مقرر التحليل (1):

1) - خواص المستقيم العددي

2) - المتتاليات العددية والنهايات.

3) - التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي واحد.

4) - مبرهنة التزايدات المنتهية ودستور تايلور.

5) - النشر المحدود.

6) - تكامل ريمان.

7) - المعادلات التفاضلية.

8) - التوابع متعددة المتغيرات

9) - التوابع القابلة للمفاضلة من $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}$

① - خواص المستقيم العددي :

إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية.

حقل الأعداد الحقيقية هو مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نرمز لها بالرمز IR معرف عليها قانوني تركيب داخليين الجمع (+) والضرب (×) وعلاقة ترتيب نرمز لها بالرمز ($\leq$) تتمتع بالمسلمات التالية

① - $(IR, +, \times)$ حقل تبديلي من أجل كل x، y، z من IR لدينا :

$x+y=y+x$ (جمع تبديلي)	$xy=yx$
$(x+y)+z=x+(y+z)$ (التجميع)	$(xy)z=x(yz)$
$x+(-x)=0$	$x\,1=x$ (1 عنصر حيادي للضرب)
($-x$ نظير x بالنسبة للجمع)	$x\cdot x^{-1}=1$
$x+0=x$	(x^{-1} نظير x بالنسبة للضرب $x\neq 0$)
(0 عنصر حيادي بالنسبة للجمع)	$x(y+z)=xy+xz$
	(الضرب توزيعي في الجمع)

② - IR حقل مرتب كلياً.

③ - مسلمة الحد الأعلى :

كل جزء من IR غير خال ومحدود من الأعلى يقبل حداً أعلى.

بعض الخواص الأساسية $\mathbb{R}$:

• العناصر الحادة:

تعريف: ليكن E جزءاً غير خال من $\mathbb{R}$.

* نقول عن E أنه محدود من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M يحقق: $\forall x \in E \;, x \leq M$

نسمي M حاد من الأعلى للجزء E.

* نقول أن E محدود من الأسفل (من الأدنى) إذا وجد عدد حقيقي m بحيث:

$$\forall x \in E \;; \quad m \leq x$$

نسمي m حاد من الأسفل للجزء E.

* نقول عن E إنه محدود إذا كان محدود من الأعلى ومن الأسفل في آن واحد. يعني: يوجد عددين M و m بحيث:

$$\forall x \in E \;, \quad m \leq x \leq M$$

أمثلة:

$\mathbb{N}$ ليست محدودة من الأعلى ولكنها محدودة من الأسفل

$\mathbb{Z}$ ليست محدودة.

$]-\infty; \alpha[$ ليست محدودة من الأسفل ومحدودة من الأعلى $\alpha \in \mathbb{R}$.

ملاحظة:

① قد تكون مجموعة الحواد العليا والدنيا غير منتهية.

② إذا كان الحاد من الأعلى ينتمي لـ E فنسميه عنصر أعظمي ونرمز له $\text{Max} E$

③. إذا كان الحاد الأدنى m ينتمي لـ E فنرمزله بـ $\min E$ ونسميه العنصر الأصغري.

• الحد الأعلى والحد الأدنى:

تعريف: ليكن E جزءا غير خال من IR و $a,b \in \mathbb{R}$.

⊛. نقول عن a إنه الحد الأعلى لـ E إذا وفقط إذا كان a هو أصغر الحواد العليا و نرمزله (في حالة وجوده) بالرمز $\sup E$.

⊛. نقول عن b إنه الحد الأدنى لـ E إذا وفقط إذا كان b هو أكبر الحواد الدنيا و نرمزله (في حالة وجوده) بـ $\inf E$.

$\sup E$	$\max E$	حاد من الأعلى M
$\forall x \in E ; \sup E \geq x$	$\forall x \in E ; x \leq \max E$	$\forall x \in E , x \leq M$
$\in$ $\notin$	$\in$	$\in$ $\notin$
وحيد	وحيد	ليس وحيد

أمثلة:

* $E =]-\infty ; \alpha[$ $\sup E = \alpha$ $\max E$ غير موجود

$\mathbb{N}$ $\min \mathbb{N} = \inf \mathbb{N} = 0$

الخاصية المميزة للحد الأعلى:

نظرية:

ليكن E جزءا غير خال من IR و محدود من الأعلى عندئذ لدينا:

$\exists$ يوجد
$\forall$ مهما يكن
ε إبيصيلو.

$$\sup E = a \iff \begin{cases} \forall x \in E \ , \ x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists x_\varepsilon \in E \ , \ x_\varepsilon > a - \varepsilon \end{cases}$$

البرهان:

E غير خال ومحدود من الأعلى باستعمال مسلمة الحد الأعلى فإن "$\sup E$" موجود.

ليكن $\varepsilon > 0$ ، نضع $M = a - \varepsilon$ ومنه $M < a$

ومنه M ليس من الحواد العليا للجزء E هذا يعني أنه يوجد عنصر x من E يحقق $x > M = a - \varepsilon$ وهو.

