1 المصفوفات

1 مفاهيم أولية

تعريف 1.1. نسمي مصفوفة كل جدول من الأعداد الحقيقية المرتبة على شكل التالي:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccc} \text{العمود } 1 & \text{العمود } 2 & \text{العمود } n \end{array} & \\
A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{السطر } 1 \\ \text{السطر } 2 \\ \\ \text{السطر } m \end{array}
\end{array}
$$

حيث a_{ij} يرمز إلى عنصر المصفوفة A الذي يقع في السطر i و العمود j. مصفوفة ذات m سطر و n عمود تدعى مصفوفة من الرتبة (m,n) أو البعد $m \times n$.

مثال 1.1. لتكن المصفوفات التالية:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \overset{a_{13}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \overset{a_{22}}{-2} & 6 & -4 \\ 1 & \underset{a_{32}}{-5} & 0 & \underset{a_{34}}{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ \underset{b_{21}}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \underset{c_{13}}{10} & 5 \end{bmatrix}.
$$

✍ إذ أنّ المصفوفة A تملك ثلاثة أسطر و أربعة أعمدة، فإنّ بعدها يساوي 3×4.

✍ حيث أنّ المصفوفة B لها ثلاثة أسطر و عمودا واحدا، فإنّ بعدها يساوي 3×1.

✍ لمّا كانت المصفوفة C تملك سطرا واحدا و أربعة أعمدة، فإنّ بعدها يساوي 1×4.

1- 1 مصفوفات مميزة

1-1- 1 مصفوفة سطر

تعريف 1.2. نسمي مصفوفة سطر كل مصفوفة بعدها $n \times 1$. بمعنى آخر، مصفوفة سطر هي مصفوفة مشكلة من سطر واحد. إذا مصفوفة سطر لها الشكل العام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n}.$$

مثال 1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 5}$.

المصفوفة A هي مصفوفة سطر لأنّها تملك سطرا واحدا.

2-1- 1 مصفوفة عمود

تعريف 1.3. نسمي مصفوفة عمود كل مصفوفة مكونة من عمود وحيد، أي أنّ: $n = 1$. إذا مصفوفة عمود تملك الشكل العام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

مثال 1.3. لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

المصفوفة A هي مصفوفة عمود لأنّها تملك عمودا واحدا.

3-1- 1 المصفوفة الصفرية

تعريف 1.4. نسمي مصفوفة صفرية كل مصفوفة جميع عناصرها معدومة. نرمز للمصفوفة المعدومة ذات m سطر و n عمود بالرمز O_{mn}، أو O إن لم يكن هناك التباس.

مثال 1.4.
- المصفوفة $O_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية بعدها يساوي 2×2.
- المصفوفة $O_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية بعدها يساوي 2×3.

- المصفوفة $O_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية بعدها يساوي 3×3.

1 -1-4 المصفوفة المربعة

تعريف 1.5. نسمي مصفوفة مربعة كل مصفوفة يتساوى عدد أسطرها مع عدد أعمدتها. مصفوفة مربعة ذات n سطر تدعى مصفوفة من الدرجة n.

مثال 1.5. لتكن المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- المصفوفة A هي مصفوفة مربعة من الدرجة 2.
- المصفوفة B هي مصفوفة مربعة من الدرجة 3.
- المصفوفة C هي مصفوفة مربعة من الدرجة 4.

تعريف 1.6. العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A هي العناصر التي يكون فيها دليل السطر مساويا لدليل العمود، أي على الشكل a_{ii}. نرمز لمجموعة العناصر القطرية للمصفوفة A بـ: $Diag(A)$، والذي يدعى بالقطر الرئيس للمصفوفة A. مجموع العناصر القطرية يسمى أثر المصفوفة A، والذي نرمز له بـ: $Tr(A)$. إذا يكون لدينا:

$$Diag(A) = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$$

و

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

مثال 1.6. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

عندئذ يكون لدينا:

- $Diag(A) = \{-2, 3, 4\}$.
- $Tr(A) = -2 + 3 + 4 = 5$.

1 -1- 5 المصفوفة المثلثية علوية

تعريف 1.7. نقول عن مصفوفة مربعة A أنّها مثلثية علوية إذا كانت جميع العناصر التي تقع تحت القطر الرئيس $Diag(A)$ معدومة، أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j.$$

مصفوفة مثلثية علوية تكون على الشكل العام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

مثال 1.7. المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفات مثلثية علوية.

ملاحظة 1.1

في المصفوفة المثلثية العلوية يمكن للعناصر القطرية، و العناصر الواقعة فوق القطر الرئيس أن تكون معدومة. كحالة خاصة، كل مصفوفة مربعة معدومة هي كذلك مثلثية علوية. ♣

1 -1- 6 المصفوفة المثلثية سفلية

تعريف 1.8. نقول عن مصفوفة مربعة A أنّها مصفوفة مثلثية سفلية، إذا كانت جميع العناصر المتواجدة فوق القطر الرئيس معدومة، أي إذا كان الشرط التالي محققا:

$$a_{i,j} = 0, \quad \forall i < j.$$

المصفوفة المثلثية السفلية تكون على الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

مثال 1.8. المصفوفات التالية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 3\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

هي مصفوفات مثلثية سفلية.

ملاحظة 1.2

في المصفوفة المثلثية السفلية يمكن للعناصر القطرية، و العناصر الواقعة تحت القطر الرئيس أن تكون معدومة. كحالة خاصة، كل مصفوفة مربعة معدومة هي كذلك مثلثية سفلية. ♣

1 -1- 7 المصفوفة القطرية

تعريف 1.9. نسمي مصفوفة قطرية كل مصفوفة مربعة جميع عناصرها غير قطرية معدومة.

ملاحظة 1.3

مصفوفة مربعة تكون قطرية إذا وفقط إذا كانت مثلثية علوية و سفلية في آن واحد. إذا، المصفوفة المربعة المعدومة هي مصفوفة قطرية. ♣

مثال 1.9. المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة قطرية من الدرجة 2.

مثال 1.10. المصفوفة B المعرفة بـ:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة قطرية من الدرجة 3.

1 -1- 8 مصفوفة الوحدة

تعريف 1.10. نسمي مصفوفة الوحدة كل مصفوفة قطرية جميع عناصرها القطرية مساوية لـ 1. نرمز للمصفوفة الوحدة من الدرجة n بالرمز I_n. في حالة عدم وجود أي التباس ، فإننّا نرمز للمصفوفة الو حدة بـ I بغض النظر

عن درجتها. مصفوفة الوحدة تكون على الشكل العام التالي:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

مثال 1.11. المصفوفات التالية:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفات وحدة.

1 -2 عمليات على المصفوفات

1 -2- 1 تساوي مصفوفتين

تعريف 1.11. لتكن A و B مصفوفتين من نفس البعد. نقول عن المصفوفتين A و B أنّهما متساويتين، ونكتب $A=B$، إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المصفوفة A يساوي العنصر الذي يماثله في دليل السطر و دليل العمود من المصفوفة B.

مثال 1.12. المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

غير متساويتين؛ لأنّ العنصر الذي دليل سطره 2 و دليل عموده 1 من المصفوفة A ليس مساويا للعنصر من المصفوفة B الذي يماثله في دليل السطر و العمود.

مثال 1.13. لتكن المصفوفتين

$$E = \begin{bmatrix} x^2-5 & 1 \\ 3 & -2y-4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ x+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

حتى تكون المصفوفتين E و F متساويتين، يلزم ويكفي أن يكون:

$$\begin{cases} x^2-5=-1, \\ x+1=3, \\ -2y-4=0. \end{cases}$$

وهذا يعني أنّ: $x=2$ و $y=-2$.

1 -2-2 جمع المصفوفات

تعريف 1.12. لتكن A و B مصفوفتين من نفس البعد. المصفوفة $A+B$ هي المصفوفة الناتجة عن جمع كل عنصر من المصفوفة A و العنصر الذي يماثله (في دليل السطر و دليل العمود) من المصفوفة B.

مثال 1.14. لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}_{2\times3}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{3\times2}\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}_{3\times2}\quad D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}.$$

1. احسب $B+C$.
2. احسب $A+D$.
3. هل يمكن حساب $A+B$؟

الحل:

1. حساب $A+B$.

$$B+C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-2) & 2+1\\ 1+4 & 0+3\\ 0+(-1) & 4+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 5 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

2. حساب $A+D$.

$$A+D=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3 & 0+0 & 1+2\\ 1+0 & 3+1 & -1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}.$$

3. لا نستطيع أن نجمع A و B، لأنّ لهما بعدين مختلفين.

خواص

- ❏ $A+B=B+A$ جمع المصفوفات تبديلي.
- ❏ $(A+B)+C=A+(B+C)$ جمع المصفوفات تجميعي.
- ❏ $A+O=A$ المصفوفة الصفرية O عنصر حيادي بالنسبة لجمع المصفوفات.

1 -2-3 جداء مصفوفة بعدد حقيقي

تعريف 1.13. المصفوفة λA هي المصفوفة الناتجة عن ضرب كل عناصر المصفوفة A بالعدد الحقيقي λ.

مثال 1.15 : لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

• أحسب المصفوفات $8A$، $\frac{1}{2}A$ و $-A$.

الحل:

1. حساب $8A$.

$$8A = \begin{bmatrix} 8\times(-1) & 8\times 2 & 8\times 5 \\ 8\times 1 & 8\times 3 & 8\times 4 \\ 8\times 0 & 8\times 1 & 8\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 16 & 40 \\ 8 & 24 & 32 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

2. حساب $\frac{1}{2}A$.

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times(-1) & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 5 \\ \frac{1}{2}\times 1 & \frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 4 \\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 1 & \frac{1}{2}\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

3. حساب $-A$.

$$-A = (-1)A = \begin{bmatrix} (-1)\times(-1) & (-1)\times 2 & (-1)\times 5 \\ (-1)\times 1 & (-1)\times 3 & (-1)\times 4 \\ (-1)\times 0 & (-1)\times 1 & (-1)\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

خواص

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda+\lambda')A = \lambda A + \lambda' A$.
- $\lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A$.
- $A + (-A) = 0$ العنصر النظير بالنسبة للجمع المصفوفي.

تطبيق 1.1 : لتكن المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$، $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

• أوجد المصفوفة X بحيث $5X - 5A = B$.

الحل: نضيف المصفوفة $5A$ إلى المعادلة $X - 5A = B$ لنتحصل على:

$$(5X - 5A) + 5A = B + 5A.$$

باستعمال الخاصية التجميعية للجمع المصفوفي، نجد:

$$5X + (-5A + 5A) = B + 5A.$$

لمّا كان $-5A + 5A = 0$، فإنّه ينتج من المعادلة السابقة:

$$\begin{aligned} 5X &= B + 5A \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة بالعدد $\frac{1}{5}$ نتحصل على:

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

1 -2-4 جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود

تعريف 1.14. لتكن المصفوفتين $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$. جداء المصفوفة A في B، و نكتب AB أو $A \times B$، المصفوفة ذات البعد 1×1 (تملك سطرا واحدا، و عمودا واحدا) المعرفة بـ:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \cdots + a_{1n} \times b_{n1} \end{bmatrix}.$$

مثال 1.16. لتكن المصفوفتين: $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- أحسب الجداء AB.

الحل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 2 + 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

1 -2-5 جداء مصفوفة في مصفوفة عمود

تعريف 1.15. لتكن A مصفوفة بعدها $m \times n$ و B مصفوفة عمود عدد أسطرها يساوي نفس عدد أعمدة المصفوفة A. جداء المصفوفة A في المصفوفة B هي المصفوفة التي أسطرها ناتجة عن جداء أسطر المصفوفة A في مصفوفة العمود B. لتوضيح أكثر، لدينا:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \cdots + a_{1n} \times b_{n1} \\ \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + \cdots + a_{2n} \times b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1} \times b_{11} + a_{m2} \times b_{21} + \cdots + a_{mn} \times b_{n1} \end{bmatrix}.$$

مثال 1.17. لتكن المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}3&-4&0\\1&2&5\\-1&1&3\end{bmatrix}_{3\times3},\quad B=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}_{3\times1}.$$

- أحسب الجداء AB.

الحل:

- أولا نشير إلى أن الجداء AB ممكنا، نظرا لكون عدد أعمدة المصفوفة A يماثل عدد أسطر المصفوفة B. الآن نقوم بحساب الجداء AB:

$$A\times B=\begin{bmatrix}3&-4&0\\1&2&5\\-1&1&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times2+(-4)\times(-1)+0\times1\\1\times2+2\times(-1)+5\times1\\(-1)\times2+1\times(-1)+3\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}.$$

1 -2-6 جداء مصفوفتين

تعريف 1.16. لتكن A و B مصفوفتين بحيث أنّ عدد أعمدة المصفوفة A مساويا لعدد أسطر المصفوفة B. جداء المصفوفتين A و B هي المصفوفة AB، التي أسطرها ناتجة عن جداء أسطر المصفوفة A في أعمدة المصفوفة B.

ملاحظة 1.4

المصفوفة AB لها نفس عدد أسطر المصفوفة A، و نفس عدد أعمدة المصفوفة B. ♣

مثال 1.18. لتكن المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&1&0\end{bmatrix}_{2\times3},\quad B=\begin{bmatrix}-1&1\\1&0\\2&-1\end{bmatrix}_{3\times2}.$$

- أحسب إن أمكن الجداءين AB و BA.

الحل:

1. **حساب الجداء AB.**
هذا الجداء ممكنًا، لأنّ عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+(-1)\times1+2\times2 & 1\times1+(-1)\times0+2\times(-1) \\ 3\times(-1)+1\times1+0\times2 & 3\times1+1\times0+0\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. **حساب الجداء BA.**
هذا الجداء ممكنًا أيضا، لأنّ عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد أسطر المصفوفة A.

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)\times1+1\times3 & (-1)\times(-1)+1\times1 & (-1)\times2+1\times0 \\ 1\times1+0\times3 & 1\times(-1)+0\times1 & 1\times2+0\times0 \\ 2\times1+(-1)\times3 & 2\times(-1)+(-1)\times1 & 2\times2+(-1)\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

ملاحظة 1.5

نلاحظ أنّ $AB \neq BA$. إذا الجداء المصفوفي ليس تبديليا.

♣

خواص

- $A\times I = I\times A = I$: مصفوفة الوحدة I عنصر حيادي بالنسبة الجداء المصفوفي.
- $A\times O = O$: المصفوفة الصفرية O عنصر ماص على اليمين بالنسبة للجداء المصفوفي.
- $O\times A = O$: المصفوفة الصفرية O عنصر ماص على اليسار بالنسبة للجداء المصفوفي.
- $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$: الجداء المصفوفي تجميعي.
- $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$: الجداء المصفوفي توزيعي على الجمع من اليسار.
- $(B+C)\times A = B\times A + C\times A$: الجداء المصفوفي توزيعي على الجمع من اليمين.

مثال 1.19. لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

1. حساب $(AB)C$.

$$\begin{aligned}(AB)C&=\left[\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\times0+0\times1&1\times(-1)+0\times1\\5\times0+(-4)\times1&5\times(-1)+(-4)\times1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-1\\-4&-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-8&-13\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. حساب $A(BC)$.

$$\begin{aligned}A(BC)&=\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\right]\\&=\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\times2+(-1)\times0&0\times1+(-1)\times1\\1\times2+1\times0&1\times1+1\times1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-8&-13\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

نلاحظ أنّ: $(AB)C=A(BC)$.

3. حساب $(A+B)C$.

$$\begin{aligned}(A+B)C&=\left[\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1\\6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\12&3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. حساب $AC+BC$.

$$\begin{aligned}AC+BC&=\begin{pmatrix}1&0\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1\\10&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\12&3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

نلاحظ أنّ: $(A+B)C=AC+BC$.

1 -2-7 منقول مصفوفة

تعريف 1.17. منقول مصفوفة A، الذي نرمز له بالرمز A^T، هي المصفوفة التي أعمدتها مشكلة من أسطر المصفوفة A على الترتيب، أي العمود الأول للمصفوفة A^T هو السطر الأول للمصفوفة A، والسطر الثاني للمصفوفة A^T هو العمود الثاني للمصفوفة A. وكذلك حال باقي أسطر المصفوفة A^T.

مثال 1،20. منقول المصفوفة $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$ هي المصفوفة:

$$A^T=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

مثال 1،21. منقول المصفوفة $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ هي المصفوفة:

$$B^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

خواص

- $(A^T)^T=A$.
- $(A+B)^T=A^T+B^T$.
- $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.
- $(AB)^T=B^TA^T$.

1 -3 المصفوفات العديمة القوة و صيغة ثنائي الحد

1 -3-1 قوة مصفوفة مربعة

تعريف 1،18. لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n و k عددا طبيعيا غير معدوم. المصفوفة A^k هي المصفوفة الناتجة عن ضرب A في نفسها k مرة، أي:

$$A^k=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k\ \text{معامل}}.$$

مثال 1،22. لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$$

1. أحسب المصفوفة A^2.
2. أحسب المصفوفة A^3.

الحل:

1. حساب A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 1+(-1)\times 3 & 1\times(-1)+(-1)\times 5 \\ 3\times 1+5\times 3 & 3\times(-1)+5\times 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 18 & 22 \end{bmatrix}.$$

2. حساب A^3.

$$A^3 = A\times A^2 = A^2\times A$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 18 & 22 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)\times 1+6\times 3 & (-2)\times(-1)+6\times 5 \\ 18\times 1+22\times 3 & 18\times(-1)+22\times 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 84 & 92 \end{bmatrix}.$$

1 -3-2 المصفوفة العديمة القوة

تعريف 1.19. لتكن N مصفوفة مربعة من الدرجة n. نقول عن المصفوفة N أنّها عديمة القوة، إذا وجد عدد طبيعي k غير معدوم بحيث أنّ: $N^k = 0$.

مثال 1.23. برهن أنّ المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عديمة القوة.

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

إذ أنّه يوجد $k = 2 \in \mathbb{N}^*$ بحيث أنّ: $A^k = 0$، فإنّ A هي مصفوفة عديمة القوة.

مثال 1.24. برهن أنّ المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

عديمة القوة.

الحل:

$$B^2=\begin{bmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\6&18&-18\\6&18&-18\end{bmatrix},$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{bmatrix}0&0&0\\6&18&-18\\6&18&-18\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0.$$

إذ أنّه يوجد $k=3\in\mathbb{N}^*$ بحيث أنّ: $B^k=0$، فإنّ B هي مصفوفة عديمة القوة.

1 -3-3 صيغة ثنائي الحد

قضية 1.1

إذا كانت المصفوفتين A و B قابلتين لمبادلة(أي $AB=BA$)، فإنّ:

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^{n-k}B^k,$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم. حيث أنّ:

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!};\quad \forall k=0,1,\cdots,n.$$

♠

تطبيق 1.2. لتكن المصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix},\quad N=A-I.$$

1. برهن أنّ المصفوفة N عديمة القوة.
2. باستعمال دستور ثنائي الحد، أوجد عبارة A^n من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$.

الحل:

1. **إثبات أنّ N مصفوفة عديمة القوة.**

$$N=A-I=\begin{pmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&8\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$N^2=\begin{pmatrix}0&4&8\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4&8\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&16\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$N^3=N^2\cdot N=\begin{pmatrix}0&0&16\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4&8\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0.$$

إذ أنّه يوجد $k = 3 \in \mathbb{N}^*$ بحيث أنّ: $N^k = 0$، فإنّ المصفوفة N عديمة القوة.

2. **حساب A^n.** باستعمال دستور ثنائي الحد، نجد:

$$\begin{aligned}
A^n = (I+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k I^{n-k} N^k \\
&= C_n^0 I^n + C_n^1 I^{n-1} N + C_n^2 I^{n-2} N^2 \\
&= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4n & 8n \\ 0 & 0 & 4n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2 المصفوفات المدرّجة

تعريف 1.20. نقول عن مصفوفة أنّها على الشكل المدرّج الصفي (أو اختصارا الشكل المدرّج) إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. أي سطر معدوم لا يتبع إلا بسطر معدوم.
2. دليل العمود لأول عنصر غير معدوم من أي سطر غير معدوم أكبر من دليل العمود لأول عنصر غير معدوم من السطر غير معدوم الذي يسبقه.

مثال 1.25. المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هما مصفوفتان مدرّجتان.

مثال 1.26. المصفوفتين التاليتين

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -6 & -3\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 4 & -7 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 2 & -2 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

غير مدرّجتين (لاحظ أنّ $a_{32}=2\neq 0$ و $b_{43}=3\neq 0$).

1- 2 العناصر المحورية والأعمدة المحورية لمصفوفة مدرّجة

تعريف 1.21. لتكن A مصفوفة مدرّجة، نسمي عنصرا محوريا أول عنصر غير معدوم من كل سطر غير معدوم من المصفوفة A. نسمي عمودا محوريا كل عمود من المصفوفة A يحوي عنصرا محوريا.

مثال 1.27. لتكن المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 4 & 10 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix}.$$

كل أعمدة المصفوفة A أعمدة محورية باستثناء العمود الرابع، لأنّه لا يحوي عنصرا محوريا.

3 العمليات الأولية على أسطر مصفوفة

تعريف 1.22. نسمي عملية أولية على أسطر مصفوفة كل عملية من الأصناف الثلاثة التالية:

1. $L_j \longrightarrow \lambda L_j,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ (ضرب سطر بعدد حقيقي غير معدوم).
2. $L_i \longleftrightarrow L_j$ (المبادلة بين سطرين).
3. $L_j \longrightarrow L_j+\lambda L_i,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ (إضافة سطر مضروب بعدد حقيقي غير معدوم إلى سطر آخر).

