أنماط البرهان

1) الاستنتاج المنطقي

إذا كانت p قضية صحيحة وكانت $(p \Rightarrow q)$ قضية صحيحة فإن q قضية صحيحة.

تطبيق 1 : أثبت صحة القضية التالية : إذا كان $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ فإن : $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$.

تطبيق 2 : برهن ما يلي :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad (a \geq 1) \wedge (b \geq 1) \Rightarrow 2(ab+1) \geq (a+1)(b+1)$$

2) البرهان بالخلف

لاثبات صحة قضية p نفرض أنها خاطئة (أي نفرض أن $\overline{p}$ صحيحة) ونبين أن هذا يؤدي الى تناقض.

تطبيق 1 : بين أن المعادلة $x^2 = 3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Q}$.

تطبيق 2 : ليكن $a, b, c \in \mathbb{R}_+$.

أثبت أن واحدا على الأقل من الأعداد الحقيقية الاتية : $c(1-a), \quad b(1-c), \quad a(1-b)$ أصغر من $\frac{1}{4}$.

3) البرهان باستعمال عكس نقيض الاستلزام

لكي نبرهن صحة القضية $(p \Rightarrow q)$ يكفي برهان صحة القضية $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ أي لدينا $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

تطبيق 1 : بين أنه اذا كان x عدد أصم فإن $\sqrt{x}$ عدد أصم.

تطبيق 2 : أثبت أن :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

4) البرهان بمثال مضاد

لتكن $p(x)$ الخاصية المعرفة على المجموعة غير الخالية E .

لاثبات أن القضية $(\forall x \in E; \; p(x))$ غير صحيحة يكفي ايجاد عنصر $x_0 \in E$ بحيث من أجله تكون $p(x)$ خاطئة.

تطبيق 1 : لتكن a, b, n أعداد طبيعية. أثبت عدم صحة القضية التالية :

اذا كان n مضاعف لـ a و b فإن n مضاعف لـ ab.

تطبيق 2 : بين أن هذه القضية غير صحيحة:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$$

5) البرهان بفصل الحالات

إذا كانت القضية $(p \Rightarrow r) \wedge (\overline{p} \Rightarrow r)$ صحيحة فإن القضية r صحيحة.

تطبيق 1: بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x-1| \leq x^2 - x + 1$$

تطبيق 2: بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3.

6) البرهان بالتراجع

ليكن n و n_0 عددين طبيعيين، ولتكن $p(n)$ خاصية متعلقة بالوسيط n.

لإثبات صحة القضية $(\forall n \geq n_0;\ p(n))$ ، نثبت ما يلي :

* $p(n_0)$ قضية صحيحة.
* إثبات صحة الاستلزام $[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ من أجل كل $n \geq n_0$ ، في هذه الحالة نفرض أن القضية $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة وذلك من أجل كل $n \geq n_0$.

تطبيق 1 : أثبت مايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

حل ت 01 :

تطبيق ① : إثبات أن إذا كان $a,b,c \in IR_+$ فإن :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant 8abc$$

لدينا :

$$\begin{cases} (a-1)^2 \geqslant 0 \\ (b-1)^2 \geqslant 0 \\ (c-1)^2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-2a+1 \geqslant 0 \\ b^2-2b+1 \geqslant 0 \\ c^2-2c+1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+1 \geqslant 2a \\ b^2+1 \geqslant 2b \\ c^2+1 \geqslant 2c \end{cases}$$

بالضرب نجد :

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant 8abc$$

حل تطبيق 2 :

برهان أن $\forall a,b \in IR \quad (a \geqslant 1) \wedge (b \geqslant 1) \Rightarrow 2(ab+1) \geqslant (a+1)(b+1)$

نفرض أن $(a \geqslant 1) \wedge (b \geqslant 1)$

$$(a \geqslant 1) \wedge (b \geqslant 1) \Rightarrow (a-1 \geqslant 0) \wedge (b-1) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow (ab-a-b+1) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow ab+1 \geqslant a+b$$

$$\Rightarrow ab+ab+1 \geqslant a+b+ab$$

$$\Rightarrow 2ab+1 \geqslant ab+a+b$$

$$2ab+2 \geqslant ab+a+b+1$$

$$2(ab+1) \geqslant a(b+1)+(b+1)$$

$$2(ab+1) \geqslant (b+1)(a+1)$$

ومنه

4/ البرهان بالخلف:

