البراهين -الدرس رقم 01-

نظرية (مبدأ أرخميدس)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad nx > y. \qquad (1)$$

البرهان لنعتبر المجموعة A بحيث: $A = \{nx, \quad n \in \mathbb{N}^*, x > 0\}$.
نستعمل البرهان بالخلف. ولنفرض أن الشرط (1) غير صحيح، اذن نفي هذا الشرط صحيح أي أن القضية التالية صحيحية

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nx \leq y.$$

أي أنه لدينا

$$\forall nx \in A, \quad nx \leq y$$

إذن الأعداد y تمثل حواد عليا للمجموعة A في $\mathbb{R}$ إذن الحد الأعلى sup موجود حسب مسلمة الحد الأعلى لأن المجموعة A غير خالية ومحدودة من الأعلى. ولنضع $\sup_A = y_0$.
لدينا $x > 0$ أي $y_0 - x < y_0$ ومنه $y_0 - x$ ليس حدا أعلى للمجموعة A هذا يعني أن

$$\exists mx \in A, \quad mx > y_0 - x$$

أي

$$\exists (m+1)x \in A, \quad (m+1)x > y_0$$

وهذا تناقض لأن $sup_A = y_0$ ومنه الشرط (1) صحيح وهذا ينهي البرهان.

نظرية (الخاصية المميزة للحد الأعلى)

ليكن A جزء غير خال ومحدود من الأعلى من $\mathbb{R}$ وليكن $\sup_A = a$ عندئذ لدينا:

$$\sup_A = a \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad , \quad x \leq a \\ \forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists x_\epsilon \in A, \quad x_\epsilon > a - \epsilon. \end{cases}$$

البرهان ليكن $\epsilon > 0$ ولنضع $M = a - \epsilon$ عندئذ لدينا

$$M < a$$

ومنه M ليس من الحواد العليا لأنه أقل من a الذي هو أصغر الحواد العليا.
اذن هذا يعني أنه يوجد عنصر x من A يحقق

$$M < x$$

أي

$$a - \epsilon < x$$

وهو ما نريد اثباته.

البرهان (الخاصية المميزة للحد الأدنى) يمكننا بنفس الطريقة اثبات الخاصية المميزة للحد الأدنى كما يلي :
ليكن $\epsilon > 0$ ولنضع $M = a + \epsilon$ عندئذ لدينا

$$M > a$$

ومنه M ليس من الحواد الدنيا لأنه أكبر من a الذي هو أكبر الحواد الدنيا.
اذن هذا يعني أنه يوجد عنصر x من A يحقق

$$M > x$$

أي
$$a+\epsilon > x$$
وهو المطلوب.

مبرهنة (الجزء الصحيح لعدد حقيقي)

من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد يسمى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ويرمز له بـ $E(x)$ يحقق:
$$E(x) \leq x < E(x)+1$$

البرهان

نستعمل البرهان بفصل الحالات.
أولا : ليكن y عددا حقيقيا موجبا، ولنعتبر المجموعة التالية
$$A = \{n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq y\}$$
المجموعة A ليست خالية لان $-1 \in A$ كما أنه باخذ $x=1$ في مبدأ أرخميدس ينتج لدينا
$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad N > y \geq n$$
اذن المجموعة A محدودة من الأعلى.
اذن A مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ ليست خالية ومحدودة من الأعلى اذن فهي تقبل عنصرا أعظميا $\alpha \in A$ أي
$$\alpha \leq y$$
ومن جهة أخرى $\alpha+1 \notin A$ اذن
$$y < \alpha+1$$
α هو الجزء الصحيح للعدد y.
ثانيا : ليكن y عددا حقيقيا سالبا، بنفس الطريقة لنعتبر المجموعة
$$B = \{n \in \mathbb{Z}, \quad n > y\}$$
المجموعة B ليست خالية لان $2 \in B$ كما أنه باستعمال مبدأ أرخميدس ينتج لدينا ان المجموعة B محدودة من الأسفل.
اذن B مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ ليست خالية ومحدودة من الأدنى اذن فهي تقبل عنصرا أصغريا $\beta \in B$ أي
$$\beta > y$$
ومن جهة أخرى $\beta - 1 \notin B$ اذن
$$y \geq \beta - 1$$
$\beta - 1$ هو الجزء الصحيح للعدد y.