1- 3 المصفوفات متكافئة بالأسطر

تعريف 1.23. نقول عن مصفوفتين A و B أنّهما متكافئتين بالأسطر، و نكتب $A\sim B$، إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى باستعمال عمليات أولية على الأسطر.

مثال 1.28. : أثبت أنّ المصفوفتين التاليتين

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \quad \text{و}\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

متكافئتين بالأسطر.

الحل:

- **الخطوة 1:** بإجراء العملية $3L_2+L_1$ على السطر الثاني للمصفوفة A، نجد:

$$C=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

- **الخطوة 2:** بإجراء العملية L_1+2L_2 على السطر الأول للمصفوفة C، نجد:

$$D=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

- **الخطوة 3:** بقسمة السطر الأول لمصفوفة D على 3، نحصل على المصفوفة B.

إذن المصفوفة B ناتجة عن المصفوفة A بإجراء عمليات أولية على أسطر المصفوفة A، وبذلك المصفوفتين A و B متكافئتين بالأسطر.

3 -2 اختزال مصفوفة على الشكل المدرّج

تعريف 1.24. اختزال مصفوفة A على الشكل المدرّج يتمثل في إيجاد المصفوفة المدرّجة المكافئة بالأسطر للمصفوفة A.

قضية 1.2

يمكن اختزال أي مصفوفة غير معدومة على الشكل المدرّج. ♠

برهان. لإثبات القضية 1.2 يكفي إجراء عمليات أولية على أسطر المصفوفة للحصول على الشكل المدرّج. □

مثال 1.29. اختزل المصفوفة التالية

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

على الشكل المدرّج.

الحل:

- **الخطوة الأولى:** تثبيت المحور الأول.

المحور الأول

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

عمود المحور الأول

- **الخطوة الثانية**: بإجراء العمليتين $2L_2 - L_1 \to L_2$ و $2L_3 - 3L_1 \to L_3$ على السطر الثاني و الثالث للمصفوفة A، على الترتيب، نجد:

المحور الثاني

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

عمود المحور الثاني

- **الخطوة الثالثة**: بإجراء العملية $L_3 + L_2 \to L_3$ على السطر الثالث للمصفوفة B نجد:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

المصفوفة A مكافئة بالأسطر لمصفوفة المدرّجة E.

مثال 1.30. أختزل المصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

على الشكل المدرّج.

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3-2L_1 \\ L_4+3L_1}]{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4+3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4+4L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -2 \end{bmatrix} = E.$$

المصفوفة A مكافئة بالأسطر لمصفوفة المدرّجة E.

3 -3 مرتبة مصفوفة

تعريف 1.25. نسمي مرتبة مصفوفة A، التي نرمز لها بالرمز $rg(A)$، عدد محاور المصفوفة المدرّجة المكافئة لمصفوفة A. بمعنى آخر، مرتبة مصفوفة A يساوي عدد الأسطر غير معدومة في المصفوفة المدرّجة المكافئة لـ A.

ملاحظة 1.6

مرتبة مصفوفة دوما أقل أو تساوي عدد الأسطر، وكذلك أقل أو تساوي عدد الأعمدة. ♣

مثال 1.31. احسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&2&1\\-1&-3&-1\end{bmatrix}.$$

الحل:

$$\begin{bmatrix}0&2&1\\1&2&1\\-1&-3&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftrightarrow L_2\\L_2\longleftrightarrow L_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3+L_1}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{2L_3+L_2}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

لمّا كان عدد محاور المصفوفة المدرّجة المكافئة لمصفوفة A مساويا لـ 3، فإنّنا نستنتج أنّ $rg(A)=3$.

3 -4 المصفوفة الموسعة

تعريف 1.26. لتكن A مصفوفة بعدها $m\times n$ و B مصفوفة بعدها $m\times p$. إذا أضفنا أعمدة المصفوفة B إلى المصفوفة A نحصل على المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mp}\end{bmatrix}$$

والتي تدعى المصفوفة الموسعة. نرمز لهذه المصفوفة بـ $[A|B]$.

مثال 1.32. لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&9\\1&1&-1\\0&3&10\end{bmatrix}_{3\times3},\quad B=\begin{bmatrix}4&-5\\0&8\\2&-7\end{bmatrix}_{3\times2}.$$

المصفوفة الموسعة $[A|B]$ هي كالتالي:

$$[A|B]=\begin{bmatrix}3&-2&9&4&-5\\1&1&-1&0&8\\0&3&10&2&-7\end{bmatrix}_{3\times5}.$$

4 مقلوب مصفوفة مربعة

تعريف 1،27. نقول عن مصفوفة A أنّها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة B بحيث $AB = I$ و $BA = I$. المصفوفة B تدعى مقلوب المصفوفة A، ونرمز لها بـ A^{-1}.

قضية 1،3

مقلوب مصفوفة إن وجد فهو وحيد.

برهان. نفرض أنّ مصفوفة A تقبل مقلوبين B و C. عندئذ ينتج:

$$AB = BA = I \text{ و } AC = CA = I.$$

وهذا يؤدي إلى $A \times B = A \times C$. ومن ثمّ فإنّنا نستنتج أنّ $B(AB) = B(AC)$. لمّا كان الجداء المصفوفي تجميعيا، فإنّه يأتي $(BA)B = (BA)C$، وعليه $B = C$. وهذا ما يثبت وحدانية المقلوب إن وجد. □

قضية 1،4

لكي تكون المصفوفة A قابلة للقلب، يكفي أن توجد مصفوفة B بحيث $AB = I$ أو $BA = I$.

مثال 1،33. ادرس قابلية القلب لمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل: المصفوفة A قابلة للقلب؛ لأنّه توجد مصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ بحيث أنّ:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\times 1 + (-1)\times 1 & 2\times 1 + (-1)\times 2 \\ (-1)\times 1 + 1\times 1 & (-1)\times 1 + 1\times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \end{aligned}$$

إذن $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

مثال 1،34. المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ غير قابلة للقلب. في الواقع لو أفترضنا العكس، فإنّه توجد مصفوفة $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بحيث أنّ:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ 2a - c & 2b - d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{cases} 2a-c=1 \\ 2a-c=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2b-d=0 \\ 2b-d=1 \end{cases}.$$

نظرا لكون الجملتين السابقتين مستحلتين، فإنّه لا يمكن للمصفوفة A أن تكون قابلة للقلب.

قضية 1.5

لتكن A و B مصفوفتان قابلتان للقلب. عندئذ لدينا الخواص التالية:
1. المصفوفة A^{-1} أيضا قابلة للقلب و $(A^{-1})^{-1}=A$.
2. المصفوفة A^T بدورها قابلة للقلب و $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.
3. المصفوفة AB كذلك قابلة للقلب و $(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

♠

قضية 1.6

مصفوفة مربعة A من الدرجة n تكون قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $rg(A)=n$.

♠

تطبيق 4.1. ادرس قابلية القلب للمصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

نظرا لأنّ المصفوفة A مكافئة بالأسطر لمصفوفة مدرّجة رتبتها 3 (تملك ثلاثة عناصر محورية)، فإنّ $rg(A)=3$. ومن ثمّ استنادا للقضية 1.6، نستنتج أنّ المصفوفة A قابلة للقلب.

قضية 1.7

لكي تكون مصفوفة مربعة من الدرجة n قابلة للقلب يلزم و يكفي أن تكون مكافئة بالأسطر لمصفوفة الوحدة I_n.

♠

قضية 1.8

لتكن A و B مصفوفتان متكافئتين بالأسطر. المصفوفة A قابلة للقلب إذا و فقط إذا كانت المصفوفة B قابلة للقلب.

♠

برهان. يكفي تطبيق القضية 1.7، مع الأخذ بالحسبان أنّ علاقة التكافؤ بالأسطر هي علاقة متعدية (أي: إذا كانت $A\sim B$ و $B\sim C$، فإنّ $A\sim C$). □

نتيجة 1. مصفوفة مربعة مكافئة لمصفوفة أحد أسطرها على الأقل معدوم، تكون حتما غير قابلة للقلب.

تطبيق 4.2. برهن أنّ المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\-2&-3&-1\end{bmatrix}$$

غير قابلة للقلب.

الحل:

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3+2L_1]{L_2-2L_1}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3-L_2}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=E.$$

إذ أنّ $rg(E)=2$، فإنّ المصفوفة E غير قابلة للقلب. ولمّا كانت المصفوفة A مكافئة بالأسطر لمصفوفة غير قابلة للقلب فإنّنا نستنتج، استنادا للقضية (1.8)، أنّ المصفوفة A كذلك غير قابلة للقلب.

4 -1 حساب مقلوب مصفوفة مربعة

في الفصل السابق رأينا كيف ندرس قابلية القلب لمصفوفة مربعة، لكننا لم نتطرق إلى طريقة حساب المقلوب إن وجد. سيكون الهدف من هذا الفصل هو التطرق لهذا الموضوع.

4 -1-1 حساب مقلوب مصفوفة مربعة من الدرجة 2

إذا كانت المصفوفة $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ قابلة للقلب، فإنه توجد مصفوفة $B=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}$ بحيث:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}_{A}\times\underbrace{\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{I}. \tag{1.1}$$

من المساواة (1.1)، نستنتج أنّ:

$$\begin{bmatrix}ax_1+bx_2&ay_1+by_2\\cx_1+dx_2&cy_1+dy_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

لإيجاد المصفوفة B، يكفي حل الجملتين التاليتين:

$$(S_1):\begin{cases}ax_1+bx_2=1\cdots(1)\\cx_1+dx_2=0\cdots(2)\end{cases}\quad,\qquad(S_2):\begin{cases}ay_1+by_2=0\cdots(3)\\cy_1+dy_2=1\cdots(4)\end{cases}$$

1. حل الجملة (S_1).

$$(S_1'):\begin{cases}-cax_1&-&cbx_2&=&-c&\cdots(1')\\acx_1&+&adx_2&=&0&\cdots(2')\end{cases}$$

$$(S_1''):\begin{cases}-dax_1&-&dbx_2&=&-d&\cdots(1'')\\bcx_1&+&bdx_2&=&0&\cdots(2'')\end{cases}$$

لحل الجملة (S_1)، نميز حالتين

(ا). **الحالة الأولى:** إذا كان: $\Delta = ad - bc \neq 0$.
- بجمع المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد: $x_2 = \frac{-c}{ad-bc}$.
- بجمع المعادلتين $(1'')$ و $(2'')$، نجد: $x_1 = \frac{d}{ad-bc}$.

(ب). **الحالة الثانية:** إذا كان: $\Delta = ad - bc = 0$.
بجمع المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد: $c = 0$، و بجمع المعادلتين $(1'')$ و $(2'')$، نجد: $d = 0$. وهذا غير ممكنا استنادا للمعادلة (4). إذا في هذه الحالة الجملة (S_1) لا تقبل أي حل.

2. **حل الجملة** (S_2).

$$(S_2'): \begin{cases} -cay_1 - cby_2 = 0 & \cdots(3') \\ acy_1 + ady_2 = a & \cdots(4') \end{cases}$$

$$(S_2''): \begin{cases} -day_1 - dby_2 = 0 & \cdots(3'') \\ bcy_1 + bdy_2 = b & \cdots(4'') \end{cases}$$

لحل الجملة (S_2)، نميز حالتين

(ا). **الحالة الأولى:** إذا كان: $\Delta = ad - bc \neq 0$.
- بجمع المعادلتين $(3')$ و $(4')$، نجد: $y_2 = \frac{a}{ad-bc}$.
- بجمع المعادلتين $(3'')$ و $(4'')$، نجد: $y_1 = \frac{-b}{ad-bc}$.

(ب). **الحالة الثانية:** إذا كان: $\Delta = ad - bc = 0$.
بجمع المعادلتين $(3')$ و $(4')$، نجد: $a = 0$، و بجمع المعادلتين $(3'')$ و $(4'')$، نجد: $b = 0$. وهذا غير ممكنا استنادا للمعادلة (1). إذا في هذه الحالة الجملة (S_2) لا تقبل أي حل.

مما سبق نستنتج أنّ المصفوفة A تكون قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\Delta = ad - bc \neq 0$، ويكون لدينا عندئذ:

$$\begin{aligned} B = A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

نتيجة 2. إذا كان: $\Delta = ad - bc \neq 0$، فإنّ المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ قابلة للقلب، وعلاوة على ذلك يكون لدينا:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

ملاحظة 1.7

العدد الحقيقي $\Delta = ad - bc$ هو الذي يحدد إمكانية قابلية القلب للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ من عدمه، لدى هذا العدد يسمى محدد المصفوفة A، والذي نرمز له بـ $\det A$. ♣

تطبيق 4.3. : أحسب، إن أمكن، مقلوب المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

الحل:

1. مقلوب المصفوفة A.

نضع:

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}.$$

لدراسة قابلية القلب للمصفوفة A، يكفي حساب محددها:

$$\det A=ad-bc=2\times1-5\times3=2-15=-13.$$

إذ أنّ $\det A\neq0$، فإنّ المصفوفة A قابلة للقلب. لحساب مقلوبها نستعمل العلاقة (1.4)، لنتحصل على:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\frac{1}{-13}\begin{bmatrix}1&-3\\-5&2\end{bmatrix}.$$

2. مقلوب المصفوفة B.

نضع:

$$B=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}.$$

لدراسة قابلية القلب للمصفوفة B، يكفي حساب محددها:

$$\det B=ad-bc=2\times1-2\times1=0.$$

لمّا كان $\det B=0$، فإنّ المصفوفة B غير قابلة للقلب.

4 -1-2 طريقة غوص-جوردن لحساب مقلوب مصفوفة مربعة

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. نفرض أنّ $rg(A)=n$ (أي A قابلة للقلب). طريقة حذف غوص-جوردن (أو ببساطة طريقة العمليات الأولية على أسطر المصفوفة) لحساب مقلوب المصفوفة A، تمثل في إجراء متتالية من العمليات الأولية على أسطر المصفوفة الموسعة $(A|I_n)$ لاختزلها إلى المصفوفة الموسعة $(I_n|B)$، عندئذ المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A. أي: $B=A^{-1}$.

تطبيق 4.4. أحسب مقلوب المصفوفة التالية باستعمال طريقة حذف غوص-جوردن:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&1&-1\\3&-1&-1\end{bmatrix}.$$

الحل:

المحور الأول

نقوم بإجراء هاتين العمليتين على السطر الثاني و الثالث لجعل العنصرين الواقعين تحت المحور الأول معدومين.

$$\begin{array}{r} \\ L_2-2L_1 \longrightarrow \\ L_3-3L_1 \longrightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

المحور الثاني

نقوم بإجراء هذه العملية على السطر الثالث لجعل العنصر الواقع تحت المحور الثاني مساويا لـ 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3L_3-2L_2 \longrightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

المحور الثالث

نقوم بإجراء هاتين العمليتين على السطر الأول و الثاني لجعل العنصرين الواقعين فوق المحور الثالث معدومين.

$$\begin{array}{r} 4L_1+L_3 \longrightarrow \\ 4L_2-L_3 \longrightarrow \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

المحور الثاني

نقوم بإجراء هذه العملية على السطر الأول لجعل العنصر الواقع فوق المحور الثاني مساويا لـ 0.

$$\begin{array}{r} 3L_1+L_2 \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

المحاور

نقوم بإجراء هذه العمليات على الأسطر لجعل جميع المحاور مساوية لـ 1.

$$\begin{array}{r} L_1/12 \longrightarrow \\ L_2/12 \longrightarrow \\ L_3/4 \longrightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

لنتحصل في الأخير على المصفوفة الموسعة التالية:

$$(I|B)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right].$$

إذا مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة B المعرفة بـ:

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -5/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

تطبيق 4.5. باستعمال طريقة حذف غوص-جوردن، أحسب مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

الحل:

هذا العنصر ليس عنصرا محوريا لأنه معدوم

لتنصيب المحور الأول نقوم بالتبديل بين السطر الأول و السطر الثاني.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

المحور الأول

نقوم بإجراء هذه العملية على السطر الثالث لجعل العنصر الواقع تحت المحور الأول مساويا لـ 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3+L_1 \longrightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

المحور الثاني

نقوم بإجراء هذه العملية على السطر الثالث لجعل العنصر الواقع تحت المحور الثاني مساويا لـ 0.

$$\begin{array}{r} \\ \\ 2L_3-L_2 \longrightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

المحور الثالث

نقوم بإجراء هاتين العمليتين على السطر الأول و الثاني لجعل العنصرين الواقعين فوق المحور الثالث معدومين.

$$\begin{array}{r} 2L_1-L_3 \longrightarrow\\ 2L_2+L_3 \longrightarrow\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2\end{array}\right]$$

المحاور

نقوم بإجراء هذه العمليات على الأسطر لجعل جميع المحاور مساوية لـ 1.

$$\begin{array}{r} L_1/2 \longrightarrow\\ L_2/4 \longrightarrow\\ L_3/4 \longrightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2\end{array}\right]$$

لنتحصل في الأخير على المصفوفة الموسعة التالية:

$$(I|B)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/2\end{array}\right].$$

إذا مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة B المعرفة بـ:

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1\\ 1/4 & 1/2 & 1/2\\ -1/4 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

5 محدد مصفوفة مربعة

5 -1 محدد مصفوفة مربعة من الدرجة 2

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة 2 معرفة بـ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

لقد برهنا في الفصل السابق أن المصفوفة A تكون قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان العدد المعرفة بـ:

$$\Delta = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

يختلف عن الصفر. لمّا كان هذا العدد يحدد قابلية القلب للمصفوفة A من عدمها، فإننا نطلق عليه اسم المحدد و نرمز له بـ $\det(A)$، أو $\det A$.

إذا لدينا:

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

مثال 1.35. أحسب محدد المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

الحل:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times (-1) = 5.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \times 2 - 2 \times 5 = -10.$$

5 -2 محدد مصفوفة مربعة من الدرجة العليا

5 -2 -1 طريقة المرافقات

تعريف 1.28. لتكن A مصفوفة مربعة. نسمي مصغرا (*mineur*) للعنصر a_{ij} محدد المصفوفة المربعة A_{ij} الناتجة عن المصفوفة A بحذف السطر i و العمود j. أما العدد $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ فيسمى المعامل المرافق (*cofacteur*) للعنصر a_{ij}.

مثال 1.36. لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- نحسب مصغر العنصر $a_{11} = 5$ كما يلي:

$$\det(A_{11}) = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-2) \times 1 - 7 \times 2 = -16.$$

إذا المعامل المرافق للعنصر $a_{11} = 5$ يحسب كما يلي:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = -16.$$

- نحسب مصغر العنصر $a_{32} = 2$ كما يلي:

$$\det(A_{32}) = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= 5 \times 7 - (-1) \times 4 = 39.$$

إذا المعامل المرافق للعنصر $a_{32} = 2$ يحسب كما يلي:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = -39.$$

- نحسب مصغر العنصر $a_{23} = 7$ كما يلي:

$$\det(A_{32}) = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= 5 \times 2 - (-3) \times 0 = 10.$$

إذا المعامل المرافق للعنصر $a_{23} = 7$ يحسب كما يلي:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{23} = -10.$$

تعريف 1،29. لتكن A مصفوفة مربعة درجتها n أكبر تماما من 2. محدد المصفوفة A باستعمال النشر وفق السطر i يساوي مجموع حواصل ضرب كل عنصر من السطر i بمعامله المرافق، أي:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}). \qquad (1.5)$$

مثال 1.37. أحسب باستعمال النشر وفق سطر محدد المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{pmatrix}.$$

الحل:

1. النشر وفق السطر الأول.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{array}\\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}\end{array} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{11} بمعامله المرافق C_{11}.

$$+(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{12} بمعامله المرافق C_{12}.

$$+5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{13} بمعامله المرافق C_{13}.

$$\begin{aligned}
&= +1\begin{vmatrix} 3 & 8\\ -5 & 3\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 8\\ 4 & 3\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\
&= (9-(-40)) + (-6-32) + 5(10-12)\\
&= 49-38-10\\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. النشر وفق السطر الثاني.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{array}\\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}\end{array} = (-2)\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{21} بمعامله المرافق C_{21}.

$$+3\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{22} بمعامله المرافق C_{22}.

$$+8\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 8\\ 4 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{23} بمعامله المرافق C_{23}.

$$\begin{aligned}
&= -(-2)\begin{vmatrix} -1 & 5\\ -5 & 3\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & -5\end{vmatrix}\\
&= 2(-3+25) + 3(3-20) - 8(-5+4)\\
&= 44-51+8\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. النشر وفق السطر الثالث.

$$\begin{array}{ccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&5\\-2&3&8\\4&-5&3\end{vmatrix} = 4\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&-1&5\\-2&3&8\\4&-5&3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{31} بمعامله المرافق C_{31}.

$$+(-5)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1&5\\-2&3&8\\4&-5&3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{32} بمعامله المرافق C_{32}.

$$+3\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1&5\\-2&3&8\\4&-5&3\end{vmatrix}$$

جداء العنصر a_{33} بمعامله المرافق C_{33}.

$$\begin{aligned}
&= 4\begin{vmatrix}-1&5\\3&8\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&5\\-2&8\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&-1\\-2&3\end{vmatrix}\\
&= 4(-8-15)+5(8+10)+3(3-2)\\
&= -92+90+3\\
&= 1.
\end{aligned}$$

مثال 1.38. أحسب محدد المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-4&2\\0&-6&0&0\\-1&1&0&5\\3&-7&-2&1\end{pmatrix}.$$

