المدرسة العليا للأساتذة الأغواط

السنة الأولى علوم دقيقة
الكهرباء

النواقل المتزنة كهروستاتيكيا

الدكتورة فتيحة باباغيو

الفصل الثاني

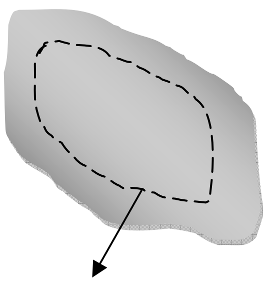
النواقل المتزنة كهروستاتيكيا

لقد سبق في الفصل الأول أن تطرقنا إلى تصنيف المواد حسب قابلية توصيل الشحنة الكهربائية، و أشرنا أن الناقل هو جسم يمكن أن تتحرك فيه الشحنات (الإلكترونات) بكل حرية ضمن حدود الجسم. عندما لا تكون هناك محصلة حركة للشحنة ضمن الناقل، يكون هذا الناقل في حالة اتزان كهروستاتيكي. نستطيع القول أن كل الشحنات داخل ناقل في حالة اتزان كهروستاتيكي تكون ساكنة.

سنهتم أيضا في هذا الفصل بدراسة المكثفات –وهي أجهزة تختزن الطاقة الكهربائية– و تتكون في الأصل من ناقلين يفصلهما عازل (في دراستنا نعتبره الفراغ)، و تتميز المكثفة بمعامل يدعى سعة المكثفة، يعتمد على شكلها الهندسي و على المادة العازلة.

1.2 خواص الناقل المتزن كهروستاتيكيا

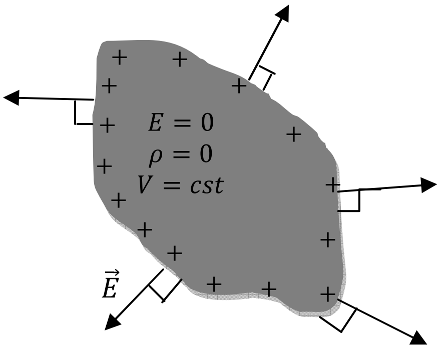
1. الحقل الكهربائي داخل الناقل المتعادل أو المشحون في حالة توازن معدوم. فلو لم يكن معدوم لتسارعت الشحنات في الناقل بفعل هذا الحقل، و يفقد الناقل حالة اتزانه.
2. الشحنة (الكثافة الحجمية للشحنة ρ) داخل الناقل المتزن كهروستاتيكيا معدومة. لنبرهن على هذه الخاصية نختار سطح غوص داخل الناقل حيث الحقل معدوم فحسب نظرية غوص و الخاصية 1:



$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0 \Longrightarrow \phi = 0 \Longrightarrow \sum q_{int} = 0$$

3. إذا كان الناقل مشحونا فإن الشحنة تستقر على سطحه. الحقل على سطح الناقل المشحون يجب أن يكون عموديا على هذا السطح لأنه لو وجدت مركبة مماسية (موازية) فسوف تتحرك الشحنات عليه.



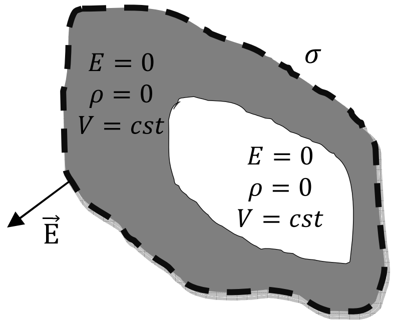
4. يشكل الناقل حجما لتساوي الكمون:

$E = 0 \Longrightarrow V =$ ثابت

و السطح الخارجي هو سطح تساوي الكمون، و الحقل عمودي على هذا السطح.

ملاحظة:

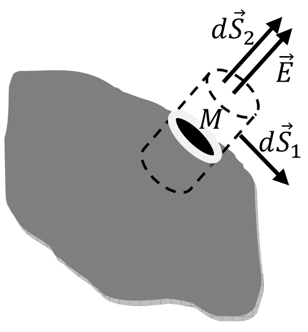
- تتوزع شحنات الناقل المشحون على سطحه بكثافة سطحية σ موزعة على سمكٍ مكوَّنٍ من بضع طبقات من الذرات.



- الخواص السابقة للناقل تبقى صحيحة من أجل ناقل مجوف.
- عند وصل ناقل مشحون مع ناقل آخر(الأرض مثلا) يحدث تبادل في الشحنات بينهما حتى يشكلا معا حجما لتساوي الكمون (يكون لهما نفس الكمون).

2.2 العلاقة بين الحقل الكهربائي بالجوار المباشر لناقل و الشحنة الكهربائية السطحية

ليكن ناقل ذو شكل كيفي، لإيجاد الحقل الكهربائي في النقطة M بالجوار المباشر من الناقل نختار سطح غوص سطحًا اسطوانيًا (كما في الشكل). يتكون تدفق الحقل الكهربائي عبر هذا السطح المغلق من ثلاث حدود:



✓ التدفق عبر السطح الجانبي و يكون معدوما ($\vec{E} \perp d\vec{S}_1$).

✓ التدفق عبر القاعدة الداخلية و يكون معدوما ($\vec{E} = \vec{0}$).

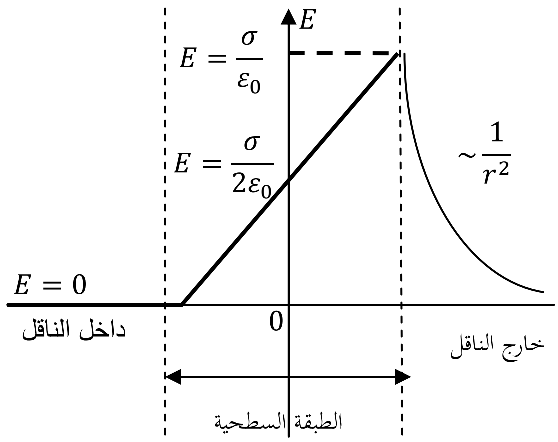
✓ التدفق عبر القاعدة الخارجية و يعطي:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}_2 = EdS_2$$

لتكن σ الكثافة السطحية للشحنة بجوار النقطة M، فالشحنة الموجودة داخل سطح غوص (الأسطوانة) تساوي: $dq = \sigma dS_2$. و يصبح لدينا:

$$EdS_2 = \frac{\sigma dS_2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

المعادلة السابقة تعطي العلاقة بين الحقل الكهربائي في نقطة M خارج الناقل بالجوار المباشر منه، بينما الحقل داخل الناقل معدوم.