ت 1 : - السلسلة ① - تمرين البرهان -

البرهان بالخلف

• بين أن المعادلة $x^2 = 3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Q}$

$$\frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3$$

$$p^2 = 3q^2$$

$$p = \sqrt{3}\, q$$

وهذا خطأ ومنه فالمعادلة $x^2=3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Q}$

ت 2:

نفرض أن الأعداد تكبر كلها من $\frac{1}{4}$

أي:

$$\begin{cases} c(1-a) > \frac{1}{4} \\ b(1-c) > \frac{1}{4} \\ a(1-b) > \frac{1}{4} \end{cases}$$

نجد:

$$c(1-a)\, b(1-c)\, a(1-b) > \frac{1}{4}$$

ومنه:

$$a(1-a)\, b(1-b)\, c(1-c) > \frac{1}{4} \quad \text{---} ②$$

نعلم أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

إذن:

$$a(1-a)\, b(1-b)\, c(1-c) \leq \frac{1}{4^3} \quad \text{---} (*')$$

من ① و (*) نجد:

$$\frac{1}{4^3} < a(1-a)b(1-b)c(1-c) < \frac{1}{4^2}$$

وهذا تناقض

3) البرهان باستعمال عكس نقيض الاستلزام:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$$

أي نبين أن $\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

ليكن $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ إذن:

$\exists p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{Z}^*$

حيث $\sqrt{x} = \frac{p}{q}$

ومنه $x = \frac{p^2}{q^2}$; $(p^2 \in \mathbb{N} \wedge q^2 \in \mathbb{N}^*)$

إذن $x \in \mathbb{Q}_+$

4) البرهان بالمثال المضاد:

ت 1:

نأخذ $n = 24$ مضاعف لـ $\left\{ \begin{matrix} a = 12 \\ b = 3 \end{matrix} \right.$

ولكن 24 ليس مضاعف لـ 36.

ت 2:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$$

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : x^2 < y^2 \wedge x \geq y$$

نأخذ $\left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{matrix} \right.$

لدينا $x^2 = 1 < y^2 = 4$ ولكن $x \geq y$

ب) البرهان بفصل الحالات :

ت م :

نميز 3 حالات

1) إذا كان $n = 3K$; $K \in \mathbb{N}$

فإن :

$$n(n+1)(n+2) = 3K(3K+1)(3K+2)$$
$$= 3K_1$$

حيث $K_1 = K(3K+1)(3K+2) \in \mathbb{N}$

وعليه فإن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 3 .

2) إذا كان $n = 3K+1$; $K \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2) = (3K+1)(3K+2)(3K+3)$$
$$= 3(3K+1)(3K+2)(K+1)$$
$$= 3K_2$$

حيث $K_2 = (3K+1)(3K+2)(K+1) \in \mathbb{N}$

وعليه $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 3 .

3) إذا كان $n = 3K+2$; $K \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2) = (3K+2)(3K+3)(3K+4)$$
$$= 3(3K+2)(K+1)(3K+4)$$
$$= 3K_3$$

حيث $K_3 = (3K+2)(K+1)(3K+4) \in \mathbb{N}$

إذن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 3 .

6) البرهان بالتراجع:

نبين أن

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ...(1)$$

لتكن $P(n)$ الخاصية التي تحقق (1)

• من أجل $n=1$ نجد:

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

إذن $P(1)$ محققة

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$
ونبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ أي نبين أن
$P(n+1)$ محققة

أي:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

لدينا

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

من فرضية التراجع

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{2^2} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)^2 \left[\frac{n^2+4n+4}{2^2}\right]$$

$$= (n+1)^2 \left[\frac{(n+2)^2}{2^2}\right]$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

وهو المطلوب

ومنه الخاصية محققة من أجل $(n+1)$