# الامتحان الأول

يوم: 2023/02/11 المدة: ساعة ونصف

## التمرين الأول : (07 نقاط)

أثبت ما يلي :

1) ليكن $x$ عددا حقيقيا. أثبت أنه يوجد عدد صحيح وحيد نرمز له بـ $E(x)$ يحقق:

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

2) كل متتالية عددية متقاربة هي متتالية محدودة. هل العكس صحيح ؟ ( برر )

3) كل متتالية عددية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متتالية متقاربة نحو حدها الأعلى.

## التمرين الثاني : (06 نقاط)

لتكن $A$ المجموعة المعرفة كما يلي:

$$A = \{\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^*\}.$$

1) أثبت أن المجموعة $A$ محدودة، ثم استنتج وجود الحدين الأعلى والأدنى لـ $A$ .

2) عين مع التبرير (في حالة الوجود) كلا من : $\sup A, \inf A, \max A, \min A$.

## التمرين الثالث : (07 نقاط)

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

و

$$v_n = \ln(u_n).$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $0 \leq x$ لدينا:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن:

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

(إرشاد: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$)

4) أدرس تقارب المتتالية $(v_n)_n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

بالتوفيق

3) لنبين أن $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

$g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$ و $f(x) = \ln(x+1) - x$ نعرف

$[0, +\infty[$ على $f$ و $g$ دالتان قابلتان للاشتقاق

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1 + x^2 - 1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \geq 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

ومنه $f(x) \leq 0 \Leftarrow \ln(x+1) \leq x$

و $g(x) \geq 0 \Leftarrow \ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}$ وهو المطلوب.

4) البرهان بالتراجع

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

من أجل $n=1$ لدينا $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(2)}{2} = 1$ محققة

نفرض أن $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ وهو المطلوب.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

لدينا $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{2(3)}{6} = 1$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $(n)$ ونبرهن أنها صحيحة من أجل $(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ وهو المطلوب.

5) إيجاد النهاية

$v_n = \ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

باستعمال الحصر في السؤال ① نجد:

$\left(\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n^2}\right)^2\right) \leq v_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

باستعمال الحصر في السؤال ①

التمرين الثالث:

1) لدينا $x$ عدد حقيقي موجب، ولتكن $A = \{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$

المجموعة $A$ غير خالية لأن $0 \in A$ ومحدودة من الأعلى بـ $x$

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad N > x \geq n$

وبما أن $A$ جزء من $\mathbb{Z}$ غير خالي ومحدود من الأعلى فهي تقبل أكبر عنصر

ليكن $a \in A$ أكبر عنصر، أي $a \leq x$ و $a+1 \notin A$

أي $x < a+1$ ومنه $[x] = a$

2) بنفس الطريقة $B = \{n \in \mathbb{Z}, n \geq x\}$

نجد $[x] = \min B = a$

(2) و (3) مبرهنة في الدرس

التمرين الرابع:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad (x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 1 \geq \frac{-2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \geq -1$

كذلك

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1$

ومنه $A$ محدودة

المجموعة $A$ جزء من $\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة

حسب خاصية الحد الأعلى و الحد الأدنى يوجد $\inf A$ و $\sup A$ ($x=1, y=1$ ، $1 \in A$ لأن)

لاحظ أنه لما $x = y$ نجد $\frac{2xx}{x^2+x^2} = 1$

أي $\sup A = \max A = 1$

لما $x = -y$ نجد $\frac{2x(-x)}{x^2+x^2} = -1$

أي $\inf A = \min A = -1$

المادة : ..................................
نوع الإمتحان : عادي/ شامل/ استد...
التاريخ : ..................................

العلامة : ..................................
ملاحظات : ..................................

المدرسة العليا للأساتذة
طالب عبد الرحمان بالأغواط

قسم الفيزياء

قسم : ..................................
رقم الطالب (ة) : ........... N° Etudiant ...........
الإسم : ........... Prénom ...........
اللقب : ........... Nom ...........
السنة : ........... الفوج : ........... Année ........... Groupe : ...........
التخصص : ........... Spécialité ...........

ومنه، $\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^4}\right) \leq v_n \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$

نستعمل السؤال 2 فنجد أنه

$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$

ومنه المطلوب

~~لدينا ... و ...~~ من السؤال السابق لدينا

$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$

بالمرور للنهاية لما $n \to +\infty$ نجد أنه

$\frac{1}{2} \leq \lim_{n \to +\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$

باستعمال نظرية الحصر نجد أنه $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}}$

~~استنتاج~~

لدينا $e^{v_n} = u_n$

ومنه $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{v_n} = e^{\frac{1}{2}}}$