الحل: بالنشر وفق السطر الثاني، نحصل على:

$$\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix}3&1&-4&2\\0&-6&0&0\\-1&1&0&5\\3&-7&-2&1\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}3&1&-4&2\\0&-6&0&0\\-1&1&0&5\\3&-7&-2&1\end{vmatrix}\\
&= (-6)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&-4&2\\-1&0&5\\3&-2&1\end{vmatrix}\\
&= -6\Delta_{22}.
\end{aligned}$$

الآن نحسب المحدد Δ_{22}. بالنشر وفق السطر الثاني، نجد:

$$\begin{array}{ccc} \ominus & \oplus & \ominus \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}3&-4&2\\-1&0&5\\3&-2&1\end{vmatrix} &= -(-1)\begin{vmatrix}3&-4&2\\-1&0&5\\3&-2&1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3&-4&2\\-1&0&5\\3&-2&1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&-4&2\\-1&0&5\\3&-2&1\end{vmatrix}\\
&= -(-1)\begin{vmatrix}-4&2\\-2&1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3&2\\3&1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&-4\\3&-2\end{vmatrix}\\
&= 0+0-30\\
&= -30.
\end{aligned}$$

تعريف 1،30. لتكن A مصفوفة مربعة درجتها n أكبر تماما من 2. حساب محدد المصفوفة باستعمال النشر وفق العمود j يعطى بالصيغة التالية:

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}). \tag{1.6}$$

مثال 1،39. احسب باستعمال النشر وفق العمود الثالث المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1\\ -3 & -4 & -2\\ 1 & 1 & 6\end{vmatrix}.$$

الحل: بالنشر وفق العمود الثالث، نحصل على:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1\\ -3 & -4 & -2\\ 1 & 1 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \\ \leftarrow + \end{matrix} = +\begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} & 1\\ -3 & -4 & \cancel{-2}\\ 1 & 1 & \cancel{6}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cancel{1}\\ \cancel{-1} & \cancel{0} & -2\\ 1 & 1 & \cancel{6}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cancel{1}\\ -3 & -4 & \cancel{2}\\ \cancel{1} & \cancel{1} & 6\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= +1\begin{vmatrix} -3 & -4\\ 1 & 1\end{vmatrix} -(-2)\begin{vmatrix} 4 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} +6\begin{vmatrix} 4 & 3\\ -3 & -4\end{vmatrix}\\
&= 1+2-42\\
&= -39.
\end{aligned}$$

قضية 1،9

محدد مصفوفة مثلثية سفلية، أو مثلثية علوية يساوي جداء عناصرها القطرية. ♠

تطبيق 5،1. احسب المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 & 3\\ 0 & 5 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0\\ 9 & -5 & 0\\ 10 & 11 & 2\end{vmatrix}.$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = 1\times(-2)\times(-3)=6.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 & 3\\ 0 & 5 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix} = 4\times 5\times(-2)\times(-4)=80.$$

ملاحظة 1.8

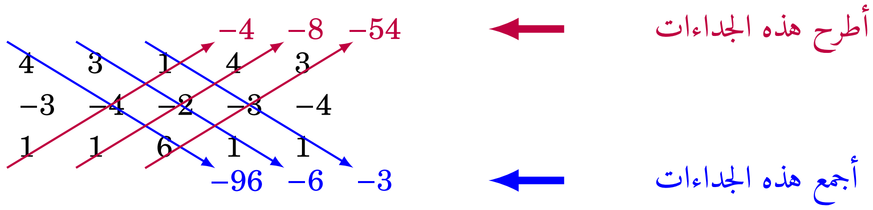
إذ أنّ المصفوفة القطرية هي مصفوفة مثلثية علوية و مثلثية سفلية في آن واحد، فإنّ محددها كذلك يساوي جداء عناصرها القطرية. ♣

5 -2-2 قاعدة ساروس (Règle de Sarrus)

مثال 1.40.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

الحل:

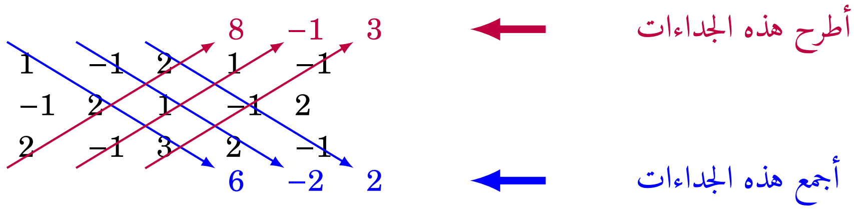


$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = [-96-6-3]-[-4-8-54]$$
$$= -39.$$

مثال 1.41. أحسب باستعمال قاعدة ساروس (*Règle de Sarrus*) المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

الحل:

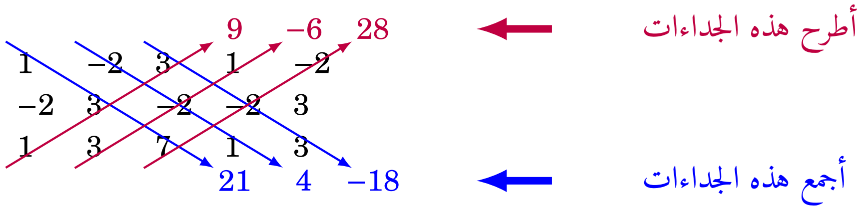


$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [6-2+2]-[8-1+3]$$
$$= -4.$$

مثال 1،42. أحسب باستعمال قاعدة ساروس (*Règle de Sarrus*) المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

الحل:



$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = [21+4-18]-[9-6+28]$$
$$= -24.$$

5 -3 استعمال المحدد في حساب مقلوب مصفوفة مربعة

5 -3 -1 المصفوفة المرافقة (Matrice des cofacteurs)

تعريف 1،31. لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n، نسمي مصفوفة المرافقة للمصفوفة A المصفوفة، المعرفة بـ $Com(A)=(C_{ij})$، حيث C_{ij} يمثل المعامل المرافق للعنصر a_{ij}.

مثال 1،43. أوجد المصفوفة المرافقة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

الحل:

- أولا نحسب المعاملات المرافقة لعناصر المصفوفة A:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

- ثانيا نحسب المصفوفة المرافقة للمصفوفة A:

$$Com(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

مثال 1.44. أوجد المصفوفة المرافقة للمصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

الحل:

- أولا نحسب المعاملات المرافقة لعناصر المصفوفة A:

المعامل المرافق للعنصر a_{11}

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}4&-3\\1&2\end{vmatrix}=11},$$

المعامل المرافق للعنصر a_{12}

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}-1&-3\\1&2\end{vmatrix}=1},$$

المعامل المرافق للعنصر a_{13}

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}-1&4\\1&1\end{vmatrix}=-5}$$

المعامل المرافق للعنصر a_{21}

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}-1&2\\1&2\end{vmatrix}=-4},$$

المعامل المرافق للعنصر a_{22}

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}=4},$$

المعامل المرافق للعنصر a_{23}

$$C_{23}=(-1)^{2+3}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}=4}$$

المعامل المرافق للعنصر a_{31}

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}-1&2\\4&-3\end{vmatrix}=-5},$$

المعامل المرافق للعنصر a_{32}

$$C_{32}=(-1)^{3+2}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}3&2\\-1&-3\end{vmatrix}=-7},$$

المعامل المرافق للعنصر a_{33}

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&4&-3\\1&1&2\end{vmatrix}}_{=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&4\end{vmatrix}=11}$$

- ثانيا نحسب المصفوفة المرافقة للمصفوفة A:

$$Com(A)=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-1&-5\\4&4&-4\\-5&7&11\end{bmatrix}.$$

4- 5 المصفوفة القرينة (Matrice adjointe)

تعريف 1.32. لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n. المصفوفة القرينة للمصفوفة، التي نرمز لها ب $Adj(A)$، هي منقول المصفوفة المرافقة للمصفوفة A. أي: $Adj(A)=Com(A)^T$.

مثال 1.45. المصفوفة القرينة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ المعطاة في المثال (1.43) هي المصفوفة:

$$Adj(A) = Com(A)^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

مثال 1.46. نعود أدراجنا إلى المثال (1.44) أين برهنا أن المصفوفة المرافقة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

تساوي المصفوفة:

$$Com(A) = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & -4 \\ -5 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

وعليه المصفوفة القرينة للمصفوفة A تكون كالتالي:

$$Adj(A) = Com(A)^T = \begin{bmatrix} 11 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & 7 \\ -5 & -4 & 11 \end{bmatrix}.$$

مثال 1.47. أوجد المصفوفة القرينة للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

الحل:
العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A هي كالتالي:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3,$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3,$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

المصفوفة المرافقة للمصفوفة A:

$$Com(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -5 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

إذا المصفوفة القرينة للمصفوفة A تكون كالآتي:

$$Adj(A) = Com(A)^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

قضية 1.10

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإنّ:

$$A.Adj(A) = Adj(A).A = (\det A)I.$$

وعليه، إذا كان $\det A \neq 0$، فإنّ:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A).$$

♠

مثال 1.48. احسب باستعمال طريقة المرافقات مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

الحل:

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

إذا

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A) = \frac{1}{\det A} Com(A)^T = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

مثال 1.49. احسب باستعمال طريقة المرافقات مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

الحل:

- أولا نحسب محدد المصفوفة A. بالنشر وفق السطر الثاني، نحصل على

$$\begin{array}{ccc} \ominus & \oplus & \ominus \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2(3+5) + 4(-3-5) \\ &= 16 - 32 \\ &= -16. \end{aligned}$$

- ثانيا نحسب مرافقة المصفوفة.

$$Com(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

بعد إجراء الحسابات نجد:

$$Com(A)=\begin{pmatrix} -2 & -20 & -10\\ 0 & 8 & 8\\ -2 & 12 & 6\end{pmatrix}.$$

- أخيرا نحسب مقلوب المصفوفة A.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}Com(A)^T=\frac{-1}{16}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2\\ -20 & 8 & 12\\ -10 & 8 & 6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 10 & -4 & -6\\ 5 & -4 & -3\end{pmatrix}.$$

6 تمارين

تمرين 1.1

لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}4&8\\1&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3&9\\1&1\end{bmatrix}.$$

1. احسب $A+B$، AB، BA، A^2 و B^2.
2. هل $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$؟

- نفس الأسئلة السابقة بالنسبة لمصفوفتين $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$.

تمرين 1.2

لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}x&5\\0&2x\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}y&7\\-1&3y\end{bmatrix}.$$

1. أوجد العددين الحقيقيين x و y بحيث أنّ: $A+B=\begin{bmatrix}4&12\\-1&17\end{bmatrix}$.
2. أوجد العددين الحقيقيين x و y بحيث أنّ: $2A-4B=\begin{bmatrix}-5&-18\\4&-16\end{bmatrix}$.

تمرين 1.3

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}x&1\\2&3\end{bmatrix};\qquad x\in\mathbb{R}.$$

- أوجد x بحيث أنّ: $A^2=\begin{bmatrix}6&1\\2&11\end{bmatrix}$.

تمرين 1.4

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\-4&2\\0&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&0\\-2&1\\8&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-4&6\\-14&7\\24&17\end{pmatrix}.$$

- أوجد العددين الحقيقيين x و y بحيث أنّ: $xA+yB=C$.

تمرين 1.5

احسب إن أمكن الجداءات التالية:

$$\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&4&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&6\\3&-1&4\\3&5&-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&-3&4\\-1&2&6\\4&-3&-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-4&1\end{pmatrix}^T.$$

تمرين 1.6

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&-3&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\4&0\\2&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}-1&0&4\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-1&21\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&5&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

احسب إن أمكن:

$$AB,\quad AC^T,\quad DI-\frac{1}{3}D^TG,\quad BD,\quad B(D+G),\quad CF,\quad 3A-2BC,\quad FE-3B$$

$$G(2D-3I),\quad DG,\quad 2I-\frac{1}{2}GH,\quad D^3,\quad A(BC),\quad EC,\quad (DC)A,\quad GC,\quad BE^T,\quad CF^T$$

تمرين 1.7

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-3&4&0\\8&-2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-5&0&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7&-2\\-4&6\\0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-4&-7&1\\-3&0&2\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

تحقق من صحة النتائج التالية:

$$3C^T-5B=\begin{pmatrix}1&-7&0\\19&18&-7\end{pmatrix},\quad -C-4B^T=\begin{pmatrix}-23&22\\8&-6\\0&-9\end{pmatrix},\quad AD=\begin{pmatrix}-15&-35&7\\0&21&5\\-25&-56&6\end{pmatrix}$$

$$DA=\begin{pmatrix}9&-26&-7\\1&-1&-4\\21&-5&4\end{pmatrix},\quad CB=\begin{pmatrix}38&-7&-4\\-46&4&12\\-5&0&2\end{pmatrix},\quad BC=\begin{pmatrix}32&-14\\-35&12\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}44&-13&12\\-27&19&-6\\54&-18&17\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}355&-120&100\\-240&115&-60\\460&-160&125\end{pmatrix},\quad D^3=\begin{pmatrix}-252&-266&62\\-118&-98&58\\34&14&-6\end{pmatrix}$$

$$-A^3+10A^2-10A=\begin{pmatrix}35&0&0\\0&35&0\\0&0&0\end{pmatrix}=35I,\quad -D^3-2D^2+30D=\begin{pmatrix}56&0&0\\0&56&0\\0&0&56\end{pmatrix}=56I.$$

تمرين 1.8

لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

1. احسب $(AB)C$ و $A(BC)$. ماذا تلاحظ؟
2. احسب $A(B+C)$ و $AB+BC$. ماذا تلاحظ؟
3. احسب $(B+C)A$ و $BA+CA$. ماذا تلاحظ؟

تمرين 1.9

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

1. احسب $(A+I)^3$ باستعمال الخاصية التجميعية لجداء المصفوفات.
2. احسب $(A+I)^3$ باستعمال دستور ثنائي الحد.

تمرين 1.10

لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}, \qquad N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

1. احسب N^n من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$.
2. باستعمال المتطابقة $A=N+3I_2$ و التحقق من إمكانية تطبيق دستور ثنائي الحد، احسب A^n.

تمرين 1.11

لتكن المصفوفة

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

نضع: $N=B-I$.

1. برهن أن: $N^k=0, \quad \forall k\geq 3$.
2. احسب B^{100} باستعمال دستور ثنائي الحد.

تمرين 1.12

لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=A+3I.$$

1. عبر عن المصفوفة B^2 بدلالة B.
2. استنتج A^2 بدلالة A.
3. هل المصفوفة A قابلة للقلب؟
4. نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=A+3I.$$

تمرين 1.13

لتكن المصفوفتين

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad N=A-I.$$

1. احسب N^2 و N^3، ثم استنتج عبارة N^k من أجل كل عدد طبيعي $k\geq 3$.
2. استنتج عبارة A^n بدلالة I، N و N^2 من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$.
3. اعط العبارة الصريحة للمصفوفة A^n من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$.

تمرين 1.14

لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

1. اكتب المصفوفة A على الشكل $2B-I$، حيث B مصفوفة يطلب تعينها.
2. بين أن: $B^2=3B$.
3. استنتج عبارة كل من A^2 و A^3 بدلالة B و I.
4. برهن بالتراجع أن:

$$A^n=(-1)^nI+\frac{1}{3}\left(5^n-(-1)^n\right)B,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

5. اعط العبارة الصريحة للمصفوفة A^n من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$.

تمرين 1.15

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

- من أجل كل عدد حقيقي x نعرف المصفوفة:

$$M(x)=I+xA+\frac{x^2}{2}A^2.$$

1. بين أن:

$$M(x)M(y)=M(x+y);\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

2. استنتج أن المصفوفة M قابلة للقلب، ثم اعط عبارة مقلوبها M^{-1}.
3. بين بالتراجع أن:

$$(M(x))^n=M(nx),\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

4. لتكن المصفوفة:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(ا). استنتج مما سبق عبارة B^{-1}.
(ب). استنتج مما سبق عبارة B^n من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$.

تمرين 1.16

أوجد المصفوفة المدرّجة المكافئة للمصفوفة A المعرفة بـ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم استنتج مرتبتها.

- نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمصفوفات التالية:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

تمرين 1.17

احسب مرتبة المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

تمرين 1.18

لتكن المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. برهن أنّ $AB = BC$.
2. هل المصفوفة A قابلة للقلب؟

تمرين 1.19

لتكن المصفوفة

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

نضع: $Q = \frac{1}{4}(I + P)$.

1. احسب QP, PQ, P^2 بدلالة P.
2. احسب $Q(4I-P)$. ماذا تستنتج؟

تمرين 1.20

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

1. احسب A^2، ثم A^2-A.
2. استنتج أن A قابلة للقلب. ماذا تساوي A^{-1}؟

تمرين 1.21

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

1. احسب A^3-A.
2. استنتج أن A قابلة للقلب، ثم اعط عبارة A^{-1}.

تمرين 1.22

لتكن المصفوفة

$$M=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 7\\ -4 & -3 & 8\\ -3 & -2 & 6\end{pmatrix}.$$

1. احسب M^3+M^2-M.
2. استنتج أن M قابلة للقلب، ثم اعط عبارة M^{-1}.

تمرين 1.23

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

1. احسب A^3-A^2+A-I.
2. استنتج أن A قابلة للقلب، ثم أعط عبارة A^{-1} بدلالة I، A و A^2.

تمرين 1.24

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. تأكد أن $A^3-4A^2-A=-4I$.
2. استنتج أن A قابلة للقلب، ثم أعط عبارة A^{-1} بدلالة I، A و A^2.

تمرين 1.25

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

1. احسب $(A+I)^3$.
2. استنتج أن A قابلة للقلب، ثم أعط عبارة A^{-1} بدلالة I، A و A^2.

تمرين 1.26

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. احسب $(A-2I)^3$، ثم استنتج أن A قابلة للقلب.
2. اعط عبارة A^{-1}.

تمرين 1.27

لتكن المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 6 & -8 & 12\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

1. احسب A^2 ثم أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $A^2=aA+bI$.
2. استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب، ثم اعط عبارة مقلوبها A^{-1}.

تمرين 1.28

لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

1. برهن أن: $A^2=2I-A$.
2. استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب، ثم اعط عبارة مقلوبها A^{-1}.
3. أحسب A^{-1} باستعمال طريقة حذف غوص-جوردن.

تمرين 1.29

لتكن المصفوفة A المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. بين أن: $A^2=A+2I$.

2. استنتج أن A قابلة للقلب، ثم أعط عبارة مقلوبها A^{-1}.
3. أوجد باقي القسمة الإقليدية لكثير الحدود X^n على X^2-X-2.
4. استنتج عبارة A^n من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$.

تمرين 1.30

لتكن المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. هل المصفوفة A قابلة للقلب؟
2. إذا كانت A قابلة للقلب، أحسب مقلوبها باستعمال طريقة المرافقات.

تمرين 1.31

لتكن المصفوفة B المعرفة بـ:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. باللجوء إلى حساب المحدد، بين أن المصفوفة B قابلة للقلب.
2. أحسب مقلوبها المصفوفة B باستعمال طريقة المرافقات.
3. نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمصفوفة:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

تمرين 1.32

لتكن المصفوفة التالية:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. أحسب محدد المصفوفة M_λ، ثم حدد قيم الوسيط λ التي من أجلها المصفوفة M_λ قابلة للقلب.
2. باستعمال طريقة المرافقات، أحسب كل من M_2^{-1}، M_2^{-1} و M_3^{-1}.

2 جمل المعادلات الخطية

1 مفاهيم أولية

تعريف 2.1. نسمي جملة معادلات خطية، أو ببساطة جملة خطية، كل عائلة من المعادلات على الشكل التالي:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

حيث

1. $b_1, b_2, \cdots, b_m$ أعداد حقيقية تشكل الطرف الأيمن لجملة الخطية (S).
2. a_{ij} حيث الدليل i يتغير من 1 حتى m، و الدليل j يتغير من 1 حتى n هي أعداد حقيقية تدعى معاملات الجملة الخطية (S).
3. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ هي مجاهيل (أو متغيرات) الجملة الخطية (S).

مثال 2.1. جملة المعادلات

$$(S)\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -2\\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & \sqrt{3} \end{cases}$$

هي جملة خطية ذات معادلتين و ثلاثة مجاهيل x_1، x_2 و x_3.

مثال 2.2. جملة المعادلات التالية

$$(S)\begin{cases} 5x & - & \frac{2}{3}y & = & 0\\ \sqrt{2}x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

هي جملة خطية ذات معادلتين و مجهولين x و y.

مثال 2.3. الجملتان

$$(S_1)\begin{cases} 3x & + & y^2 & = & -1\\ x & - & y & = & 1 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} 3x+y=2\\ xy=5 \end{cases}$$

ليستا خطيتين.

1- 1 مجموعة حلول جملة خطية

تعريف 2.2. نسمي مجموعة حلول الجملة الخطية (2.1) المجموعة المعرفة على النحو التالي:

$$\mathscr{S} = \{\ (\lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n) : \qquad \lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ \}$$

بحيث كل معادلات الجملة S تكون محققة من أجل

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n \end{cases} .$$

مثال 2.4. الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} 3x_1 & - & x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 1 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا $(x_1, x_2) = (0, 1)$، إذا مجموعة حلول الجملة (S) هي: $\mathscr{S} = \{(0, 1)\}$.

مثال 2.5. مجموعة حلول الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -3 \end{cases}$$

هي المجموعة:

$$\mathscr{S} = \{(\alpha, -1, -\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

نلاحظ أنّ الجملة (S) تقبل عدد لا منته من الحلول، كلما أعطينا قيمة للوسيط α نحصل على حل.