نظرية (وحدانية نهاية متتالية)

اذا تقاربت متتالية عددية نحو عدد ما فان هذه النهاية وحيدة.

البرهان

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية ما ولنفرض أنها متقاربة نحو نهايتين l_1 و l_2 ولنبرهن أن $l_1 = l_2$.
بما أن $\lim u_n = l_1$ فانه لدينا حسب التعريف
$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \epsilon, \tag{1}$$
كما أن $\lim u_n = l_2$ فلدينا كذالك حسب التعريف
$$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \epsilon, \tag{2}$$
نضع $N = \max(N_1, N_2)$ لاحظ أن العلاقتين (1) و (2) محققتين، اذن لدينا :
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N$$
هذا يستلزم أن
$$0 \leq |l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\epsilon$$
وهذا يعني أن
$$l_1 = l_2$$

نظرية

كل متتالية عددية متقاربة فهي محدودة والعكس غير صحيح

البرهان

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية متقاربة نحو عدد l عندئذ من تعريف النهاية لدينا :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

نضع $\epsilon = 1$ فنجد أن :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

ومنه

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow -1 - |l| \leq l - 1 < u_n < 1 + l \leq 1 + |l|$$

اي

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n| < 1 + |l|$$

ليكن K هو أكبر عدد من بين الأعداد التالية

$$\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \cdots, |u_{N-1}|\}$$

ومنه بوضع $M = \max\{1 + |l|, K\}$ لاحظ عندئذ أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| < M$$

وهذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

في حالة العكس نستعمل البرهان بمثال مضاد : لاحظ أن المتتالية $u_n = \cos(n)$ محدودة ولكنها متباعدة.

نظرية (الحصر)

اذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليات عددية تحقق الشرط $w_n \leq u_n \leq v_n$ ابتداءا من رتبة معينة $\forall n \geq N$ وكانت $\lim w_n = \lim v_n = l$ مع $l \in \mathbb{R}$ فان $\lim u_n = l$.

البرهان

من جهة لدينا $\lim v_n = l$ اي أن

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - l| < \epsilon$$

ومن جهة اخرى لدينا $\lim w_n = l$ اي ان

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - l| < \epsilon$$

ومنه يوجد عدد طبيعي $N_0 = \max\{N_1, N_2, N\}$ يحقق ما يلي :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_0 \Rightarrow -\epsilon + l < w_n \leq u_n \leq v_n < \epsilon + l$$

وهذا يعني أن

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_0 \Rightarrow -\epsilon + l < u_n < \epsilon + l$$

وهدا يكافئ أن $\lim u_n = l$.

نظرية

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي تتقارب نحو حدها الأعلى.

البرهان

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية متزايدة ومحدودة من الأعلى.

لاحظ أن الحد الأعلى $\sup\limits_n u_n$ لهذه المتتالية موجود لان مجموعة حدودها

$$\{u_n, \quad n\in\mathbb{N}\}$$

محدودة من الأعلى وهي جزء غير خال من $\mathbb{R}$ اذن حسب مسلمة الحد الأعلى $\sup\limits_n u_n$ موجود.

لدينا الخاصية المميزة للحد الأعلى :

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \quad \sup_n u_n-\epsilon<u_{n_0}\leq\sup_n u_n$$

أي أن

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \quad \sup_n u_n-\epsilon<u_{n_0}\leq\sup_n u_n+\epsilon$$

كما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة أي أن

$$n\geq n_0\Rightarrow u_n\geq u_{n_0}$$

ومنه لدينا

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq n_0\Rightarrow\sup_n u_n-\epsilon<u_{n_0}\leq u_n\leq\sup_n u_n+\epsilon$$

وهذا يعني أن

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq n_0\Rightarrow\sup_n u_n-\epsilon<u_n<\sup_n u_n+\epsilon$$

أي أن

$$\lim u_n=\sup_n u_n.$$

وهو المطلوب.

