المدرسة العليا للأساتذة طالب عبد الرحمان -الأغواط-

السنة الدراسية: 2022 - 2023

المستوى: السنة أولى رياضيات وفيزياء

وحدة: التحليل 1

امتحان السداسي الثاني

يوم: 2023/06/08

المدة: ساعة ونصف

التمرين الأول : 6

1) أ) أكتب تعريف تابع مستمر بانتظام على مجال I من $\mathbb{R}$.

ب) برهن أن كل تابع مستمر بانتظام على المجال I هو تابع مستمر على المجال I.

2) ليكن f التابع المعرف على $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{-2x - x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

أ) أحسب $f(\frac{1}{2})$ و $f(-\frac{1}{2})$.

ب) بين أن مشتقة التابع f لا تنعدم على المجال $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\setminus\{0\}$.

ج) هل هذا يناقض نظرية روول (مع التبرير).

التمرين الثاني : 7

الأسئلة التالية مستقلة عن بعضها البعض.

1) ليكن $f : [a, b] \to [a, b]$ تابعا مستمرا. أثبت أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a, b]$.

2) أ) باستعمال نظرية التزايدات المنتهية، بين أن:

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

ب) استنتج أن التابعين المعرفين على $\mathbb{R}_+^*$ بـ $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ و $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ رتيبين.

3) أكتب النشر المحدود من الرتبة 3 عند 0 للتابع $\arccos x$.

$\frac{\ln(2-e^x)}{x} = \frac{-e^x}{2-e^x}$

التمرين الثالث : 7

ليكن f التابع المعرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2-e^x)}{x}, & x < 0 \\ -x-1 & x \geq 0. \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية التابع f على $\mathbb{R}$.

2) أدرس قابلية اشتقاق التابع f على $\mathbb{R}$.

3) هل التابع f من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$ (مع التبرير).

بالتوفيق للجميع

حل التمرين الأول

1) أ) تعريف دالة مستمرة بانتظام على I من $\mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in I : |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ب) برهان كل دالة مستمرة بانتظام على I هي مستمرة على I.

ليكن $x_0 \in I$ نضع $y = x_0$ في تعريف الاستمرار بانتظام

منه:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

وهذا يعني أن f مستمرة عند x_0 من I ومنه

f مستمرة على المجال I

2) أ) حساب $f(\frac{1}{2})$ و $f(-\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

ب) تبيين أن المشتقة f' لا تنعدم

لدينا $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$ فإن f قابلة للاشتقاق على هذا المجال

$f'(x) = \frac{-2 - 2x}{2\sqrt{-2x - x^2}} = \frac{-1 - x}{\sqrt{-2x - x^2}} \neq 0, \forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[$

لما $x \in]0, \frac{1}{2}[$ لدينا أيضا بنفس الطريقة:

$f'(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{-2x - x^2}} \neq 0, \forall x \in]0, \frac{1}{2}[$

ج) هل هذا يناقض نظرية رول؟

لا يناقض نظرية رول لأن f غير قابلة للاشتقاق على المجال $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

لأن f مستمرة على $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ و $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2})$

ولكن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2}{x} - 1} = +\infty$

حل التمرين الثاني

1) نضع $g(x) = f(x) - x$ الدالة g مستمرة على $[a,b]$ لأنها فرق دالتين مستمرتين

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ (لأن $a \leq f(a)$)

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ (لأن $f(b) \leq b$)

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $c \in [a,b]$ بحيث $g(c) = 0$

أي $g(c) = f(c) - c = 0$ ومنه $f(c) = c$

ومنه النقطة الصامدة

2) أ) تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية

نطبق على الدالة $f(t) = \ln t$ على المجال $[x, x+1]$

هي دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على

حسب م.ت.م فإنه:

$\ln(x+1) - \ln x = (x+1-x)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$

حيث $c \in]x, x+1[$ ومنه $x < c < x+1$

أي $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ ومنه

$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالتين f و g

لدينا

$f(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

$f'(x) = \left[\ln(1+\frac{1}{x}) + x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right] e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

$= \left[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right] e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

حسب السؤال (أ)

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ f متزايدة

$g(x) = e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}$

$g'(x) = \left[\ln(1+\frac{1}{x}) + (x+1)\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right] e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}$

$= \left[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\right] e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}$

الأيمن موجب و حسب السؤال (أ)

$g'(x) < 0 \Rightarrow$ g متناقصة على $\mathbb{R}_+^*$

$-1 = f(0)$

(3 [redacted]

$\arccos x = \arccos(0) + x(\arccos)'(0) + \frac{(\arccos)''(0)}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}(\arccos)^{(3)}(0) + o(x)^3$

بالحساب نجد أن:

$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos)^{(2)}(x) = \frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos)^{(3)}(x) = \frac{-(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - 2x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)^3}$

ومنه

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x)^3$

[redacted]

1) [redacted]

f [illegible] $\mathbb{R}^*$ [illegible]

و [illegible] $\mathbb{R}^*$

[redacted]

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(-x-1) = -1 = f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\ln(2-e^x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left[\frac{-e^x}{2-e^x}\right] = -1 = f(0)$

[illegible]

ومنه f مستمرة عند 0 و منه f مستمرة على $\mathbb{R}$

[redacted]

f [illegible] $\mathbb{R}^*$ [illegible]

[illegible]

[redacted]

$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x-1+1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_d(0)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln(2-e^x)}{x}+1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(2-e^x)+x}{x^2}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-e^x}{2-e^x}+1}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}\left[\frac{-e^x(2-e^x)+e^x(-e^x)}{\quad}\right] =$

[illegible] f [illegible] 0 [illegible] f [illegible]

$\mathbb{R}$ [illegible]

$\boxed{f \in C^1(\mathbb{R})} \Rightarrow f$ [illegible] (3

$f'(x) = \begin{cases} \frac{-xe^x - (2-e^x)\ln(2-e^x)}{x^2(2-e^x)}, & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

[illegible] f' [illegible] $\mathbb{R}$

f' [illegible] $\mathbb{R}^*$ [illegible]

[illegible]

[redacted]

$\lim_{x \to 0} \frac{-xe^x - (2-e^x)\ln(2-e^x)}{x^2(2-e^x)}$ [illegible]

$= \lim_{x \to 0} \frac{-e^x - xe^x + e^x\ln(2-e^x) - \frac{e^x}{2-e^x}}{2(2-e^x) - 2xe^x - x^2e^x} = -1$

f' [illegible] 0 [illegible] f' [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible]

(1) و (2) [illegible]

$f \in C^1(\mathbb{R})$