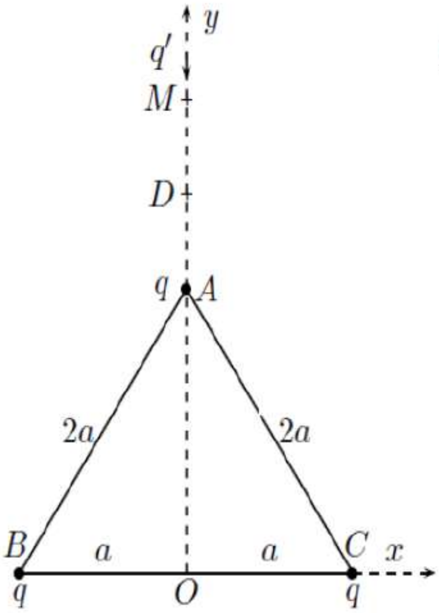
التمرين الأول:

وضعت ثلاث شحنات نقطية q موجبة في الرؤوس A, B, C لمثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $2a$ (أنظر الشكل).

1. أثبت أن الحقل الكهربائي الناشئ عن هذه الشحنات في النقطة $M(0, y)$ من المحور $y'Oy$ هي:



$$\vec{E} = kq\left[\frac{2y}{(y^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{(y-\sqrt{3}a)^2}\right]\vec{j}$$

2. أوجد الكمون الناشئ في نفس النقطة M.
3. أوجد عبارة الحقل مرة أخرى انطلاقا من قيمة الكمون.
4. ماهي الطاقة الداخلية للجملة.
5. أحسب عمل القوة الكهروساكنة اللازم لنقل شحنة q'

من اللانهائية إلى نقطة $D(0, 2\sqrt{3}a)$.

التمرين الثاني:

نعتبر جملة مكونة من ثلاث شحنات نقطية q_c و q_B ، q_A تتموضع على الترتيب في النقاط C و B ، A تنتمي إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها R كما في الشكل.

$$(q_A = -q \,, q_B = +2q \,, q_C = -2q)$$

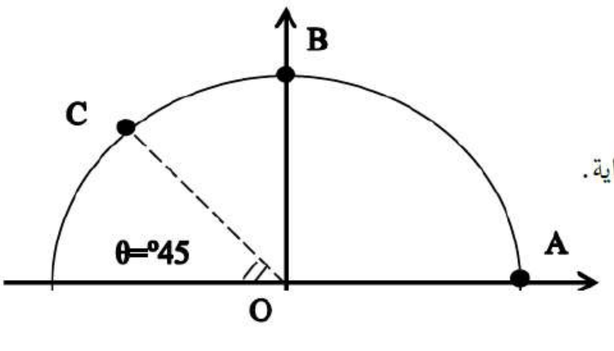
1) أحسب الكمون الكهربائي عند النقطة O.

2) أوجد الحقل الكهربائي عند النقطة O.

نضع عند النقطة O شحنة نقطية $q_0 = +2q$.

3) أحسب القوة الكهربائية المطبقة على هذه الشحنة.

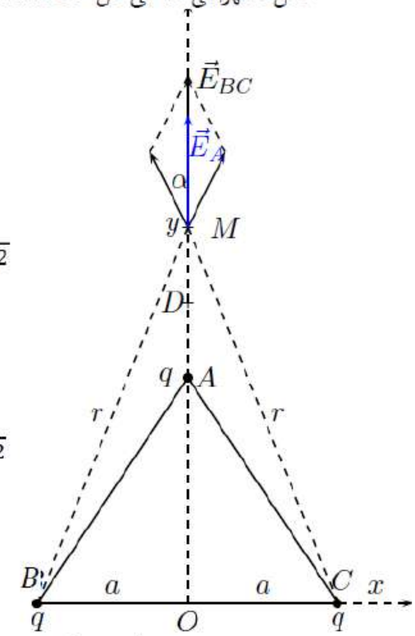
4) أحسب العمل اللازم بذله لنقل الشحنة q_0 إلى اللانهاية.



الإجابة

التمرين الأول:

الحقل الكهربائي الناشئ عن هذه الشحنات في النقطة $M(0,y)$



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{A/M} + \vec{E}_{B/M} + \vec{E}_{C/M}$$

$$\vec{E}_{A/M} = K\frac{q_A}{AM^2}\vec{u}_{AM} \qquad \vec{u}_{AM} = \vec{j} \qquad AM = y - OA = y - \sqrt{(2a)^2 - a^2} = y - \sqrt{3}a$$

$$\rightsquigarrow \vec{E}_{A/M} = K\frac{q}{\left(y - \sqrt{3}a\right)^2}\vec{j}$$

$$\vec{E}_{B/M} = K\frac{q_B}{BM^2}\vec{u}_{BM} \qquad \vec{u}_{BM} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\vec{j} \qquad BM = \sqrt{a^2+y^2}$$

$$\rightsquigarrow \vec{E}_{B/M} = K\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(a\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\vec{E}_{C/M} = K\frac{q_C}{CM^2}\vec{u}_{CM} \qquad \vec{u}_{CM} = -\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\vec{j} \qquad CM = \sqrt{a^2+y^2}$$

$$\rightsquigarrow \vec{E}_{C/M} = K\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(-a\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\vec{E}(M) = K\frac{q}{\left(y-\sqrt{3}a\right)^2}\vec{j} + K\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(a\vec{i}+y\vec{j}) + K\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}(-a\vec{i}+y\vec{j})$$

$$\vec{E}(M) = Kq\left[\frac{2y}{(y^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{\left(y-\sqrt{3}a\right)^2}\right]\vec{j}$$