الخاصية المميزة للحد الأدنى:

نظرية:

ليكن E جزء غير خال ومحدود من الأدنى من $\mathbb{R}$.

وليكن $b \in \mathbb{R}$ عندئذ لدينا:

$$\inf E = b \quad \begin{cases} \forall x \in E \ , \ b \leq x \\ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists x_\varepsilon \in E \ , \ x_\varepsilon < b + \varepsilon \end{cases}$$

البرهان:

E جزء غير خال ومحدود من الأدنى إذن حسب مساواة الحد الأدنى $\inf E$ موجود ولنضع $b = \inf E$

ليكن $\varepsilon > 0$ ولنضع $M = b + \varepsilon$ ومنه $b < M$.

أي أن M ليس من الحواد الدنيا ومنه يوجد عنصر $x \in E$ يحقق $x < M = b + \varepsilon$

مثال:

لتكن $A=\{\frac{1}{n}+1,\ n\in\mathbb{N}^*\}$

$A=\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3}\ \ldots\ldots\}$

A غير خالية لأن $2\in A$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ $\quad n\geq 1 \Leftarrow 1\geq\frac{1}{n}$

$\Rightarrow 2\geq\frac{1}{n}+1$

ومنه A محدودة من الأعلى.

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا:

$\frac{1}{n}>0 \Leftarrow \frac{1}{n}+1>1$

ومنه A محدودة من الأسفل.

بما أن A غير خالية ومحدودة فحسب مسلمة الحد الأعلى $\inf A$

و $\sup A$ موجودان.

بما أن 2 من الحواد العليا و $(n=1,\ 2\in A)$ ومنه $\max A=2$

أي أن $\sup A=2$

لدينا: $\inf A\geq 1$ $\quad \inf A=1$

نستعمل الخاصية المميزة للحد الأدنى

لدينا: $0<\varepsilon$ $\quad \frac{1}{n}+1<1+\varepsilon$

أي $n>\frac{1}{\varepsilon}$

نأخذ n أي عدد طبيعي أكبر من $\frac{1}{\varepsilon}$ يحقق الخاصية المميزة للحد الأدنى

ومنه $\inf A=1$

هل $\min A$ موجود. لنفرض أن $1\in A$ $\quad \frac{1}{n}+1=1$

$\Rightarrow \frac{1}{n}=0$

أي $1\notin A$ ومنه $\min A$ غير موجود (مستحيل)

ملاحظة: (خواص)

ليكن A و B جزئين محدودين غير خاليين من $\mathbb{R}$.

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

$$\sup(-A) = \inf A$$

(1) نظرية مبدأ أرخميدس

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x>0),\ \exists n \in \mathbb{N}^* : nx > y$$

نظرية (كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x<y),\ \exists q \in \mathbb{Q}$$

$$x < q < y$$

برهان مبدأ أرخميدس: لنعتبر المجموعة

$$A = \{nx ; n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}, x>0\}$$

نستعمل البرهان بالخلف ونفرض أن العلاقة (1) خاطئة أي

نفيها صحيح أي أن

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x>0) \text{ و } \forall n \in \mathbb{N}^*, nx \leq y$$

ومنه المجموعة A محدودة من الأعلى وهي غير خالية ($1 \in A$ ، $n=1, x=1$)

وحسب مسلمة الحد الأعلى $\sup A$ موجود وعليه $\sup A = y_0$

لدينا: $(x>0)$ أي أن $y_0 - x < y_0$

ومنه العدد $y_0 - x$ ليس من الحاد العليا وهذا يعني أنه يوجد

عنصر $mx \in A$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ يحقق: $mx > y_0 - x$

ومنه: $\underbrace{x(m+1)}_{\in A} > y_0$

وهذا تناقض لأن: $\sup A = y_0$

ومنه العلاقة ① صحيحة.

المجالات:

ليكن a و b عددين حقيقيين $(a < b)$

مجال مغلق $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x \leq b\}$

مجال مفتوح $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x < b\}$

مجال نصف (مغلق/مفتوح) $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x \leq b\}$

$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x \leq b\}$ $\quad \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x > a\}$

$[a;a] = \{a\}$

$[a;a[=]a;a] =]a;a[= \emptyset$

القيمة المطلقة:

ليكن x عددا حقيقيا نرمز للقيمة المطلقة للعدد x بالرمز $|x|$ ونعرف كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x \; ; \; x \geq 0 \\ -x \; ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

خواص:

ليكن x و y عددين حقيقيين لدينا:

1) $|x| \geq 0$, $|0| = 0$

2) $|x| \geq x$; $|x| \geq -x$

3) $|xy| = |x||y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $\quad y \neq 0$

