مبادئ المنطق الرياضي
وقواعد الاستدلال الرياضي

تمهيد

يهدف هذا الدرس إلى تقديم قواعد الاستدلال الرياضي، وهي أنماط البرهان المستعملة لحل مسائل رياضية. إن ذلك يتطلب عرض المفاهيم الأساسية للمنطق الرياضي، وهي ضرورية لبناء أنماط البرهان.

القضية المنطقية :

نسمي قضية منطقية كل نص يمكن الحكم عليه ودون غموض صحيح (صادق) أو خاطئ.

ترميز

نرمز للقضايا بالحروف P، Q، R، ...

قيمة صدق القضية:

نرفق بكل قضية قيمة صدق هي **1** إذا كانت صادقة (صحيحة) و **0** إذا كانت خاطئة.

ونرمز لذلك بـــ

$$v(p)=\begin{cases}1 & P\text{ صادقة}\\ 0 & P\text{ خاطئة}\end{cases}$$

نفي القضية :

لتكن P قضية. نسمي نفي القضية P، القضية الجديدة والتي نرمز لها بـــ $\bar{p}$ والناتجة بإدخال إحدى أدوات النفي ولدينا

$$v(\bar{p})=\begin{cases}0 & (P\text{ صادقة})\\ 1 & (P\text{ خاطئة})\end{cases}$$

أمثلة :

1. المربع هو مستطيل	(قضية)
2. كل المثلثات قائمة	(قضية)
3. ما ثمن هذا الكتاب؟	(ليست قضية)
4. المربع ليس مستطيلا	(قضية وهي نفي القضية 1)
5. $3<2$	(قضية)

6. $3 \geq 2$ (قضية وهي نفي القضية 5)

حساب القضايا :

يهدف هذا الحساب إلى إنشاء قضايا جديدة من قضايا معلومة بواسطة روابط منطقية.

i. **الوصل** " و " :

لتكن P و Q قضيتين.

نسمي **الوصل** بين P و Q، القضية الجديدة والتي نرمز لها بـــ $P \wedge Q$ (نقرأ P و Q) والتي تكون صادقة في الحالة الوحيدة: لما يكون P و Q صادقتين معا.

مثلا: $\left(4 = 2^2\right) \wedge \left(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right)$ قضية خاطئة.

ii. **الفصل** " أو" :

لتكن P و Q قضيتين.

نسمي **الفصل** بين P و Q، القضية الجديدة والتي نرمز لها بـــ $P \vee Q$ (نقرأ P أو Q) والتي تكون خاطئة في الحالة الوحيدة: لما يكون P و Q خاطئتين معا.

مثلا: $\left(4 = 2^2\right) \vee \left(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right)$ قضية صادقة.

iii. **الاستلزام** :

تعريف 1: نسمي استلزاما كل قضية من الشكل:

إذا كان P فإن Q.

تعريف 2: نسمي استلزاما بين P و Q أو نقول P يستلزم Q ونكتب $P \Rightarrow Q$، القضية $\bar{P} \vee Q$.

- نسمي P مقدمة الاستلزام
- نسمي Q تالي الاستلزام

iv. **التكافؤ المنطقي** :

نقول أن القضيتين P و Q متكافئتان ونكتب $P \Leftrightarrow Q$ للتعبير عن القضية:

$$\left(P \Leftarrow Q\right) \wedge \left(Q \Leftarrow P\right)$$

ومنه يكون التكافؤ صادقا إذا كانت للقضيتين P و Q نفس قيمة الصدق.

نلخص ما سبق في الجدول التالي:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

مصطلحات :

لنفرض أن الاستلزام $P \Rightarrow Q$ صادق.

يكون ذلك في الحالات الثلاث الآتية:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
0	1	1
0	0	1

نعبر عن أن الاستلزام $P \Rightarrow Q$ صادق بإحدى الطرق الآتية:

- إن P شرط كاف للقضية Q.
- إن Q شرط لازم عن P.
- ليكون P صادقا يلزم أن يكون Q صادقا.
- ليكون Q صادقا يكفي أن يكون P صادقا.

بعض خواص الروابط المنطقية :

لتكن P و Q قضيتين.

$$\begin{cases} P \wedge Q \equiv Q \wedge P \\ P \vee Q \equiv Q \vee P \end{cases}, \qquad \begin{cases} P \wedge P \equiv P \\ P \vee P \equiv P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{P \wedge Q} \equiv \overline{Q} \vee \overline{P} \\ \overline{P \vee Q} \equiv \overline{Q} \wedge \overline{P} \end{cases}, \qquad \overline{\overline{P}} \equiv P$$

لتكن P ، Q و R قضايا

$$\begin{cases}(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \\ (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)\end{cases}$$

$$\begin{cases}P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\end{cases}$$

ملاحظة :

نثبت كل الخواص والنتائج السابقة بجداول الحقيقة.

دوال القضايا :

إن النصوص التي نتعرض لها في الرياضيات تحتوي غالبا على متغيرات x، y، ...

تعريف : نسمي **دالة قضية** كل نص يحتوي على متغيرات بحيث إذا أعطينا قيما لهذه المتغيرات من مجموعات ما (تسمى مجموعات مرجعية) أصبحت هذه النصوص قضايا منطقية.