3.2 الضغط الكهروستاتيكي

الشحنات الموجودة على سطح الناقل تكون خاضعة لقوى تنافر الشحنات الأخرى. لنحسب القوة المطبقة في وحدة السطح، و هو ما يسمى بالضغط الكهروستاتيكي (*pression électrostatique*). بما أن الضغط يتم في الطبقة السطحية لذلك نستعمل الحقل المتوسط $E_M = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ و يكون الضغط:

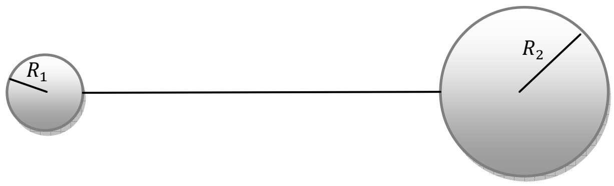
$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma dS E_M}{dS} = \sigma E_M = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \qquad (2)$$

4.2 قدرة السطوح الحادة

تبيَّنَ تجريبيا أن توزيع الشحنات على سطح الناقل لا يوافق كثافة سطحية ثابتة، بل تميل الشحنات إلى التراكم في المناطق السطحية التي يكون نصف قطر انحنائها صغيرا، و تسمى هذه الظاهرة بقدرة السطوح الحادة (*pouvoir des pointes*)، و تكون الكثافة السطحية كبيرة في الأجزاء الحادة. و الشيء نفسه بالنسبة لشدة الحقل الكهربائي التي تكون كبيرة بجوار الرأس الحاد.

توضيح:

لدينا كرتان ناقلتان نصفيا قطريهما R_1 و R_2) $R_1 < R_2$) و بعيدتان عن بعضهما كفاية و موصولتان بسلك و مشحونتان بـ q_1 و q_2 على التوالي بكثافتين σ_1 و σ_2. الكرتان في حالة توازن لهما الكمون نفسه:



$$V_1 = V_2$$

$$\frac{kq_1}{R_1} = \frac{k\mathrm{q}_2}{R_2} \Longrightarrow \frac{\sigma_1 4\pi {R_1}^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi, {R_2}^2}{R_2} \Longrightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

الكثافة السطحية للشحنة تكون أكبر كلما كان نصف قطر انحناء السطح أصغر. إن هذه النتيجة المسماة قدرة السطوح الحادة مهمة جدا في العديد من تقنيات التكنولوجيا مثلا: عمليات تفريغ الهواء كواقيات الصواعق ذات الرؤوس الحادة، و أيضا في الأطراف المعدنية الحادة المشدود بأجنحة الطائرات.

5.2 السعة الذاتية لناقل معزول

الشحنة q للناقل المعزول (*isolé*)، في حالة اتزان كهروستاتيكي، متناسبة مع كمونه V، أي:

$$\frac{q}{\mathrm{V}} = \mathrm{C} \qquad (3)$$

الثابت C يدعى سعة الناقل (*capacité d'un conducteur*).

سعة الناقل C لا تعتمد إلا على الخصائص الهندسية للناقل. عندما يكون الناقل موجودا عند كمون معين فإن سعته تميز قابليته و استعداده لتخزين الشحنة الموافقة للمعادلة السابقة (3)، و هي قيمة موجة دائما.

وحدة السعة في النظام الدولي SI هي الفاراد (*Farad*)، يرمز له ب F حيث : $F = C.V^{-1}$.

تعريف: الفاراد F هو سعة ناقل معزول يحمل عند وضعه في كمون 1 فولط شحنة مقدارها 1 كولوم.

في الواقع نتعامل في الحسابات العددية مع شحنات صغيرة جدا لذلك نحتاج إلى أجزاء الفاراد:

الميكروفاراد μF : $1\mu F = 10^{-6}F$

النانوفاراد nF : $1nF = 10^{-9}F$

البيكوفاراد pF : $1pF = 10^{-12}F$

مثال1: حساب السعة الذاتية لكرة ناقلة و معزولة.

لتكن كرة ناقلة نصف قطرها R مشحونة بشحنة q اي:

$$V = \frac{kq}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \Longrightarrow C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

نلاحظ من خلال هذا المثال أن سعة هذا الناقل تتعلق فقط بنصف قطر الناقل الكروي، أي بالشكل الهندسي فقط كما سبق الذكر.

6.2 الطاقة الداخلية لناقل مشحون و معزول

تساوي الطاقة الداخلية لناقل مشحون ومعزول (*énergie électrostatique d'un conducteur chargé et isolé*) العمل اللازم بذله لشحن الناقل، ويمكن أن تأخذ إحدى العبارات التالية، حيث q شحنة الناقل و V كمونه و C سعته في حالة الاتزان.

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV \qquad (4)$$

و هي دائما موجبة.

ملاحظات:

✓ عند تفريغ ناقل مشحون بوصله بالأرض بواسطة خيط ناقل فإن هذه الطاقة الداخلية (الطاقة الكامنة) تظهر على شكل طاقة حرارية (مفعول جول).

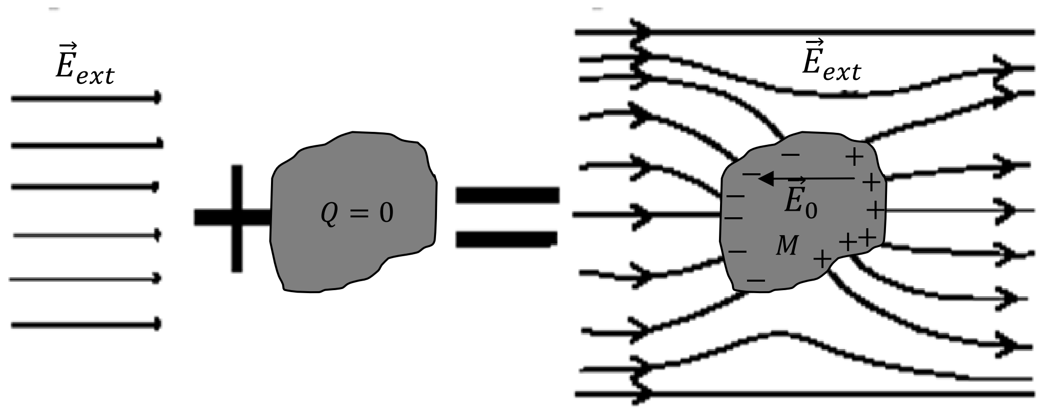
✓ عند شحن ناقل بواسطة مولد قوته المحركة الكهربائية V ثابتة فإن المولد يعطي طاقة مقدارها qV من أجل شحنة q، وتساوي ضعف الطاقة المختزلة أخيرا في الناقل والضعف المتبقي تحول إلى طاقة حرارية أثناء عملية نقل الشحنات من المولد إلى الناقل.

