C = -\Delta E_P$$

- هذا يعني أنه إذا كانت الجملة معزولة ميكانيكيا فإن الطاقة الميكانيكية محفوظة.

- مثال:

لدينا نابض مرن ثابت مرونته k و نطبق عليه قوة شد نحو الأسفل، فيتشوه و يزداد طوله بالمسافة (a)، ثم نتركه يهتز تحت تأثير قوة الارجاع، عند مسافة كيفية (x)

- طاقته الحركية هي: $E_c(x) = \frac{1}{2} m\, v^2$

طاقته الكامنة هي : $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$

الطاقة الكلية للنابض هي: $E_T(x) = E_c(x) + E_p(\mathrm{x}) = E_0$

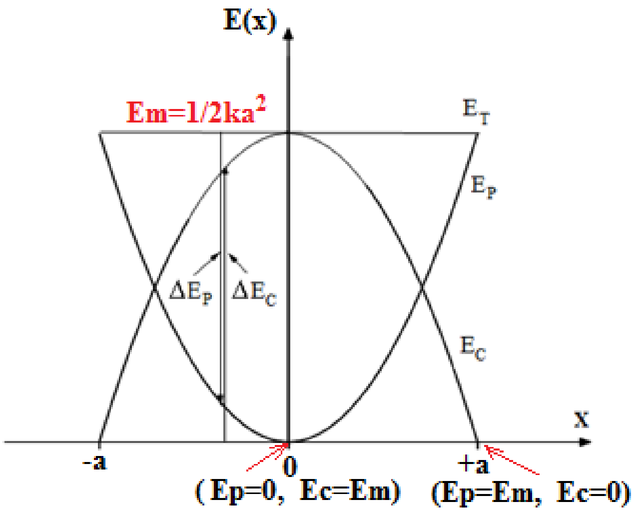
لتحديد قيمة هذه الطاقة نستعمل وضعية خاصة هي بداية الحركة ($x = a$) ، حيث تتحرك الكتلة بدون سرعة ابتدائية، لنجد : $E(a) = 0 + \frac{1}{2} k a^2 = E_0$

أي أن: $E_0 = \frac{1}{2} k a^2$

في الحقيقة الطاقة المخزنة داخل النابض، قدمناها له بإنجازنا العمل الميكانيكي عندما سحبنا الكتلة للمسافة (x=a) ، بعدها يستمر النابض في الاهتزاز بين الوضعيتين (a−، a+). في حالة وجود احتكاك يقاوم حركة الكتلة، فإن هذا الاهتزاز يتخامد بالتدريج لتتوقف الحركة بعد زمن معين.

نتيجة:

- يوضح الرسم البياني للطاقة $E(x)$ في الشكل أدناه حقيقة وجود أي انخفاض في الطاقة الكامنة يرافقه زيادة في نفسالكمية من الطاقة الحركية. أي ان هناك تبادلا مستمرا بين الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة حيث كل ما تفقده إحداهما تكتسبه الأخرى.



الطاقة الميكانيكية محفوظة

ب) - في حالة القوى غيرالمحافظة :

التغير في الطاقة الميكانيكية الكلية للجملة المتحركة ما بين النقطتين A وB يساوي مجموع الأعمال الخارجية الغير محافظة المطبقة على الجملة.

$$E_M(\mathrm{B}) - E_M(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

$$\Delta E_M = \sum_{A\to B} W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

- نلاحظ من هنا أن الطاقة الكلية غير ثابتة و التغير فيها غير معدوم بل يساوي عمل القوى غير المحافظة و الذي يمثل فقدان الطاقـــــــــة.

