REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure Cheikh Mohamed
El Bachir El Ibrahimi-Kouba-Alger

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة الشيخ محمد
البشير الإبراهيمي-القبة-الجزائر

السنة الأولى رياضيات وعلوم دقيقة

السبت 03 فيفري 2024

الامتحان الأول في وحدة التحليل 1 (ر112)

المدة: ساعة ونصف

12:15-10:45

تنبيه: يمنع استعمال القلم الأحمر والماحي (نظافة الكراس تؤخذ بعين الاعتبار).

التمرين الأول (5.5 ن)

I) ليكن E جزءا غير خال ومحدود من الأعلى في $\mathbb{R}$ بحيث $\sup E > 0$. بيّن أنّه يوجد x_0 من E بحيث $x_0 > 0$.

II) لتكن A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ معرفة كما يلي:

$$A = \left\{\frac{n+p}{np+mn+2}, (n,m,p) \in \mathbb{N}^3\right\},\ B = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}\right\},\ C = \left\{x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x(1-x)} - x > 0\right\}.$$

1) ادرس محدودية المجموعة A.

2) بيّن أنّ المجموعة B محدودة من الأدنى وأنّ $\inf B = 1$ (باستعمال الخاصية المميزة للحد الأدنى).
هل $\min B$ موجود؟ (برّر إجابتك).

3) بيّن أنّ المجموعة C محدودة ثم عيّن $\sup C$ و $\inf C$.

التمرين الثاني (6.5 ن)

نعتبر المتتاليتين الحقيقيتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ المعرّفتين بالعلاقتين التراجعيتين المواليتين:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases},\qquad \begin{cases} v_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

مع $u_0 > v_0$.

1) بيّن أنّ: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0, v_n > 0$.

2) بيّن أنّ: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < u_n$.

3) بيّن أنّ المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ رتيبتان.

4) استنتج أنّ المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متقاربتان، ويتقاربان نحو نفس النهاية.

5) ادرس رتابة المتتالية $(u_nv_n)_n$، ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث (8 ن)

I) 1) احسب النهاية التالية (دون استعمال قاعدة لوبيتال):

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin^2(x)}{x\sqrt{1-\cos x}}\right).$$

2) بيّن باستعمال التعريف أنّ:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^3}\right) = 0.$$

II) ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا مستمرا يحقق:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b,$$

مع a و b عددين حقيقيين يحققان:

$$ab < 0.$$

1) بين أنّه يوجد عددين حقيقيين x_0 و y_0 بحيث $f(x_0)f(y_0) < 0$.

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال الذي طرفاه x_0 و y_0.

III) ليكن $a \in \mathbb{R}$ وليكن $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا مستمرا بحيث $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a} = l$ مع $l \in \mathbb{R}$.

1) بيّن أنّ التابع f يقبل تمديدا بالاستمرار عند $x_0 = a$ (نرمز للتابع الممدد له بـ $\tilde{f}$).

2) ادرس قابلية التابع $\tilde{f}$ الاشتقاق عند $x_0 = a$.

بالتوفيق للجميع