مثال 2.6. الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} x & - & y & = & 1 \\ -2x & + & 2y & = & 0 \end{cases}$$

لا تملك أي حل، وبهذا تكون مجموعة حلول الجملة (S) هي المجموعة الخالية، أي: $\mathscr{S} = \{\} = \phi$.

ملاحظة 2.1

على ضوء الأمثلة السابقة، يمكن لجملة خطية أن تقبل حلا على الأقل (حلا وحيدا أو عدد غير منته من الحلول)، أو لا تقبل أي حل. سنرى لاحقا الشرط اللازم و الكافي لكي تقبل جملة خطية حلا على الأقل. ♣

ملاحظة 2.2

حل جملة خطية يتمثل في إيجاد مجموعة حلولها. ♣

1 -2 الشكل المصفوفي لجملة خطية

يمكن كتابة الجملة الخطية (2.1) على الشكل المصفوفي التالي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \tag{2.2}$$

حيث A هي مصفوفة معاملات الجملة (S)، X هي مصفوفة المجاهيل (المتغيرات)، و b يمثل الطرف الأيمن (أو الطرف الحر) للجملة (S).

ملاحظة 2.3

نلاحظ أن عدد أسطر مصفوفة المعاملات A يساوي عدد معادلات الجملة الخطية (S)، و عدد أعمدتها يساوي عدد المجاهيل. ♣

مثال 2.7. يمكن كتابة الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

على الشكل المصفوفي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}.$$

1 -3 المصفوفة الموسعة لجملة خطية

تعريف 2.3. نسمي مصفوفة موسعة لجملة خطية (S)، المصفوفة التي نرمز لها بـ $(A|b)$، والمعرفة بـ:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} \end{array}\right]$$

حيث A هي مصفوفة معاملات الجملة (S) و b يمثل طرفها الأيمن.

مثال 2.8. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}.$$

الشكل المصفوفي للجملة (S) هو كالتالي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}.$$

إذا المصفوفة الموسعة الملحقة بالجملة (S) هي:

$$[A|b]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

1 -4 الجملة الخطية المتجانسة

تعريف 2.4. نقول عن جملة خطية أنّها متجانسة إذا كان طرفها الأيمن معدوما.

مثال 2.9. لتكن الجملتين الخطيتين التاليتين:

$$(S_1)\begin{cases} 5x - 4y + 9z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}.$$

الجملة الخطية (S_2) متجانسة، بينما الجملة الخطية (S_1) ليست كذلك.

1 -5 الجملة الخطية المربعة

تعريف 2.5. نسمي جملة خطية مربعة كل جملة خطية عدد معدلاتها يماثل عدد مجاهيلها. بمعنى: جملة خطية مربعة هي جملة خطية مصفوفة معاملاته مربعة.

مثال 2.10. لتكن الجمل الخطية التالية:

$$(S_1)\begin{cases} x-8y = 1 \\ -x+2y = 4 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 2x-4y = 1 \\ -x+y = -3 \\ 3x-y = -2 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 2x-4y+z = 7 \\ -x+y-3z = 10 \\ 3x-y-z = -12 \end{cases}.$$

الجملتان (S_1) و (S_3) هما جملتان خطيتان مربعتان، لكن الجملة الخطية (S_2) ليست مربعة.

1 -6 جملة كرامر

تعريف 2،6. إذا كانت (S) جملة خطية مربعة و مصفوفة معاملاتها قابلة للقلب، فإنها تسمى جملة كرامر.

مثال 2،11. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} x-2y &= 1 \\ x+3y &= -1 \end{cases}.$$

الشكل المصفوفي لجملة (S):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b}.$$

لمّا كانت مصفوفة المعاملات A هي مصفوفة مربعة، و قابلة للقلب $(\det A = 5 \neq 0)$، فإنّ الجملة (S) هي فعلا جملة كرامر.

مثال 2،12. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ \quad\;\; y + 2z = 5 \\ \quad\; 3y + 6z = 1 \end{cases}.$$

الشكل المصفوفي لجملة (S) هو كالتالي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}.$$

مصفوفة المعاملات A هي مصفوفة مربعة، لكنها غير قابلة للقلب، لأنّ:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

وهكذا فإنّ الجملة (S) ليست جملة كرامر.

مثال 2،13. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 6x + 5y + z = 2 \end{cases}.$$

الجملة (S) تكتب على الشكل المصفوفي التالي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}.$$

الجملة (S) ليست جملة كرامر لأن مصفوفة معاملاتها A هي مصفوفة ليست مربعة.

ملاحظة 2.4

جملة خطية مربعة، ذات n مجهولا هي جملة كرامر إذا وفقط إذا كانت مرتبة مصفوفة معاملاتها تساوي n. ♣

1 -7 الجملة الخطية المثلثية

تعريف 2.7. الجملة الخطية المثلثية هي جملة خطية مصفوفة معاملاتها مثلثية علوية.

مثال 2.14.

$$(S)\begin{cases} x - y = 1 \\ \quad - 6y = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{الشكل المصفوفي}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}_{b}.$$

الجملة (S) هي جملة خطية مثلثية.

مثال 2.15.

$$(S)\begin{cases} x + y + z = -1 \\ \quad - y + 3z = 1 \\ \qquad\quad z = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{الشكل المصفوفي}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{b}.$$

الجملة (S) هي جملة خطية مثلثية.

مثال 2.16.

$$(S)\begin{cases} 2x + 4y + -3z = -5 \\ \quad - 4y + z = -3 \\ \quad 2y - 5z = -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{الشكل المصفوفي}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}}_{b}.$$

إذ أنّ مصفوفة معاملات الجملة (S) ليست مصفوفة مثلثية (لاحظ أنّ: $a_{32} = 2 \neq 0$)، فإنّ الجملة (S) ليست مثلثية.

1 -8 الجملة الخطية المدرّجة

تعريف 2.8. نسمي جملة خطية مدرّجة كل جملة خطية مصفوفة معاملتها هي مصفوفة مدرّجة.

مثال 2.17. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} x + y + z + t + w = -2 \\ \quad 2y - 3z - 5t - 2w = 1 \\ \quad\quad 6w = 3 \end{cases}.$$

نكتب الجملة (S) على الشكل المصفوفي

$$(S): \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}.$$

إذ أنّ مصفوفة معاملات الجملة (S) هي مصفوفة مدرّجة، فإنّ (S) هي جملة خطية مدرّجة.

مثال 2.18. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} 3x - 7y + 14z - 8w = 4 \\ \quad 2z - 3w = -5 \\ \quad 4z - w = 1 \end{cases}.$$

مصفوفة معاملات الجملة (S) هي كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

نظرا لأنّ المصفوفة A ليست مدرّجة(لاحظ أنّ: $a_{33} = 4 \neq 0$)، فإنّ الجملة (S) ليست مدرّجة.

1 -9 المتغيرات الحرة و المتغيرات المقيدة لجملة خطية مدرّجة

تعريف 2.9. نسمي متغيرا مقيدا (أو رئيسيا) لجملة خطية مدرّجة، كل متغير أحد معاملاتة يمثل عنصرا محوريا لمصفوفة المعاملات الملحقة. باقي متغيرات الجملة الخطية تسمى متغيرات حرة (أو فرعية).

مثال 2.19. نرجع إلى الجملة المقترحة في المثال (2.17):

$$(S): \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

نلاحظ أن المتغيرات x، y و w هي متغيرات رئيسية، بينما t و z هي متغيرات فرعية.

1 -10 الجمل الخطية المتكافئة

تعريف 2.10. نقول عن جملتين خطيتين أنّهما متكافئتين إذا وفقط إذا كان لهما مجموعة الحلول نفسها.

مثال 2.20. الجملتان الخطيتان

$$(S_1)\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 3y = -1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

متكافئتان، لأنّ لهما مجموعة الحلول نفسها، والمتمثل في المجموعة: $\mathscr{S} = \{(2,1)\}$.

قضية 2.1

إذا كانتا المصفوفتان الموسعتان $[A|b]$ و $[C|d]$ متكافئتين بالأسطر، فإنّ الجملتين الخطيتين $AX = b$ و $CX = d$ متكافئتين. ♠

تطبيق 1.1. نرجع إلى الجملة الخطية المقترحة في المثال (2.18):

$$(S)\begin{cases} 3x - 7y + 14z - 8w = 4 \\ \qquad\quad 2z - 3w = -5 \\ \qquad\quad 4z - w = 1 \end{cases}.$$

لقد رأينا أنّها ليست جملة خطية مدرّجة. نريد الآن أن نجد الجملة الخطية المدرّجة المكافئة لها. أولا نشكل المصفوفة الموسعة لهذه الجملة:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -7 & 14 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

ثانيا نقوم بإجراء العملية $L_3 - 2L_2 \longrightarrow L_3$ على السطر الثالث لمصفوفة الموسعة $[A|b]$ لنتخلص من العنصر

الواقع تحت المحور الثاني:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -7 & 14 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1\end{array}\right]\xrightarrow[L_3-2L_2]{}\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -7 & 14 & -8 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9\end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) مكافئة للجملة الخطية المدرّجة التالية:

$$(S')\begin{cases} 3x - 7y + 14z - 8w = 4\\ \quad\quad\quad\; 2z - 3w = -5\\ \quad\quad\quad\quad\;\; + 5w = 9\end{cases}.$$

1 -11 الجملة الخطية المتسقة أو المتآلفة

تعريف 2.11. نقول عن جملة خطية أنّها متسقة أو متآلفة، إذا كانت تقبل حلا أو عدد غير منته من الحلول، أي أنّ مجموعة حلولها تكون غير خالية. إذا كانت لا تقبل أي حل، نقول أنّها غير متسقة أو غير متآلفة.

ا

قضية 2.2

الجملة الخطية $AX=b$ متسقة إذا وفقط إذا كانت المصفوفتان A و $[A|b]$ لهما المرتبة نفسها.

تطبيق 1.2. برهن أنّ الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1\\ -2x + 3y - 2z = -1\\ x - 3y + 7z = 2\end{cases}$$

غير متسقة.

برهان. **أولا نحسب مرتبة المصفوفة الموسعة** $[A|b]$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & -2 & -1\\ 1 & -3 & 7 & 3\end{array}\right].$$

نقوم باختزال المصفوفة الموسعة $[A|b]$ إلى الشكل المدرّج:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & -2 & -1\\ 1 & -3 & 7 & 3\end{array}\right]\xrightarrow[L_3-L_1]{L_2+2L_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 4 & 2\end{array}\right]\xrightarrow[L_3-L_1]{L_2+2L_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

نلاحظ أنّ المصفوفة الموسعة $[A|b]$ مكافئة بالأسطر للمصفوفة المدرّجة

$$E=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

إذ أنّ المصفوفة المدرّجة E تملك ثلاثة عناصر محورية، فإنّ $rg(E)=3$. ولمّا كانت المصفوفة $(A|b)$ مكافئة بالأسطر لمصفوفة E، فإنّنا نستنتج أنّ: $rg(A|b)=rg(E)=3$. كذلك نلاحظ أن مصفوفة المعاملات A مكافئة بالأسطر للمصفوفة المدرّجة:

$$D=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

التي تملك عنصرين محوريين، وعليه نستنتج أنّ $rg(A)=rg(D)=2$. في الأخير، توصلنا إلى إثبات أنّ $rg(A|b)\neq rg(A)$، ومن ثمّ، فإنّنا نستنتج أنّ الجملة (S) غير متسقة. □

قضية 2.3

إذا كانت $(S): AX=b$ جملة خطية ذات n متغيرا، فإن القضايا التالية صحيحة:

1. الجملة (S) تقبل حلا وحيدا إذا و فقط إذا كان $rg(A)=rg(A|b)=n$.
2. الجملة (S) تقبل ما لانهاية من الحلول إذا و فقط إذا كان $rg(A)=rg(A|b)<n$.
3. الجملة (S) لا تقبل أي حل إذا و فقط إذا كان $rg(A)<rg(A|b)$.

♠

تطبيق 1.3. ليكن a وسيط حقيقي، ولتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}.$$

ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي a، ما إذا كانت الجملة الخطية (S) لا تقبل أي حل، أو تقبل حلا وحيدا، أو تقبل عدد غير منته من الحلول.

الحل:
المصفوفة الموسعة للجملة الخطية (S) هي:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & a & 1 \end{array}\right].$$

- **حساب $rg(A|b)$ و $rg(A)$.**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & a-6 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{5L_3-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 5a-15 & -25 \end{array}\right].$$

نلاحظ أنّ المصفوفة الموسعة $[A|b]$ مكافئة بالأسطر للمصفوفة المدرّجة:

$$E=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 5a-15 & -25 \end{array}\right]$$

و أنّ المصفوفة A مكافئة بالأسطر للمصفوفة المدرّجة:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5a-15 \end{bmatrix}.$$

1. إذا كان: $a = 3$ فإنّ: $5a - 15 = 0$، ومن ثمّ، فإنّ المصفوفة E لها ثلاثة عناصر محورية، بينما المصفوفة D لها إثنين، وبذلك يكون لدينا: $rg(A) = rg(D) = 2$، و $rg([A|B]) = rg(E) = 3$. ولمّا كان $rg(A) \neq rg([A|B])$، فإنّ الجملة (S) غير متسقة، وبذلك فهي لا تقبل أي حل.
2. إذا كان: $a \neq 3$ فإنّ: $5a - 15 \neq 0$. وهكذا فإنّ المصفوفتين E و D لهما عدد العناصر المحورية نفسه، أي أنّ: $rg(E) = rg(D) = 3$، وعلى هذا يكون لدينا: $rg(A) = rg([A|B]) = 3$، وبهذا نستنتج أنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.

2 حل الجمل الخطية

2 -1 حل جملة كرامر

قضية 2،4

إذا كانت $(S): AX = b$ جملة كرامر، فإنّها تقبل حلا و حيدا يعطى بالصيغة التالية:

$$X = A^{-1}b, \tag{2.3}$$

أو بالصيغة المكافئة التالية:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}, \quad \forall j = 1,2,\cdots n, \tag{2.4}$$

حيث Δ_j هو محدد المصفوفة المربعة الناتجة عن تعويض العمود j من المصفوفة A بالعمود b المتمثل في الطرف الحر للجملة (S).

ملاحظة 2،5

الصيغة (2،4) تسمى صيغة كرامر.

ملاحظة 2،6

فيما يأتي، نسمي طريقة حل جملة كرامر باستعمال الصيغة (2،3) بطريقة مقلوب المصفوفة، بينما طريقة الحل التي تعتمد على الصيغة (2،4) بطريقة كرامر.

تطبيق 2،1. حل جملة كرامر التالية:

$$(S)\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}.$$

الحل:
الشكل المصفوفي للجملة (S):

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}.$$

نظرا لأنّ:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\times 1 - 2\times 3 = -7 \neq 0$$

فإنّ المصفوفة A قابلة للقلب، ومن ثمّ فإنّ الجملة (S) هي بالفعل جملة كرامر.
لحل هذه الجملة، نتبع الطريقتين الموضحتين أعلاه.

1. **باستعمال طريقة مقلوب المصفوفة:** أولا، نحن بحاجة إلى عبارة A^{-1}. لحساب مقلوب المصفوفة A، نستعمل الصيغة المعطاة في الفصل السابق.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

الآن، ما علينا إلا تطبيق الصيغة (2.3) للحصول على:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= A^{-1}b \\
&= \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 1+3 \\ -2+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-4}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

إذا، الجملة (S) تقبل حلا وحيدا $(x, y) = \left(\frac{-4}{7}, \frac{1}{7}\right)$. وعليه فإنّ مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{-4}{7}, \frac{1}{7}\right)\right\}.$$

2. **باستعمال طريقة كرامر:** بتطبيق صيغة كرامر (2.4)، نحصل على:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{4}{-7} = \frac{-4}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}.$$

تطبيق 2.2. حل جملة كرامر التالية:

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}.$$

الحل:
الشكل المصفوفي للجملة (S) هو:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b}.$$

تحقق الآن من أنّ المصفوفة A قابلية. نحسب $\det A$، وذلك باستعمال النشر وفق السطر الأول، لنتحصل على:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{2} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= +1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= +1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= +1[2\times 1 - 1\times 3] + 1[(-1)\times 1 - 2\times 3] + 2[(-1)\times 1 - 2\times 2] \\
&= [2-3] + [-1-6] + 2[-1-4] \\
&= (-1) + (-7) + 2(-5) \\
&= -18.
\end{aligned}$$

إذا الجملة (S) هي حقا جملة كرامر، نظرا لأنّ محدد مصفوفة المعاملات غير معدوم. الآن، نستطيع حل الجملة (S) إما باستعمال طريقة مقلوب المصفوفة، أو باستعمال طريقة كرامر.

1. **باستعمال طريقة مقلوب المصفوفة:** أولا، نقوم بحساب مقلوب مصفوفة المعاملات A، باستعمال مثلا طريقة المرافقات (كما يمكن استعمال طريقة غوص-جوردن). المرافقات التسع لمصفوفة A هي كالآتي:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

الآن، نستطيع حساب $ComA$ المصفوفة المرافقة للمصفوفة A كمايلي:

$$ComA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{311} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

باستعمال القانون:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(ComA)^T,$$

الذي يسمح بحساب المقلوب، نجد:

$$A^{-1}=\frac{-1}{18}\begin{pmatrix}-1&3&-7\\7&-3&-5\\-5&-3&1\end{pmatrix}.$$

الآن، باستعمال الصيغة (2.3)، ينتج:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{-1}{18}\begin{pmatrix}-1&3&-7\\7&-3&-5\\-5&-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{-1}{18}\begin{pmatrix}-1+0+7\\7+0+5\\-5+0-1\end{pmatrix}=\frac{-1}{18}\begin{pmatrix}6\\12\\-6\end{pmatrix}.$$

إذا، الجملة (S) تقبل حلا وحيدا $(x,y,z)=\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$. وعليه فإنّ مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

2. **باستعمال طريقة كرامر:** بتطبيق الصيغة (2.4)، نجد:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&3\\-1&1&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+1\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-1&2\\2&3\end{vmatrix}}{-18}=\frac{-1+7}{-18}=\frac{-1}{3}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&0&3\\2&-1&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-1\begin{vmatrix}-1&3\\2&1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}}{-18}=\frac{7+5}{-18}=\frac{-2}{3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\2&1&-1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{+1\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}}{-18}=\frac{-5-1}{-18}=\frac{1}{3}.$$

2-2 حل جملة خطية مدرّجة

لتكن $(S): AX=b$ جملة خطية مدرّجة ذات m معادلة و n متغيرا (مجهولا). لحل الجملة S، نميز ثلاث حالات:

1. الحالة: $rg(A)\neq rg(A|b)$. في هذه الحالة الجملة S غير متسقة (غير متآلفة)، ومن ثمّ فهي لا تقبل أي حل.
2. الحالة: $rg(A)=n$. في هذه الحالة الجملة S بالضرورة هي مثلثية، وجميع العناصر القطرية لمصفوفة معاملاتها غير معدومة، بمعنى الجملة (S) لها الشكل التالي:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc}a_{11}x_1&+&a_{12}x_2&+&a_{13}x_3&+&\cdots&+&a_{1n}x_n&=&b_1\\&&a_{22}x_2&+&a_{23}x_3&+&\cdots&+&a_{2n}x_n&=&b_2\\&&&&a_{33}x_3&+&\cdots&+&a_{3n}x_n&=&b_3\\&&&&&&\ddots&&\vdots&&\\&&&&&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&&&&&\ddots\ \vdots&&\\&&&&&&&&a_{nn}x_n&=&b_n\end{array}\right.\qquad(2.5)$$

حيث المعاملات القطرية a_{ii} كلها غير معدومة. واضح تماما أنّ الجملة (S) هي جملة كرامر، ومن ثمّ فيمكننا أن نحلها باستعمال طريقة كرامر التي درسناها سابقا. الآن، نريد أن نقدم طريقة أخري بسيطة و سريعة، تدعى طريقة التعويض الارتجاعي أو الخلفي، التي ترتكز على إيجاد المتغير الأخير x_n من المعادلة الأخيرة، ثم نعوض قيمة هذا المتغير في المعادلة ما قبل الأخيرة لإيجاد المتغير x_{n-1}، ثم نواصل الصعود مع المعادلات و التعويض لإيجاد باقي المتغيرات. لغرض التوضيح أكثر، نعالج المثال التالي:

مثال 2.21. لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -5 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ & & & & 5x_3 & = & -10 \end{array}\right. .$$

الشكل المصفوفي للجملة هو:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}}_{b}.$$

نلاحظ أنّ (S) هي جملة خطية مثلثية جميع معاملاتها القطرية $(a_{11}=1,\ a_{22}=1,\ a_{33}=5)$ غير معدومة، فهي إذا جملة كرامر. لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة التعويض الخلفي:

- من المعادلة 3 من الجملة (S) نستخرج قيمة المتغير $x_3=\frac{-10}{5}=-2$، بتعويض قيمة المتغير x_3 في المعادلة الثانية للجملة، نجد $x_2=-3-x_3=-1$، ثم أخيرا نعوض قيمة كل من x_2 و x_3 في المعادلة الأولى، نجد: $x_1=-5+x_3+x_2=-8$.
- إذا، الجملة (S) تقبل حلا وحيدا: $(x_1,x_2,x_3)=(-8,-1,-2)$.