7.2 ظاهرة التأثير بين النواقل المشحونة

1. تأثير حقل كهربائي خارجي على ناقل متعادل معزول:

يحتوي الناقل المعزول المتعادل كهربائيا على شحنات حرة $(-e)$، و عندما يوضع في حقل كهربائي $\vec{E}_{ext}$ فإن الإلكترونات الحرة تنتقل في اتجاه معاكس للحقل، و يظهر على طرفي الناقل شحنات موجبة و سالبة بكميات متساوية، فيتولد عن هذا التوزيع الجديد للشحنات حقل كهربائي $\vec{E}_0$ معاكس لـ $\vec{E}_{ext}$، و يزداد مع تزايد نقل الالكترونات حتى يصل الناقل إلى حالة التوازن، وهو في حالة استقطاب، أي الحقل الداخلي في النقطة M معدوم:

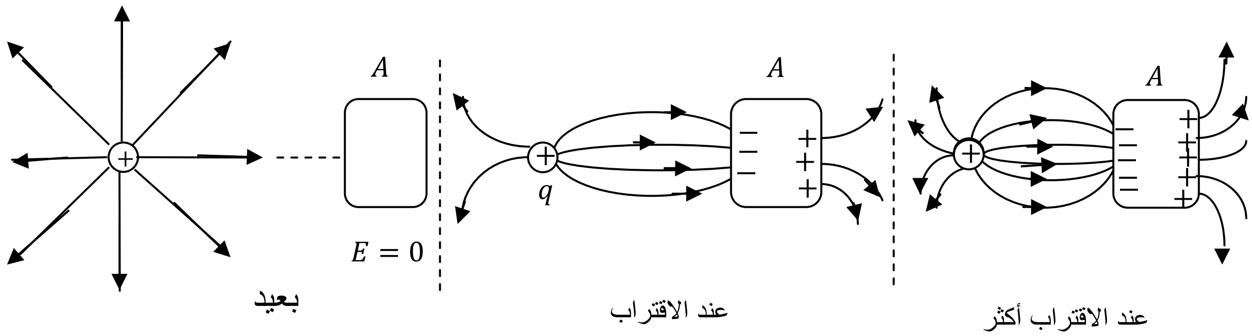
$$\vec{E}_{int}(M) = \vec{E}_{ext} + \overrightarrow{E_0} = \vec{0}$$



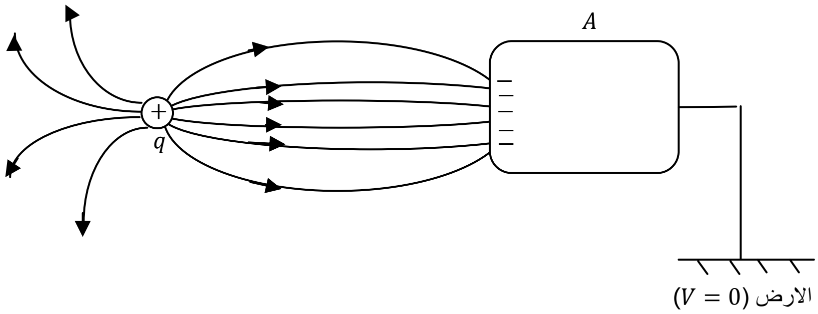
لم تتغير شحنة الناقل، كل ما حدث هو إعادة توزيع للشحنات، و تغير للكمون، حيث أصبحت تخرج خطوط الحقل من الناقل إلى اللانهاية.

2. التأثير الجزئي (*influence partielle*)

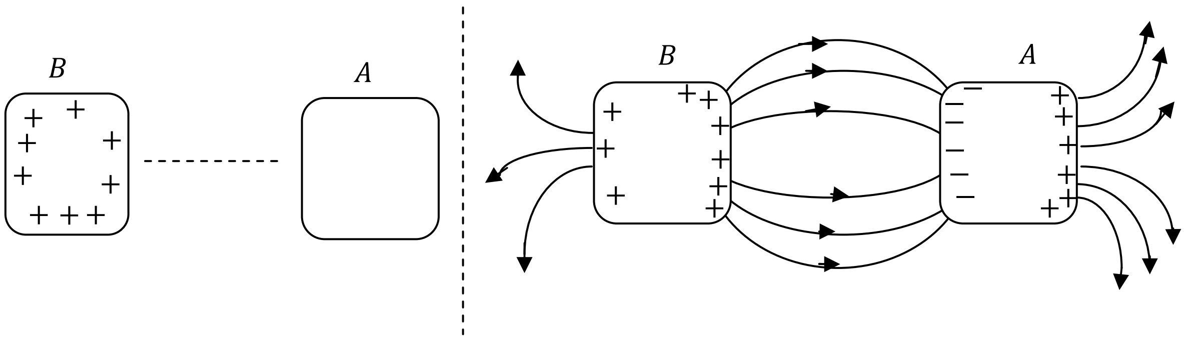
- توضح الأشكال الآتية التأثير المتزايد لشحنة موجبة q على ناقل A متعادل و معزول.