V -9 مناقشات منحنيات الطاقة الكامنة :

(Discussion des courbes d'énergie potentielle)

لتكن جسيمة تتحرك تحت تأثير قوة محافظة $\vec{F}$. دراسة منحنى الطاقة الكامنة لهذه الجسيمة يعطينا معلومات بخصوص طبيعة حركتها. سنوضح ذلك بناءً على مثال جسيمة تتحرك على طول المحور (x'Ox) (حركة أحادية البعد) بطاقة كامنة E_P. الشكل أدناه يوضح تغير الطاقة الكامنة E_P بدلالة x نرسم الدالة : $E_P = f(x)$

تكتب عبارة شدة القوة $\vec{F}$ على الشكل :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_P = -\vec{\nabla}E_P$$

في هذه الحالة لدينا:

$$F_x(x) = -\frac{dE_P(x)}{dx}$$

غير أن $\frac{dE_P(x)}{dx}$ تمثل ميل المنحنى $\mathrm{E_P(x)}$ الميل يكون موجبا حين يكون المنحنى متزايدا وموجها نحو الأعلى ويكون سالبا حين يكون المنحنى متناقصا وموجها نحو الأسفل. و هكذا فأن القوة $\vec{F}$ (وهي التي تكون إشارتها معاكسة للميل) تكون سالبة و موجهة نحو اليسار حين تكون الطاقة الكامنة

متزايدة وتكون موجبة و موجهة نحو اليمين حين تكون الطاقة الكامنة متناقصة. وضحنا هذه الحالة على الشكل أدناه بسهام أفقية وبمناطق أسفل الشكل.

- تكون الحركة ممكنة اذا استوفى الشرط : $E_C = E_M - E_P > 0$ تمثل المستقيمات الأفقية الطاقة الميكانيكية في حالات مختلفــــــــة.

✓ **الحالة الأولى** : الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (1) الذي يقطع المنحنى $E_P(x)$ في نقطتين A وB . الجسيمة تهتــــز بين الفاصلتين x_A و x_B حيث تنعدم السرعة عند هاتين النقطتين. يسمى هذا المجال " بئر الكمون" بحيث يبقى الجسم أسيرا في هذا البئر. غير أن حركتها غير ممكنة على يمين B وعلى يسار A لأن $E_C = E_M - E_P < 0$ وهذا مستحيل.

✓ **الحالة الثانية** : الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (2) الذي يقطع المنحنى $E_P(x)$ في أربع نقاط C, D ,F ,G . هناك منطقتان ممكنتان للحركة الإهتزازية للجسيمة : بين الفاصلتين x_C و x_D و بين الفاصلتين x_F و x_G غير أن الجسيمة لا يمكنها الاهتزاز إلا في إحدى المنطقتين ولا تستطيع القفز من منطقة إلى أخرى لأنه يجب عليها قطع المنطقة DF وهذا مستحيل (لأن في هذه المنطقة الطاقة الحركية سالبة $E_C = E_M - E_P < 0$) المنطقتان حيث الحركة ممكنة معزولتان بما نسميه حاجــــــزا للكمـــــون "عتبة الكمون" و تسمى المنطقتين CD و FG بئر الكمون.

✓**الحالة الثالثة** : الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (3) . الحركة تتم بين النقطتين H,I.

✓**الحالة الرابعة**: الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (4). الحركة لم تعد اهتزازيـــــــــة و الجسيمة تنتقل من k إلى ما لا نهاية.