نظرية

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي تتقارب نحو حدها الأدنى.

البرهان

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية متناقصة ومحدودة من الأدنى.

لاحظ أن الحد الأدنى $\inf\limits_n u_n$ لهذه المتتالية موجود لان مجموعة حدودها

$$\{u_n, \quad n\in\mathbb{N}\}$$

محدودة من الأسفل وهي جزء غير خال من $\mathbb{R}$ اذن حسب مسلمة الحد الأعلى $\inf\limits_n u_n$ موجود.

لدينا الخاصية المميزة للحد الأدنى :

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \quad \inf_n u_n\leq u_{n_0}<\inf_n u_n+\epsilon$$

أي أن

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \quad \inf_n u_n-\epsilon<u_{n_0}<\inf_n u_n+\epsilon$$

كما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة أي أن

$$n\geq n_0\Rightarrow u_n\leq u_{n_0}$$

ومنه لدينا

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq n_0\Rightarrow\inf_n u_n-\epsilon<u_n\leq u_{n_0}\leq\inf_n u_n+\epsilon$$

وهذا يعني أن

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Rightarrow \inf_n u_n - \epsilon < u_n < \inf_n u_n + \epsilon$$

أي أن

$$\lim u_n = \inf_n u_n.$$

وهو المطلوب.

نظرية

كل متتاليتين متجاورتين متقاربتين نحو نفس النهاية.

البرهان لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتن متجاورتين، هذا يعني أن احداهما متزايدة والاخرى متناقصة و $\lim(u_n - v_n) = 0$.
لنفرض أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
أولا : لنثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين.
لنعتبر المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث

$$w_n = v_n - u_n$$

لدينا :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n)$$

بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة فان $-(u_{n+1} - u_n) \leq 0$.
وبما أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة فان $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
عندئذ لدينا $w_{n+1} - w_n \leq 0$ أي أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة.
من جهة اخرى لدينا :

$$\lim w_n = \lim(v_n - u_n) = 0$$

اذن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة اذن فهي متتالية محدودة حسب نظرية سابقة.
ومنه $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل اذن حسب النظرية السابقة فهي تتقارب نحو حدها الأدنى، أي أن

$$\lim w_n = \inf_n w_n = 0.$$

هذا يعني أن

$$w_n = v_n - u_n \geq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \geq u_n$$

ومنه

$$v_0 \geq v_1 \geq \cdots \geq v_n \geq u_n \geq \cdots \geq u_1 \geq u_0$$

اذن لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بأي حد من حدود المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اذن فهي متتالية متقاربة.
بنفس الطريقة $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بأي حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اذن فهي متتالية متقاربة.
ثانيا : لنثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لهما نفس النهاية.
حسب نظرية عمليات حول نهايات المتتاليات لدينا

$$\lim w_n = \lim(v_n - u_n) = \lim v_n - \lim u_n = 0$$

أي

$$\lim v_n = \lim u_n$$

وهذا ينهي البرهان.
لاحظ أنه يمكننا فرض العكس أي أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ونحصل على برهان مشابه.

نظرية

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية وليكن $l\in\mathbb{R}$ عندئذ لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_{f(n)} = l$$

حيث $(u_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كيفية مستخرجة من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

البرهان

($\Leftarrow$) لنفرض أن كل متتالية $(u_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ مستخرجة من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو العدد l اذن لدينا

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

لان المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جزئية من نفسها.

