امتحان السداسي الأول

يوم: 2020/03/16 المدة: ساعة ونصف

التمرين الأول :

أثبت مايلي :

1) كل متتالية عددية متقاربة فهي محدودة.

هل القضية العكسية صحيحة. (برر)

2) كل متتالية عددية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو حدها الأعلى.

التمرين الثاني :

السؤالين التاليين مستقلين عن بعضهما البعض.

1) لتكن المجموعة A من $\mathbb{R}$ بحيث :

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

أ) أثبت أن المجموعة A محدودة.

ب) عين في حالة وجودها كلا من $\min A, \max A, \sup A, \inf A$. (مع التبرير)

2) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

التمرين الثالث :

ليكن a و b عددين حقيقيين، ولتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & au_n + b \end{cases}$$

1) أدرس رتابة وتقارب المتتالية $(u_n)_n$ في الحالتين التاليتين :

$$(a = 1; b \in \mathbb{R}) \quad ; \quad (a \neq 1; b = 0)$$

2) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}.$$

3) بفرض أن $a \neq 1$. برهن أن :

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

استنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}.$$

4) أدرس تقارب المتتالية $(u_n)_n$.

بالتوفيق للجميع

حل إمتحان العام الماضي

التمرين الأول:

① كل متتالية متقاربة فهي محدودة

البرهان موجود في الدرس

والقضية العكسية خاطئة

مثال مضاد: $u_n = 1+(-1)^n$ أو $u_n = \sin(n)$

(u_n) محدودة وغير متقاربة تملك أكثر من نهاية

② نعم كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو حدها الأعلى (البرهان كذلك موجود في الدرس)

التمرين الثاني:

① لدينا $A=\left\{\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}, n\in\mathbb{N}\right\}$

أ) إثبات أن A محدودة (يعني محدودة من الأعلى والأسفل)

$$n\in\mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq \frac{2n}{2n+1} < 1$$

$$\xRightarrow{\text{القسمة على } 2} 0 \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

$$\xRightarrow{\text{نضيف } -\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} \leq \frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \forall y\in A: -\frac{1}{2} \leq y < 0$$

وهذا يعني أن A محدودة من الأعلى والأسفل أي أنها محدودة

ب) بما أن $\forall x\in A: x \geq -\frac{1}{2}$

ويوجد $n_0 = 0$ بحيث

$$-\frac{1}{2} = \frac{0}{2\cdot 0+1}-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\in A$$

ومنه فإن $\inf(A) = -\frac{1}{2}$ و $\min(A) = -\frac{1}{2}$

* نخمن أن $\sup(A)=0$ والإثبات باستعمال الخاصية المميزة.

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}: \sup(A)-\varepsilon < x_{n_0} \leq \sup(A)$$

* ليكن $\varepsilon>0$ كيفي ولدينا $\sup(A)=0$ بالتعويض نجد

$$0-\varepsilon < x_{n_0} \leq 0$$

بما أن $\forall x\in A: x<0$ يكفي إثبات أن $x_{n_0} > -\varepsilon$ إذن

$$x_{n_0} > -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{n_0}{2n_0+1}-\frac{1}{2} > -\varepsilon$$

$$\xLeftrightarrow{\text{توحيد المقام}} \frac{2n_0-2n_0-1}{2(2n_0+1)} > -\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2(2n_0+1)} > -\varepsilon$$

$$\xLeftrightarrow{\text{الضرب في } (-2)} \frac{1}{2n_0+1} < 2\varepsilon$$

$$\xLeftrightarrow{\text{المقلوب}} 2n_0+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow 2n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}-1$$

$$\Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$$

إذن يكفي أخذ $n_0 = \left[\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right]+1$

ويكون

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}\,(x_{n_0}\in A): 0-\varepsilon < x_{n_0} \leq 0$$

أي أن الخاصية المميزة محققة وهذا يبين أن $\sup(A) = 0$

وبما أن $0 \notin A$ فإن $Max(A)$ غير موجود

② البرهان أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}$:
فإن
$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$$

* هناك طريقة في الأعمال الموجهة
وهذه طريقة 2

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}: E(x)\leq x<E(x)+1$ ①

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*: nE(x)\leq nx<nE(x)+n$

ولدينا كذلك

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*\quad E(nx)\leq nx<E(nx)+1$ ②