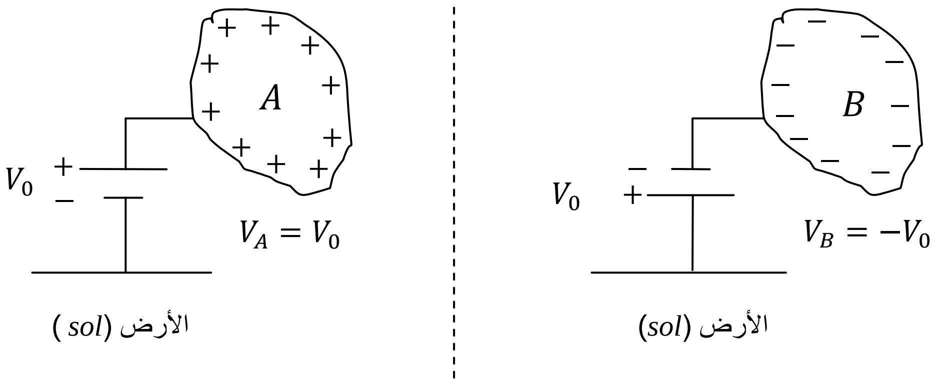
- إذا تم وصل الناقل A السابق بكمون ثابت، مثلا كمون يساوي الصفر عند وصله بالأرض، حيث تصبح الأرض و الناقل جسمًا واحدًا فتتسرب الشحنات الموجبة إلى الأرض، ويبقى كمون الناقل معدوم و لا يخرج منه أي خط أما الشحنات السالبة فتبقى مكانها لا تتسرب إلى الأرض بفعل التأثير من طرف الشحنة q.



- **التأثير الرجعي**: إذا كانت الشحنة الموجبة موجودة على ناقل B فينتج تأثير رجعي من A على B يتغير توزيع شحنات الجسم A من خلال الحقل الذي ينشئه الناقل B (الناقل A دائما متعادل و معزول).

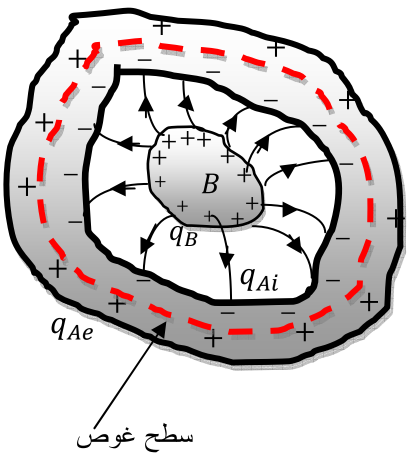


ملاحظة: يمكن أن نشحن الناقل بواسطة جهاز يدعى المولد (*générateur*).



2.التأثير الكلي (*influence totale*)

و هي حالة خاصة و هامة، يكون فيها الناقل A يحيط كليا بالناقل B المشحون بـ q_B. كل خطوط الحقل التي تخرج من B تصل إلى A.



- يتبين لنا بتطبيق نظرية غوص داخل A حيث: $E = 0$ أن السطح الداخلي لـA يحمل شحنة كهربائية q_{Ai} تساوي و تعاكس في الإشارة الشحنة q_B، ($q_B = -q_{Ai}$).
- إذا كان A معزولا ومتعادلًا من البداية، فإنه حسب مبدأ انحفاظ الشحنة للناقل A:

$$0 = q_{Ai} + q_{Ae}$$

يستوجب على السطح الخارجي لـ A أن يحمل شحنة:

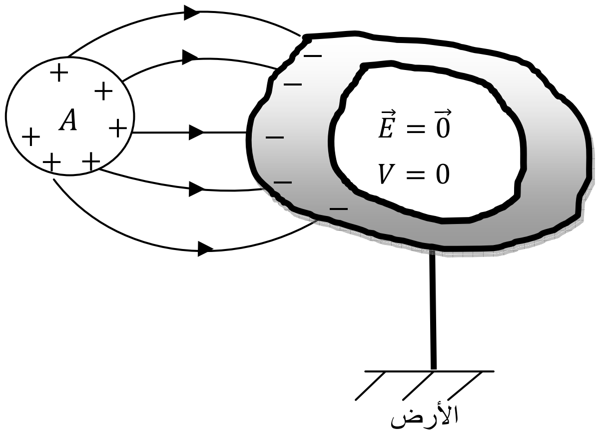
$$q_{Ae} = -q_{Ai} = q_B$$

- إذا كان A معزولا ومشحونًا بـ Q_0 من البداية، فإنه حسب مبدأ انحفاظ الشحنة للناقل A:

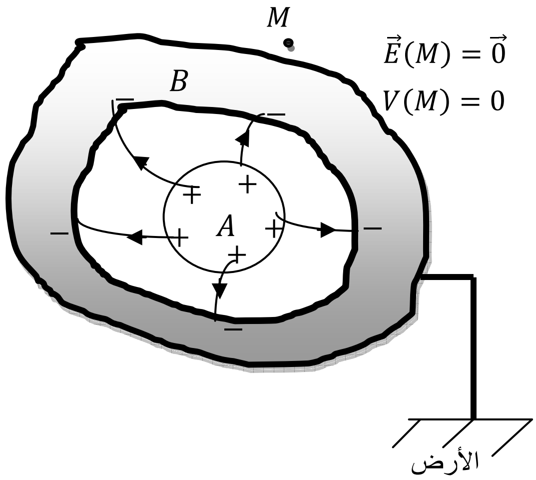
$$Q_0 = q_{Ae} + q_{Ai} \Longrightarrow q_{Ae} = Q_0 + q_B$$

3. مفعول الشاشة

كل ناقل مجوف عند كمون ثابت (موصول بالأرض مثلا) يشكل شاشة كهروستاتيكية في اتجاهين من الخارج إلى الداخل (1) و من الداخل إلى الخارج (2).



