# إمتحان السداسي الأول في الجبر 1

**التمرين 01:** (4 نقاط) (كل إجابة خاطئة تحسب ناقص 0.5)
إختر الجواب أو الأجوبة الصحيحة في مايلي :

1- لتكن $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2x - y = 1\}$ و $B = \{(t+1, 2t+1) \;:\; t \in \mathbb{R}\}$، ماذا يمكننا القول عن $A$ و $B$؟

- $A \subseteq B$
- $B \subseteq A$
- $A \neq B$
- $A = B$

2- البرهان بإستعمال العكس النقيض يعتمد على : $P \Rightarrow Q$ مكافئة ل :

- $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$
- $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
- $\overline{P} \vee Q$
- $P \vee \overline{Q}$

3- لتكن $E$ مجموعة عدد عناصرها $n$ و $a$ عنصر من $E$. نرمز إلى $\mathcal{P}_a(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة $E$ التي تحتوي $a$. ماهو عدد عناصر $\mathcal{P}_a(E)$

- $card(\mathcal{P}_a(E)) = n - 1$
- $card(\mathcal{P}_a(E)) = n$
- $card(\mathcal{P}_a(E)) = 2^{n-1}$
- $card(\mathcal{P}_a(E)) = 2^n$

4- في المجموعات التالية ماهي المجموعة التي ليست زمرة(القانون الداخلي هو تركيب التطبيقات)

$P \wedge \overline{Q}$
$P \vee Q$

- مجموعة التطبيقات المتقابلة من $[0,1]$ نحو $[0,1]$.
- مجموعة التطبيقات المتقابلة المستمرة من $[0,1]$ نحو $[0,1]$.
- مجموعة التطبيقات المتقابلة و المتزايدة من $[0,1]$ نحو $[0,1]$.

**التمرين 02:** (6نقاط) لتكن $E = ]-\infty, 1[$ و $\top$ قانون التركيب الداخلي في $E$ معرف بالشكل :

$$x \top y := x + y - x \times y$$

$+$ و $\times$ هما الجمع و الضرب الإعتياديين في $\mathbb{R}$.

1- أثبت أن $(E, \top)$ زمرة تبديلية.

2- نضع $E = [0,1]$, هل $(E, \top)$ زمرة تبديلية.

**التمرين 03:** (10 نقاط) لتكن $A, B$ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من المجموعة $E$. وليكن التطبيق $f$ من $\mathcal{P}(E)$ نحو $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, من أجل كل $X$ نرفق $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$.

1- • برهن الإستلزام التالي :

$$E = A \cup B \Rightarrow f \text{ متباين}$$

- عين $f(E)$ و $f(A\cup B)$. ثم إستنتج الإستلزام التالي :

$$f \text{ متباين} \Rightarrow E = A\cup B$$

-2
- برهن أنه إذا كان $f$ غامر فإنه توجد مجموعة جزئية $X$ من $E$ بحيث $A\cap X = A$ و $B\cap X = \emptyset$.
إستنتج بإستعمال البرهان بالخلف الإستلزام التالي :

$$f \text{ غامر} \Rightarrow A\cap B = \emptyset$$

- لتكن $M$ مجموعة جزئية من $A$ و $N$ مجموعة جزئية من $B$، عين $f(M\cup N)$ بحيث $A\cap B = \emptyset$ ثم إستنتج أن

$$A\cap B = \emptyset \Rightarrow f \text{ غامر}$$

-3 أعطي شرط لازم و كافي ليكون التطبق $f$ تقابل ثم أكتب في هذه الحالة التطبيق العكسي ل $f$.

## الحل

**حل التمرين 01:** 04 نقاط

1- ليكن $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - y = 1\}$ و $B = \{(t + 1, 2t + 1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$، ماذا يمكننا القول عن $A$ و $B$؟

- $A \subseteq B$ صحيحة. 0.5
- $B \subseteq A$ صحيحة. 0.5
- $A \neq B$
- $A = B$ صحيحة. 0.5

2- البرهان بإستعمال العكس النقيض يعتمد على : $P \Rightarrow Q$ مكافئة ل :

- $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$
- $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ صحيحة. 0.5
- $\overline{P} \vee Q$ صحيحة. 0.5
- $P \vee \overline{Q}$

3- ليكن $E$ مجموعة عدد عناصرها $n$ و $a$ عنصر من $E$، نرمز إلى $\mathcal{P}_a(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة $E$ التي تحتوي $a$، ماهو عدد عناصر $\mathcal{P}_a(E)$