وعليه فإنّ مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S}=\{(-8,-1,-2)\}.$$

3. **الحالة: $rg(A)=rg([A|b])=r<n$.** في هذه الحالة، الجملة (S) تقبل عدد غير منته من الحلول. لمّا كان $rg(A)=r$، فإنّ الجملة (S) تملك r متغيرا رئيسيا و $n-r$ متغيرا حرا. لحل الجملة (S)، نقوم بنقل المتغيرات الحرة إلى الطرف الثاني للجملة، وهكذا نتحصل على جملة خطية مثلثية (S') متغيراتها تمثل المتغيرات الرئيسية للجملة (S)، وبعد ذلك نقوم بحل الجملة (S') باستعمال طريقة التعويض الخلفي. طبعا، في هذه الحالة نجد الحلول تتعلق حتما بالمتغيرات الحرة. لتوضيح أكثر، ندرس المثالين التاليين:

مثال 2.22. حل الجملة الخطية المدرّجة التالية:

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ & 2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ & & & -x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

الحل:
المصفوفة الموسعة لهذه الجملة هي كالآتي:

$$[A|b]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \end{array}.$$

من المصفوفة الموسعة أعلاه، يتضح أنّ: $rg(A)=rg([A|B])=r=3<n=4$ حيث أنّ: $n=4$ يشير إلى عدد متغيرات (مجاهيل) الجملة (S). كما يتضح أيضا أنّ كل متغيرات الجملة (S) هي متغيرات رئيسية باستثناء المتغير x_3 (كل معاملاته عناصر غير محورية). إذا المتغير x_3 هو متغير حرا. لحل الجملة (S) نقوم بنقل المتغير الحر إلى الطرف الثاني للجملة (S)، لنتحصل على الجملة التالية:

$$(S')\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_4 & = & 1-\alpha \\ & 2x_2 & +3x_4 & = & -1-2\alpha \\ & & -x_4 & = & 2 \end{cases}$$

حيث أنّ الوسيط α يمثل المتغير الحر x_3. واضح جليا أنّ الجملة (S') هي جملة مثلثية كل معاملاتها القطرية غير معدومة. إذا الجملة (S') هي جملة كرامر. لحساب الحل الوحيد للجملة (S') ستعمل طريقة التعويض الخلفي.

من المعادلة الأخيرة من الجملة (S') نستخرج قيمة المتغير $x_4=-2$، ثم بالقيام بالتعويض الخلفي نجد:

$$\begin{cases} x_4=-2, \\ x_2=-1-\alpha-3x_4=-1-\alpha+6=5-\alpha, \\ x_1=1-\alpha+2x_2-2x_4=1-\alpha-2(5-\alpha)+4=-5+\alpha. \end{cases}$$

إذا مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S}=\{(-5+\alpha,5-\alpha,\alpha,-2),\qquad \alpha\in\mathbb{R}\}.$$

حلول الجملة (S) تتعلق بالوسيط $x_3=\alpha$، كلما أخترنا قيمة للوسيط α نتحصل على حل للجملة (S). كون الوسيط α يمسح كل مجموعة الأعداد الحقيقية، فالجملة (S) تقبل عدد لا منته من الحلول.

مثال 2.23. حل الجملة الخطية المدرّجة التالية:

$$(S)\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 3 \\ & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -2 \\ & & x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ & & & & -2x_5 & = & 2 \end{cases}.$$

الحل:

المصفوفة الموسعة لهذه الجملة هي كالآتي:

$$[A|b]=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

من المصفوفة الموسعة أعلاه، واضح أن: $rg(A) = rg([A|B]) = r = 4 < n$ حيث $n = 5$ يشير إلى عدد متغيرات (مجاهيل) الجملة (S). كما يتضح أيضا أنّ كل متغيرات الجملة (S) هي متغيرات رئيسية باستثناء المتغير x_4 (كل معاملاته هي عناصر غير محورية). إذا المتغير x_4 هو متغير حر. لحل الجملة (S)، نقوم بنقل المتغير الحر إلى الطرف الثاني للجملة (S)، لنتحصل على الجملة التالية:

$$(S')\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_5 & = & 3-\alpha \\ & -2x_2 & -x_3 & -x_5 & = & -2-\alpha \\ & & x_3 & +x_5 & = & \alpha \\ & & & -2x_5 & = & 2 \end{cases}$$

حيث الوسيط α يمثل المتغير الحر x_4. واضح جليا أنّ الجملة (S') هي جملة مثلثية كل معاملاتها القطرية غير معدومة. إذا الجملة (S') هي جملة كرامر. لحساب الحل الوحيد للجملة (S') نستعمل طريقة التعويض الخلفي.

من المعادلة الأخيرة من الجملة (S') نستخرج قيمة المتغير $x_5 = -1$.

- بتعويض قيمة x_5 في المعادلة 3 نحصل على:

$$x_3 = \alpha - x_5 = \alpha + 1.$$

- بتعويض قيمة كل من x_5 و x_3 في المعادلة 2 نحصل على:

$$\begin{aligned} -2x_2 &= -2-\alpha+x_3+x_5 \\ &= -2-\alpha+\alpha+1-1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

ومن هذا نجد: $x_2 = 1$.

- بتعويض قيمة كل من x_5، x_3 و x_2 في المعادلة 1 نحصل على:

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 3-\alpha+x_2-2x_3-x_5 \\ &= 3-\alpha+1-2(\alpha+1)+1 \\ &= 3-3\alpha. \end{aligned}$$

ومن هذا نجد: $x_1 = 1-\alpha$.

إذا مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S} = \{(1-\alpha, 1, 1+\alpha, \alpha, -5), \qquad \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

حلول الجملة (S) تتعلق بالوسيط $\alpha = x_4$، كلما أخترنا قيمة للوسيط α نحصل على حل للجملة (S). إذ أنّ الوسيط α يمسح كل مجموعة الأعداد الحقيقية، فالجملة (S) تقبل عدد لا منته من الحلول.

2 -3 حل الجمل الخطية باستعمال طريقة حذف غوص

طريقة حذف غوص لحل جملة خطية، تتمثل في تحويل الجملة إلى الشكل المدرّج المكافئ، وذلك بإجراء عمليات أولية على أسطر المصفوفة الموسعة للجملة، ثم حل الجملة المدرّجة المتحصل عليها باستعمال الطريقة التي وضحناها سابقا. للتوضيح أكثر، نقترح بعض الأمثلة.

مثال 2.24. في المثال (2.2) برهنا أنّ الجملة الخطية

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا $(x,y,z)=\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$، وذلك باستعمال طريقة كرامر. نود الآن أن نحلها باستخدام طريقة حذف غوص. أولا، نأتي بالمصفوفة الموسعة للجملة (S):

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

ثانيا، نختزل المصفوفة الموسعة $[A|b]$ إلى الشكل المدرّج، وذلك بالقيام بالعمليات الأولية على أسطر المصفوفة $[A|b]$، لنتحصل على:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -6 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) مكافئة للجملة المدرّجة التالية:

$$(S')\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad\ \ y + 5z = 1 \\ \quad\ \ - 18z = -6 \end{cases}.$$

واضح أنّ (S') هي جملة مثلثية كل معاملاتها القطرية غير معدومة. إذا الجملة (S') هي جملة كرامر. لحساب الحل الوحيد لهذه الجملة، نلجأ إلى طريقة التعويض الخلفي.

- من المعادلة الأخيرة، نجد أنّ: $z=\frac{-6}{-18}=\frac{1}{3}$.
- بتعويض قيمة z في المعادلة الثانية، نتحصل على $y=1-5z=1-\frac{5}{3}=\frac{-2}{3}$.
- بتعويض قيم كل من z و y في المعادلة الأولى للجملة (S')، نجد أنّ: $x=1+y-2z=1-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{3}$.

إذ أنّ الجملتين (S) و (S') متكافئتين، فهما إذا يملكان نفس مجموعة الحلول، ومن ثمّ فإنّ مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

مثال 2.25. حل الجملة الخطية التالية

$$(S)\begin{cases} 2x - y + 5z = -3 \\ x - y + 3z = -2 \\ -x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$$

باستعمال طريقة حذف غوص.

الحل:

المصفوفة الموسعة للجملة (S) هي:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right].$$

نقوم باختزال المصفوفة الموسعة $[A|b]$ إلى الشكل المدرّج، وذلك بالقيام بالعمليات الأولية على أسطر المصفوفة $[A|b]$، لنتحصل على:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[2L_3+L_1]{-2L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) مكافئة للجملة المدرّجة التالية:

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 5z & = & -3 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

نلاحظ أنّ x و y متغيرين رئيسيين، بينما z هو متغير حر. إذا لحل الجملة (S')، نقوم بنقل المتغير الحر إلى طرفها الثاني، لنتحصل على الجملة:

$$(S'')\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & -3-5\alpha \\ & & y & = & 1+\alpha \end{array}\right.$$

حيث الوسيط α يمثل المتغير الحر z. نلاحظ أنّ الجملة (S'') هي جملة مثلثية كل معاملاتها القطرية غير معدومة. إذا فهي جملة كرامر. لحساب حلها الوحيد، نستعمل طريقة التعويض الخلفي.

- من المعادلة الأخيرة، نجد أنّ: $y = 1+\alpha$.
- بتعويض قيمة y في المعادلة الأولى، نحصل على:

$$\begin{aligned} 2x &= -3-5\alpha+y \\ &= -3-5\alpha+1+\alpha \\ &= -2-4\alpha \end{aligned}$$

ومن ثمّ نجد أنّ: $x = -1-2\alpha$.

إذا مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S} = \{(-1-2\alpha, 1+\alpha, \alpha); \quad \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

حلول الجملة (S) تتعلق بالوسيط α، كلما أخترنا قيمة للوسيط α، نحصل على حل للجملة (S). إذ أنّ الوسيط α يمسح كل مجموعة الأعداد الحقيقية، فالجملة (S) تقبل عدد لا منته من الحلول.

مثال 2.26. حل باستعمال طريقة حذف غوص الجملة الخطية التالية:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$

الحل:
المصفوفة الموسعة للجملة (S) هي:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

نقوم باختزال المصفوفة الموسعة $[A|b]$ إلى الشكل المدرّج، وذلك بالقيام بالعمليات الأولية على أسطرها:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-3L_3+L_1]{3L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-4L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) مكافئة للجملة المدرّجة التالية:

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 5 \\ & & & & 0z & = & -21 \end{array}\right. .$$

نلاحظ أنّ المعادلة 3 من الجملة (S') مستحيلة، وبذلك الجملة (S') لا تقبل حلول. لمّا كانت الجملتين (S) و (S') متكافئتين، فإنّ الجملة (S) كذلك لا تقبل حلول.

مثال 2.27. حل بطريقة حذف غوص الجملة الخطية:

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 1 \end{array}\right. .$$

الحل:
المصفوفة الموسعة للجملة (S) هي:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

نقوم باختزال المصفوفة الموسعة $[A|b]$ إلى الشكل المدرّج، وذلك بالقيام بالعمليات الأولية على أسطرها:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{L_2-L_1} \\ \xrightarrow{L_3+L_1} \\ \xrightarrow{L_3-3L_1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3L_4+5L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) مكافئة للجملة المدرّجة التالية:

$$(S')\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad\;\; y + 2z = 3 \\ \qquad\quad 3z = 3 \end{cases}.$$

نلاحظ أنّ (S') هي جملة مثلثية كل معاملاتها القطرية غير معدومة، فهي إذا جملة كرامر. لحساب الحل الوحيد لهذه الجملة، نستعمل طريقة التعويض الخلفي.

- من المعادلة الأخيرة، نجد أنّ: $z = 3$.
- بتعويض قيمة z في المعادلة الثانية، نحصل على: $y = 3 - 2z = 3 - 2 = 1$.
- بتعويض قيم كل من z و y في المعادلة الأولى للجملة (S')، نجد أنّ: $x = 3 - y - z = 3 - 1 - 1 = 1$.

إذ أنّ الجملتين (S) و (S') متكافئتين، فهما إذا يملكان نفس مجموعة الحلول، ومن ثمّ فإنّ مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\mathscr{S} = \{(1, 1, 1)\}.$$

3 تمارين

تمرين 2.1

لتكن الجملة الخطية:

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}.$$

1. برهن أنّ الجملة (S) هي جملة كرامر.
2. حل الجملة (S) باستعمال مقلوب المصفوفة.
3. حل الجملة الخطية (S) باستعمال طريقة كرامر.

تمرين 2.2

لتكن الجملة الخطية:

$$(S)\begin{cases} -2x_1 + x_2 + -2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

1. برهن أنّ الجملة (S) هي جملة كرامر.
2. حل الجملة (S) باستعمال مقلوب المصفوفة.
3. حل الجملة الخطية (S) باستعمال طريقة كرامر.

تمرين 2.3

ماهو الشرط على الأعداد الحقيقية a، b و c، التي من أجلها تكون الجملة الخطية

$$(S)\begin{cases} x + y + 3z = a \\ -2x + 3y + 4z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$$

متسقة؟ عندئذ أعط حلول الجملة (S).

تمرين 2.4

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S):\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. بدلالة قيم الوسيط a، حدد ما إذا كانت الجملة (S):
   - (ا). لا تقبل أي حل،
   - (ب). تقبل حلا وحيدا،
   - (ج). تقبل عدد غير منته من الحلول.
2. حل الجملة (S) حينما تقبل حلا على الأقل.

تمرين 2.5

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S):\begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{cases}$$

حيث a، b و c أعداد حقيقية.

1. ماهو الشرط على a، b و c بحيث الجملة (S) تقبل حلا على الأقل؟
2. هل يمكن للجملة (S) أن تقبل حلا وحيدا؟

تمرين 2.6

حل حسب قيم الوسيط الحقيقي k، الجملة الخطية التالية:

$$(S):\begin{cases} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 3x & - & 5y & + & 13z & = & 18 \\ x & - & y & + & 5z & = & k \end{cases}.$$

تمرين 2.7

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$(S):\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & 13z & = & 3 \\ x & + & y & + & (k^2-5)z & = & k \end{cases}$$

حيث k وسيط حقيقي.

1. ماهي قيم k التي من أجلها الجملة الخطية (S) تقبل حلا وحيدا؟
2. ماهي قيم k التي من أجلها الجملة الخطية (S) تقبل عدد غير منته من الحلول؟
3. ماهي قيم k التي من أجلها الجملة الخطية (S) غير متسقة؟

تمرين 2.8

حل الجملة الخطية التالية

$$(S):\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & -4 \\ 2x & + & 5y & - & 10z & = & -1 \end{cases}$$

باستعمال طريقة كرامر، ثم باستعمال طريقة حذف غوص.

تمرين 2.9

حل الجملتين الخطيتين التاليتين:

$$(S_1)\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{cases}$$

باستعمال طريقة كرامر، ثم باستعمال طريقة حذف غوص.

تمرين 2.10

حل بطريقة حذف غوص الجملة الخطية:

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right. .$$

تمرين 2.11

حل الجملتين الخطيتين التاليتين:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_2):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

تمرين 2.12

حل بطريقة حذف غوص الجملتين الخطيتين التاليتين:

$$(S_1):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 3z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_2):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

تمرين 2.13

حل بطريقة حذف غوص الجملتين الخطيتين التاليتين:

$$(S_1):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 3z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_2):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

تمرين 2.14

حل بطريقة حذف غوص الجملتين الخطيتين التاليتين:

$$(S_1):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 8x & + & 2y & - & 2z & = & 9 \end{array}\right. \qquad (S_2):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 7z & = & -4 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ 7x & + & 4y & - & z & = & 22 \end{array}\right. .$$

تمرين 2.15

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m، حلول الجملة الخطية التالية:

$$(S_m):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

3 الفضاءات الشعاعية

1 مفاهيم أولية

تعريف 3.1. نسمي فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$ كل مجموعة غير خالية E مزودة بالعمليتين التاليتين:

$$\begin{aligned} E\times E &\longrightarrow E \\ (x,y) &\longmapsto x+y, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times E &\longrightarrow E \\ (\alpha,x) &\longmapsto \alpha.x=\alpha x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

1. العملية الأولى داخلية(تسمى عملية الجمع) تحقق الشروط التالية:
   (أ). عملية الجمع تبديلية: $\forall x,y\in E,\quad x+y=y+x$.
   (ب). عملية الجمع تجميعية: $\forall x,y,z\in E,\quad (x+y)+z=x+(y+z)$.
   (ج). عملية الجمع تقبل عنصرا حياديا:
   $$\exists 0_E\in E;\quad x+0_E=x.$$
   (د). لكل عنصر من E نظيرا بالنسبة إلى عملية الجمع:
   $$\forall x\in E,\, \exists x'\in E;\quad x+x'=0_E.$$
2. العملية الثانية خارجية(تسمى عملية الجداء) تحقق الشروط التالية:
   (أ).
   $$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\, \forall x\in E;\qquad \begin{cases} \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x, \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x+\beta x \end{cases}.$$
   (ب). $\forall \alpha\in\mathbb{R},\, \forall x,y\in E\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.
   (ج). $\forall x\in E,\quad 1x=x$

ملاحظة 3.1

عناصر المجموعة E تسمى أشعة، و عناصر المجموعة $\mathbb{R}$ تسمى سلميات. ♣

ملاحظة 3.2

في حالة عدم الالتباس، نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة للفضاء الشعاعي E بالرمز 0 بدلا من 0_E. ♣

ملاحظة 3.3

من الآن و صاعدا نستعمل التعبير " $(E,+,\cdot)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$" لإشارة إلى أن المجموعة E مزودة بالعملية الداخلية $(+)$ و العملية الخارجية $(\cdot)$، تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. ♣

مثال 3.1. يمكن التحقق ببساطة أنّ مجموعة الأعداد الحقيقية $E = \mathbb{R}$ مزودة بعمليتي الجمع و الجداء المألوفتين تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$.

مثال 3.2. تحقق أن المجموعة E المعرفة بـ:

$$E = \mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2); \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

مزودة بالعمليتين:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \tag{3.3}$$

$$\alpha(x_1, x_2) := (\alpha x_1, \alpha x_2,), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$.

الحل:

1. أولا نتحقق من شروط عملية الجمع:

(ا). ليكن $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}^2$. لمّا كان جمع الأعداد الحقيقية هي عملية تبديلية، فإنّنا نستنتج أنّ:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 &= y_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 &= y_2 + x_2 \end{cases}.$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

إذا عملية الجمع في $\mathbb{R}^2$ تبديلية.

(ب). ليكن $x = (x_1, x_2)$، $y = (y_1, y_2)$ و $z = (z_1, z_2)$ ثلاثة عناصر من المجموعة $\mathbb{R}^2$. لمّا كان جمع الأعداد الحقيقية عملية تجميعية، فإنّه ينتج أنّ:

$$\begin{cases} (x_1 + y_1) + z_1 &= x_1 + (y_1 + z_1) \\ (x_2 + y_2) + z_2 &= x_2 + (y_2 + z_2) \end{cases}.$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2\big) + (z_1, z_2) \\ &= \big((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2\big) \\ &= \big(x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)\big) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= x + (y + z). \end{aligned}$$

إذا عملية الجمع في $\mathbb{R}^2$ تجميعية.

(ج). ليكن $x=(x_1,x_2)$ عنصرا من المجموعة $\mathbb{R}^2$.
لمّا كان 0 عنصرا حياديا بالنسبة للجمع في مجموعة الأعداد الحقيقية، وجب أن يكون: $x+0=x$. وعليه فإنّه يوجد $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$ عنصر من المجموعة $\mathbb{R}^2$ بحيث:

$$\begin{aligned} x+0_{\mathbb{R}^2} &= \left(x_1+0,x_2+0\right) \\ &= \left(x_1,x_2\right)=x. \end{aligned}$$

إذا $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$ عنصرا حياديا بالنسبة للجمع في المجموعة $\mathbb{R}^2$.

(د). إذا كان $x=(x_1,x_2)$ عنصرا من المجموعة $\mathbb{R}^2$. فإنّه يوجد $x'=(-x_1,-x_2)$ عنصرا من المجموعة $\mathbb{R}^2$ بحيث:

$$\begin{aligned} x+x' &= (x_1,x_2)+(-x_1,-x_2) \\ &= \left(x_1-x_1,x_2-x_2\right) \\ &= (0,0)=0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

إذا لكل عنصر من المجموعة $\mathbb{R}^2$ عنصرا نظيرا بالنسبة لعملية الجمع في المجموعة $\mathbb{R}^2$.

2. ثانيا نتحقق من شروط عملية الجداء:

(ا). ليكن $x=(x_1,x_2)$ عنصرا من المجموعة $\mathbb{R}^2$، و ليكن العددين الحقيقيين α و β.
لمّا كان الجداء في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تجميعي، فإنّنا نستنتج أنّ:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha\left(\beta x_1\right) &=& \left(\alpha\beta\right)x_1 \\ \alpha\left(\beta x_2\right) &=& \left(\alpha\beta\right)x_2 \end{array}\right. .$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} \alpha\left(\beta x\right) &= \alpha\left(\beta x_1,\beta x_2\right) \\ &= \left(\alpha\left(\beta x_1\right),\alpha\left(\beta x_2\right)\right) \\ &= \left(\left(\alpha\beta\right)x_1,\left(\alpha\beta\right)x_2\right) \\ &= \left(\alpha\beta\right)(x_1,x_2) \\ &= \left(\alpha\beta\right)x. \end{aligned}$$

لمّا كان الجداء في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ توزيعي على الجمع، أستنتجنا أنّ:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left(\alpha+\beta\right)x_1 &=& \alpha x_1+\beta x_1 \\ \left(\alpha+\beta\right)x_2 &=& \alpha x_1+\beta x_2 \end{array}\right. .$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} \left(\alpha+\beta\right)x &= \left(\left(\alpha+\beta\right)x_1,\left(\alpha+\beta\right)x_2\right) \\ &= \left(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2\right) \\ &= \left(\alpha x_1,\alpha x_2\right)+\left(\beta x_1,\beta x_2\right) \\ &= \alpha x+\beta x. \end{aligned}$$

(ب). ليكن $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}^2$، وليكن العدد الحقيقي α. لمّا كان الجداء في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ توزيعي على الجمع، فإنّ نستنتج أنّ

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha(x_1+y_1) &=& \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \alpha(x_2+y_2) &=& \alpha x_2+\alpha y_2 \end{array}\right. .$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned}\alpha(x+y) &= \alpha\big(x_1+y_1, x_2+y_2\big)\\ &= \big(\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2)\big)\\ &= \big(\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2\big)\\ &= \big(\alpha x_1, \alpha x_2\big)+\big(\alpha y_1, \alpha y_2\big)\\ &= \alpha x+\alpha y.\end{aligned}$$

(ج). ليكن $x=(x_1,x_2)$ عنصرا من المجموعة $\mathbb{R}^2$.