الشكل (1)

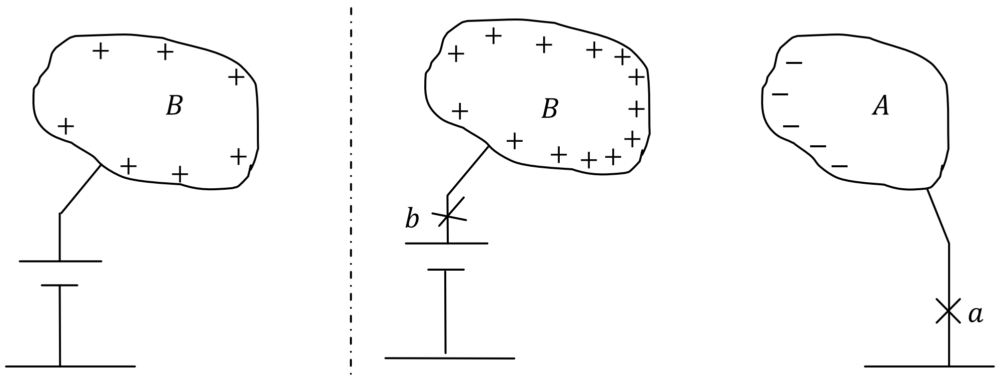


الشكل (2)

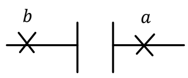
التجويف يكون في حماية من كل تأثير. يستعمل مفعول الشاشة في العديد من التطبيقات العملية مثلا: تغلف العناصر الإلكترونية (مكثفات، أسلاك...) بأوقية معدنية (قفص معدني) مربوطة بالأرض.

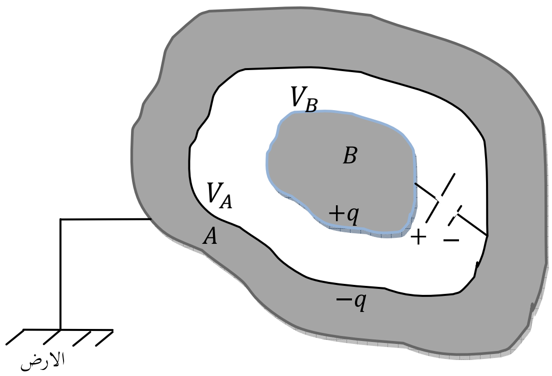
8.2 المكثفات

في حالة التوازن بوجود الناقل A ذي الكمون الثابت (موصول بالأرض) بجوار ناقل ثانٍ B سوف يحمل شحنات أكثر مما لو كان منفردا، فقد حصل تكثيف للناقل B و ازدادت سعته.



تشكل المجموعة المكونة من الناقلين A و B ما يسمى بالمكثفة (*condensateur*) و يرمز لها بـ





يمكن تحقيق مثل هذا التكثيف باستخدام ناقلين A وB في حالة تأثير متبادل كلي، حيث q_A و q_B متساويتان في القيمة و مختلفتان في الإشارة. نسمي $q = |q_B| = |\, q_A|$ شحنة المكثفة، وإذا كان V فرق الكمون بين الناقلين $V = V_B - V_A$ يمكن أن نثبت:

$$C = \frac{q}{V} \qquad (5)$$

C: سعة المكثفة، و هي لا تعتمد إلا على شكل الناقلين و طبيعة الوسط الموجود بينهما [1]، و هي تزداد كلما اقترب الناقلان من بعضهما.

كيفية حساب سعة المكثفة:

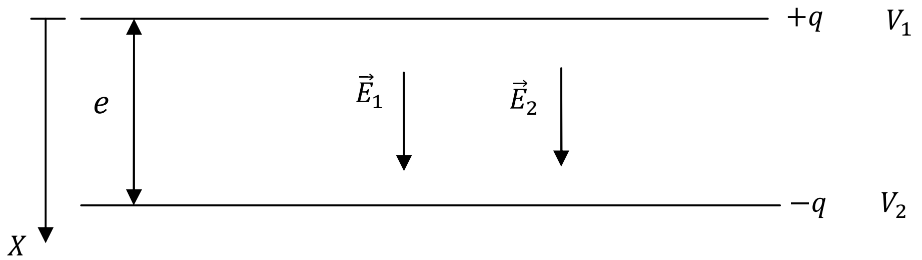
1. حساب الحقل الكهربائي في كل نقطة داخل المكثفة (نستعمل نظرية غوص مثلا).
2. استنتاج فرق الكمون بين الناقلين (نستعمل $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$).
3. إيجاد النسبة: $C = \frac{q}{V}$.

مثال2: حساب سعة مكثفة مستوية (*condensateur plan*).

أحسب سعة مكثفة مستوية الشكل، مساحة اللبوسين هي S، و تفصلهما مسافة e.

الحقل الكهربائي بالنسبة لمستوٍ لانهائي كثافته السطحية σ في أي نقطة يساوي:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



[1] في كامل دراستنا الوسط هو الفراغ.

الحقل الكلي بين اللبوسين:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath}$$

حيث $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ الحقل الكهربائي الناتج عن اللبوس (المستوي) ذي الشحنة $+q$ واللبوس (المستوي) ذي الشحنة $-q$ على الترتيب.

حساب فرق الكمون بين طرفي المكثفة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Longrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dx}$$

$$dV = -Edx \Longrightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx \rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$$

و منه السعة

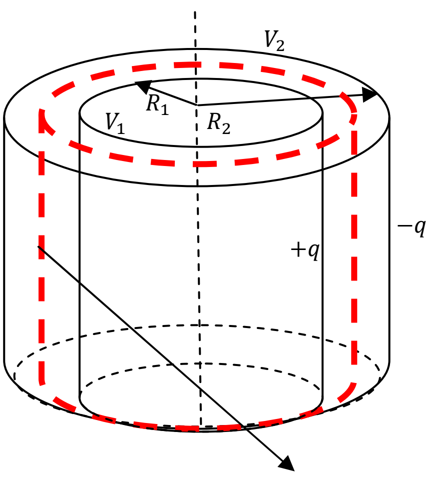
$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

S : مساحة اللبوسين.

ملاحظة: كما رأينا سابقا، سعة المكثفة تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل بـ S و e و الوسط الذي يعتبر في حالتنا الفراغ المعطى بـ ε_0.

مثال 3: حساب سعة مكثفة اسطوانية (*condensateur cylindrique*).

أحسب سعة مكثفة اسطوانية الشكل ذات أنصاف أقطار على التوالي R_1 و R_2 و ارتفاعها h.



نحسب الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة بتطبيق نظرية غوص في المنطقة حيث $R_1 < r < R_2$، نختار سطح غوص أسطوانة نصف قطرها r:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow\ E = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\frac{1}{r}$$

الحقل الكهربائي قطري، أي يتعلق بـ r و له مركبة على $\vec{u}_r$، و منه فرق الكمون بين طرفي المكثفة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\frac{1}{r}dr$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

و منه السعة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 2\pi h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

ملاحظة: سعة المكثفة الاسطوانية تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل بـ $\frac{2\pi h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$ و الوسط، الذي يعتبر في حالتنا الفراغ المعطى بـ ε_0.