مثلا

$$P(x) \equiv "x \in \square ; x^2 + 1 = 2"$$
$$Q(x) \equiv "x \in \square ; x^2 \geq 1"$$
$$R(x) \equiv "(x \in \square)(y \in \square)(x \leq y)$$

لدينا:

- $P(0)$ قضية خاطئة، $P(1)$ قضية صحيحة.
- •• $Q(1)$ قضية صحيحة
- ••• $R(2,5)$ قضية صحيحة ، $R(5,2)$ قضية خاطئة

ملاحظة: قد نسمي أحيانا النص $P(x)$ خاصية.

المكممان العام والوجودي: (حالة متغير واحد)

لتكن $P(x)$ دالة قضية، مجموعتها المرجعية E.

- إذا كانت الخاصية $P(x)$ صادقة من أجل جميع عناصر E نكتب:

$$(\forall x \in E)(P(x))$$

ونقرأ: مهما يكن x من E فإن $P(x)$ محققة ويسمى الرمز $\forall$ المكمم العام.

- إذا وجدت عناصر من E تحقق الخاصية $P(x)$ نكتب :

$$(\exists x \in E)(P(x))$$

ونقرأ: يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $P(x)$ ويسمى الرمز $\exists$ المكمم الوجودي.

قواعد نفي قضايا تحتوي على مكممات :

نلاحظ في البداية أن المكممان يحولان دوال القضايا إلى قضايا منطقية.

لدينا القواعد التالية:

i. $\overline{(\forall x \in E)(P(x))} \equiv (\exists x \in E)\left(\overline{P(x)}\right)$

ii. $\overline{(\exists x \in E)(P(x))} \equiv (\forall x \in E)\left(\overline{P(x)}\right)$

مثلا:

$$\overline{\forall x > 0 : e^x > 1} \equiv \exists x > 0 : e^x \leq 1$$

$$\overline{\exists x \in \square : x^2 - 2 = 0} \equiv \forall x \in \square : x^2 - 2 \neq 0$$

$$\overline{(\forall x \in \square)(\exists y \in \square) : x \leq y} \equiv (\exists x \in \square)(\forall y \in \square) : x > y$$

ملاحظة: إن ترتيب المكممات مهم. فالقضيتان:

$$(1) \quad \forall x \in \square, \exists y \in \square : x \leq y$$

$$(2) \quad \exists y \in \square, \forall x \in \square : x \leq y$$

مختلفتان. الأولى صادقة والثانية خاطئة.

مصطلحات :

للتعبير عن أن $P \Leftrightarrow Q$ صادق نقول:

- P شرط لازم وكافي لـــ Q.
- P صادق إذا وفقط إذا كان Qصادقا.
- ليكون P صادقا يلزم ويكفي أن يكون Q صادقا.

قواعد الاستدلال الرياضي :

لتكن P و Q قضيتين، لدينا النتيجة:

نتيجة:

1. $\left(P \Rightarrow Q\right) \equiv \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$
2. $\left(\overline{P \Rightarrow Q}\right) \equiv P \wedge \overline{Q}$

يمكن إثبات (1) و(2) بجداول الحقيقة. تلعب هاتان العلاقتان دورا أساسيا في أنماط البرهان الرياضي. يمكن تقديم جل النتائج الراضية على صيغة استلزام.

$$P \text{(فرضيات)} \Rightarrow Q \text{(مطلوب)}$$

إن الاتجاه الطبيعي لإثبات هذا الاستلزام أي الانطلاق من الفرضيات والوصول إلى المطلوب أو ما يسمى البرهان المباشر ليس سهلا دائما لأنه يتطلب بناء نتائج وسطى للوصول إلى المطلوب، إن هذه الصعوبة، دفعت الإنسان إلى التفكير في أنماط أخرى للبرهان. إن التكافؤ الأول في النتيجة السابقة يقدم أولى هذه القواعد في الاستدلال الرياضي وهي:

البرهان بالعكس النقيض:

لإثبات صحة الاستلزام $P \Rightarrow Q$ يكفي إثبات صحة الاستلزام $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

إن التكافؤ الثاني في النتيجة السابقة الذكر يقدم النمط الثاني للبرهان وهو:

البرهان بالخلف

لإثبات صحة الاستلزام $P \Rightarrow Q$، نفرض أنه غير صحيح، ونحاول أن نحصل على تناقض. يكون فرض الخلف هو $P \wedge \overline{Q}$ وهدفنا هو الوصول إلى تناقض. إن هذا التناقض إما أن يكون تناقضا مع الفرضيات أو أن يكون تناقضا رياضيا صريحا يخالف معلوماتنا.

تعميم البرهان بالخلف:

لإثبات صحة قضية A. نفرض أنها خاطئة (أي نفرض أن $\overline{A}$ صادقة) ونحاول الحصول على تناقض.

البرهان بمثال مضاد:

إن المثال عادة لا يمكن أن يكون برهانا، إنه يستخدم للتوضيح.

يكون المثال نمطا من أنماط البرهان في الحالة الوحيدة الآتية: وهي لإثبات أن نصا ما ليس صحيحا على العموم أي لا يملك صفة النظرية (أو المبرهنة) يكفي تقديم مثال يبين عدم صحته. يسمى المثال هنا مثالا مضادا.

نصائح وتوجيهات :

إن معالجة مسألة رياضية يتطلب بعض القواعد البسيطة فالتقديم الجيد للحل والوضوح هو أساس المعالجة. ومن بين الملاحظات وما أكثرها نقدم الملاحظات الآتية:

أ- توضيح الفرضيات على حده والمطلوب إثباته على حده.