لمّا كان 1 عنصرا حياديا بالنسبة إلى الجداء في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وجب أن يكون

$$\begin{cases} 1x_1 &= x_1\\ 1x_2 &= x_2\end{cases}.$$

وعليه فإنّ

$$1x=(1x_1,1x_2)=(x_1,x_2)=x.$$

مثال 3.3. بالطريقة نفسها يمكننا التحقق، من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$، أنّ المجموعة

$$E=\mathbb{R}^n=\{x=\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big);\quad x_i\in\mathbb{R},\quad \forall i=1,2,\cdots,n\},$$

مزودة بالعملتين:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(x_1,x_2,\cdots,x_n):=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n). \tag{3.5}$$

$$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n):=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}. \tag{3.6}$$

هي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$. نود أن نشير أن العنصر الحيادي للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ هو العنصر $0_{\mathbb{R}^n}=(0,0,\cdots,0)$.
وعليه فإنّ نظير العنصر $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}^n$ هو العنصر:

$$-x=(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n).$$

مثال 3.4. لتكن E مجموعة المصفوفات من البعد 3×2، مزودة بالعمليتين:

$$\begin{aligned}A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\alpha A &= \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23}\end{pmatrix},\qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

- تحقق أنّ $(E,+,\cdot)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

الحل:

لقد رأينا في الفصل الأول أنّ جمع المصفوفات هي عملية تبديلية، وتجميعية، وبهذا فإنّ الخاصيتين 1-أ) و 1-ب) محققتين. فيما يخص الخاصية 1-ج)، فهي محققة من أجل $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. نظير العنصر $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ هو العنصر $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$. إذا الخاصية 1-د) محققة. كما يمكننا التحقق بسهولة من صحة الخواص 2-أ)، 2-ب) و 2-ج).

ملاحظة 3.4

بصفة عامة المجموعة $E = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ التي عناصرها المصفوفات من البعد $m \times n$ ذات المعاملات الحقيقية، المزودة بعملية الجمع المصفوفي (3.7) و عملية الضرب بسلمية (3.8) تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. ♣

مثال 3.5. لتكن المجموعة $E = \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ المشكلة من الدوال المعرفة على المجال I و تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية. إذا زودنا E بالعمليتين:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \forall x \in I, \tag{3.9}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad \forall x \in I, \tag{3.10}$$

فإنّ E يشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو الدالة المعدومة المعرفة بـ:

$$0_E(x) = 0, \qquad \forall x \in I.$$

نظير العنصر f من E هو الدالة $-f$ المعرفة بـ:

$$(-f)(x) = -f(x), \qquad \forall x \in I.$$

قضية 3.1

إذا كان E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّ عملية الجمع في المجموعة E تقبل عنصرا حياديا وحيدا. ♠

برهان. نفرض أنّ عملية الجمع في E تقبل عنصرين حياديين 0_E و $0'_E$. عندئذ يكون لدينا:

$$0'_E + 0_E = 0'_E. \tag{3.11}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$0_E + 0'_E = 0_E. \tag{3.12}$$

من (3.11) و (3.12) نستنتج أنّ: $0'_E = 0_E$. □

قضية 3.2

إذا كان E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّ لكل عنصر من E نظيرا وحيدا. ♠

برهان. بالفعل، لو فرضنا أنّ العنصر x من E يملك نظيرين، بمعنى:

$$\exists x' \in E, \exists x'' \in E; \quad x + x' = 0_E = x + x''.$$

و منه

$$x'' + (x + x') = x'' + (x + x'').$$

باستعمال الخاصية التجميعية لعملية الجمع في E، ينتج:

$$(x'' + x) + x' = (x'' + x) + x''.$$

من ثمّ نجد أنّ

$$0_E + x' = 0_E + x''.$$

و هذا يؤدي باستعمال الخاصية 1-ج)، إلى $x' = x''$. □

ملاحظة 3.5

من الآن و صاعدا، نرمز إلى نظير العنصر x من الفضاء الشعاعي E بـ $-x$. ♣

ملاحظة 3.6

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. إذا كان x و y شعاعين من E، فإنّه يمكن تعريف فرق الشعاعين x و y بـ:

$$x - y = x + (-y).$$

حيث $-y$ يمثل نظير الشعاع y. ♣

قضية 3.3

إذا كان E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّ:

$$0x = 0_E; \qquad \forall x \in E.$$

♠

برهان. ليكن $x \in E$ و ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$. باستعمال الخاصية 2-أ)، نجد:

$$(0 + \alpha)x = 0x + \alpha x. \tag{3.13}$$

لمّا كان 0 عنصرا حياديا بالنسبة للجمع في مجموعة الأعداد الحقيقية، وجب أن يكون

$$(0 + \alpha) = \alpha. \tag{3.14}$$

من (3.13) و (3.14) نستنتج أنّ:

$$\alpha x = 0x + \alpha x. \tag{3.15}$$

نضيف إلى طرفي المساواة (3.14) نظير العنصر αx بالنسبة لعملية الجمع في E، نجد:

$$0_E = 0x + 0_E. \tag{3.16}$$

من ثمّ، باستخدام الخاصية 1-د)، ينتج: $0x = 0_E$. □

قضية 3،4

إذا كان E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّه من أجل كل شعاع x، ومن أجل كل سلمية α، يكون لدينا:

1. $\alpha \cdot 0_E = 0_E$.
2. $(-\alpha)x = -(\alpha \cdot x) = \alpha(-x)$.
3. إذا كان $\alpha x = 0_E$، فحتما $\alpha = 0$، أو $x = 0_E$.

♠

برهان. ليكن $x \in E$، و ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. باستعمال الخاصية 2-ب)، ينتج:

$$\alpha(0_E + 0_E) = \alpha \cdot 0_E + \alpha \cdot 0_E. \tag{3.17}$$

باستعمال الخاصية 1-ج)، ينتج:

$$0_E + 0_E = 0_E. \tag{3.18}$$

من (3،17) و (3،18) نستنتج أنّ

$$\alpha \cdot 0_E = \alpha \cdot 0_E + \alpha \cdot 0_E.$$

بإضافة إلى طرفي المساواة السابقة نظير العنصر $\alpha \cdot 0_E$، و باستعمال خاصية العنصر الحيادي 1-ج)، نحصل على $\alpha \cdot 0_E = 0_E$.

2. باستعمال الخاصية 2-أ)، ينتج:

$$\big(\alpha + (-\alpha)\big)x = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x.$$

باستعمال القضية 3،3 ينتج:

$$0_E = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x.$$

إذا العنصر $(-\alpha) \cdot x$ هو نظير العنصر $\alpha \cdot x$ بالنسبة لعملية الجمع في E، ولمّا كان كل عنصر من E يقبل عنصرا نظيرا و حيدا، فإنّه يجب أن يكون: $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.
باستعمال الخاصية 2-ب)، ينتج:

$$\alpha\big(x + (-x)\big) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x).$$

كون $x + (-x) = 0_E$، فإنّه ينتج، باستعمال الخاصية 1 من القضية 3،4:

$$0_E = \alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x).$$

إذا العنصر $\alpha \cdot (-x)$ هو نظير العنصر $\alpha \cdot x$ بالنسبة لعملية الجمع في E، ولمّا كان كل عنصر من E يقبل عنصرا نظيرا و حيدا، وجب أن يكون: $\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$.

3. نفرض أنّ $\alpha x = 0_E$ و $\alpha \neq 0$. عندئذ ينتج:

$$\frac{1}{\alpha}\big(\alpha x\big) = 0_E.$$

وعليه، باستعمال الخاصية 2-أ)، فإنّ:

$$1 \cdot x = 0_E. \tag{3.19}$$

وهذا يؤدي، باستعمال الخاصية 2-ج)، إلى $x = 0_E$.

□

2 الفضاءات الشعاعية الجزئية

تعريف 3.2. ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، و لتكن F مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة E. نقول عن F أنه فضاء شعاعي جزئي من الفضاء E، إذا كان $(F,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$.

القضية التالية تعطي تميزا للفضاء الشعاعي الجزئي.

قضية 3.5

ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، لتكن F مجموعة جزئية من المجموعة E. يكون F فضاءا شعاعيا جزئيا من E إذا وفقط إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$0_E \in F, \tag{3.20}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in F; \quad \alpha x + \beta y \in F. \tag{3.21}$$

برهان. 1. نفرض أنّ F فضاء شعاعي جزئي من E، و نبرهن على صحة الخاصيتين (3.20) و (3.21).
لمّا كانت F مجموعة غير خالية، وجب أن تحوي على الأقل عنصر و ليكن x_0. كون $(F,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّ $0\cdot x_0 \in F$. استنادا إلى القضية 3.3 فإنّ: $0\cdot x_0 = 0_E$. وعليه فإنّ $0_E \in F$.
ليكن α و β عددين حقيقيين، و ليكن x و y عنصرين من F. كون $(F,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّ $\alpha x \in F$ و $\beta x \in F$. وعليه، استنادا لكون الجمع عمليه داخلية في المجموعة F، فإنّ $\alpha x + \beta y \in F$.

2. نفرض أنّ الشرطين (3.20) و (3.21) محققين و نبرهن أنّ $(F,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$.
كون $(E,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$ و $F\subset E$ فإنّه، اعتمادا على الخاصية (3.21)، فإنّ العمليتين التاليتين

$$\begin{aligned} &F\times F \longrightarrow F\\ &(x,y)\mapsto x+y, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}\times F \longrightarrow F\\ &(\alpha,x)\mapsto \alpha.x=\alpha x \end{aligned} \tag{3.23}$$

معرفتين جيدا. إذ أنّ $F\subset E$ و $0_E\in F$، فإنّ خواص العمليتين الداخلية و الخارجية تبقى محققة على المجموعة الجزئية F. إذا $(F,+,\cdot)$ فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$.

□

مثال 3.6. لقد بينا في المثال (3.2) أنّ المجموعة:

$$E=\mathbb{R}^2=\{x=(x_1,x_2);\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

مزودة بالعمليتين (3.3) و (3.4) تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. الآن نود أن نبرهن أنّ المجموعتين:

$$\begin{aligned} F &= \{x = (x_1, 0); \quad x_1 \in \mathbb{R}\}, \\ G &= \{x = (0, x_2); \quad x_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

هما فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء $E = \mathbb{R}^2$.

الحل:

1. واضح جليا أن:

$$0_E = (0,0) \in F. \tag{3.24}$$

2. ليكن α و β عددين حقيقيين، و ليكن $x = (x_1, 0)$ و $y = (y_1, 0)$ عنصرين من F. عندئذ لدينا:

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(x_1, 0) + \beta(y_1, 0) \\ &= \left(\alpha x_1, 0\right) + \left(\beta y_1, 0\right) \\ &= \big(\underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1}_{=t\in\mathbb{R}}, 0\big) \in F. \end{aligned} \tag{3.25}$$

من (3.24) و (3.25) نستنتج أنّ F فضاء شعاعي جزئي من E.

بالطريقة نفسها نستطيع أن نبرهن أنّ G فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 3.7. برهن أنّ المجموعتين المعرفتين بـ:

$$\begin{aligned} F &= \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 + x_3 = x_4\right\}, \\ G &= \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& x_3 \\ x_2 &=& x_4 \end{array}\right.\right\}, \end{aligned}$$

هما فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^4$.

الحل:

1. أولا نبرهن أنّ F فضاء شعاعي جزئي من E.
   (ا). واضح جليا أنّ: $0_E = (0,0,0,0) \in F$.
   (ب). ليكن α و β عددين حقيقيين، و ليكن $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ و $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ عنصرين من F. عندئذ من جهة لدينا:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_3 &=& x_4 \\ y_1 + y_3 &=& y_4 \end{array}\right. \tag{3.26}$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) + \left(\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3, \beta y_4\right) \\ &= \left(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4\right) \\ &= (z_1, z_2, z_3, z_4). \end{aligned} \tag{3.27}$$

باستناد على (3.26)، ينتج:

$$\begin{aligned} z_1+z_3 &= (\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_3+\beta y_3) \\ &= \alpha(x_1+x_3)+\beta(y_1+y_3) \\ &= \alpha x_4+\beta y_4 \\ &= z_4. \end{aligned} \tag{3.28}$$

من (3.27) و (3.28) نستنتج أنّ $\alpha x+\beta y\in F$.

2. ثانيا نبرهن أنّ G فضاء شعاعي جزئي من E.
   (ا). واضح جليا أنّ: $0_E=(0,0,0,0)\in G$
   (ب). ليكن α و β عددين حقيقيين، و ليكن $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ و $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ عنصرين من G. عندئذ من جهة لدينا:

$$\begin{cases} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= x_4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_1 &= y_3 \\ y_2 &= y_4 \end{cases}, \tag{3.29}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} \alpha x+\beta y &= \alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta(y_1,y_2,y_3,y_4) \\ &= (\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3,\beta y_4) \\ &= (\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4) \\ &= (z_1,z_2,z_3,z_4). \end{aligned} \tag{3.30}$$

باستناد على (3.29)، ينتج:

$$\begin{cases} z_1=\alpha x_1+\beta y_1=\alpha x_3+\beta y_3=z_3 \\ z_2=\alpha x_2+\beta y_2=\alpha x_4+\beta y_4=z_4 \end{cases}. \tag{3.31}$$

من (3.30) و (3.31) نستنتج أنّ $\alpha x+\beta y\in G$.

مثال 3.8. المجموعة التالية:

$$F=\{x=(x_1,x_2);\quad x_1+x_2=1\}$$

ليست فضاءا شعاعيا جزئيا من $E=\mathbb{R}^2$، لعدم احتوائها على العنصر الحيادي $0_E=(0,0)$.

مثال 3.9. لتكن المجموعة

$$E=\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

المشكلة من المصفوفات المربعة من الدرجة 2، التي معاملاتها أعداد حقيقية.
كما في المثال (3.4) يمكننا أن نبرهن أنّ E مزودة بعملية الجمع المصفوفي و عملية ضرب مصفوفة بسلمية، تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع في E هو المصفوفة $0_E=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. نظير الشعاع $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هو الشعاع $-A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

لتكن F و G مجموعتين جزئيتين من E معرفتين بـ:

$$F=\left\{A=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix};\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\},$$
$$G=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\det A=ad-bc\neq 0\right\}.$$

- F تمثل مجموعة المصفوفات القطرية من الدرجة 2، بينما G تمثل مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة 2 القابلة للقلب. F تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من E، بينما G ليست كذلك لعدم احتواءها على العنصر الحيادي 0_E (لأن $\det 0_E=0$).

مثال 3.10. لقد رأينا في المثال (3.5) أنّ المجموعة $E=\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ المشكلة من الدوال المعرفة على المجال I، و المزودة بالعمليتين (3.9) و (3.10) تشكل فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$. لتكن الآن المجموعة الجزئية F المعرفة بـ: $F=\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ المشكلة من مجموعة الدوال المستمرة على المجال I. يمكننا البرهان بسهولة أنّ F فضاء شعاعي جزئي من E.

2 -1 تقاطع فضاءين شعاعيين جزئيين

قضية 3.6

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، وليكن F و G فضاءين جزئيين من E. عندئذ $F\cap G$ هو كذلك فضاء شعاعي جزئي من E.

♠

برهان. 1. أولا نبرهن أنّ: $0_E\in F\cap E$.
لمّا كان F و G فضاءين شعاعيين من E، فإنّه ينتج $0_E\in F$ و $0_E\in F$. وعليه فإنّ $0_E\in F\cap E$.
2. ليكن α و β عددين حقيقيين، و ليكن x و y عنصرين من $F\cap E$. عندئذ $x,y\in F$ و $x,y\in G$. وعلى هذا، استنادا لكون F و G فضاءين شعاعيين من E، $\alpha x+\beta y\in F$ و $\alpha x+\beta y\in G$. ومنه $\alpha x+\beta y\in F\cap G$. و هذا ما يثبت أن $F\cap G$ هو حقا فضاء شعاعي جزئي من E.

□

مثال 3.11. لقد بينا في المثال (3.6) أن المجموعتين:

$$F=\{x=(x_1,0);\quad x_1\in\mathbb{R}\},$$
$$G=\{x=(0,x_2);\quad x_2\in\mathbb{R}\},$$

هما فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء $E=\mathbb{R}^2$. تقاطع هذين الفضاءين الجزئيين الممثل في المجموعة $F\cap G=\{(0,0)\}=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ هو أيضا فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 3.12. لقد برهنا في المثال (3.7) أن المجموعتين

$$F=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\quad x_1+x_3=x_4\},$$
$$G=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\quad \left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&x_3\\x_2&=&x_4\end{array}\right.\right\},$$

هما فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$. المجموعة $F\cap G$ هي كذلك فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^4$. العبارة الصريحة للفضاء $F\cap G$ هي كما يلي:

$$\begin{aligned} F\cap G &= \left\{ x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_3 &=& x_4\\ x_1 &=& x_3\\ x_2 &=& x_4 \end{array}\right. \right\}\\ &= \{x=(x_1,2x_1,x_1,2x_1);\quad x_1\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x=x_1(1,2,1,2);\quad x_1\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

ملاحظة 3.7

اتحاد فضائين جزئيين ليس بالضرورة فضاءا جزئيا كما يوضحه المثال السابق: $F\cup G$ ليس فضاءا شعاعيا جزئيا من $E=\mathbb{R}^2$، نظرا لأنّ $(1,0)$ و $(0,1)$ هما عنصرين من $F\cup G$، لكن مجموعهما $(1,1)$ ليس عنصرا من $F\cup G$. ♣

2 -2 مجموع فضائين شعاعيين جزئيين

تعريف 3.3. ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، وليكن F و G فضاءين جزئيين من E. نسمي مجموع فضائين شعاعيين جزئيين F و G المجموعة المعرفة بـ:

$$F+G=\{z=x+y;\quad x\in F,\ y\in G\}.$$

ملاحظة 3.8

لمّا كان الجمع في الفضاء الشعاعي E هو عملية تبديلية، أستنتجنا أنّ: $F+G=G+F$. ♣

قضية 3.7

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، وليكن F و G فضاءين جزئيين من E. عندئذ $F+G$ هو كذلك فضاء شعاعي جزئي من E. ♠

برهان. 1. أولا نبرهن أنّ: $0_E\in F+E$.

لمّا كان F و G فضاءين شعاعيين من E، وجب أن يكون $0_E\in F$ و $0_E\in F$. وعليه فإنّ $0_E+0_E=$ $0_E\in F+E$.

2. ليكن α و β عددين حقيقيين، و ليكن u و v عنصرين من $F+E$. عندئذ يوجد $x_1,y_1\in F$ و $x_2,y_2\in G$ بحيث: $u=x_1+y_1$ و $v=x_2+y_2$.

استنادا لكون F و G فضاءين شعاعيين من E، فإنّ $\alpha x_1+\beta y_1\in F$ و $\alpha x_2+\beta y_2\in G$. الشعاع $\alpha u+\beta v$ هو على الشكل التالي:

$$\alpha u+\beta v=\underbrace{(\alpha x_1+\beta y_1)}_{\in F}+\underbrace{(\alpha x_2+\beta y_2)}_{\in G}. \tag{3.32}$$

العلاقة (3.32) تبين أن الشعاع $\alpha u+\beta v$ يفكك إلى مجموع شعاعين أحدهما من F و الآخر من G، وعليه فإنّ $\alpha u+\beta v\in F+G$.

من (1) و (2) نستنتج أنّ $F+G$ هو فضاء شعاعي جزئي من E. □

مثال 3.13. لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي $E=\mathbb{R}^3$ المعرفة بـ:

$$A=\{(x,y,z);\quad x+y+z=0\}.$$

برهن أنّ A هو مجموع الفضاءين الشعاعيين الجزئيين من E التاليين:

$$F=\{(x,0,-x);\quad x\in\mathbb{R}\},$$
$$G=\{(0,x,-x);\quad x\in\mathbb{R}\}.$$

الحل: إذا كان $u=(x,y,z)$ شعاعا من A، عندئذ يمكن تفكيكه على الشكل التالي:

$$u=(x,y,-x-y)=\underbrace{(x,0,-x)}_{\in F}+\underbrace{(0,y,-y)}_{\in G}.$$

إذا كل شعاع من A يمكن كتابته على شكل مجموع شعاعين أحدهما من F و الآخر من G، وعليه فإنّ

$$A\subset F+G. \tag{3.33}$$

ليكن u شعاعا من الفضاء $F+G$. عندئذ يوجد عددين حقيقين x_1 و x_2 بحيث أنّ:

$$\begin{aligned} u&=(x_1,0,-x_1)+(0,x_2,-x_2)\\ &=(x_1,x_2,-x_1-x_2)\\ &=(x_1,x_2,x_3). \end{aligned}$$

لمّا كان $x_1+x_2+x_3=0$ فإنّ الشعاع u ينتمي إلى الفضاء A، وعلى هذا فإنّنا نستنتج أنّ

$$F+G\subset A. \tag{3.34}$$

من (3.33) و (3.34) نستنتج أنّ

$$A=F+G.$$

وهذا ما يثبت حقا أنّ الفضاء A هو مجموع للفضاءين F و G.