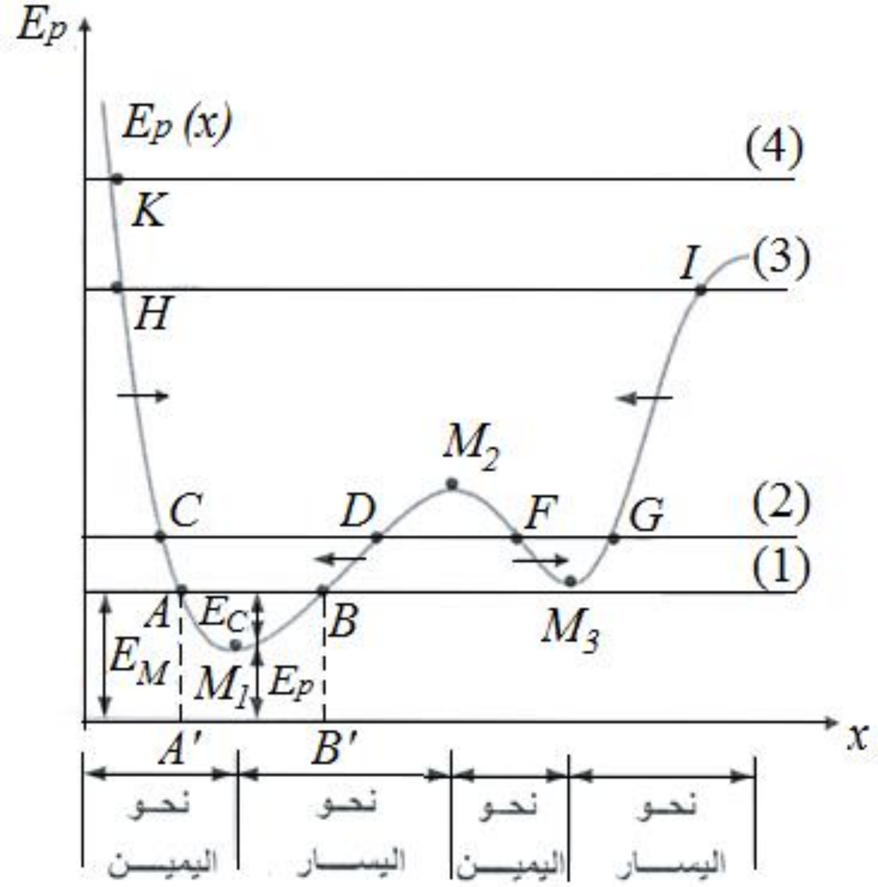
مواضـــــــع التوازن : (Position d'équilibre)

حيث تكون $\frac{dE_P}{dx} = 0$ وحتــــــــما F = 0 فأن الطاقة الكامنة تكون أعظمية أو أصغرية كما في النقاط M_1, M_2, M_3 هذه المواضع هي مواضع تــــــــوازن.

* **حين تكون $E_P(x)$ أصغرية :** التوازن مستقر (إذا تحركت الجسيمة قليلا ، كما في M_3, M_1 ، يمينا أو يسارا فإن قوة تؤثر عليها لإرجاعها إلى موضع توازنها).

* **حين تكون $E_P(x)$ أعظمية :** التوازن قلق أي غير مستقر (إذا تحركت الجسيمة قليلا ، كما في M_2، فإن قوة تؤثر عليها لإبعادها عن موضع توازنها).

النقاط: A ,B, C, D, F, G, H, I تسمى بنقاط التوقف . في هذه النقاط تتوقف الجسيمة أو تغير من اتجاه حركتها.



تمارين (Exercices)

تمرين 01:

I - أثرت قوة $\vec{F} = y\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath}$ على جسم إحداثيات موضعه في المستوي Oxy هي (x, y) ،
حدثت إزاحة للجسم من المبدأ O إلى النقطة $P(1,2)$ على المسارات التالية:

1- المسار OP مستقيم.

2- المسار المنكسر OAP حيث $A(1,0)$ نقطة على المحور Ox.

3- المسار قطع المكافئ $y = 2x^2$.

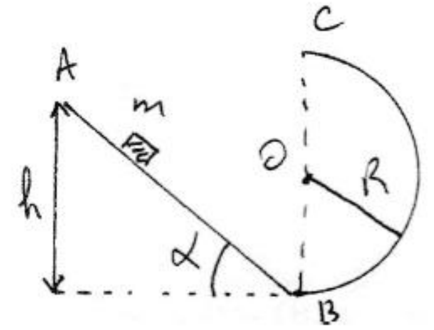
أحسب العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في كل حالة، علق على النتائج المتحصل عليها.

II - تخضع جسيمة كتلتها m لحقل قوى $\vec{F} = (-4x + y)\vec{\imath} + (x - z)\vec{\jmath} - y\vec{k}$

بين أن $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة E_p.