ب- استعمال المكممات والروابط المنطقية كلما أتيحت الفرصة.

ت- إن اللغة مفتاح لتوضيح ما نقدم ولهذا من الضروري تقديم الحل بلغة واضحة واستعمال جيد للمصطلحات من نوع "بما أن"، "إذن"، "إذا وفقط إذا"، "وعليه" ... إن الحل لا يمكن أن يقدم كطلاسم من رموز وحروف، بل يجب أن يعرض بلغة واضحة.

تمـــــارين

1. عين قيم صدق القضايا التالية:

$$P_1 : \left(\sqrt{3} \in \square\right) \wedge \left(2^3 = 8\right), \qquad P_2 : \left(\pi \in \square\right) \vee \left(\log e = 1\right)$$

$$P_3 : \pi \in \square \Rightarrow 2^2 = 9, \qquad P_4 : 2 \in \square \Rightarrow \sqrt{2} \in \square$$

$$P_5 : \sqrt{2} \in \square \Rightarrow 2 \in \square$$

2. أكتب نفي القضايا الآتية:

$$A_1 : 3^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{3} \notin \square, \qquad A_2 : \forall x > 0 : x^2 + 1 > 1$$

$$A_3 : \forall x \geq 0 : e^x \geq 0, \qquad A_4 : \left(\forall x \in \square\right) : \left(\exists y \in \square\right) : x \leq y^2$$

$$A_5 : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

حيث $f : \square \to \square$ تطبيق

3. أثبت صحة الاستلزامات الآتية:

$\forall n \in \square : n^2$ فردي $\Rightarrow$ n فردي

$\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ زوجي $\Rightarrow$ n زوجي

4. أثبت صحة الاستلزام الآتي: $\forall n \in \mathbb{N} : n^3$ فردي $\Rightarrow$ n فردي.

5. برهن أن :

أ- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

ب- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{Q}$

ت-

6. ماذا عن صحة القضايا:

أ- إذا كانت المتتالية محدودة فهي متقاربة.

ب- مجموع متتاليتين متباعدتين هو متتالية متباعدة.

ت- مجموع عدد ناطق وعدد أصم هو عدد أصم.

ث- جداء عددين أصمين هو عدد أصم.

ج- جداء عدد ناطق غير معدوم في عدد أصم هو عدد أصم.

المجموعات

تمهيـــــد :

تلعب نظرية المجموعات دورا مهما في الرياضيات، ويعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في بناء هذه النظرية.

يفترض أن مفهوم المجموعة واضح في الأذهان وتفاديا لكل التباس ونظرا لظهور بعض التناقضات في نظرية المجموعات فقد تم تحديـــد مجموعة من الضوابط لهذا المفهوم نلخصها كما يلي:

1. تتحدد المجموعة تحديـــــدا نهائيا إذا تم تحديـــد مفهوم الإنتماء بوضوح، أي أننا نستطيع أن نحدد وبدون غموض إذا كان الكائن الرياضي a ينتمي أو لا إلى المجموعة E

أي أننا نستطيع أن نحكم وبدون غموض على صدق إحدى القضيتين

$a \in E$ **أو** $a \notin E$

وفي حالة $a \in E$ نقول أن aعنصر من E

2. الكائن الرياضي لا يمكن أن يكون في آن واحد مجموعة وعنصرا من هذه المجموعة.

أي أن الكتابة التالية مرفوضة $a \in a$

3. مجموعة كل المجموعات غير موجودة.

مفهوم الاحتواء:

لتكن E و F مجموعتين، نقول أن **محــــتواة** في إذا تحقق الاستلزام التالي:

$$\left(\forall x\right)\left(x \in E \Rightarrow x \in F\right)$$ ونكتب $E \subset F$

المساواة:

لتكن E و F مجموعتين ، نقول أن E **تساوي** F إذا تحقق التكافؤ التالي :

$$\left(\forall x\right)\left(x \in E \Leftrightarrow x \in F\right)$$ ونكتب $E = F$

المجموعة الخالية :

نقبل بوجود مجموعة لا تشمل أي عنصر، تسمى المجموعة الخالية

ونرمز لها بـــــ ϕ

بعض النتائج :

1. لدينا $E \subset E$

لأن الاستلزام $(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \in E)$ صحيح دوما.

2. من أجل كل مجموعة E لدينا $\phi \subset E$

لأن الاستلزام $(\forall x)(x \in \phi \Rightarrow x \in E)$ صحيح دوما.

يصبح تعريف تساوي مجموعتين كالتالي:

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset E)$$

3.المجموعة الخالية **وحـــيدة**

البرهان: لنفرض وجود مجموعتين خاليتين ϕ_1 و ϕ_2عندئذ حسب النتيجة 2 لدينا $\phi_1 \subset \phi_2$ و $\phi_2 \subset \phi_1$

ومنه حسب النتيجة 3 فإن $\phi_1 = \phi_2$

4. الاحتواء علاقة **متعدية** بمعنى $E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$

ينتج ذلك من تعدي الاستلزام.