3- 2 المجموع المباشر لفضاءين شعاعيين جزئين

تعريف 3.4. ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، وليكن F و G فضاءين جزئيين من E. نقول عن المجموعة الجزئية A من E أنها مجموع مباشر للفضاءين الجزئيين F و G، و نكتب $A=F\oplus G$، إذا و فقط إذا كان

$$A=F+G \text{ و } F\cap G=\{0_E\}. \tag{3.35}$$

تعريف 3.5. ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، وليكن F و G فضاءين جزئيين من E. نقول عن المجموعة الجزئية A من E أنها مجموع مباشر للفضاءين الشعاعيين الجزئيين F و G، إذا و فقط إذا كان كل شعاع من A يفكك بطريقة وحيدة إلى مجموع شعاعين أحدهما من F و الآخر من G. أي:

$$\forall u\in A,\ \exists! x\in F,\ \exists! y\in G;\quad u=x+y. \tag{3.36}$$

قضية 3.8

التعريفان السابقان متكافئان.

برهان. 1. نفرض صحة الخاصية (3.35) و نبرهن على صحة الخاصية (3.36).
ليكن u شعاعا من A. نفرض أن u يفكك على الشكلين التالين:

$$x_2+y_2=u=x_1+y_1;\quad x_1,x_2\in F,\ y_1,y_2\in G. \tag{3.37}$$

من (3.37)، ينتج: $x_1-x_2=y_2-y_1$. وعليه فإنّ $x_1-x_2\in F\cap G=\{0_E\}$ و $y_2-y_1\in F\cap G=\{0_E\}$.
وهذا يؤدي إلى $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$. إذا كل شعاع من A يفكك بطريقة وحيدة إلى مجموع شعاعين أحدهما من F و الآخر من G.

2. نفرض صحة الخاصية (3.36) و نبرهن على صحة الخاصية (3.35).
من الخاصية (3.36) ينتج مباشرة $A=F+G$. إذا يبقى أن نبرهن فقط أنّ $F\cap G=\{0_E\}$. ليكن x شعاعا من الفضاء $F\cap G$. عندئذ يمكن تفكيك x على الشكلين التاليين:

$$x+0_E=x=0_E+x. \tag{3.38}$$

من (3.38) نستنتج أنّ $x\in A$، ولمّا كان كل شعاع من A يفكك بطريقة وحيدة إلى مجموع شعاعين أحدهما من F و الآخر من G، فإنّنا نستنتج من (3.38) أنّ $x=0_E$.

□

مثال 3.14. في المثال (3.13)، برهنا أنّ الفضاء الشعاعي

$$A=\{(x,y,z);\quad x+y+z=0\}$$

هو مجموع مباشر لفضاءين الشعاعيين الجزئيين

$$F=\{(x,0,-x);\quad x\in\mathbb{R}\}$$

و

$$G=\{(0,x,-x);\quad x\in\mathbb{R}\}.$$

ولمّا كان $F\cap G=\{0_E\}$، فإنّنا نستنتج أنّ A هو مجموع مباشر للفضاءين F و G.

مثال 3.15. نعود أدراجنا إلى المثال (3.6)، أين بينا أن المجموعتين:

$$F=\{x=(x_1,0);\quad x_1\in\mathbb{R}\},$$
$$G=\{x=(0,x_2);\quad x_2\in\mathbb{R}\},$$

هما فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء $E=\mathbb{R}^2$.
يمكن البرهان بسهولة على أنّ كل شعاع من $E=\mathbb{R}^2$ يفكك بطريقة وحيدة إلى مجموع شعاعين أحدهما من F و الآخر من G. إذا $E=\mathbb{R}^2$ هو مجموع مباشر للفضاءين الشعاعيين الجزئين F و G.

مثال 3.16. لقد رأينا في المثال (3.12) أن المجموعتين F و G المعرفتين بـ:

$$F=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\quad x_1+x_3=x_4\},$$
$$G=\left\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\quad \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_3\\ x_2 & = & x_4\end{array}\right.\right\}.$$

هما فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$. من ثمّ نستنتج أنّ $A=F+G$ هو أيضا فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^4$، بيدا أنه ليس مجموعا مباشرا للفضاءين الشعاعيين الجزئيين F و G، لأن

$$F\cap G=\{x=(x_1,2x_1,x_1,2x_1);\quad x_1\in\mathbb{R}\}\neq\{0_E\}.$$

2 -4 الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بعائلة من الأشعة

تعريف 3.6. نسمي مزجا خطيا(أو عبارة خطية) لأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m من الفضاء الشعاعي E، كل عبارة من الشكل:

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_mv_m,$$

حيث α_1، α_2، $\cdots$، α_m هي أعداد حقيقية تسمى معاملات المزج الخطي.

ملاحظة 3.9

المزوج الخطية لأشعة من الفضاء الشعاعي E، هي كذلك أشعة من E.

♣

مثال 3.17. إذا كان E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، فإنّ الشعاع المعدوم 0_E هو مزج خطي لأشعة من E(يكفي أخذ جميع المعاملات معدومة).

مثال 3.18. أي شعاع $w=(x,y)$ من الفضاء الشعاعي $E=\mathbb{R}^2$ يكتب على شكل مزج خطي للشعاعين $u=(1,0)$ و $v=(0,1)$. بالفعل، يكفي أن نلاحظ أن:

$$w=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)=\alpha_1u+\alpha_2v,$$

حيث $\alpha_1=x$ و $\alpha_2=y$.

مثال 3.19. في الفضاء الشعاعي $E=\mathbb{R}^3$، برهن أنّ الشعاع $u=\begin{bmatrix}-9\\5\\6\end{bmatrix}$ يكتب على شكل مزج خطي لأشعة التالية:

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}-5\\4\\3\end{bmatrix}.$$

الحل: يكفي أن نبرهن أنّه توجد سلميات α_1، α_2 و α_3 بحيث أنّ:

$$(S):\ \alpha_1 \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \alpha_2 \underset{v_2}{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} + \alpha_3 \underset{v_3}{\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}} = \underset{u}{\begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}. \tag{3.39}$$

الشكل المصفوفي للجملة (S):

$$(S):\ \underbrace{\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}\right] \end{array}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{array}{c} u \\ \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array}}_{b}. \tag{3.40}$$

نحل الجملة (S) باستعمال طريقة حذف غوص:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) تكافئ الجملة الخطية التالية:

$$(S'):\ \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = -9 \\ \quad\ \ - \alpha_2 - \alpha_3 = -4 \\ \qquad\qquad 2\alpha_3 = 2 \end{cases}.$$

باستعمال التعويض الخلفي، نجد $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2,3,1)$. بتعويض قيم المعاملات α_1، α_2 و α_3 في المساواة (3.39)، نجد:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 2v_1 + 3v_2 + v_3. \end{aligned}$$

قضية 3.9

لتكن $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ عائلة أشعة من الفضاء الشعاعي E. المجموعة المكونة من جميع المزوج الخطية لأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء E ، يسمى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m. نرمز لهذا الفضاء بـ: $\overrightarrow{\text{vect}}\{v_1, v_2, \cdots v_m\}$. ♠

مثال 3.20. لتكن F و G مجموعتين جزئيتين من الفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^4$ المعرفتين بـ:

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\quad \begin{cases} x - 2y + 2z + t = 0 \\ -2x + 3y - 4z + t = 0 \\ -x + 2y - 3z - 2t = 0 \end{cases} \right\},$$

$$G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\quad 2x - 5y + z + 3t = 0 \right\}.$$

1. برهن أنّ: $F = \vec{vect}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. برهن أنّ: $G = \vec{vect}\left\{ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

الحل:

1. نحل الجملة الخطية

$$(S): \begin{cases} x-2y+2z+t=0 \\ -2x+3y-4z+t=0 \\ -x+2y-3z-2t=0 \end{cases}.$$

نحل الجملة (S) باستعمال طريقة حذف غوص:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2+2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) تكافئ الجملة الخطية التالية:

$$(S'): \begin{cases} x-2y+2z &= -t \\ y &= 3t \\ z &= -t \end{cases}.$$

بتعويض قيم كل من z و y في المعادلة الأولى للجملة (S')، نحصل على $x=7t$.
الآن يمكننا كتابة الفضاء F على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} F &= \{(7t, 3t, -t, t); \quad t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(7,3,-1,1); \quad t \in \mathbb{R}\} \\ &= \vec{vect}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. يمكننا كتابة الفضاء الشعاعي G كما يأتي:

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; \quad z = -2x+5y-3t\} \\ &= \{(x, y, -2x+5y-3t, t); \quad x, y, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4}; \quad x, y, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \vec{vect}\{v_2, v_3, v_4\}. \end{aligned}$$

3 العائلة المولدة

تعريف 3،7. لتكن $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ عائلة أشعة من الفضاء الشعاعي E. نقول عن العائلة $\mathscr{B}$ أنّها مولدة لـ E إذا كان كل شعاع من E يكتب كعبارة خطية للأشعة v_1، v_2، ⋯، v_m.

مثال 3،21. بين أن العائلة

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

مولدة للفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^2$.

الحل:

ليكن x شعاعا من E. نبرهن أنّه توجد سلميتين α_1 و α_2 بحيث أنّ:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

لإيجاد α_1 و α_2 ينبغي لنا أن نحل الجملة الخطية

$$(S): \underbrace{\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{array}{c} x \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}}_{b}. \qquad (3.41)$$

لمّا كان $\det(A) = 2 \neq 0$، فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{-x_1 + x_2}{2} \right).$$

مثال 3.22. بين أن العائلة

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}\right\}$$

مولدة للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

الحل: يكفي أن نبرهن أنّ الجملة الخطية

$$(S):\ \underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}v_1 & v_2 & v_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3\end{bmatrix}\end{array}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\overset{x}{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}}_{b} \tag{3.42}$$

تقبل حلا على الأقل من أجل كل الأعداد الحقيقية x_1، x_2 و x_3.
بحساب محدد المصفوفة A باستعمال النشر وفق السطر الأول، نحصل على

$$\begin{aligned}
\det(A)&=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}+ & - & +\end{array}\\ \begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3\end{vmatrix}\end{array}\\
&=+2\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}\\
&=+1[6-1]-1[3-3]+4[-1+6]\\
&=5+0+20\\
&=25.
\end{aligned}$$

إذ أنّ $\det(A)\neq 0$، فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا، وعليه فإنّ العائلة $\mathscr{B}$ تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال 3.23. بين أن العائلة

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\-5\end{bmatrix}\right\}$$

ليست مولدة للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

الحل:

يكفي أن نبرهن أنه يوجد على الأقل شعاع $u=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ من الفضاء الشعاعي E بحيث أنّ الجملة

$$(S): \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \quad v_2 & \quad v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\ A \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \\ X \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ b \end{array} \tag{3.43}$$

لا تقبل أي حل.
نحل الجملة (S) باستعمال طريقة حذف غوص:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_2 \\ -1 & 1 & -5 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_2 \\ 0 & 3 & -6 & x_1+x_3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_3+3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+3x_2+x_3 \end{array}\right].$$

إذا كان $x_1+3x_2+x_3 \neq 0$، فإنّ $rg[A|b]=3$. ولمّا كان $rg(A)=2$، فإنّ الجملة (S) لا تقبل حلول. وهكذا نكون قد برهنا أن كل شعاع من المجموعة

$$F = \{x=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad x_1+3x_2+x_3 \neq 0\}$$

لا يمكن كتابته على شكل عبارة خطية للأشعة v_1، v_2، v_3. ولمّا كانت F هي مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}^3$ (لاحظ أن الشعاع $F \ni (1,1,1)$)، فإنّنا نستنتج أنّ العائلة $\mathscr{B}$ غير مولدة للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

مثال 3.24. برهن أنّ العائلة $\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ مولدة للمجموعة

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x-2y+z=0\}.$$

الحل:
يمكننا كتابة الفضاء الشعاعي F كما يأتي:

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad z=-x+2y\} \\ &= \{(x,y,-x+2y); \quad x,\, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2}; \quad x,\, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \vec{vect}\{v_1,\, v_2\}. \end{aligned}$$

4 العائلة الحرة

تعريف 3.8. لتكن $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ عائلة أشعة من الفضاء الشعاعي E. نقول عن الأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m أنها مستقلة خطيا إذا كان الشعاع المعدوم 0_E يكتب كمزج خطي للأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m بمعاملات كلها معدومة فقط. أي إذا كان $0_E=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_mv_m$، فإنّه لزاما $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=0$. ونقول أنها مرتبطة خطيا إذا كانت غير مستقلة خطيا.

مثال 3.25. ادرس الاستقلال الخطي لشعاعين $v_1=(1,1)$ و $v_2=(-1,1)$ من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$.

الحل: نفرض أن الشعاع المعدوم $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$ يكتب على شكل مزج خطي لشعاعين v_1 و v_2، أي:

$$\alpha_1\overset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}+\alpha_2\overset{v_2}{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}=\overset{u}{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}. \tag{3.44}$$

المساواة (3.44) مكافئة للجملة الخطية التالية:

$$(S):\underset{A}{\begin{array}{cc} v_1 & v_2\\ \end{array}\atop\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}}\cdot\underset{X}{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}}=\underset{b}{\overset{0_{\mathbb{R}^2}}{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}}. \tag{3.45}$$

نلاحظ أن الشعاعين v_1 و v_2 هما عمودي المصفوفة A التي تمثل مصفوفة معاملات الجملة (S)، كما نلاحظ أيضا أن مجهولي الجملة (S) هما معاملي المزج الخطي α_1 و α_2. نعلم من الثاني (الجمل الخطية) أنّ الجملة (S) تقبل الحل التافه $(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$ كحلا وحيدا إذا و فقط إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب. إذ أنّ

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=1\times1-(-1)\times1=2\neq0$$

فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا $(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$. وعليه فإنّ الشعاعين v_1 و v_2 مستقلين خطيا.

على ضوء المثال السابق، لدينا التعميم التالي:

قضية 3.10

لتكن

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots, v_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}\right\}$$

عائلة أشعة من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$. لتكن المصفوفة

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1 & v_2 & & v_n\\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow\end{array}\\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}\end{array}$$

التي أعمدتها تمثل الأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_n. عندئذ القضيتين التاليتين متكافئتين

1. الأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_n مستقلة خطيا.
2. $rg(A)=n$.

تطبيق 4.1. ادرس الاستقلال الخطي لأشعة

$$v_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}$$

من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

الحل:
نحسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}v_1 & v_2 & v_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array}\\ \begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3\end{bmatrix}\end{array}.$$

لحساب $rg(A)$ نستعمل طريقة المحددات المستخرجة.

- أولا نحسب $\det A$. باستعمال النشر وفق السطر الأول، نحصل على:

$$\begin{aligned}\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3\end{vmatrix}&=2\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}\\ &=2(6-1)-(3-3)+4(-1+6)\\ &=10-0+20\\ &=30.\end{aligned}$$

إذ أنّ $\det A \neq 0$، فإن $rg(A) = 3$، و عليه الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا.

تطبيق 4.2. لتكن الأشعة

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. برهن أنّ الأشعة v_1، v_2، و v_3 مرتبطة خطيا.
2. برهن أنّه يوجد على الأقل شعاعين من بينهم مستقلين خطيا، ثم أكتب أحدهما كعبارة خطية لشعاعين الآخرين.

الحل:

1. نحسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

لحساب $rg(A)$ نستعمل طريقة المحددات المستخرجة.

- أولا نحسب $\det A$. باستعمال النشر وفق السطر الأول، نتحصل على:

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (4-18) - 2(1+6) + 4(3+4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

لمّا كان $\det A = 0$، فإن $rg(A) < 3$، و عليه الأشعة v_1، v_2 و v_3 مرتبطة خطيا.

2. ندرس الآن الاستقلال الخطي للشعاعين v_1 و v_2. لتكن المصفوفة:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 \end{matrix} \\ B = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

إذ أنّ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$ هو محدد مستخرج من المصفوفة B من الدرجة 2(أكبر درجة ممكنة) غير معدوم، فإن $rg(B) = 2$. وعليه الشعاعين v_1 و v_2 مستقلين خطيا. لمّا كانت الأشعة v_1، v_2 و v_3 مرتبطة خطيا، و الشعاعين v_1 و v_2 مستقلين خطيا، فإنه حتما الشعاع v_3 يكتب كمزج خطي لشعاعين v_1 و v_2. لإيجاد هذا المزج الخطي نحل الجملة الخطية التالية:

$$(S):\ \alpha_1 \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} + \alpha_2 \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}} = \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}}. \tag{3.46}$$

الشكل المصفوفي للجملة (S):

$$(S):\ \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & \quad v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{array}{c} v_3 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}}_{b}. \tag{3.47}$$

باستعمال طريقة حذف غوص نجد:

$$[B|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) مكافئة للجملة التالية:

$$(S'):\left\{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & 4 \\ & + & 2\alpha_2 & = & 4 \\ & + & 5\alpha_2 & = & 5 \end{array}\right. .$$

إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا $(\alpha_1,\alpha_2)=(2,1)$. بالتعويض قيمتي α_1 و α_2 في العبارة (3.46) نجد $v_3 = 2v_1 + v_2$.

تعريف 3.9. نقول عن عائلة أشعة $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ من الفضاء الشعاعي E أنها حرة، إذا كانت الأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m مستقلة خطيا.

مثال 3.26. بين أن العائلة التالية

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

حرة.

الحل:
نحسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \ \ v_2 & \ \ v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

بحساب محدد المصفوفة A باستعمال النشر وفق السطر الأول، نحصل على

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \\
&= -1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -[-2-1]-5[3-2]+2[3+4] \\
&= 3-5+14 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

إذ أنّ $\det(A) \neq 0$، فإنّ $rg(A)=3$، وعليه فإنّ الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا. وهكذا فإنّ العائلة $\mathscr{B}$ حرة.

تعريف 3.10. نقول عن عائلة أشعة $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ من الفضاء الشعاعي E أنها مقيدة، إذا كانت غير حرة. أي إذا كانت الأشعة v_1، v_2، $\cdots$، v_m مرتبطة خطيا.

مثال 3.27. بين أن العائلة التالية

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

مقيدة.

الحل:
نحسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

بحساب محدد المصفوفة A باستعمال النشر وفق السطر الأول، نحصل على

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \end{array} \\
&= 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1[0-6]-2[7-9]+1[2-0] \\
&= -6+4+2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

لمّا كان $\det(A)=0$، فإنّ $rg(A)<3$، وبذلك الأشعة v_1، v_2 و v_3 مرتبطة خطيا. ومن ثمّ فإنّ العائلة $\mathscr{B}$ مقيدة.

5 أساس الفضاء الشعاعي

تعريف 3.11. لتكن $\mathscr{B}$ عائلة الأشعة من الفضاء الشعاعي E. نقول عن $\mathscr{B}$ أنها أساس لـ E إذا كانت حرة و مولدة لـ E.

مثال 3.28. برهن أنّ العائلة

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

هي أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$.

الحل:

1. لقد رأينا في المثال (3.25) أن الشعاعين v_1 و v_2 مستقلين خطيا، و من ثمّ العائلة $\mathscr{B}$ حرة.
2. الآن نبرهن أنّ العائلة $\mathscr{B}$ مولدة للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$. لإثبات ذلك، يكفي أن نبرهن أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x و y، الجملة الخطية

$$(S):\ \underbrace{\overset{\begin{array}{cc}v_1 & v_2\end{array}}{\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{b}$$

تقبل حلا على الأقل.

لمّا كان الشعاعين v_1 و v_2 مستقلين خطيا، فإنّ المصفوفة A قابلة للقلب. وعليه فإنّ الجملة (S) هي جملة كرامر، وبذلك فهي تقبل حلا وحيدا يعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

إذا العائلة $\mathscr{B}$ هي أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$.

مثال 3.29. برهن أنّ العائلة التالية:

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}6\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

تشكل أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

الحل:

1. **العائلة** $\mathscr{B}$ **حرة.**

نحسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

بحساب محدد المصفوفة A باستعمال النشر وفق السطر الأول، نحصل على

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \\ &= 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1[0+1] - 1[2-1] + 6[-1+0] \\ &= -6. \end{aligned}$$

إذ أنّ $\det(A) \neq 0$، فإنّ $rg(A) = 3$، وعليه فإنّ الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا. وهكذا فإنّ العائلة $\mathscr{B}$ حرة.

2. **العائلة** $\mathscr{B}$ **تولد الفضاء الشعاعي** $\mathbb{R}^3$.

لمّا كانت المصفوفة A قابلة للقلب، فإنّه، من أجل كل شعاع $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$، الجملة الخطية

$$(S): \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{array}{c} u \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array}}_{b}$$

تقبل حلا على الأقل. وهذا ما يثبت أنّ العائلة $\mathscr{B}$ تولد الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

5 -1 الفضاء الشعاعي المنته البعد

5 -2 مرتبة عائلة أشعة

تعريف 3.12. لتكن $\mathscr{B}$ عائلة أشعة من الفضاء الشعاعي E. مرتبة العائلة $\mathscr{B}$، التي نرمز لها بـ $rg(\mathscr{B})$، هو عدد عناصر أكبر عائلة حرة مستخرجة من العائلة $\mathscr{B}$.