تمرين 02:

باستعمال انحفاظ الطاقة جد الشرط اللازم حتى تتمكن كتلته m من الوصول إلى C على الأقل بعد إنطلاقها من A بدون سرعة (نمهل الإحتكاك).



تمرين 03:

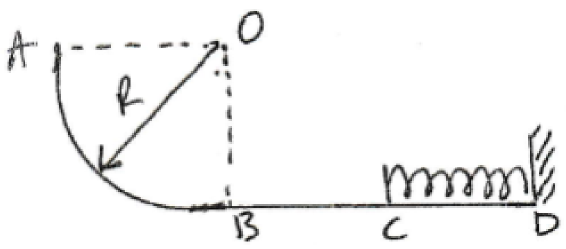
يتحرك جسم كتلته m على مسار $ABCD$ فينطلق من A بدون سرعة (نمهل الإحتكاك)

- أوجد سرعة m ورد الفعل عند B ثم التقلص الأعظمي للنابض المثبت في D (ثابت مرونته k)

باستعمال:

1) - نظرية الطاقة الحركية

2)- الطاقة الكلية .



حلول التمارين

حل التمرين 01

I - إيجاد العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في حالة :

1- المسار OP مستقيم.

$$\vec{F} = y\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$

وفق المستقيم الذي معادلته $y = ax$

$$O(0,0) \Rightarrow P(1,2) \Rightarrow 2 = a$$

$$y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$$

$$w = \int \vec{F}.d\vec{l} = \int F_x dx + \int F_y dy$$

$$w_{OP} = \int ydx + \int 2xydy = \int 2x\,dx + \int 2x.2x.2dx$$

$$w_{OP} = \int_0^1 (2x + 8x^2)dx \Rightarrow w_{OP} = x^2 \Big|_0^1 + \frac{8}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$$w_{OP} = \frac{11}{3}J$$

2- المسار المنكسر OAP حيث $A(1,0)$ نقطة على المحور Ox

$$w_{OP} = w_{OA} + w_{AP}$$

$$OA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad OP\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$dy=0 \quad \Leftarrow \quad y=Cst \qquad : A(1,0) \Leftarrow O(0,0)$$

$$dx=0 \quad \Leftarrow \quad x=Cst \qquad : P(1,2) \Leftarrow A(1,0)$$

$$w_{OA} = \int F_x dx = \int_0^1 y\, dx = 0J.$$

$$w_{AP} = \int F_y dy = \int_0^2 2xydy = \int_0^2 2ydy = 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 4\,J$$

$$w_{OP} = w_{OA} + w_{AP} = 4\,J.$$

3- المسار قطع المكافئ $y=2x^2$

$$y=2x^2 \Rightarrow dy = 4xdx$$

$$w_{OP} = \int ydx + \int 2xydy = \int 2x^2\, dx + \int 2x.(2x^2)(4x)dx$$

$$w_{oP} = \int_0^1 (2x^2 + 16x^4)dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + \frac{16}{5}x^5\Big|_0^1$$

$$w_{oP} = 3.87\text{ J}$$

- نلاحظ أن الأعمال الثلاثة مختلفة نتيجة المسالك المختلفة و بالتالي فالقوة المطبقة هي قوة غير محافظة (غير مشتقة من كمون).

II- $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة E_p $\Leftarrow$ $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

حساب: $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial(-y)}{\partial y} - \frac{\partial(x-z)}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial(-4x+y)}{\partial z} - \frac{\partial(y)}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(x-z)}{\partial x} - \frac{\partial(-4x+y)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = (-1+1)\vec{\imath} + (0)\vec{\jmath} + (1-1)\vec{k} = (0)\vec{\imath} + (0)\vec{\jmath} + (0)\vec{k} = \vec{0}$$

$\vec{F}$ مشتقة من كمون.

