المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط

التخصص : السنة الأولى علوم دقيقة   المقدمة الرياضية

الإحداثيات الديكارتية

شعاع الموضع : $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

الإحداثيات الأسطوانية

شعاع الموضع: $\vec{r} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$

العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والأسطوانية $x = \rho\, cos\theta \quad , \quad y = \rho \sin\theta$

العلاقة بين القاعدة الديكارتية والأسطوانية

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \quad , \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \quad , \quad \vec{e}_z = \vec{k}$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \quad , \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho \quad , \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$$

الإحداثيات الكروية

شعاع الموضع: $\vec{r} = r\,\vec{e_r} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{dr} = dr\,\vec{e_r} + rd\theta\,\vec{e_\theta} + rsin\theta\, d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والكروية: $x = r\sin\theta\, cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta$

العلاقة بين القاعدة الديكارتية والكروية:

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k} \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

تفاضل دالة سلمية

Ø فضاء سلمي بدلالة الإحداثيات , يعطى تفاضل (différentiel) Ø في مختلف الإحداثيات بـ :

الإحداثيات الديكارتية $$d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\,dz$$

الإحداثيات الأسطوانية $$d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial\rho}\,\rho + \frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\,dz$$

الإحداثيات الكروية $$d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\emptyset}{\partial\varphi}\,d\varphi$$

نعرف الشعاع (NABLA) الذي يرمز له بـ $(\vec{\nabla})$ في مختلف الإحداثيات بالعبارة التالية:

الإحداثيات الديكارتية
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

الإحداثيات الأسطوانية
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

الإحداثيات الكروية
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

نعرف تدرج (gradient) الفضاء السلمي $\emptyset$ في مختلف الإحداثيات بالعبارات التالية:

الإحداثيات الديكارتية
$$\overrightarrow{grad}\,\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}\,\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial \emptyset}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \emptyset}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}\,\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial \emptyset}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \emptyset}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \emptyset}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

نعرف تباعد أو (تفرق) (divergence) فضاء شعاعي $\vec{A}$ بدلالة الإحدثيات بما يلي:

الإحداثيات الديكارتية
$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

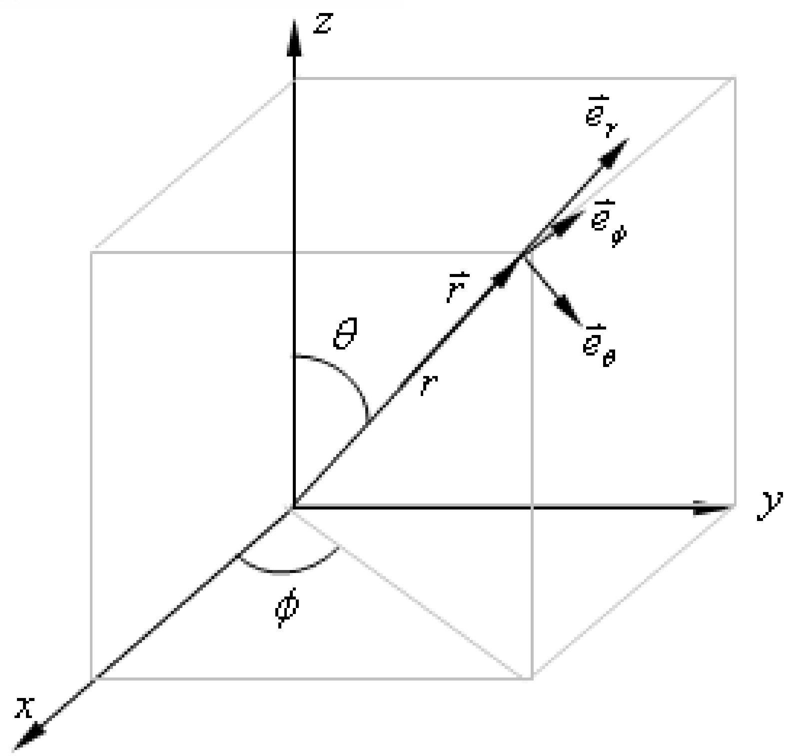
$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial(A_\theta sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

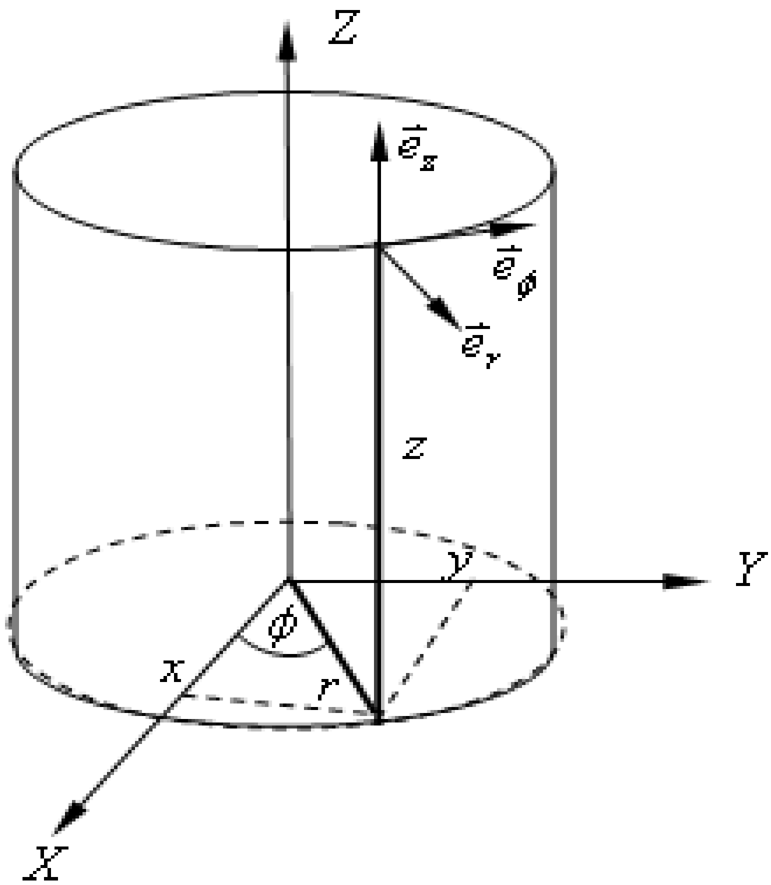
نعرف دوران (rotationnel) فضاء شعاعي $\vec{A}$ بدلالة الإحدثيات بما يلي:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{rsin\theta}\left[\frac{\partial(sin\theta\, A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{rsin\theta}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - sin\theta\,\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$


z
$\vec{e}_r$
$\vec{e}_\phi$
$\vec{r}$
θ
$\vec{e}_\theta$
r
y
ϕ
x


Z
$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\phi$
$\vec{e}_r$
z
Y
y
ϕ
x
r
X