عمليات على المجموعات :

نعتبر الآن E و F مجموعتين كيفيتين

التقاطع:

نسمي تقاطع المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \cap F = \{x \,/\, x \in E \wedge x \in F\}$$

الاتحاد:

نسمي اتحاد المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \cup F = \{x \,/\, x \in E \vee x \in F\}$$

الفرق بين مجموعتين:

نسمي **الفرق بين المجموعتين** E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E - F = \{x \,/\, x \in E \wedge x \notin F\}$$

الفرق التناظري:

نسمي **الفرق التناظري** بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \Delta F = \left(E \cup F\right) - \left(E \cap F\right)$$

بعض الخـــــواص:

تتمتع العمليات المعرفة سابقا بخواص كثيرة نذكــر بعضها

من أجل A, B, C مجموعات كيفية لدينا

1. $A \cap \phi = \phi \,, A \cup \phi = A \,, A \cap A = A \,, A \cup A = A$

2. خاصية **التبديل**

$A \cap B = B \cap A \,\,, A \cup B = B \cup A$.

3. خاصية **التجميع**

$\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right), \left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$.

4. خاصية **التوزيع**

$$(i)\; A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$$

$$(ii)\; A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$$

المجموعة الجزئية – مجموعة أجزاء مجموعة – المتممة:

لتكن E و A مجموعتين

تعريف 1: نقول أن A **مجموعة جزئية** من المجموعة E إذا كانت $A \subset E$.

تعريف 2: نسمي **مجموعة أجزاء** E ، المجموعة التي عناصرها أجزاء E ، ونرمز لها بـــ

$$P\left(E\right)$$

أي أن $P\left(E\right) = \left\{A \,/\, A \subset E\right\}$ و $A \in P\left(E\right) \Leftrightarrow A \subset E$.

خاصية : لدينا دائما $\phi \in P\left(E\right), E \in P\left(E\right)$

نتيجة : إذا كان عدد عناصر E هو n فإن عدد عناصر $P\left(E\right)$ هو 2^n.

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E.

تعريف 3: نسمي **متممة** A في E المجموعة التالية

$$C_E A = \{x / x \in E \wedge x \notin A\} = E - A$$

خواص :

1. $C_E \phi = E , C_E E = \phi$
2. $C_E (C_E A) = A$
3. $C_E (A \cap B) = C_E B \cup C_E A \ , C_E (A \cup B) = C_E B \cap C_E A$

الجداء الديكارتي لمجموعتين

لتكن E و F مجموعتين

تعريف : نسمي **الجداء الديكارتي** للمجموعتين E و F المجموعة التالية

$$E \times F = \{(a,b) / a \in E , b \in F\}$$

نسمي العنصر (a,b) ثنائية مرتبة ولدينا

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

بعض الخــواص:

1. $E \times \phi = \phi$
2. $E \times F \neq F \times E$ ، إذا كان $E \neq F$
3. إذا كان عدد عناصر E هو m وعدد عناصر F هو n فإن عدد عناصر $E \times F$ هو $m.n$

مفهوم تجزئة مجموعة:

لتكن E مجموعة كيفية و $\{A_i , i \in I\}$ (حيث I مجموعة أدلة) عائلة أجزاء من E.

نقول أن تشكل **تجزئة** للمجموعة E إذا تحقق ما يلي

1. $E = \bigcup_{i \in I} A_i$
2. الأجزاء متقاطعة مثنى مثنى وهو ما نعبر عنه بـــ:

$$A_i \cap A_j = \phi \ , i \neq j$$

أمثلة :

1. لتكن المجموعة $\{1,2,3\} = E$.

إن العائلة $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E

إن العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تشكل تجزئة أخرى للمجموعة E

2. لتكن $E = \square$.

إن العائلة $\{A_n =]n, n+1], n \in \square\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E

مفهوم التغطية:

لتكن E مجموعة كيفية و $\{B_i \ , i \in I\}$عائلة مجموعات كيفية

نقول أن العائلة تشكل **تغطية** للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

$$E \subset \bigcup_{i \in I} B_i$$

أمثلة :

1. لتكن المجموعة $\{1,2,3\} = E$

إن العائلة $\{\{1\},\{2,-1\},\{3,4,5\}\}$ تشكل تغطية للمجموعة E

إن العائلة $\{\{1,2\},\{4,-1\},\{3,4,7\}\}$ تشكل تغطية أخرى للمجموعة E

2. لتكن $E = \square$

إن العائلة $\{B_n =]-n, n[, n \in \square\}$ تشكل تغطية للمجموعة E

تمـــــارين

1. لتكن E مجموعة كيفية.عين قيم صدق كل من القضايا التالية:

$$\phi \in \{\phi\}, \phi \subset \{\phi\}, \phi \in \phi, E \in E$$

2. قدم أمثلة تبين فيها أن

$$E - F \neq F - E \,, E \times F \neq F \times E$$

وعين في الحالة العامة $E - \phi, E \times \phi, E - E$ من أجل مجموعات كيفية.

3. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة E.

أثبت صحة القضايا التالية: $A \subset B \Rightarrow A \bigcap B = A$

$$A \subset B \Rightarrow C_E B \subset C_E A$$

$$A \bigcap B = \phi \Leftrightarrow A \subset C_E B$$

4. لتكن A و B و C مجموعات جزئية من مجموعة E

أثبت صحة القضايا التالية :

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

5.هات مثالا تبين فيه أن $A \times (B \cup C) \neq (A \times B) \cup (A \times C)$

6. لتكن E و F مجموعتين كيفيتين، بين أن

$$E \subset F \Rightarrow P(E) \subset P(F)$$

7. هات مثالا تبين فيه أن $P(E \cup F) \neq P(E) \cup P(F)$

العلاقات والتطبيقات

تمهيد :

سوف نتناول في هذا الدرس مفهوم العلاقة بين مجموعتين، والذي يعتبر من المفاهيم الأساسية التي تبنى عليها مفاهيم أساسية أخرى، من مثل مفهوم التطبيق بين مجموعتين.