عندما تكون المسافة بين اللبوسين صغيرة جدا مقارنةً بـ R_1 و R_2 يمكن كتابة:

$$R_2 - R_1 = e, \qquad R_2R_1 \approx r^2$$

$$\rightarrow \ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1} \approx \frac{e}{r}$$

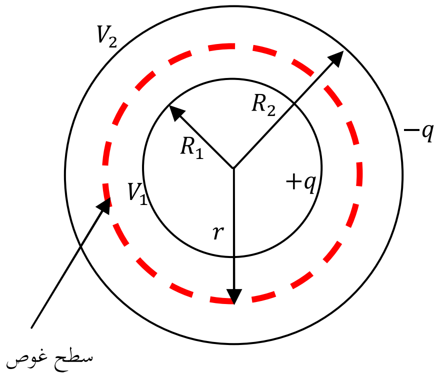
$$C = \frac{\varepsilon_0 2\pi h}{\frac{e}{r}} = \frac{\varepsilon_0 2\pi hr}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

$2\pi hr = S$ مساحة اللبوس.

سعة المكثفة الأسطوانية تؤول إلى سعة المكثفة المستوية.

مثال 4: حساب سعة مكثفة كروية (***condensateur sphérique***).

أحسب سعة مكثفة كروية الشكل ذات أنصاف أقطار على التوالي R_1 و R_2.



نحسب الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة بتطبيق نظرية غوص في المنطقة $R_1 < r < R_2$ (نختار سطح غوص كرة نصف قطرها r):

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\frac{1}{r^2}$$

الحقل الكهربائي قطري أي يتعلق بـ r له مركبة على $\vec{u}_r$ و منه فرق الكمون بين طرفي المكثفة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Longrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -Edr$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\frac{1}{r^2}dr$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2R_1}\right)$$

و منه السعة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 4\pi R_2R_1}{R_2 - R_1}$$

ملاحظة: سعة المكثفة الكروية تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل بـ $\frac{4\pi R_2R_1}{R_2-R_1}$ و الوسط، الذي يعتبر في حالتنا الفراغ المعطى بـ ε_0.

عندما تكون المسافة بين اللبوسين صغيرة جدا مقارنةً بـ R_1 و R_2 يمكن كتابة:

$$R_2 - R_1 = e \rightarrow R_2R_1 \approx r^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 4\pi r^2}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

حيث $4\pi r^2 = S$ مساحة لبوس المكثفة.

سعة المكثفة الكروية تؤول إلى سعة المكثفة المستوية.

ملاحظة:

- ✓ للحصول على مكثفة ذات سعة كبيرة فان المعاملات الهندسية التي نهتم بها هي سطح اللبوسين الذي يجب أن يكون كبيرًا كفاية، و المسافة بين اللبوسين يجب أن تكون صغيرة جدا بالنسبة لأبعاد السطح.
- ✓ في الحقيقة، بالنسبة للمكثفة المستوية و الأسطوانية، الناقلان ليسا في تأثير كلي، و بما أن المسافة الفاصلة بين لبوسي المكثفة صغيرة مقارنه بسطح اللبوسين، في هذه الحالة يمكن اعتبار ان التأثير كلي.

9.2 الطاقة الكهربائية للمكثفة

من أجل ناقل معزول مشحون بـ q و كمونه V و سعته C، الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية:

$$E_p = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (6)$$

ومنه الطاقة الكهروستاتيكية من أجل مكثفة مكونة من ناقلين A و B معزولين شحنتها q و كمونها $V = V_B - V_A$ حيث V_A و V_B كمون الناقلين A و B على الترتيب:

$$q_{\mathrm{A}} = -q, \quad q_B = q\ ,\ |\,q_{\mathrm{A}}| = |q_B| = q$$

$$E_P = \frac{1}{2}(q_A V_1 + q_B V_2) = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

سؤال: أين تخزن هذه الطاقة و بأي شكل؟

نأخذ مثلا المكثفة المستوية، ذات الشحنة Q الموزعة بانتظام على كامل المستوي الذي مساحته S:

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2(Se) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}v$$

فالحجم الموجود بين اللبوسين $v = Se$، و منه الطاقة تخزن في الحقل نفسه بكثافة حجمية:

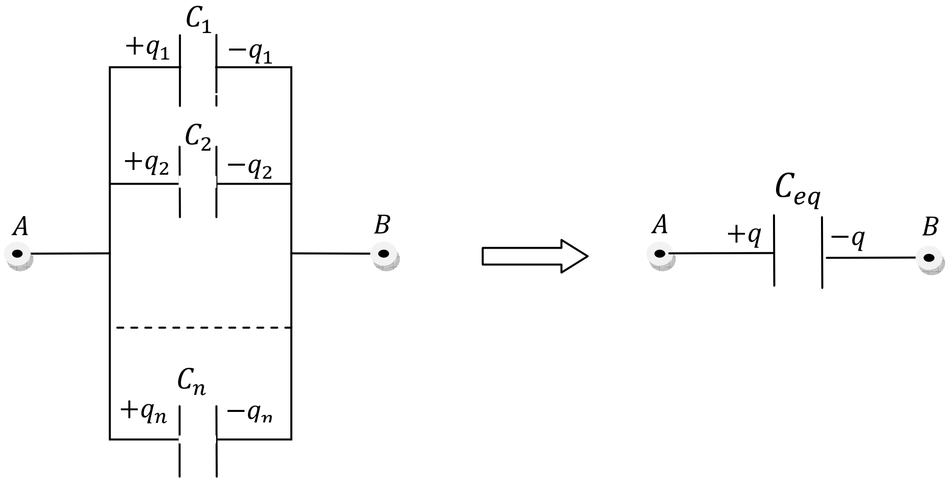
$$\Omega_e = \frac{E_p}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

تمثل Ω_e كثافة الطاقة الكهربائية في الفراغ ووحدتها في النظام الدولي : Jm^{-3}.

