السنة الدراسية:

المدرسة العليا للأساتذة طالب عبد الرحمان -الأغواط-

وحدة: التحليل 1

المستوى: السنة أولى علوم دقيقة

المدة: ساعة ونصف

امتحان السداسي الثاني

يوم: 2022/05/31

التمرين الأول :

1) ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا وليكن $x_0, l\in\mathbb{R}$ ، أكتب تعريفا لما يلي: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

2) اكتب نص نظريتي روول والتزايدات المنتهية المعممة.

3) أعط تعريف تابع f مستمر بانتظام على مجال I من $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني :

الاسئلة التالية مستقلة عن بعضها البعض.

1) ليكن f تابعا مستمرا على المجال $[a,b]$ بحيث $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. وليكن α و β عددين حقيقيين موجبين تماما.
أثبت أنه يوجد عدد c ينتمي للمجال $[a,b]$ يحقق:

$$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(c).$$

2) ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعا مستمرا، وقابلا للاشتقاق على المجال $]a,b[$ ولنعتبر التابع

$$g:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$x\to g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

أ) بين أن g تابع مستمر، وقابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$.

ب) أثبت أن $g(a)=g(b)$ ، ثم استنتج وجود عدد c من المجال $]a,b[$ يحقق:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

3) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}+x, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2\sin(\frac{1}{x})+x, & x<0\end{cases}$$

أ) أثبت أن التابع f مستمر على $\mathbb{R}$.

ب) أدرس قابلية f للاشتقاق عند كل نقطة من $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث :

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $0<a<b$. لنعرف التابع:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=\ln\left[(1-x)a+bx\right]-(1-x)\ln a-x\ln b.$$

1) بين أن التابع f قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$ وعين تابعه المشتق f'.

2) أثبت أنه يوجد عدد c من المجال $]0,1[$ يحقق: $f'(c)=0$.

3) أثبت أن التابع f' قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$ وأحسب مشتقه f''.

4) أدرس اشارة التابع f' على المجال $[0,1]$ ، ثم استنتج اشارة التابع f على المجال $[0,1]$.

بالتوفيق للجميع

التصحيح النموذجي لامتحان الثاني

- التحليل 1 -

حل التمرين الأول

1) تعريف: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x, |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

2) نظرية رول:
ليكن $f:[a,b]$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$ ويحقق $f(a)=f(b)$ عندئذ يوجد عدد c من $]a,b[$ يحقق:

$$f'(c)=0$$

نظرية التزايدات المنتهية المعممة:
ليكن $f,g:[a,b]$ تابعين مستمرين وقابلين للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث $\forall x\in]a,b[, g'(x)\neq 0$ عندئذ يوجد عدد c من $]a,b[$ يحقق:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3) تعريف تابع f مستمر بانتظام على I:

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x,y\in I, |x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

حل التمرين الثاني

1) لنعرف التابع g على $[a,b]$ بحيث:

$$g(x) = (\alpha+\beta)f(x) - \alpha f(a) - \beta f(b)$$

واضح أن g مستمر على $[a,b]$ لأن f مستمر

لدينا:

$$g(a) = (\alpha+\beta)f(a) - \alpha f(a) - \beta f(b) = \beta[f(a)-f(b)]$$

$$g(b) = (\alpha+\beta)f(b) - \alpha f(a) - \beta f(b) = -\alpha[f(a)-f(b)]$$

الحالة يوجد موجب مما فإن حتماً

$$g(a)\cdot g(b) < 0$$

وبما أن g مستمر على $[a,b]$ وباستخدام نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد $c \in [a,b]$ يحقق: $g(c)=0$

أي أنه:

$$(\alpha+\beta)f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

2) أ) بما أن f مستمر و ق.إ على $]a,b[$ فإن g تابع مستمر و ق.إ على $]a,b[$ كمجموع توابع مستمرة و ق.إ على $]a,b[$

ب)

$$g(a) = f(a) - 0 = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

ومنه $g(a)=g(b)=f(a)$

لدينا g يحقق شروط نظرية رول لأنه مستمر و ق.إ و $g(a)=g(b)$ عندئذ يوجد عدد c من $]a,b[$ بحيث:

$$g'(c)=0$$

أي أنه:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3) أ) التابع f مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنه توابع $\sin$ والتابع الأسي وكثيرات الحدود توابع مستمرة على $\mathbb{R}$

لندرس الاستمرار عند 0:

$$\lim_{x\to 0^-} (e^{\frac{1}{x}}+x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^2\sin\frac{1}{x} + x\right) = 0 = f(0)$$

لأن:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

بالمرور للنهاية عند 0 نجد أن $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

ومنه f مستمر عند 0 ومنه f مستمر على $\mathbb{R}$

ب) f ق.إ على $\mathbb{R}^*$ لأن الدوال $\sin$ و e^x و كثيرات الحدود ق.إ على $\mathbb{R}^*$
لنرس قابلية الاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x \to 0^{<}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + 1 \right) = 1 = f'_d(0)$$

و

$$\lim_{x \to 0^{>}} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right) = 1 = f'_g(0)$$

بنفس طريقة (1)

ومنه f ق.إ عند 0 ومنه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 03:

1) الدالة f على شكل مجموع تابعية كثير حدود والتابع اللوغاريتمي تركيب كثير حدود وهي توابع ق.إ ومنه f ق.إ على المجال $[0,1]$.
نعين f'.

$$f'(x) = \frac{b-a}{(1-x)a+bx} + \ln a - \ln b$$

2) لدينا f تابع مستمر و ق.إ على المجال $]0,1[$ كما لدينا،

$$f(0) = f(1) = 0$$

ومنه باستخدام رول يوجد عدد $c \in]0,1[$ يحقق،

$$f'(c) = 0$$

3) التابع f' على شكل تابع ناطق وهو تابع ق.إ على المجال $[0,1]$
حساب f''.

$$f''(x) = \frac{-(b-a)^2}{[(1-x)a+bx]^2}$$

4)
لنشكل جدول تغيرات f'.

x	0		c		1
f''		−		−	
f'	$f'(0)$	↘	0	↘	$f'(1)$

من جدول التغيرات f' تابع متناقص تماماً وينعدم عند $c \in]0,1[$
ومنه f' موجب في المجال $]0,c[$
وسالب في المجال $]c,1]$

استنتاج إشارة f:

	0		c		1
f'		+	0	−	
f	$f(0)=0$	↗	$f(c)$	↘	$f(1)=0$

ومن جدول التغيرات واضح أنه

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad f(x) \geq 0$$