($\Rightarrow$) لنفرض الان أن $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ ولنحاول اثبات أن $\lim_{n\to\infty} u_{f(n)} = l$.
لدينا $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ تعني تعريفا

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

لاحظ أنه اذا كان $n\geq N$ فان $f(n)\geq n\geq N$ أي أنه لدينا

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq N \Rightarrow |u_{f(n)} - l| < \epsilon$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{n\to\infty} u_{f(n)} = l.$$

نظرية (مقياس كوشي)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية، عندئذ لدينا:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متتالية كوشية} \Longleftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متتالية متقاربة}$$

البرهان

سنقوم باثبات هذا الاستلزام $\Rightarrow$ فقط.
لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية متقاربة نحو عدد حقيقي l أي أنه لدينا:

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

ليكن n و m عددين طبيعيين بحيث $m\geq n\geq N$ عندئذ لدينا:

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

ومنه نستطيع كتابة ما يلي:

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n, m\in\mathbb{N}, \quad m\geq n\geq N \Rightarrow |u_n - u_m| < \epsilon$$

وهذا يعني أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشية.

في كل ما يأتي لنعتبر المتتالية التراجعية

$$\begin{cases} u_0 & \in & D \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

بحيث $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا.

نظرية

اذا كان f تابعا متزايدا فان المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة، اضافة الى ذالك تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة اذا كان $f(u_0) \geq u_0$ ومتناقصة اذا كان $f(u_0) \leq u_0$.

اما اذا كان التابع f متناقصا فان المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة.

البرهان

لنفرض أن التابع f متزايدا.

اذا كان $f(u_0) \geq u_0$ فان $u_1 \geq u_0$.

لندخل التابع f على المتراجحة السابقة فنجد $f(u_1) \geq f(u_0)$ لاحظ أن المتراجحة لا تتغير لان التابع f متزايدا. ومنه لدينا $u_2 \geq u_1$.

وهكذا بالتدريج نجد أن

$$\cdots \geq u_n \geq \cdots \geq u_2 \geq u_1 \geq u_0.$$

اي ان المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة وهذا ينهي البرهان.

يمكننا بنفس الريقة اثبات حالة $f(u_0) \leq u_0$.

نظرية

ليكن f تابعا حقيقيا معرفا على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة من هذا المجال.
اذا قبل التابع f نهاية عند النقطة x_0 فان هذه النهاية وحيدة.

البرهان

لنفرض أن التابع f يقبل نهايتين l_1 و l_2 عند النقطة x_0 عندئذ من تعريف النهاية لدينا :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon$$

و

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon$$

بوضع $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ ينتج لدينا:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \alpha$$

هذا يستلزم أن

$$0 \leq |l_1 - l_2| \leq |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\epsilon$$

وهذا يعني أن

$$l_1 = l_2$$

ومنه النهاية وحيدة.

نظرية

كل تابع f مستمر على متراص (مجال مغلق ومحدود) $[a,b]$ تابع محدود ويدرك حديه الأعلى والأدنى، أي أن

$$\exists x_0, x_1 \in [a,b], \quad f(x_0) = \sup_{[a,b]} f(x) \quad ; \quad f(x_1) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

البرهان

أولا : لنثبت أن التابع f محدود على $[a,b]$.
لنفرض أن التابع f غير محدود على المجال $[a,b]$ أي أن

$$\forall K \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in [a,b], \quad |f(x)| > K$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل كل عدد حقيقي موجب K أي أنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$K = 1, \exists x_1 \in [a,b]; \quad |f(x_1)| > 1$$
$$K = 2, \exists x_2 \in [a,b]; \quad |f(x_2)| > 2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots\vdots$$
$$K = n, \exists x_n \in [a,b]; \quad |f(x_n)| > n$$

ومنه نتحصل على متتالية $(x_n)_n$ من $[a,b]$ بحيث

$$\lim_{n \to +\infty} |f(x_n)| = +\infty$$

كما لدينا $[a,b] \supset (x_n)_n$ أي هي عبارة عن متتالية محدودة لان المجال $[a,b]$ محدود، ومنه فهي تحتوي على متتالية جزئية $(x_{n_k})_k$ متقاربة نحو عدد ما $l \in [a,b]$ وبما أن التابع f مستمر عندئذ لدينا

$$\lim_{n \to +\infty} |f(x_{n_k})| = f(l)$$

ولكن برهنا سابقا أن $\lim_{n\to+\infty}|f(x_n)|=+\infty$ ومن جهة اخرى لدينا

$$|f(x_{n_k})|>n_k \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|f(x_{n_k})|=+\infty$$

وهذا تناقض ومنه f تابع محدود.