حل التمرين 02

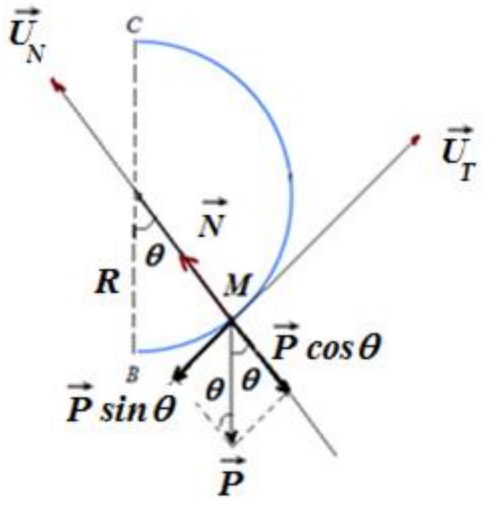
- لكي تصل الكتلة m إلى C يجب أن تبقى على طول المسار AC، أي يجب أن لا ينعدم رد الفعل $\vec{N}$ عند C أي : $N_C(\theta = \pi) \geq 0$.

1- نبحث عن عبارة رد الفعل في الجزء النصف دائري من المسار.

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$



بالإسقاط على المحاور $\vec{U}_N, \vec{U}_T$ نجد:

$$\vec{U}_T: \quad -P\sin\theta = m\frac{dV}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\vec{U}_N: \quad N - P\cos\theta = mV^2/R \ldots\ldots(2)$$

من (2) نجد:

$$N = P\cos\theta + \frac{mV^2}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

***حل التمرين باستعمال الطاقة**

بما أن القوة الوحيدة التي تعمل هي قوة الثقل (عدم وجود احتكاك) وهي قوة محافظة (قوة مشتقة من كمون) هذا يعني أن الطاقة الميكانيكية محفوظة.

$$E_M = E_C + E_P = Cte$$

$$\Delta E_M = 0 \quad : \text{أي ان}$$

ندرس الحركة من A إلى M

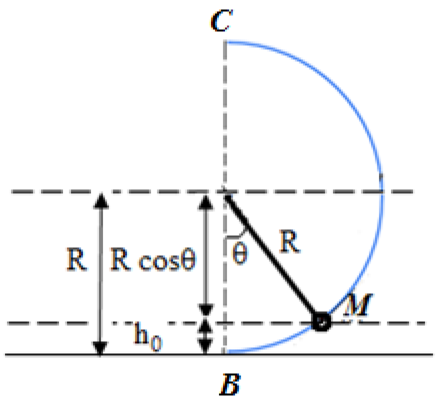
M نقطة من المسار النصف دائري.

$$E_M(\text{A}) = E_M(\text{M})$$

$$E_C(\text{A}) + E_P(\text{A}) = E_C(\text{M}) + E_P(\text{M})$$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mV_A^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 = mg(h - h_0)$$



$$h_0 = R(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 = mg\,[h - R(1 - \cos\theta)]$$

$$\Rightarrow V_M^2 = 2g[h - R(1 - \cos\theta)]$$

$$N = P\,cos\theta + \frac{mV_M^2}{R} \Rightarrow N = P\,cos\theta + \frac{2gm}{R}[h - R(1 - \cos\theta)]$$

$$\Rightarrow N = mg\left[3\,cos\theta + \frac{2}{R}(h - R)\right]$$

<u>عند C أي : $N_C(\theta = \pi) \geq 0$</u>

$$\Rightarrow N_C = mg\left[-3 + \frac{2}{R}(h - R)\right]$$

$$N_C \geq 0 \Rightarrow \left[-3 + \frac{2}{R}(h - R)\right] \geq 0$$

$$\frac{2}{R}(h - R) \geq 3 \Rightarrow (h - R) \geq 3R/2$$

$$\Rightarrow \boxed{h \geq \frac{5}{2}\ R}$$

ملاحظة: يمكن حل هذا التمرين باستعمال التحريك.