سيكون للعلاقة في نفس المجموعة أو ما يعرف بالعلاقة الثنائية، حيز أكبر في درسنا لما تتيحه من إمكانية تصنيف (classification) عناصر المجموعة بشكل ما (باستخدام علاقة التكافؤ)، أو بِمَوضَعَة (positionnement) عناصر المجموعة وفق قاعدة ما (باستخدام علاقة الترتيب).

تعريف أول للعلاقة بين مجموعتين :

نعتبر مجموعتين غير خاليتين E,F .

نسمي علاقة بين المجموعتين E,F كل خاصية تسمح بأن نرفق عناصر من E بعناصر من F .

نرمز للعلاقات بالأحرف $\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{S}\ ,\ \mathcal{T},.....$

وإذا كان العنصر $a \in E$ مرتبطا مع العنصر $b \in F$ نكتب $a\mathcal{R}b$

بيان علاقة : لتكن $\mathcal{R}$ علاقة بين المجموعتين E,F

نسمي بيان العلاقة $\mathcal{R}$ المجموعة الجزئية من $E \times F$ والمعرفة بـــــ

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(a,b) \in E \times F \ / \ a\mathcal{R}b\}$$

أمثلــــة :

1. لتكن $E = \{2,3,5\}$ و $F = \{3,4,6,9\}$. نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ كالتالي:

من أجل $a \in E , b \in F \ :\ a\mathcal{R}b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b

لدينا: $2\mathcal{R}4\ ,2\mathcal{R}6\ ,3\mathcal{R}3\ ,3\mathcal{R}6,3\mathcal{R}9$

ومنه بيان العلاقة هو $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(3,9)\}$

2. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{S}$ كالتالي:

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{S}b$ إذا وفقط إذا كان a أكبر تماما من b

لدينا: $5\,\mathcal{S}\,3\;,5\,\mathcal{S}\,4$

ومنه بيان العلاقة هو $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}=\{(5,3),(5,4)\}$

3. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{T}$ كالتالي:

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{T}b$ إذا وفقط إذا كان $a+b$ عددا زوجيا

لدينا: $2\,\mathcal{T}\,4\;,2\,\mathcal{T}\,6\;,3\,\mathcal{T}\,3\;,3\,\mathcal{T}\,9, 5\,\mathcal{T}\,3\;,5\,\mathcal{T}\,9$

ومنه بيان العلاقة هو $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}=\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,9),(5,3),(5,9)\}$

ملاحظة : نلاحظ أن خلاصة دراسة علاقة هي تحديد بيانها، وبالتالي لن نفرق من الآن فصاعدا بين علاقة ما وبين بيانها.وسنكتب $(a,b)\in\mathcal{R}$ عوض $a\mathcal{R}b$.

تسمح الملاحظة السابقة بتقديم التعريف الثاني للعلاقة بين مجموعتين.

تعريف ثان للعلاقة بين مجموعتين :

نسمي علاقة بين المجموعتين E,F كل مجموعة جزئية من $E\times F$

ملاحظة : نلاحظ أن المجموعة الخالية تحقق $\phi\subset E\times F$ فهي إذن علاقة

نسمي ϕ العلاقة المستحيلة.

تعريف العلاقة الثنائية :

نسمي علاقة ثنائية على المجموعة E كل مجموعة جزئية من $E\times E$

أمثلة :

1. العلاقة "يقسم" المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة □*

2. العلاقة "أصغر من أو يساوي" المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية □

خواص علاقة ثنائية:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

أ.الإنعكاس: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ إنعكاسية إذا تحقق

$$\forall a \in E : (a,a) \in \mathcal{R}$$

ب.التناظر: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ تناظرية إذا تحقق

$$\forall a, b \in E : (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$$

ج. ضد التناظر: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ ضـــد تناظرية إذا تحقق

$$\forall a, b \in E : (a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$$

د. التعـــــدي: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ متعديـــــة إذا تحقق

$$\forall a, b, c \in E : (a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$$

ملاحظة هامة:

إن خاصيتي **التناظر** و**ضد التناظر** ليستا متعاكستين ويمكن أن تجتمعا في نفس العلاقة، ومثال ذلك علاقة "المساواة " في مجموعة كيفية غير خالية، فهي تناظرية وضد تناظرية.

أمثلة:

1. لتكن $E = \mathbb{N}^*$. نعرف العلاقة الثنائية

من أجل $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*$: $a\mathcal{R}b$ إذا وفقط إذا كان a مضاعفا لـــ b

أي $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = mb, m \in \mathbb{N}^*$.

إن العلاقة $\mathcal{R}$: **انعكاسية** لأن $a = 1.a$.

ضد تناظرية لأن

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow$$

$$a = mb \wedge b = m'a \Rightarrow a = mm'a \Rightarrow mm' = 1, m, m' \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow m = m' = 1$$

ومنـــه $a = b$

و**متعديـــة** لأن

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a = \mathrm{m}b \wedge b = \mathrm{m}'c \Rightarrow a = \mathrm{mm}'c \Rightarrow a\mathcal{R}c$$

لكنها ليست تناظرية فمثلا $4\,\mathcal{R}\,2$ لكن $4\,\not\mathcal{R}\,2$.