ثانيا: لنضع $m=\inf_{[a,b]} f(x)$ من الخاصية المميزة للحد الأدنى لدينا:

$$\forall \epsilon>0, \exists x_\epsilon \in [a,b], \quad m\leq f(x_\epsilon)<m+\epsilon$$

ومنه بوضع

$$\begin{aligned}
\epsilon=1, \exists x_1 \in [a,b], &\quad m\leq f(x_1)<m+1\\
\epsilon=\frac{1}{2}, \exists x_2 \in [a,b], &\quad m\leq f(x_2)<m+\frac{1}{2}\\
\vdots \quad \vdots & \quad \vdots\vdots\\
\epsilon=\frac{1}{n}, \exists x_n \in [a,b], &\quad m\leq f(x_n)<m+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

نتحصل على متتالية عددية $(x_n)_n\subset[a,b]$ تحقق (باستخدام نظرية الحصر)

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=m$$

كما أن $(x_n)_n$ متتالية محدودة فهي حسب مبرهنة بولزانو فيرشتراس تحتوي على متتالية جزئية $(x_{n_k})_k$ متقاربة نحو عدد $l\in[a,b]$
وبما أن التابع f مستمر ينتج لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{n_k})=f(l)$$

وهذا يعني أنه يوجد عدد l من المجال $[a,b]$ بحيث

$$f(l)=m$$

وهو المطلوب.

بنفس الطريقة نبرهن في حالة sup.

نظرية

ليكن $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا مستمرا بحيث $f(a)f(b)<0$ عندئذ يوجد عدد c من المجال $]a,b[$ يحقق:

$$f(c)=0$$

البرهان لنفرض أن $f(a)>0$ (أي $f(b)<0$) ولنضع:

$$A=\{x\in[a,b]; f(x)>0\}$$

لاحظ أن المجموعة A غير خالية لأنه $a\in A$ وحتما محدودة لأن $A\subset[a,b]$ ومنه فحسب مسلمة الحد الأعلى $\sup A$ موجود ولنضع $c=\sup A$.

لنبرهن أن $f(c)=0$.

لدينا $a<c<b$ ولنفرض أن $f(c)\neq 0$ عندئذ يوجد مجال $\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\quad]c-\alpha,c+\alpha[$ بحيث اشارة التابع f موجبة على هذا المجال وهذا ناتج من استمرار التابع f ومنه

$$f(c+\frac{\alpha}{2})>0$$

أي أن

$$c+\frac{\alpha}{2}\in A$$

وهذا تناقض من كون $c=\sup A$ ومنه $f(c)=0$ وهذا ينهي البرهان.

يمكننا أن نفرض أن $f(a)<0$ عندئذ $f(b)>0$ ونتحصل على نفس النتيجة.

نظرية القيم المتوسطة

ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا على مجال كيفي I و $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـ f بحيث $x_1 < x_2$.
عندئذ من أجل كل عدد حقيقي c محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد عدد x_0 من المجال $]x_1, x_2[$ يحقق:

$$f(x_0) = c$$

البرهان لنفرض أن $f(x_1) < f(x_2)$ (يمكننا فرض العكس ونحصل على نفس النتيجة) وليكن $f(x_1) < c < f(x_2)$ ولنعرف التابع التالي:

$$g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$$
$$x \to g(x) = f(x) - c$$

واضح أن التابع g مستمر كما أنه لدينا:

$$g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - c)(f(x_2) - c) < 0$$

أي أن التابع g يحقق شروط النظرية السابقة ومنه يوجد عدد x_0 من المجال $]x_1, x_2[$ يحقق

$$g(x_0) = f(x_0) - c = 0$$

وهذا يعني أن

$$f(x_0) = c$$

وهو المطلوب.