- $card(\mathcal{P}_a(E)) = n - 1$
- $card(\mathcal{P}_a(E)) = n$
- $card(\mathcal{P}_a(E)) = 2^{n-1}$ صحيحة. 0.5
- $card(\mathcal{P}_a(E)) = 2^n$

4- في المجموعات التالية ماهي المجموعة التي ليست زمرة(القانون الداخلي هو تركيب التطبيقات)

- مجموعة التطبيقات المتقابلة من $[0, 1]$ نحو $[0, 1]$، صحيحة. 0.5
- مجموعة التطبيقات المتقابلة المستمرة من $[0, 1]$ نحو $[0, 1]$، صحيحة. 0.5
- مجموعة التطبيقات المتقابلة و المتزايدة من $[0, 1]$ نحو $[0, 1]$.

**حل التمرين 02:** 06 نقاط

ليكن $E=]-\infty,1[$، نبرهن أن $(E,\top)$ زمرة تبديلية.

ليكن $x,y\in E$ لدينا $x\top y=x+y-xy=y+x-yx=y\top x$ منه القانون $\top$ تبديلي. 0.5

$\top$ تجميعي ؟ ليكن $x,y,z\in E$، لدينا :

$$x\top(y\top z)=x\top(y+z-yz)=x+y+z-xy-yz-xz+xyz \quad 0.25$$

و

$$(x\top y)\top z=(x+y-xy)\top z=x+y+z-xy-yz-xz+xyz \quad 0.25$$

ومنه $x\top(y\top z)=(x\top y)\top z$، القانون $\top$ تجميعي في $E$.

نفرض أن $e\in E$ عنصر حيادي بالنسبة للقانون $\top$، يعني $\forall x\in E: x\top e=e\top x=x$. ليكن $x\in E$.

لدينا $x\top e=x$ أي $e(1-x)=0$ 0.5 المساواة الأخيرة صحيحة من أجل كل $x\in E$ ومنه $e=0$ 0.5. بما أن القانون $\top$ تبديلي 0.5 فإن $x\top 0=0\top x=x$ إذن 0 عنصر حيادي للقانون $\top$ في $E$.

ليكن $x\in E$، نفرض وجود $x'$ نظير $x$ بالنسبة للقانون $\top$، $x'$ يحقق $x\top x'=x'\top x=0$ المساواة $x\top x'=0$ تكتب أيضا $x'(x-1)=x$ 0.5 أو أيضا، بصيغة مكافئة $x'=\frac{x}{x-1}$ 0.25 لأن $x\neq 1$ 0.25 زيادة على ذلك

$$x'-1=\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}<0 \quad 0.75$$

لأن $x<1$، مما يبرهن أن $x'\in E$، بما أن $\top$ تبديلي 0.25 فإن نظير $x$ بالنسبة للقانون $\top$ في $E$ هو $x/(x-1)$.

نضع $E=[0,1[$، مما سبق نلاحظ من جهة أن $[0,1[\subset]-\infty,1[$ و لدينا

$$\forall x\in]-\infty,1[\ x\top 0=0\top x=x$$

ومنه

$$\forall x\in[0,1[\ x\top 0=0\top x=x \quad 0.5$$

و واضح أن 0.25 $1\top 0=0\top 1=1$ إذن 0 عنصر حيادي للقانون $\top$ في $E$. و نلاحظ أيضا من جهة أخرى أن نظير $x$ بالنسبة للقانون $\top$ في $]-\infty,1[$ أقل تماما من 0 مما يعني أن $x$ لا يقبل عنصر نظير بالنسبة للقانون $\top$ في $[0,1[$ 0.75.

يمكن أيضا البرهان أن 1 لا يقبل نظير لأن لو فرضنا أن $x'$ نظير 1 بالنسبة للقانون $\top$ في $E$، المساواة $1\top x'=0$ تقودنا إلى $0=1$ و هذا تناقض.