2. نعتبر $E = \{1,2,3,4\}$ و العلاقتين $\mathcal{R}_1 = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$ و $\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ المعرفتين على E

خواص $\mathcal{R}_1$:

- ليست انعكاسية مثلا $2\,\not\mathcal{R}_1\,2$
- ليست ضد تناظرية مثلا $1\,\mathcal{R}_1\,2 \wedge 2\,\mathcal{R}_1\,1$ لكن $1 \neq 2$
- تناظرية
- ليست متعدية مثلا $2\,\mathcal{R}_1\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}_1\,2 \not\Rightarrow 2\,\mathcal{R}_1\,2$

خواص $\mathcal{R}_2$:

- ليست انعكاسية $2\,\not\mathcal{R}_2\,2$
- ضد تناظرية
- ليست تناظرية مثلا $1\,\mathcal{R}_2\,3 \wedge 3\,\not\mathcal{R}_2\,1$
- متعدية

علاقة التكافؤ :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

تعريف: نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة **تكافؤ** إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية في **آن واحد**

أمثلة :

1. نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3\}$ والعلاقتين $\mathcal{R}_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)(1,3),(3,1)\}$ و $\mathcal{R}_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

إنهما علاقتا تكافؤ

2. نعتبر المجموعة $E=\mathbb{Z}$ إن العلاقة $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a-b=3m\ ,m\in\mathbb{Z}$

هي علاقة تكافؤ

3. نعتبر المجموعة $E=\mathbb{R}$ إن العلاقة

$$aSb \Leftrightarrow a^2-b^2=a-b\ /\quad a\in\mathbb{R}\ ,b\in\mathbb{R}$$

هي علاقة تكافؤ

أصناف التكافؤ :

لتكن المجموعة E المزودة بعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ وليكن $a\in E$

نسمي صف تكافؤ العنصر $a\in E$ المجموعة الجزئية التالية

$$\overline{a}=\{x\in E : x\,\mathcal{R}\,a\}$$

أمثلة :

- في المثال الأول السابق لدينا $\overline{1}=\{1,3\}\ ,\overline{2}=\{2\},\overline{3}=\{1,3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_1$ و $\overline{1}=\{1\}\ ,\overline{2}=\{2\},\overline{3}=\{3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_2$
- في المثال الثاني لدينا صفوف التكافؤ التالية

$$\overline{0}=\{t=3k\ ,k\in\mathbb{Z}\}\ ,\overline{1}=\{t=3k+1,k\in\mathbb{Z}\},\overline{2}=\{t=3k+2,k\in\mathbb{Z}\}$$

- في المثال الثالث لدينا $\overline{a}=\{a,1-a\}$.

خواص أصناف التكافؤ:

1. $\overline{a} \neq \phi \quad \left(a \in \overline{a}\right)$
2. $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$
3. $a \not{\mathcal{R}} b \Leftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b}$
4. $\bigcup\limits_{a \in E} \overline{a} = E$

ملاحظة : نلاحظ أن صفوف التكافؤ تشكل تجزئة للمجموعة E

علاقة الترتيب :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

تعريف : نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة **ترتيب** إذا كانت انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية في **آن واحد**

أمثلة :

1. نعتبر المجموعة $E = \square$ إن العلاقة $\mathcal{R} \equiv \leq$ هي علاقة ترتيب.

2. نعتبر المجموعة $E = \{1,2,3\}$ والعلاقة $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)(1,2)\}$. إنها علاقة ترتيب

3. نعتبر المجموعة $E = \square^*$ إن العلاقة: a يقسم $b \Leftrightarrow a \mathcal{R} b$

هي علاقة ترتيب.

الترتيب الكلي والترتيب الجزئي:

لتكن المجموعة المزودة بعلاقة الترتيب

تعريف: نقول أن الترتيب **كلي** إذا كان كل عنصرين من E **قابلين للمقارنة** وفق العلاقة $\mathcal{R}$ أي إما

$a \mathcal{R} b$ و إما $b \mathcal{R} a$

وإذا لم يكن الترتيب كليا قلنا إنـــه **جزئي**.

أمثلة :

1. إن العلاقة $\mathcal{R}$ في المثال الأول هي علاقة ترتيب كلي
2. إن العلاقة $\mathcal{R}_1$ في المثال الثاني هي علاقة ترتيب جزئي
3. إن العلاقة $\mathcal{R}$ في المثال الثالث هي علاقة ترتيب جزئي

مفهوم المجموعة المحدودة:

لتكن المجموعة المزودة بعلاقة الترتيب و $A \subset E$ جزء عير خالِ

- نقول أن الجزء محدود من الأعلى (majorée) إذا تحقق ما يلي

$$\exists \alpha \in E \,/\, \forall x \in A : x \,\mathcal{R}\, \alpha$$

- – نقول أن الجزء محدود من الأدنى (minorée) إذا تحقق ما يلي

$$\exists \beta \in E \,/\, \forall x \in A : \beta \,\mathcal{R}\, x$$

- – نقول أن الجزء محدود (bornée) إذا كان محدودا من الأعلى و محدودا من الأدنى في آن واحد

أمثلة:

1. في المجموعة □ المزودة بالعلاقة $\mathcal{R} \equiv \leq$

- الأجزاء $\{1,2,\sqrt{3},-5\},[0,1[,]-\infty,1]$ محدودة من الأعلى.
- الأجزاء $\{1,2,\sqrt{3},-5\},[0,1[,$□ محدودة من الأدنى.
- الأجزاء $[0,+\infty[,$□,□ غيرمحدودة .