حل التمرين 03

- إيجاد سرعة m عند B باستعمال نظرية الطاقة الحركية

$$\Delta E_C = W_{A\to B}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}})$$

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{A\to B}(\vec{P} + \vec{N}) = \int (\vec{P} + \vec{N})\,\overrightarrow{dr}$$

$$\vec{\mathrm{N}} \perp \overrightarrow{\mathrm{dr}} \Rightarrow \vec{\mathrm{N}}.\overrightarrow{\mathrm{dr}} = 0$$

$$E_C(B) - E_C(A) = \int mg\, dr \cos\theta + c$$

$$½\ m V_B^2 - ½\ m V_A^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\ Rd\theta \cos\theta \quad , (V_A^2 = 0)$$

$$½\ m V_B^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\ Rd\theta \cos\theta = mg\ R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ d\theta$$

$$V_B^2 = 2g\ R \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \quad V_B^2 = 2gR \Rightarrow V_B = \sqrt{2gR}$$

- إيجاد سرعة m عند B باستعمال الطاقة الكلية

لا يوجد احتكاك $\Leftarrow$ انحفاظ في الطاقة الكلية

$$E_T = E_M = E_C + E_P = cte$$

أي ان : $\Delta E_M = 0$

$$E_M(\mathrm{A}) = E_M(\mathrm{B})$$

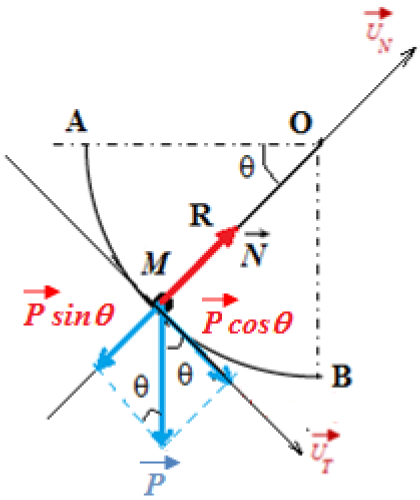
$$E_C(\mathrm{A}) + E_P(\mathrm{A}) = E_C(\mathrm{B}) + E_P(\mathrm{B})$$

$$½\ m V_A^2 + mgh_A = ½\ m V_B^2 + mgh_B$$

$$mgR = ½\ m V_B^2 \quad (h_A = R,\ V_A^2 = 0,\ h_B = 0)$$

$$V_B^2 = 2gR \Rightarrow V_B = \sqrt{2gR}$$

- إيجاد رد الفعل عند B



بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور التابعة للقاعدة الذاتية $\vec{U}_N, \vec{U}_T$ نجد:

وفق $\vec{U}_T$: $P\ cos\theta = m\dfrac{dV}{dt}$ ……………..(1)

وفق $\vec{U}_N$: $N - P\ sin\theta = \dfrac{mV^2}{R}$. ………..(2)

من (2) نجد:

$$N = P\ sin\theta + mV^2/R$$

-عند B : $N_B(\theta = \pi/2)$

$$N_B = mg + \frac{m}{R} V_B^2 = mg + \frac{m}{R}(2gR)$$

$$\Rightarrow N_B = 3mg$$

-إيجاد التقلص الأعظمي للنابض باستعمال نظرية الطاقة الحركية

$$\Delta E_C = W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

$$E_C(C') - E_C(B) = W_{B\to C}(\vec{f}) = \int \vec{f}\,.\overrightarrow{dx}$$

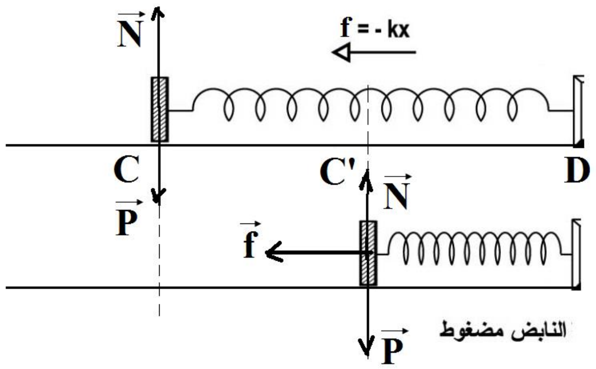
$$E_C(C') - E_C(B) = \int_0^{x_{max}} -k\ x\ dx$$

$$\tfrac{1}{2}\ m V_{C'}^2 - \tfrac{1}{2}\ m V_B^2 = -\frac{kx^2}{2}\Big|_0^{X_{max}}$$

