التصحيح النموذجي لامتحان الثاني

- التحليل 1 -

حل التمرين الأول:

1) تعريف: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x, \ |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

2) نظرية رول:

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$ ويحقق $f(a)=f(b)$ عندئذ يوجد عدد $c\in]a,b[$ يحقق

$$f'(c)=0$$

نظرية التزايدات المنتهية المعممة:

ليكن $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعين مستمرين وقابلين للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث $g'(x)\neq 0 \ \forall x\in]a,b[$ عندئذ يوجد عدد $c\in]a,b[$ يحقق:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3) تعريف تابع f مستمر بانتظام على I:

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x,y\in I, \ |x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

حل التمرين الثاني:

1) لنعرف التابع g على $[a,b]$ بحيث:

$$g(x) = (\alpha+\beta)f(x) - \alpha f(a) - \beta f(b)$$

واضح أن g مستمر على $[a,b]$ لأن f مستمر

كما لدينا:

$$g(a) = (\alpha+\beta)f(a) - \alpha f(a) - \beta f(b) = \beta[f(a)-f(b)]$$

$$g(b) = (\alpha+\beta)f(b) - \alpha f(a) - \beta f(b) = -\alpha[f(a)-f(b)]$$

ومنه بما أن موجب تماما فإن حتما

$$g(a)\cdot g(b) \leq 0$$

ومنه g مستمر على $[a,b]$ وباستخدام نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد $c\in[a,b]$ يحقق $g(c)=0$

أي أن:

$$(\alpha+\beta)f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

2) أ) بما أن f مستمر وق.ا على $]a,b[$ فإن g تابع مستمر وق.ا على $]a,b[$ كمجموع توابع مستمرة وق.ا على $]a,b[$

ب) $g(a) = f(a) - 0 = f(a)$

$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$

ومنه $g(a)=g(b)=f(a)$

لدينا g يحقق شروط نظرية رول لأنه مستمر وق.ا و $g(a)=g(b)$ عندئذ يوجد عدد $c\in]a,b[$ بحيث:

$$g'(c)=0$$

أي أن:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3) أ) التابع f مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنه توابع مركبة من التوابع الأسية وكثيرات الحدود توابع مستمرة على $\mathbb{R}$

لندرس الاستمرار عند 0:

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} \left(e^{-\frac{1}{x}}+x\right) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0,\, x<0} \left(x^2\sin\frac{1}{x}+x\right) = 0 = f(0)$$

لأن: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

بالمرور للنهاية عند 0 نجد أن $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

ومنه f مستمر عند 0 ومنه f مستمر على $\mathbb{R}$

ب) f ق.إ على $\mathbb{R}^*$ لأن الدوال $\sin$ و e^x و كثيرات الحدود ق.إ على $\mathbb{R}^*$

لدراسة قابلية الاشتقاق عند 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} + 1 \right) = 1 = f'_d(0)$$

و

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right) = 1 = f'_g(0)$$

بنفس طريقة (1)

ومنه f ق.إ عند 0 ومنه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 03:

1) التابع f على شكل مجموع تابعين كثير حدود والتابع اللوغاريتمي مركب كثير حدود وهي توابع ق.إ ومنه f ق.إ على المجال $[0,1]$.

نعين f':

$$f'(x) = \frac{b-a}{(1-x)a+bx} + \ln a - \ln b$$

2) لدينا f تابع مستمر و ق.إ على المجال $]0,1[$ كما لدينا

$$f(0) = f(1) = 0$$

ومنه باستخدام رول يوجد عدد $c \in]0,1[$ يحقق $f'(c) = 0$

3) التابع f' على شكل تابع ناطق وهو تابع ق.إ على المجال $[0,1]$

حساب f'':

$$f''(x) = \frac{-(b-a)^2}{[(1-x)a+bx]^2}$$

4) لنشكل جدول تغيرات f':

x	0		c		1
f''			$-$		
f'	$f'(0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(1)$

من جدول التغيرات f' تابع متناقص تماما وينعدم عند $c \in]0,1[$

ومنه f' موجب في المجال $]0,c[$

وسالب في المجال $]c,1]$

استنتاج إشارة f:

x	0		c		1
f'		$+$	0	$-$	
f	$f(0)=0$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(1)=0$

ومن جدول التغيرات واضح أن

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geq 0$$