التطبيقات

ليكن E و F مجموعتين.

تعريف : نسمي تطبيقا من E نحو F كلّ علاقة تسمح بأن نرفق بكلّ عنصر من E عنصرًا وحيدًا من F.

ونرمز للتطبيق بـــ :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

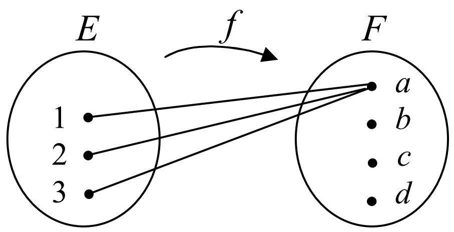
ترميز : تسمى E مجموعة المنطلق (أو البدء).

تسمى F مجموعة الوصول.

x تسمى سابقة و $y = f(x)$ تسمى صورة العنصر x.

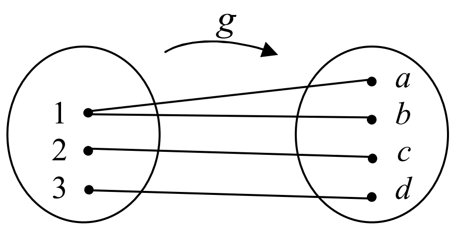
أمثلة :

(1)



f تطبيق

(2)



g ليس تطبيقا

(3)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow f(n) = n - 3 \end{aligned}$$

إن f ليس تطبيقا

ملاحظة : إن التطبيق إذن هو ثلاثية (E, F, f).

خواص تطبيق :

التباين : ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا.

تعريف : نقول أن f متباين إذا حقّق :

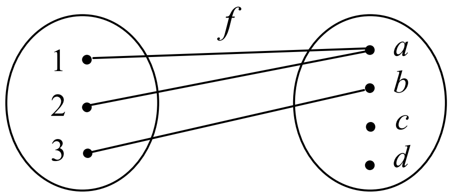
$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

تعريف مكافئ : بأخذ العكس النقيض للاستلزام السابق نحصل على التعريف :

$$F \text{ متباين } \Leftrightarrow \left[\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right]$$

تعريف مكافئ آخر : يكون التطبيق f متبايناً إذا كانت المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا على <u>الأكثر</u> وهذا : $\forall y \in F$ (المجهول هنا هو x، y يلعب دور وسيط).

(1)



f ليس متبايناً

(2)

$$\begin{aligned} f : \Box &\longrightarrow \Box \\ n &\longrightarrow n+5 \end{aligned}$$

إن f متباين لأنه:

$$\begin{aligned} n, m \in \Box : f(n) = f(m) &\Rightarrow n+5 = m+5 \\ &\Rightarrow n = m \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f : \Box &\longrightarrow \Box \\ x &\longrightarrow x^2 \end{aligned}$$

إن f ليس متبايناً لأنه مثلاً من أجل $x_1 = 2 , x_2 = -2$

لدينا $x_1 \neq x_2$ لكن $f(x_1) = f(x_2) = 4$.

ملاحظة : في التمثيل السهمي للتطبيق، التباين يكافئ: كل عنصر من مجموعة الوصول يصله سهم على الأكثر.

الغمر :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقاً.

نقول أن f غامر إذا حقق :

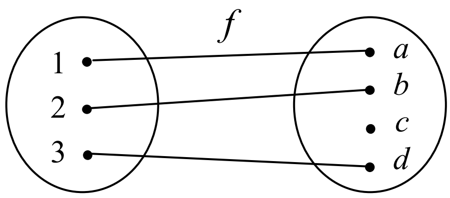
$$\forall x \in F , \exists x \in E : f(x) = y$$

وهو ما يكافئ :

من أجل كل y من F، المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً على الأقل.

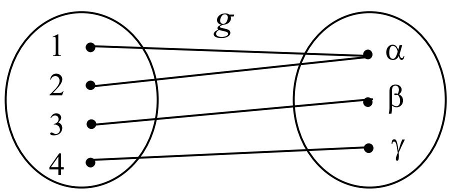
أمثلة :

(1)



f ليس غامرًا

(2)



g تطبيق غامر

(3)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow n+5 \end{aligned}$$

f ليس غامرًا :

من أجل $y = 1$ مثلا المعادلة $f(n) = n + 5 = 1$ لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$.

(4)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}-\{1\} &\longrightarrow \mathbb{R}-\{1\} \\ x &\longrightarrow \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

لندرس الغمر : $y \in \mathbb{R}-\{1\}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\longleftrightarrow \frac{x}{x-1} = y \\ &\longleftrightarrow x = xy - y \\ &\longleftrightarrow xy - x = y \\ &\longleftrightarrow x(y-1) = y \\ &\longleftrightarrow x = \frac{y}{y-1} \end{aligned}$$

نلاحظ أن x موجود دائما ومنه f غامر.