10.2 جمع المكثفات

لا يمكن لمكثفة أن تتحمل بين لبوسيها فرقا في الكمون أعلى من قيمة معينة تدعى الكمون الانفجاري، لذلك نلجأ لتخزين أكبر كمية ممكنة من الطاقة بتجميع العديد من المكثفات. المكثفة المكافئة (*condensateur équivalent*) لمجموعة من المكثفات هي مكثفة لها نفس فرق كمون المجموعة، و أثناء التفريغ تنتج الطاقة نفسها أي كمية الكهرباء نفسها للمجموعة.

جمع المكثفات على التفرع (*groupement en parallèle*):



كل المكثفات لها فرق الكمون نفسه:

$$V = V_A - V_B$$

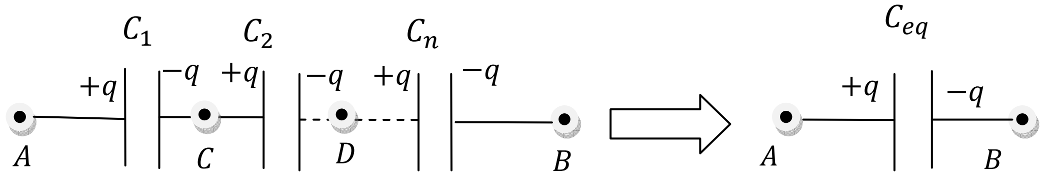
المكثفة المكافئة تحمل شحنة:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = C_1V + C_2V + \cdots = V\sum_{i=1}^{n} C_i = VC_{eq}$$

السعة المكافئة للمكثفة المكافئة:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (7)$$

جمع المكثفات على التسلسل (*groupement en série*):



للمكثفات الشحنة نفسها و فرق الكمون هو مجموع فروق الكمونات:

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) \dots = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \cdots + \frac{q}{C_n} = \frac{q}{C_{eq}}$$

السعة المكافئة:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \qquad (8)$$

مثال5: تطبيق على المكثفات.

نعتبر مكثفتين ذاتي سعتي C_0 و$2C_0$ على التوالي مشحونتين و معزولتين، الواحدة على الأخرى. الأولى مشحونة تحت فرق كمون V_0 و الثانية $3V_0$.

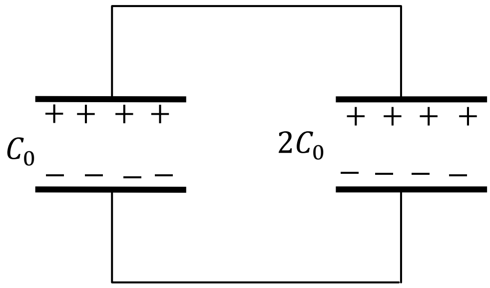
1. أحسب الطاقة الكهربائية الكلية المخزنة في المكثفتين E_{pi}.
2. نوصل المكثفتين مثل الشكل (1).

1.2 أحسب الشحنة المحمولة على كل مكثفة عند التوازن الكهروستاتيكي.

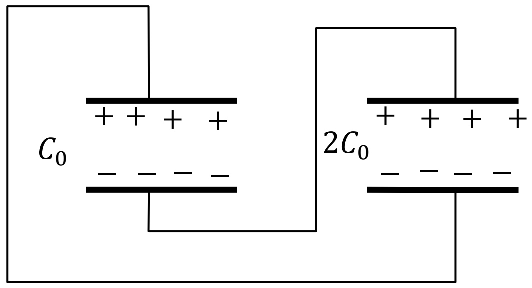
2.2 أحسب الطاقة الكلية النهائية E_{pf} للمكثفتين، قارنها بـ E_{pi}. خلاصة.

3.2 وصّل اللبوسين السالبين للمكثفتين بالأرض. ماذا يحدث؟ إشرح.

3. عند حالة التوازن النهائية في الشكل الأول نقطع التوصيل، و نعيد توصيله كما بالشكل (2) ماذا يحدث؟ إشرح.



الشكل (1)



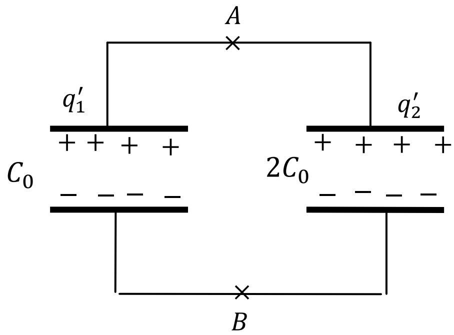
الشكل (2)

الحل:

1.الطاقة E_{pi} المختزنة في المكثفتين قبل التوصيل:

$$E_{pi} = \frac{1}{2}C_0{V_O}^2 + \frac{1}{2}(2C_0)(3V_O)^2 = \frac{19}{2}C_0{V_O}^2$$

2. عند التوصيل تصبح المكثفتان مكثفة واحدة فيحدث إعادة توزيع الشحنات الموجبة والسالبة بين لبوسي المكثفة حتى تصل إلى كمون متساوٍ، أي فرق الكمون بين طرفي المكثفتين متساوٍ $(V_A - V_B)$.



1.2الشحنات النهائية على المكثفاتq'_2 و q'_1 :

$$q'_1 = C_0(V_A - V_B) \qquad (1)$$
$$q'_2 = 2C_0(V_A - V_B) \qquad (2)$$

من مبدأ انحفاظ الشحنة لنظام معزول قبل التوصيل و بعده نجد:

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 \qquad (3)$$

حيث q_1 و q_2 الشحنتان المحمولتان على المكثفتين ذاتي السعتين C_0 و$2C_0$ على التوالي قبل وصل لبوسي المكثفتين.

$$q_1 = C_0V_0 \qquad (4)$$
$$q_2 = (2C_0)(3V_0) = 6C_0V_0 \qquad (5)$$

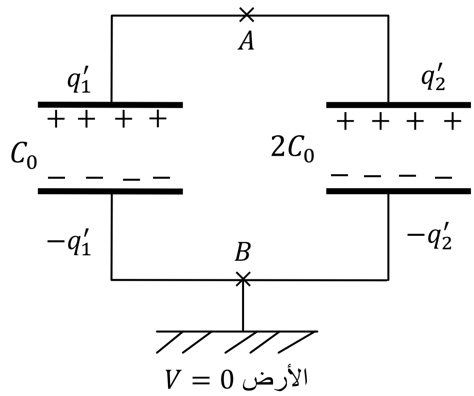
باستعمال المعادلات السابقة (1) إلى (5) نجد:

$$q'_1 = \frac{7}{3}C_0V_0, \qquad q'_2 = \frac{14}{3}C_0V_0$$

2.2 الطاقة E_{pf} المختزنة في المكثفتين بعد توصيل لبوسيهما:

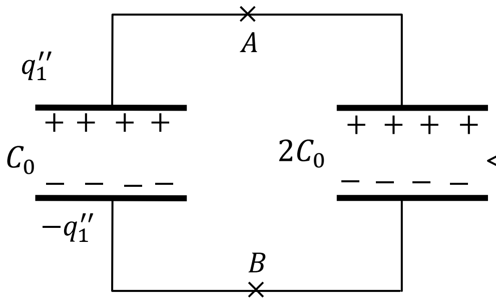
$$E_{pf}=\frac{1}{2}\frac{{q_1}'^2}{C_0}+\frac{1}{2}\frac{{q_2}'^2}{2C_0}=\frac{294}{36}C_0{V_O}^2=\frac{49}{6}C_0{V_O}^2$$

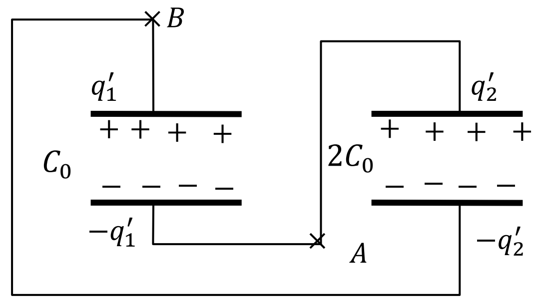
الطاقة E_{pi} أكبر من E_{pf}، إعادة توزيع الشحنات على لبوسي المكثفتين بعد التوصيل (انتقال الشحنات) يرافقه ضياع في الطاقة الداخلية على شكل حرارة.



3.عندما نقوم بتوصيل اللبوسين السالبين للمكثفتين بالأرض لا يحدث أي شيء. في الواقع، الشحن الكهربائية موزعة بحيث يكون كمون اللبوسين المرتبطين نفسه. اللبوسان السالبان يشكلان مع الأرض ناقلًا واحدًا كمونه $V_B=0$. لا تتسرب الشحنات $-q'_2$ و $-q'_1$ إلى الأرض لأنها مرتبطة بتأثير الشحنات الموجبة لذلك الطاقة الداخلية للمكثفتين تبقى ثابتة .

4. قبل التوصيل كان للمكثفتين C_0 و $2C_0$ الشحنة q'_1 و q'_2 على الترتيب، و بعد توصيل اللبوس السالب بالموجب للمكثفتين، كما في الشكل الثاني، تتوزع الشحن لتحقق حالة توازن جديدة، حيث يكون لهما فرق الكمون نفسه بين طرفيهما، و تكون شحنة المكثفتين q''_1 و q''_2 على الترتيب. من الإجابة على السؤال 1.2 نجد أن $q'_1<q'_2$.





لدينا:

$$q''_1=C_0(V_A-V_B)$$
$$q''_2=2C_0(V_A-V_B)$$

حسب مبدأ انحفاظ الشحنة لنظام معزول قبل التوصيل و بعده نجد:

$$q'_2-q'_1=q''_1+q''_2$$

من الإجابة على السؤال 1.2 لدينا:

$$q_2' - q_1' = \frac{7}{3}C_0V_0 = 3\,C_0(V_A - V_B) \Longrightarrow V_A - V_B = \frac{7}{9}V_0$$

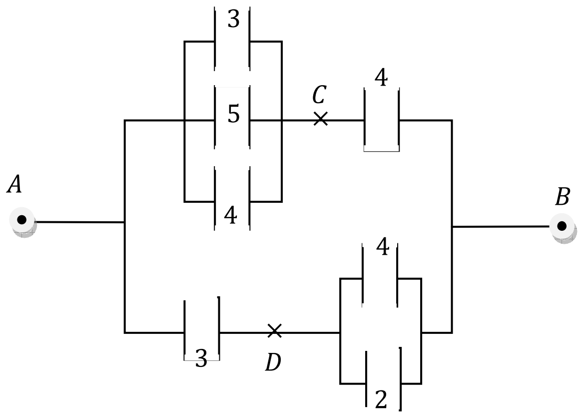
و منه:

$$q_1'' = C_0(V_A - V_B) = \frac{7}{9}C_0V_0$$

$$q_2'' = 2C_0(V_A - V_B) = \frac{14}{9}C_0V_0$$

مثال 6: حساب السعة المكافئة.

يمثل الشكل شبكة من المكثفات مربوطةً على التسلسل والتفرع. السعات المرفقة للمكثفات محسوبة بـ μF.



1. أحسب المكثفة المكافئة بين النقطتين A و B.
2. إذا كانت شحنة هذه المكثفة المكافئة تساوي $120\mu C$، أحسب فرق الكمون بين النقطتين A و B.

الحل:

1. المكثفات الثلاثة بين النقطتين A و C موجودة على التفرع، فالسعة المكافئة لهما C_{eq1} :

$$C_{eq1} = 3 + 5 + 4 = 12\mu F$$

المكثفة بين النقطتين C و B و المكثفة ذات السعة C_{eq1} موجودتان على التسلسل، و تكافئان مكثفة ذات السعة C_{eq2}:

$$C_{eq2} = \left(\frac{1}{C_{eq1}} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = 3\mu F$$

المكثفتان بين النقطتين D و B على التفرع و تكافئان مكثفة ذات سعة C_{eq3} :

$$C_{eq3} = 4 + 2 = 6\mu F$$

المكثفة بين النقطتين D و A و المكثفة ذات السعة C_{eq3} موجودتان على التسلسل، و تكافئان مكثفة ذات سعة C_{eq4}:

$$C_{eq4} = \left(\frac{1}{C_{eq3}} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = 2\mu F$$

المكثفة الكلية المكافئة C_{eq} بين النقطتين A و B:

$$C_{eq} = C_{eq2} + C_{eq4} = 3 + 2 = 5\mu F$$

2. فرق الكمون بين النقطتين A و B:

$$V_A - V_B = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{120}{5} = 24 \text{ V}$$