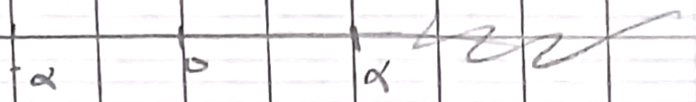
4) $|x \mp y| \leq |x| + |y|$

5) $|x \mp y| \geq \big||x| - |y|\big|$

5) $|x| < \alpha \iff x \notin [-\alpha ; \alpha]$

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$|x| > \alpha \iff x \in]-\infty ; -\alpha[\cup]\alpha ; +\infty[$



البرهان 4 :

$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y|$

$\Downarrow$

$\leq (|x|+|y|)^2$

$x \leq |x|$

$y \leq |y|$

$2xy \leq 2|x||y|$

ومنه

$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$

$|x+y| \leq |x|+|y|$

ملاحظات :

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$x \to f(x) = |x|$

② $|x-y|$ تعتبر هندسيا على المسافة بين العددين

x و y .

$|x|$ هي العدد x أو $-x$.

ملاحظة: حل المعادلة: $|x^2-x-2|=3$

ندرس إشارة x^2-x-2 $\Delta=9$

$x_2=2$ $x_1=-1$

حالة ①: $x\in]-\infty;-1[\cup]2,+\infty[$

وعليه الحل:

$x^2-x-2=3 \Leftrightarrow x^2-x-5=0$

حالة ②: $x\in]-1;2[$

وعليه: $-x^2+x-2=3 \Leftrightarrow -x^2+x-5=0$

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

مبرهنة:

من أجل كل عدد حقيقي x، يوجد عدد صحيح وحيد α يحقق:

$$\alpha\leq x<\alpha+1$$

يسمى α الجزء الصحيح للعدد x ونرمز له بالرمز $E(x)$ أو $[x]$.

أمثلة:

$E(1,7)=1$ $E(4)=4$

$E(-0,2)=-1$

برهان:

نستعمل البرهان بفصل الحالات:

① ليكن x عددًا حقيقيًا سالبًا تمامًا ولنعتبر المجموعة

$B=\{n\in\mathbb{Z} \mid n>x\}$

B مجموعة ليست خالية لأن $1\in B$ و حسب مبدأ أرخميدس
$1>x$

نظريات الحد الأعلى والأدنى:

لدينا: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$

A محدودة إذا:

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in A \quad m \leq x \leq M$$

$$m \leq M$$

* مجموعة الحواد العليا لـ A هي: $[M ; +\infty[$ أو أي أكبر عنصر من $\sup A$

و $\sup A$ هو أصغر الحواد العليا

مجموعة الحواد الدنيا لـ A هي: $]-\infty ; m]$ أو أي عناصر أصغر من $\inf A$.

$\inf A$ هو أكبر الحواد الدنيا.

الخاصية المميزة:

$\sup A = \alpha$ تعني:

$$\forall x \in A \quad x \leq \alpha .$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha .$$

$\inf A = B$ يعني:

- $\forall x \in A \quad x \geq B$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad B \leq x < B + \varepsilon$

$]0;1[\quad \sup = 1$

- $\forall x \in A \quad x \leq 1$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad 1 - \varepsilon < x < 1$

$x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

$]0;1[\quad \inf = 0$

- $\forall x \in A \quad x < 0$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad 0 \leq x < \varepsilon + 0$

$x = \frac{\varepsilon}{2}$

ملاحظة :

$\max A = \sup A \in A$

$\min A = \inf A \in A$

- إذا كان $\sup A \notin A$ فإن $\max A$ غير موجود.
- إذا كان $\inf A \notin A$ فإن $\min A$ غير موجود.
- إذا كان $\sup A$ غير موجود فإن $\max A$ غير موجود
- إذا كان $\inf A$ غير موجود فإن $\min A$ غير موجود.

لدينا : $\exists N \in \mathbb{N}^* \quad , N > -x$

أي $\exists N \in \mathbb{N}^* \quad x > -N$

وهي محدودة من الأسفل في $\mathbb{Z}$

بالإضافة إلى ذلك B هي مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ ومنه

$\min B = \beta$ موجود ولنضع $\alpha = \beta - 1$ $\left(\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{Z} \\ \beta \in B \subset \mathbb{Z} \end{array} \right)$ (وحيد لأن $\min B$ وحيد)

لدينا : $x < \alpha + 1$

ومنه $\alpha < \beta$ $\alpha \notin B$

ومنه $\alpha \leq x$ وهو.

2) بنفس الطريقة نبرهن x عدد حقيقي موجب.

مبرهنة:

ليكن x عددًا حقيقيًا لدينا :

1- $E(x) \leq x < E(x) + 1$

2- $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$

3- $\forall p \in \mathbb{Z} \quad , \quad E(x+p) = E(x) + p$

ملاحظة :

1- $\forall x \in \mathbb{R} \quad , x = E(x) + \beta \quad , \quad \beta \in [0;1[$

2- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x \longmapsto f(x) = E(x)$