**حل التمرين 03:**

-1

- نفرض أن $E=A\cup B$، و نبرهن أن $f$ تباين. ليكن $X,X'$ مجموعتين جزئيتين من $E$ بحيث $f(X)=f(X')$. المساواة $f(X)=f(X')$ تكتب على الشكل :

$$(A\cap X,B\cap X)=(A\cap X',B\cap X')$$

إذن لدينا

$$(A\cap X=A\cap X' \quad 0.25 \text{ و } B\cap X=B\cap X' \quad 0.25$$

ومنه

$$(A\cap X)\cup(B\cap X)=(A\cap X')\cup(B\cap X') \quad 0.5$$

بإخراج $X$ عامل مشترك على يسار المساواة السابقة و $X'$ على يمينها نجد

$$(A\cup B)\cap X=(A\cup B)\cap X' \quad 0.5$$

بما أن $E=A\cup B$ فرضا فإننا نجد $X=X'$. 0.5

- لدينا : $f(E) = (A \cap E, B \cap E) = (A, B)$ لأن $A, B$ مجموعتين جزئيتين من $E$. 0.5 كذلك،

$$f(A \cup B) = (A \cap (A \cup B), B \cap (A \cup B)) = (A, B)$$

لأن $A, B$ مجموعتين جزئيتين من $A \cup B$. 0.5 إذن $f(E) = f(A \cup B)$، ومنه $E = A \cup B$ إذا كان $f$ تباين. 0.5

-2

- يجب أن نلاحظ أن $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ لأن $A \subset A$ و $\emptyset \subset B$ الإحتواء صحيح مهما تكن المجموعتين $A$ و $B$. 0.25 $f$ غامر تضمن وجود سابقة للثنائية $(A, \emptyset)$. بصيغة أخرى $f$ غامر يعني وجود $X \in \mathcal{P}(E)$ بحيث $f(X) == (A, \emptyset)$، مما يعني أنه

$$(A \cap X, B \cap X) = (A, \emptyset) \quad 0.25$$

إذن

$$A \cap X = A \quad 0.25 \text{ و } B \cap X = \emptyset \quad 0.25$$

بإستعمال البرهان بالخلف نبرهن الإستلزام التالي

$$f \text{ غامر} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

نفرض أن $f$ غامر و $A \cap B \neq \emptyset$. 0.25
من السؤال السابق، $f$ غامر يعني وجود مجموعة جزئية $X$ من $E$ بحيث $A \cap X = A$ و $B \cap X = \emptyset$. 0.25
المساواة $A \cap X = A$ تعني $A \subset X$. 0.5
نستنتج أن $A \cap B \subset X \cap B$. 0.25 بما أن $X \cap B = \emptyset$ فإنه بالضرورة $A \cap B = \emptyset$ 0.25 وهذا تناقض مع الفرضية $A \cap B \neq \emptyset$. 0.25

- ليكن $M \subset A$ و $N \subset B$ . نفرض أن $A \cap B = \emptyset$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(M \cup N) &= (A \cap (M \cup N), B \cap (M \cup N)) \\ &= ((A \cap M) \cup (A \cap N), (B \cap M) \cup (B \cap N)). \quad 0.25 \end{aligned}$$

لدينا $A \cap M = M$ لأن $M \subset A$ و $B \cap N = N$ لأن $N \subset B$ 0.25 زيادة على ذلك، $A \cap N = \emptyset$ لأن $N$ مجموعة جزئية من $B$ و $A \cap B = \emptyset$. 0.25 كذلك $B \cap M = \emptyset$ لأن $M$ مجموعة جزئية من $A$ و $A \cap B = \emptyset$. 0.25 أخيرا بجميع النتائج السابقة نجد

$$f(M \cup N) = (M \cup \emptyset, \emptyset \cup N) = (M, N).$$

لأن $N$ مجموعة جزئية من $B$ و $A \cap B = \emptyset$. 0.25 المجموعة الجزئية $M \cup N$ هي سابقة للثنائية $(M, N)$ بالتطبيق $f$ إذا كان $A \cap B = \emptyset$. مما يعطينا $f$ غامر بنفس الشرط $A \cap B = \emptyset$. 0.25

3- من الأسئلة السابقة، $f$ تقابل إذا وفقط إذا كان $A \cup B = E$ و $A \cap B = \emptyset$. 0.25 إذن الشرط الضروري و الكافي لكون $f$ تقابل هو أن المجموعتين $A, B$ تشكلان تجزئة للمجموعة $E$. 1
نفرض أن هذا الشرط محقق. من السؤال السابق، إذا كان $(M, N) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(N)$ إذن $M \cup N$ هي سابقة لثنائية $(M, N)$ بالتطبيق $f$ لأن $f$ غامر و بما أن $f$ تباين فهذهالسابقة وحيدة، ومنه التطبق العكسي للتطبيق $f$ و الذي نرمز له بالرمز $f^{-1}$ من $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ نحو $\mathcal{P}(E)$ الذي يرفق بكل ثنائية $(M, N)$ المجموعة $f^{-1}((M, N)) = M \cup N$.
1