(5) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x+1}{x-2} \end{aligned}$$

ليكن $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\longleftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = y \\ &\longleftrightarrow x + 1 = xy - 2y \\ &\longleftrightarrow xy - x = 2y + 1 \\ &\longleftrightarrow x(y-1) = 2y + 1 \\ &\longleftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه من أجل $y = 1$ فإن x غير موجود، أي أن $y = 1$ لا يقبل سابقة أو أن المعادلة $f(x) = 1$ لا تقبل حلولاً. ومنه f ليس غامرًا.

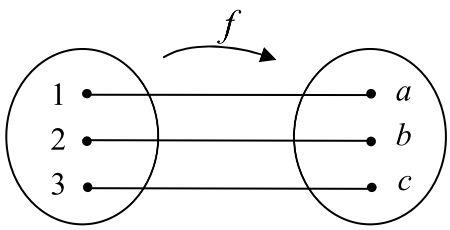
التقابل :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا.

نقول أن f تقابل إذا كان متباينا وغامرًا. وهو ما يكافئ أن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيدًا من أجل كل $y \in F$.

أمثلة :

(1)



f تقابل

(2) $$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow n + 5 \end{aligned}$$

f ليس متقابلا لأنّه ليس غامرًا ($y = 0$ مثلا لا يقبل سابقة).

$$(3) \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow x^2 \end{aligned}$$

f تقابل لأن المعادلة $y \in \mathbb{R}_+ \; , \; f(x) = y \longleftrightarrow x^2 = y$

تقبل حلا وحيدًا هو : $x = \sqrt{y}$.

الصورة المباشرة :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا ولتكن $E \supset A$.

نسمي الصورة المباشرة للجزء A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F والمعرفة بـــ :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{ f(x) / x \in A \} \\ &= \{ y \in F / \exists x \in A : y = f(x) \} \end{aligned}$$

خواص الصورة المباشرة الأولى :

أ. $f(\phi) = \phi$.

ب. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

ج. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

الصورة العكسية :

نسمي الصورة العكسية للجزء $F \supset B$ وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E والمعرفة بـــ :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \}$$

ملاحظة : إن f^{-1} في تعريف الصورة العكسية ما هو إلا رمز ولا علاقة مبدئية له بالتطبيق العكسي إلا إذا كان f تقابلاً.

خواص الصورة العكسية :

1. $f^{-1}(\phi) = \phi$
2. $f^{-1}(F) = E$
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

تمارين على العلاقات و التطبيقات

1. نعتبر $E=\{1,2,5\}$ وَ $F=\{3,4,8,10,11\}$

وتعرف العلاقة $\mathfrak{R}$ بـــ: $x\in E \ \wedge \ y\in F : x\mathfrak{R}\, y \ \Leftrightarrow \ y$ يقسم x

عين بيان العلاقة $\mathfrak{R}$.

2. لتكن E مجموعة غير خالية، نعرف على $\mathcal{P}(E)$ العلاقة الثنائية :

$$A,B\in \mathcal{P}(E) : A\mathfrak{R}\, B \ \Leftrightarrow \ A=C_E B$$

ادرس خواص العلاقة $\mathfrak{R}$.

3. على المجموعة $E=\square$، نعرف العلاقة الثنائية S :

$$\forall (a,b)\in \square^2 : a\,S\,b \ \Leftrightarrow \ a^3-b^3=3(a-b)$$

أ. أثبت أن S علاقة تكافؤ.

ب. عين $\overline{0}$، $\overline{1}$ ثم صف تكافؤ a و $\square$.

4. على $E=(\square^*)^2$ نعرف علاقة التكافؤ :

$$(a,b)\mathfrak{R}_1(c,d) \longleftrightarrow ad=bc$$

أ. أثبت أن $\mathfrak{R}_1$ علاقة تكافؤ.

ب. عين $\overline{(3,3)}$، $\overline{(1,2)}$ وبصفة عامة عين $\overline{(a,b)}$.

5. على $E=\square^2$ نعرف العلاقة :

$$(a,b)\mathfrak{R}_2(c,d) \longleftrightarrow a\le c \ \wedge \ b\le d$$

أ. بين أن $\mathfrak{R}_2$ علاقة ترتيب.

ب. هل هذا الترتيب كلّي.

6. لتكن $E=\{a,b,c\}$ و $F=\{0,1,2,3\}$.

نعرّف التطبيق : $f:\mathcal{P}(E)\longrightarrow F$

$A\longrightarrow f(A)=Card\ A$ (عدد عناصر A)

هل f متباين؟ غامر؟ تقابل؟

7. ليكن

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y)\longrightarrow \frac{x-y}{2}$$

هل هذا التطبيق متباين؟ غامر؟ متقابل؟

8. نعتبر التطبيقين :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad , \qquad g:\mathbb{R}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow x^2 \qquad\qquad x\longrightarrow \frac{x+2}{x-1}$$

أ. هل f متباين؟ غامر؟

ب. نفس الأسئلة بالنسبة لـــ g.

ج. عين gof ، fog إذا كانت معرفة.

9. ليكن

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow\frac{x+3}{x-1}$$

عيّن $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف التابع f.

– باعتبار $f:\mathcal{D}_f\longrightarrow\mathbb{R}$.

– هل f متباين؟ غامر؟ برّر.

– كيف يجب اختيار مجموعة الوصول ليكون f غامرًا؟ وفي هذه الحالة عيّن عبارة f^{-1}.

10. نفس أسئلة التمرين السابق بالنسبة للتابع :

$$g:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow\frac{x+3}{x-1}$$