الكمون في النقطة M:

$$V(M) = V_{A/M} + V_{B/M} + V_{C/M} = K\frac{q}{y-\sqrt{3}a} + K\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}} + K\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$V(M) = Kq\left[\frac{1}{y-\sqrt{3}a} + \frac{2}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]$$

الحقل من قيمة الكمون:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial y}Kq\left[\frac{1}{y-\sqrt{3}a} + \frac{2}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]\vec{j}$$

$$\vec{E}(M) = Kq\left[\frac{2y}{(y^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{\left(y-\sqrt{3}a\right)^2}\right]\vec{j}$$

الطاقة الداخلية:

$$E_{int} = K\left[\frac{q_Aq_B}{2a} + \frac{q_Aq_C}{2a} + \frac{q_Bq_C}{2a}\right] = K\left[\frac{q^2}{2a} + \frac{q^2}{2a} + \frac{q^2}{2a}\right] = \frac{3}{2}K\frac{q^2}{a}$$

العمل اللازم لنقل شحنة من اللانهاية:

$$W_{\infty\to D} = -\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(D)$$

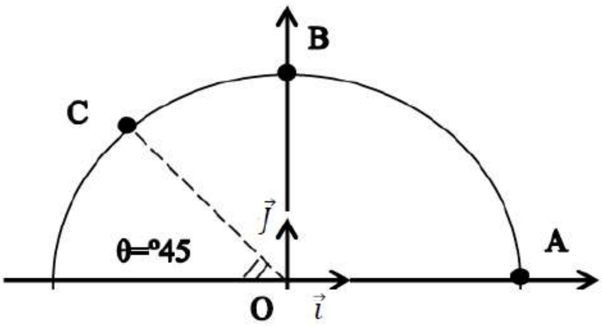
$$V(\infty) = 0 \to E_p(\infty) = 0$$

$$V(D) = Kq\left[\frac{1}{2\sqrt{3}a - \sqrt{3}a} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + \left(2\sqrt{3}a\right)^2}}\right] = \frac{Kq}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right]$$

$$\to E_p(D) = q'\,V(D) = \frac{Kq'q}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right]$$

$$W_{\infty\to D} = 0 - E_p(D) = -\frac{Kq'q}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right]$$

التمرين الثاني:



1/ الكمون في النقطة O

$$V(O) = V_{A/O} + V_{B/O} + V_{C/O}$$

$$\begin{cases} V_{A/O} = K\dfrac{q_A}{r_A} = K\dfrac{-q}{R} \\ V_{B/O} = K\dfrac{q_B}{r_B} = K\dfrac{2q}{R} \\ V_{C/O} = K\dfrac{q_C}{r_C} = K\dfrac{-2q}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(O) = -K\frac{q}{R} + 2K\frac{q}{R} - 2K\frac{q}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(O) = -K\frac{q}{R}}$$

2/ الحقل الكهربائي عند النقطة O

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_{A/O} + \vec{E}_{B/O} + \vec{E}_{C/O}$$

$$\vec{E}_{A/O} = K\frac{q_A}{{r_A}^2}\vec{U}_{AO} = K\frac{-q}{R^2}(-\vec{i})$$

$$\vec{E}_{B/O} = K\frac{q_B}{{r_B}^2}\vec{U}_{BO} = K\frac{2q}{R^2}(-\vec{j})$$

$$\vec{E}_{C/O} = K\frac{q_C}{{r_C}^2}\vec{U}_{CO} = K\frac{-2q}{R^2}(cos\theta\,\vec{i} - sin\theta\,\vec{j})$$

$$= K\frac{-2q}{R^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}\right)$$

$$= K\frac{\sqrt{2}q}{R^2}(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{E}(O) = K\frac{q}{R^2}\vec{i} - K\frac{2q}{R^2}\vec{j} + K\frac{\sqrt{2}q}{R^2}(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{E}(O) = K\frac{q}{R^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{2}-2\right)\vec{j}\right]}$$

3/ القوة الكهربائية التي تخضع لها الشحنة q_0

$$\vec{F}_0 = q_0.\vec{E}(O)$$

$$= +2q.K\frac{q}{R^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{2}-2\right)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_0 = K\frac{2q^2}{R^2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{2}-2\right)\vec{j}\right]}$$

الحقل عند النقطة O لا يتعلق بقيمة الشحنة q_0.

4/ العمل اللازم بذله لنقل الشحنة q_0 إلى اللانهاية

$$W_{O\to\infty} = -\Delta E_p = E_p(O) - E_p(\infty)$$

$$V(\infty) = 0 \rightarrow E_p(\infty) = 0$$

$$W_{O\to\infty} = E_p(O) = q_0 V_O = -K\frac{q_0 q}{R}$$