نظرية

كل تابع قابل للاشتقاق عند نقطة ما فهو تابع مستمر عند هذه النقطة.

البرهان ليكن f تابعا قابلا للاشتقاق عند نقطة ما x_0 عندئذ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لاحظ أنه يمكننا كتابة العبارة السابقة كما يلي:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \epsilon(x) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + \epsilon(x))$$

بحيث $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.
ومنه لدينا:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + \epsilon(x)) = f(x_0)$$

وهذا يعني أن التابع f مستمر عند النقطة x_0.

نظرية

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا معرفا على مجال I من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$.
اذا كانت لـ f قيمة قصوى عند النقطة x_0 وكان $f'(x_0)$ موجودا. فان:

$$f'(x_0) = 0$$

البرهان لنفرض أن هذه القيمة القصوى هي قيمة عظمى.(اذا فرضنا أنها قيمة صغرى فنتبع نفس الخطوات ونحصل على نفس النتائج)
بما أن $f^{'}(x_0)$ موجودا فان $f_d^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0)$ ولدينا من جهة اخرى $f(x_0) > f(x)$ في مجال يحوى النقطة x_0 اذن:

$$f^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
$$f^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

وهذا يستلزم أن:

$$f^{'}(x_0) = 0.$$

نظرية روول ROLLE

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ بحيث $f(a) = f(b)$.
عندئذ توجد نقطة c من المجال $]a, b[$ تحقق:

$$f^{'}(c) = 0$$

البرهان أولا: اذا كان التابع f ثابتا على المجال $[a, b]$ فان هذه النظرية محققة والنقطة c هي اي نقطة من المجال $[a, b]$.
ثانيا: لنفرض أن التابع f غير ثابت على المجال $[a, b]$ عندئذ f تابع مستمر على المجال $[a, b]$ وهذا يعني حسب نظرية سابقة أنه يدرك حديه الأعلى والأدنى، أي أن:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b]; \quad f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x) = M, \quad f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x) = m$$

لنفرض أن $f(a) = f(b) \neq M$ أي أن $f(x_1) = M$ قيمة عظمى للتابع f وهو يقبل الاشتقاق عند النقطة x_1 اذن حسب النظرية السابقة فان

$$f^{'}(x_1) = 0$$

وهذا ينهي البرهان.
نفس البرهان في حالة $f(a) = f(b) \neq m$.

نظرية التزايدات المنتهية

ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$.
عندئذ توجد نقطة c من المجال $]a, b[$ تحقق:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f^{'}(c).$$

البرهان لنعرف التابع التالي:

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$x \to g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

واضح أن التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a, b[$ كمجموع توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق.
كما أنه لدينا:

$$g(a) = g(b) = 0$$

التابع g يحقق شروط نظرية روول أي أنه توجد نقطة c من المجال $]a, b[$ تحقق

$$g^{'}(c) = 0$$

وهذا يعني أن

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

وهو المطلوب.

نظرية التزايدات المنتهية المعممة

ليكن f,g تابعين مستمرين وقابلين للاشتقاق على المجال $]a,b[$ و $\forall x\in]a,b[, g'(x)\neq 0$.
عندئذ توجد نقطة c من المجال $]a,b[$ تحقق:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

البرهان لاحظ أنه لو كان $g(a)=g(b)$ لكان g يحقق شروط نظرية روول وهذا يعني أنه يوجد عدد $c\in]a,b[$ بحيث $g'(c)=0$ وهذا تناقض من كون $\forall x\in]a,b[, g'(x)\neq 0$.
لنعرف التابع التالي:

$$h:[a,b]\to\mathbb{R}$$

$$x\to h(x)=f(x)-f(a)-(g(x)-g(a))\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

لاحظ أن التابع h يحقق شروط نظرية روول، أي أنه يوجد عدد $c\in]a,b[$ يحقق:

$$h'(c)=0$$

وهذا يعني أن:

$$f'(c)-g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=0$$

أي أن

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$