عند التقلص الأعظمي للنابض $V_{C'} = 0$

$$-\tfrac{1}{2}\ m V_B^2 = -\frac{k}{2} X_{max}^2 \Rightarrow X_{max}^2 = 2mgR/k$$

$$X_{max} = \sqrt{2mgR/k}$$



<u>- إيجاد التقلص الأعظمي للنابض باستعمال نظرية الطاقة الكلية</u>

$$E_T = E_M = E_C + E_P = cte$$

أي ان : $\Delta E_M = 0$

$$E_M(\mathrm{B}) = E_M(\mathrm{C'})$$

$$E_C(\mathrm{B}) + E_P(\mathrm{B}) = E_C(\mathrm{C'}) + E_P(\mathrm{C'})$$

$$\tfrac{1}{2}\ m V_B^2 + mgh_B = \tfrac{1}{2}\ m V_{C'}^2 + \frac{1}{2} k X_{max}^2$$

$$\tfrac{1}{2}\ m V_B^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \quad (h_B = 0,\ V_{C'}^2 = 0)$$

$$X_{max}^2 = m\frac{V_B^2}{k} = \frac{m}{R}(2Rg)$$

$$X_{max} = \sqrt{2mgR/k}$$

المراجع

المراجع

- المعادلات التفاضلية، الأستاذ حسن مصطفى العويضي، جامعة الأزهر الرياض .
- مدخل إلى الميكانيك وأعمال تطبيقية: ميكانيك - نصر الدين مولاي و ع. بودهان المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي القبة .
- محاضرات في ميكانيك النقطة المادية والكهرباء العامة، م.ه. خير الدين، ج. خير الدين، ل. حجاج. جامعة منتوري - قسنطينة 1.
- ميكانيك الحركيات، دروس و تمارين مع الأجوبة , أ. مصباح، ل. حجاج، ه. بوطبيلة. جامعة منتوري قسنطينة 1.
- ميكانيك النقطة المادية دروس الأستاذ فيزازي أحمد - ديوان المطبوعات الجامعية (O.P.U) جامعة بشار.
- ميكانيك النقطة المادية تأليف الدكتور هاني قوبا و الدكتور مصطفى العليوي من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا 2016.

Références

-Calcul vectoriel dans l'Espace Christophe ROSSIGNOL, 2013/2014.
http://docplayer.fr/6004148-3-calcul-vectoriel-3-1-les-vecteurs-calcul-vectoriel.html
-Notions de Cinématique, Chapitre II.
https://www.univ-sba.dz/fsi/downloads/PhysI_Chap-II.pdf.
-Dynamique du point matériel, Chapitre III.
https://www.univ-sba.dz/fsi/downloads/PhysI_Chap-III.pdf.
-Travail, Puissance et Energie Chapitre IV.
https://www.univ-sba.dz/fsi/downloads/PhysI_Chap- IV.pdf.
- Cours de mécanique du point, 2007 -2008, 5ème édition, Gilbert VINCENT, Université Joseph Fourier – Grenoble 1, Licence 1ère année.
http://pagesperso-orange.fr/physique.belledonne/.
-Physique I, Mécanique du point Matériel, L. Benallegue, M. Debiane, A. Gourari, A. Mahamdia. Université des Sciences et de la Technologie. H. Boumediene Alger.
-Complément pédagogique de physique pour la première année SM-ST, A. BENZAGOUTA, Université Mentouri Constantine 1.