$\Rightarrow -E(nx)-1<-nx\leq -E(nx)$

بجمع ① و ② نجد

$\underbrace{nE(x)-E(nx)-1<0}<nE(x)+n-E(nx)$

$\Rightarrow \underbrace{nE(x)-E(nx)-1}_{\in\mathbb{Z}}<0$ لأن

$\Rightarrow nE(x)-E(nx)\leq 0$

$\Rightarrow nE(x)\leq E(nx)$ ③

ومنه نجد أن (من ① و ③)

$nE(x)\leq E(nx)\leq nx<nE(x)+n$

$\Rightarrow nE(x)\leq E(nx)<nE(x)+1$

$\Rightarrow \underbrace{E(x)}_{P}\leq \underbrace{\frac{E(nx)}{n}}_{y}<\underbrace{E(x)+1}_{P+1}$ ④

ونعلم أنه إذا كان $P\in\mathbb{Z}$
وكان $y\in\mathbb{R}$ بحيث
$P\leq y<P+1$ فإن $E(y)=P$

بما أن $E(x)\in\mathbb{Z}$ فإن ④ تعني أن
$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$ وهو المطلوب

التمرين الثالث:

لدينا

$$\begin{cases}u_0\in\mathbb{R}\\ u_{n+1}=au_n+b\end{cases} \quad / a.b\in\mathbb{R}$$

* في حالة $a=1$ و $b\in\mathbb{R}$ يكون لدينا
$u_{n+1}=u_n+b$ فهي عبارة عن متتالية حسابية أساسها هو b لأن
$u_{n+1}-u_n=b$ وبالتالي فإن الحد العام لها هو $u_n=u_0+nb$

$b>0$ يعني أن (u_n) متزايدة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$b<0$ يعني أن (u_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

$b=0$ فإن (u_n) ثابتة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=u_0$

* في حالة $a\neq1, b=0$ فإن
$u_{n+1}=au_n$ فإن (u_n) عبارة عن متتالية هندسية أساسها هو a ومنه
الحد العام هو $u_n=u_0\cdot a^n$ ومنه

$a>1$ يعني أن (u_n) متزايدة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

إذا كان $0<a<1$ فإن (u_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

* إذا كان $-1<a<0$ ليست رتيبة و
$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

* إذا كان $a\leq-1$ ليست رتيبة و لا تملك نهاية

(الدراسة السابقة في حالة $u_0>0$)
بنفس الشكل ندرس الحالة $u_0<0$

② الإثبات أن $u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}$

* البرهان بالتراجع

نسمي هذه الخاصية $P(n)$:

لدينا من أجل $n=1$: $u_1 = au_0 + b\sum_{k=1}^{1} a^{n-k}$

$= au_0 + b$

إذن $P(1)$ صحيحة

* نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي $u_{n+1} = a^{n+1} u_0 + b\sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}$

$$u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\right) + b$$

$$= a^{n+1} u_0 + ab\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} + b$$

$$= a^{n+1} u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} + \underbrace{a^{(n+1)-(n+1)}}_{=1} b$$

$$= a^{n+1} u_0 + b\sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة وهذا يعني أن

$$\forall n\in\mathbb{N}^* : u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}$$

③ بفرض أن $a \neq 1$ برهان أن

$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a-1}$ لدينا

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1$$
$$= 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1}$$

وهو مجموع متتالية هندسية أساسها هو a إذن

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$ (عدد الحدود هو n)

الإستنتاج

$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = a^n u_0 + b\,\frac{a^n-1}{a-1}$$

$$= a^n u_0 + \frac{ba^n - b}{a-1} = \frac{a^n\cdot au_0 - a^n u_0 + ba^n - b}{a-1}$$

$$= \frac{a^n(au_0 - u_0 + b) - b}{a-1}$$

$$= \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a-1} \quad \Big/ \quad u_n = \frac{a^n(u_1-u_0)-b}{a-1}$$

④ دراسة تقارب المتتالية (u_n)

لدينا حالات

* $a > 1 \Leftarrow$ $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty & \text{إذا كان } u_1 > u_0 \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty & \text{إذا كان } u_1 < u_0 \end{cases}$

فهي متباعدة

* $-1 < a < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ ومنه فإن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$$

فهي متقاربة

* إذا كان $a \leq -1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} a^n$ غير موجودة أي أن $\lim_{n\to+\infty} u_n$ غير موجودة ومنه فإن (u_n) متباعدة

انتهى