ملاحظة 3.10

الكتابة $rg(\mathscr{B}) = +\infty$ تشير إلى أن العائلة $\mathscr{B}$ تحوي عدد غير منته من الأشعة المستقلة خطيا. ♣

مثال 3.30. أوجد مرتبة العائلة التالية:

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

الحل:

نحسب مرتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

باستعمال العمليات الأولية على أسطر المصفوفة A نجد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4+L_1]{L_3-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا $rg(A) = 3$، ومن ثمّ فإنّ العائلة $\mathscr{B}$ مقيدة، وعليه فإنّ $rg(\mathscr{B}) \leq 3$. من الحسابات السابقة، نستنتج أنّ رتبة المصفوفة

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

تساوي 3، وبذلك نستنتج أنّ الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا، وعليه فإنّ العائلة $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ حرة. لمّا كانت $\mathscr{F}$ هي أكبر عائلة حرة مستخرجة من $\mathscr{B}$، فإنّه ينتج أنّ $rg(B) = 3$.

تعريف 3.13. نقول عن فضاء شعاعي E أنه منته البعد إذا وفقط إذا كان مولدا بعائلة $\mathscr{B}$ مرتبتها منتهية. عندئذ العدد $rg(\mathscr{B})$ يسمى بعد الفضاء الشعاعي E، و نرمز له بـ $\dim E$.

مثال 3.31. $E = \mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي منته البعد و لدينا $\dim E = 2$. بصفة عامة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم الفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^n$ منته البعد و بعده يساوي n.

قضية 3.11

ليكن E فضاءا شعاعيا منته البعد، و ليكن F فضاءا شعاعيا جزئيا من E، فإنّه حتما $\dim F \leq \dim E$. ♠

برهان. إذا كانت العائلة $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ أساسا لـ E، فإنّها تولد الفضاء الشعاعي الجزئي F، و عليه، إذا كان $\mathscr{F}$ أساسا لـ F فإنّه لزاما $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$، وعليه فإنّ: $\dim F \leq \dim E$.

□

قضية 3.12

ليكن E فضاءا شعاعيا منته البعد، و ليكن F فضاءا شعاعيا جزئيا من E بحيث $\dim F = \dim E$، فإنّه حتما $F = E$. ♠

برهان. نفرض أن F فضاء شعاعي جزئي من E بعده مساويا لبعد E، و نبرهن أنّ $F = E$. في الواقع، كون F فضاءا شعاعيا جزئيا من E، فإنّه لزاما $F \subseteq E$. لدى ما علينا إلا أن نبرهن أنّ $E \subseteq F$. لو فرضنا جدلا أن هذا الأخير غير صحيح، فإنّه يوجد على الأقل شعاع w من E لا ينتمي إلى F، عندئذ إذا كانت $\mathscr{F} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ أساس لـ F، فإنّ العائلة $\mathscr{F}' = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, w\}$ حرة، لذا فهي تشكل أساسا للفضاء الشعاعي الجزئي $G = v\vec{e}ct\{\mathscr{F}'\}$. بهذا فإنّنا تحصلنا على فضاء شعاعي جزئي من E بعده أكبر تماما من بعد E، و هذا غير ممكن استنادا إلى القضية 3.11. وعليه فإنّ $E \subseteq F$.

□

قضية 3.13

ليكن E فضاء شعاعيا بعده n، و لتكن $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ عائلة أشعة من الفضاء الشعاعي E. عندئذ القضيتين التاليتين محققتين:

1. العائلة $\mathscr{B}$ أساس للفضاء الشعاعي E إذا و فقط إذا كانت حرة.
2. العائلة $\mathscr{B}$ أساس للفضاء الشعاعي E إذا و فقط إذا كانت مولدة لـ E.

♠

تطبيق 5.1. برهن أنّ العائلة

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

الحل:
لمّا كان الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ منته البعد، فإنّه يكفي أن نبرهن أنّ العائلة $\mathscr{B}$ حرة. ولإثبات هذا نقوم بحساب مرتبة المصفوفة

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

بحساب محدد المصفوفة A باستعمال النشر وفق السطر الأول، نحصل على

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3[1-1] + 0 + [0-1] \\ &= -1. \end{aligned}$$

إذ أنّ $\det(A) \neq 0$، فإنّ $rg(A) = 3$، وعليه فإنّ الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا. وهكذا فإنّ العائلة $\mathscr{B}$ حرة، فهي إذا أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

تطبيق 5.2. العائلة

$$\mathscr{E} = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

مولدة للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$، لأنّه من أجل كل شعاع $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ من $\mathbb{R}^2$ يكتب على شكل عبارة خطية لأشعة العائلة $\mathscr{E}$ على النحو التالي:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2.$$

وهكذا فإنّ العائلة $\mathscr{E}$ هي أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$، يسمى الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$.
بصفة عامة، العائلة

$$\mathscr{E} = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

هي الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$.

6 تمارين

تمرين 3.1

هل المجموعات التالية

$$\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x-y-2z=0\},\\
F &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x-z=0,\ y+z=0\},\\
G &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x-y-2z=1\},\\
H &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x^2-y-2z=0\},\\
K &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x+y+z=0,\ x-2y=0\}.
\end{aligned}$$

فضاءات شعاعية جزئية من $\mathbb{R}^3$؟

تمرين 3.2

لتكن الأشعة التالية:

$$v_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

1. ادرس الاستقلال الخطي لأشعة v_1، v_2، v_3.
2. اكتب الشعاع $u=(1,-2,5)$ على شكل عبارة خطية للأشعة v_1، v_2، v_3.

تمرين 3.3

اكتب الشعاع $u=(2,-5,3)$ على شكل عبارة خطية للأشعة التالية:

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}2\\-4\\-1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\-5\\7\end{bmatrix}.$$

تمرين 3.4

برهن أنّ الأشعة التالية:

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix},\quad v_4=\begin{bmatrix}1\\-9\\8\end{bmatrix}$$

مرتبطة خطيا. كون من هذه الأشعة أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين 3.5

لتكن العائلة

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\2\end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix}5\\-2\\3\\4\end{bmatrix}, v_5=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

1. أوجد كل العبارات الخطية التي تربط أشعة العائلة $\mathscr{B}$.
2. أوجد مرتبة العائلة $\mathscr{B}$.
3. أوجد $\vec{vect}(\mathscr{B})$.

تمرين 3.6

لتكن الأشعة التالية:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. قارن بين $F = \vec{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ و $G = \vec{vect}\{v_4, v_5\}$.
2. برهن أنّ $F \oplus \vec{vect}\{v_6\} = \mathbb{R}^4$.

تمرين 3.7

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ عائلة حرة من E. هل العائلات التالية حرة؟

1. $\mathscr{B}_1 = \{v_1, 2v_2, v_3\}$.
2. $\mathscr{B}_2 = \{v_1, v_3\}$.
3. $\mathscr{B}_3 = \{v_1, v_1 + v_2, v_4\}$.
4. $\mathscr{B}_4 = \{3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3\}$.
5. $\mathscr{B}_5 = \{2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1\}$.

تمرين 3.8

لتكن الأشعة التالية:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. برهن أنّ $\vec{vect}\{v_1, v_2\} = \vec{vect}\{v_3, v_4\}$.
2. أوجد شعاع w من $\mathbb{R}^3$ بحيث العائلة $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, w\}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين 3.9

ليكن $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، و لتكن الأشعة:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. برهن أنّ $\mathscr{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.
2. اكتب الأشعة e_1, e_2, e_3 في الأساس $\mathscr{B}'$.

تمرين 3.10

ليكن $a \in \mathbb{R}$، و لتكن الأشعة التالية:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}.$$

- ما هو الشرط على a كي تكون العائلة $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين 3.11

لتكن المجموعتين التاليتين:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - y - 2z = 0\},$$
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + 2y + 3z = 0,\ x - y = 0\}.$$

1. بين أن E و F فضاءين شعاعيين من $\mathbb{R}^3$، ثم احسب $dim(E)$ و $dim(F)$.
2. أوجد $E \cap F$، ثم احسب $dim(E \cap F)$.

تمرين 3.12

لتكن المجموعات التالية:

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}\right\},$$
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad x + 2y + 3z = 0,\ x - y = 0\}.$$

1. بين أن E و F فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^3$، ثم احسب $\dim(E)$ و $\dim(F)$.
2. أوجد $E \cap F$، ثم احسب $dim(E \cap F)$.

تمرين 3.13

لتكن الأشعة التالية:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

نضع:

$$F = v\vec{e}ct\{v_1, v_2, v_3\},$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - 3y - z = 0\}.$$

1. أعط أساس لـ F.
2. برهن أنّ G فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.
3. أعط أساس لـ G.
4. أوجد $E \cap F$، ثم احسب $\dim(F \cap G)$.
5. هل $F \oplus G = \mathbb{R}^3$؟

تمرين 3.14

لتكن المجموعتين

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad \left\{\begin{array}{c}3x+2y+z=0\\ 2x-4y-2z=0\end{array}\right.\right\},$$
$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad -3x+5y+4z=0\}.$$

1. بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.
2. برهن أنّ العائلة $\mathscr{F}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\4\\-5\end{bmatrix}\right\}$ مولدة لـ F، ثم أحسب $\dim F$.
3. بين أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.
4. أعط أساس لـ E، ثم استنتج $\dim E$.
5. أوجد $E\cap F$، ثم احسب $\dim(F\cap G)$.
6. هل $F\oplus G=\mathbb{R}^3$؟

تمرين 3.15

لتكن الأشعة التالية:

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\1\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}0\\-3\\1\\-3\end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\2\end{bmatrix}$$
$$v_5=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\4\end{bmatrix}, w_1=\begin{bmatrix}0\\-3\\4\\-2\end{bmatrix}, w_2=\begin{bmatrix}7\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

1. برهن أنّ $\vec{vect}\{v_1, v_2, v_3\}=\vec{vect}\{w_1, w_2\}$.
2. أعط أساس للفضاء $\vec{vect}\{v_1, v_2\}\cap\vec{vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.
3. هل $\vec{vect}\{v_1, v_2\}+\vec{vect}\{v_2, v_3, v_4\}=\mathbb{R}^4$؟
4. برهن أنّ $\vec{vect}\{v_4, v_5\}\oplus\vec{vect}\{v_1, v_2, v_3\}=\mathbb{R}^4$.

تمرين 3.16

لتكن المجموعتين

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\quad \left\{\begin{array}{c}x+y+z+3t=0\\ x+2y+z+5t=0\\ x+2y+2z+2t=0\end{array}\right.\right\},$$
$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^4;\quad x+3y+3z+t=0\}.$$

1. بين أن E و F فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^3$.
2. أعط أساس لكل من E و F.
3. هل $F\oplus G=\mathbb{R}^3$؟

تمرين 3.17

لتكن الأشعة التالية:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

1. برهن أنّ الأشعة v_1، v_2 و v_3 مرتبطة خطيا.
2. أوجد قيمة العدد الحقيقي α التي من أجلها يكون الشعاع $v = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ \alpha \end{bmatrix}$ ينتمي إلى الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة v_1، v_2 و v_3.
3. أعط شعاع w من $\mathbb{R}^3$ بحيث العائلة $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, w\}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

4 التطبيقات الخطية

1 مفاهيم أولية

تعريف 4.1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$، و ليكن التطبيق f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

نقول عن f أنّه تطبيق خطي إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall u, v \in E; \quad f(u+v) = f(u) + f(v), \tag{4.1}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in E; \quad f(\alpha u) = \alpha f(u). \tag{4.2}$$

مثال 4.1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$. التطبيق المعدوم المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto f(x) = 0 \end{aligned}$$

هو تطبيق خطي.

مثال 4.2. ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$. التطبيق المطابق المعرف بـ:

$$\begin{aligned} Id : E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto Id(x) = x \end{aligned}$$

هو تطبيق خطي.

مثال 4.3. برهن أنّ التطبيق f المعرف بـ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\mapsto f(u) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-2y+z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تطبيقا خطيا.

الحل:

ليكن $u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ شعاعين من $\mathbb{R}^3$، ولتكن السلمية α.

بوضع:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

فإنّه يأتي:

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(u) \\ &= \begin{bmatrix} x + y \\ x - 2y + z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - 2y_1 + z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - 2y_2 + z_2 \end{bmatrix} \\ &= f(u_1) + f(u_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

بوضع:

$$\begin{aligned} u &= \alpha u_1 \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

فإنّنا نحصل على

$$\begin{aligned} f(\alpha u_1) &= f(u) \\ &= \begin{bmatrix} x + y \\ x - 2y + z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_1 - 2\alpha y_1 + \alpha z_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - 2y_1 + z_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha f(u_1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

من (4.3) و (4.4) نستنتج أنّ التطبيق f خطي.

مثال 4.4. برهن أنّ التطبيق f المعرف بـ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\mapsto f(u) = \begin{bmatrix} 2x+2y-3z \\ x+2y+z \\ -x+y+z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تطبيقا خطيا.

الحل:
بالطبع، يمكننا الاستدلال كما فيما المثال السابق، ولكننا الآن نود أن نقدم طريقة بسيطة، تعتمد على خواص العمليات الجبرية على المصفوفات. في بادئ الأمر يمكننا كتابة عبارة التطبيق f على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{aligned} f(u) &= \begin{bmatrix} 2x+2y-3z \\ x+2y+z \\ -x+y+z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= Au. \end{aligned}$$

ليكن $u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ شعاعين من $\mathbb{R}^3$، ولتكن السلمية α.
لدينا من جهة

$$\begin{aligned} f(u_1+u_2) &= Au_1 + Au_2 \\ &= A(u_1+u_2) \\ &= f(u_1+u_2), \end{aligned} \tag{4.5}$$

ومن جهة أخري

$$\begin{aligned} f(\alpha u_1) &= A(\alpha u_1) \\ &= \alpha A u_1 \\ &= \alpha f(u_1). \end{aligned} \tag{4.6}$$

من (4.5) و (4.6) نستنتج أنّ التطبيق f خطي.

مثال 4.5. يمكننا أن نبرهن بسهولة أنّ التطبيق f_A المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\mapsto f_A(X) = A \cdot X \end{aligned}$$

حيث $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$، هو تطبيق خطي.

على ضوء المثال السابق لدينا التعميم التالي.

قضية 4.1

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

التطبيق f_A المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\longmapsto f_A(u) = Au \end{aligned}$$

هو تطبيق خطي. المصفوفة تسمى المصفوفة الملحقة بالتطبيق f_A.

♠

تطبيق 1.1. نعود أدراجنا إلى المثال (4.3) أين قد برهنا أنّ التطبيق

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longmapsto f(u) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-2y+z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

هو عبارة عن تطبيق خطي. يمكننا أن نكتب عبارة التطبيق f على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{aligned} f(u) &= \begin{bmatrix} x+y \\ x-2y+z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= Au \\ &= f_A(u). \end{aligned}$$

وهكذا، استنادا إلى القضية السابقة، فإنّنا نستنتج أنّ f تطبيق خطي.

قضية 4.2

يكون التطبيق $f : E \longrightarrow F$ خطيا إذا و فقط إذا تحقق:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E; \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \tag{4.7}$$

♠

برهان. 1. نفرض أنّ الشرط (4.7) محققا، و نبرهن على صحة الشرطين (4.1) و (4.2).

- ليكن u و v شعاعين من E. عندئذ ينتج اعتمادا على الشرط (4.7):

$$f(u+v)=f(1u+1v)=1f(u)+1f(v)=f(u+v).$$

إذا الشرط (4.1) محققا.

- ليكن u شعاعا من E، و لتكن α سلمية. عندئذ ينتج اعتمادا على الشرط (4.7)

$$f(\alpha u)=f(\alpha u+0u)=\alpha f(u)+0f(u)=\alpha f(u).$$

وعليه صحة الشرط (4.2).

2. نفرض أنّ الشرطين (4.1) و (4.2) محققين، ونبرهن على صحة الشرط (4.7). ليكن u و v شعاعين من E، ولتكن α و β سلميتين. كون E فضاء شعاعيا، فإنّ $x=\alpha u$ و $y=\beta v$ شعاعين من E، وعليه، استنادا إلى الشرطين (4.1) و (4.2)، ينتج

$$\begin{aligned}
f(\alpha u+\beta u)&=f(x+y)\\
&=f(x)+f(y)\\
&=f(\alpha u)+f(\beta v)\\
&=\alpha f(u)+\beta f(v).
\end{aligned}$$

إذا الشرط (4.7) محققا.

□

قضية 4.3

إذا كان $f:E\longrightarrow F$ تطبيقا خطيا، فإنّه حتما $f(0_E)=0_F$ ♠

برهان. كون f تطبيقا خطيا فإنّ:

$$f(0_E+0_E)=f(0_E)+f(0_E).$$

ومن ثمّ ينتج أنّ

$$f(0_E)=f(0_E)+f(0_E).$$

بإضافة إلى طرفي المساواة السابقة نظير الشعاع $f(0_E)$، نحصل على

$$0_F=0_F+f(0_E)$$

. و هذا يؤدي إلى $f(0_E)=0_F$.

□

تطبيق 1.2. التطبيق

$$\begin{aligned}
f:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(x,y,z) &\longmapsto f(x,y,z)=x+y+1
\end{aligned}$$

ليس خطيا، لأنّ $f(0_{\mathbb{R}^2})=f((0,0))=1\neq 0$.

ملاحظة 4.1

فما يلي نرمز بـ $\mathscr{L}(E,F)$، إلى مجموعة كل التطبيقات الخطية من الفضاء الشعاعي E نحو الفضاء الشعاعي F. ♣

1- 1 عمليات على التطبيقات الخطية

1-1- 1 مجموع تطبيقين خطيين

قضية 4.4

إذا كان $F \longrightarrow E : f, g$ تطبيقين خطيين، فإنّ $f+g$ أيضا تطبيقا خطيا ♠

برهان. ليكن u و v شعاعين من E، ولتكن السلميتين α و β. نظرا لأنّ f و g تطبيقين خطيين، فإنّ

$$\begin{cases} f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v), \\ g(\alpha u+\beta v)=\alpha g(u)+\beta g(v). \end{cases}$$

ومن ثمّ يكون لدينا

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha u+\beta v) &= f(\alpha u+\beta v)+g(\alpha u+\beta v) \\ &= [\alpha f(u)+\beta f(v)]+[\alpha g(u)+\beta g(v)] \\ &= \alpha[f(u)+g(u)]+\beta[f(v)+g(v)] \\ &= \alpha(f+g)(u)+\beta(f+g)(v).\end{aligned}$$

وهذا ما يثبت أنّ التطبيق $f+g$ خطي.

□

2-1- 1 جداء تطبيق خطي بسلمية

قضية 4.5

إذا كان $F \longrightarrow E : f$ تطبيقا خطيا، فإنّه من أجل كل سلمية $\lambda \in \mathbb{R}$، التطبيق λf هو كذلك تطبيق خطي. ♠

برهان. ليكن u و v شعاعين من E، ولتكن α و λ سلميتين. لمّا كان f تطبيقا خطيا، فإنّ

$$\begin{cases} f(u+v)=f(u)+f(v), \\ f(\alpha u)=\alpha f(u). \end{cases}$$

ومن ثمّ فإنّه ينتج

$$\begin{cases} (\lambda f)(u+v)=(\lambda f)(u)+(\lambda f)(v), \\ (\lambda f)(\alpha u)=\lambda f(\alpha u)=\alpha\lambda f(u)=\alpha(\lambda f)(u). \end{cases}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ التطبيق λf خطي.

□

3-1- 1 تركيب تطبيقين خطيين

قضية 4.6

إذا كان $F \longrightarrow E : f$ و $G \longrightarrow F : g$ تطبيقين خطيين، فإنّ تركيبهما $g \circ f$ هو أيضا تطبيقا خطيا. ♠

برهان. ليكن u و v شعاعين من E، ولتكن α و β سلميتين. نظرا لكون f تطبيقا خطيا، فإنّ

$$f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v). \tag{4.8}$$

إذ أنّ g تطبيق خطي من F نحو G، ولمّا كان $f(u)$ و $f(v)$ شعاعين من F، فإنّ

$$g\big(\alpha f(u)+\beta f(v)\big)=\alpha g(f(u))+\beta g(f(v)). \tag{4.9}$$

اعتمادا على (4.8) و (4.9) نحصل على

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\alpha u+\beta v)&=g\big(f\left(\alpha u+\beta v\right)\big)\\&=g\big(\alpha f(u)+\beta f(v)\big)\\&=\alpha g(f(u))+\beta g(f(v))\\&=\alpha(g\circ f)(u)+\beta(g\circ f)(v).\end{aligned}$$

وعليه فإنّ التطبيق $g\circ f$ خطي. □

1 -2 نواة تطبيق خطي

تعريف 4.2. ليكن $f:E\longrightarrow F$ تطبيقا خطيا. نسمي نواة f المجموعة المعرفة بـ:

$$\ker(f)=\{x\in E\mid f(x)=0_F\}=f^{-1}\{0_F\}. \tag{4.10}$$

مثال 4.6. أوجد نواة التطبيق الخطي المعرف في المثال (4.3).

الحل:

$$\begin{aligned}\ker(f)&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}x+y\\x-2y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

نحل الجملة الخطية التالية:

$$(S):\begin{cases}x+y=0\\x-2y+z=0\end{cases}$$

من المعادلة الأولى نجد $x=-y$، نعوض في المعدلة الثانية نجد $z=3y$.
وهكذا يكون لدينا

$$\begin{aligned}\ker(f)&=\left\{\begin{pmatrix}-y\\y\\3y\end{pmatrix};\quad y\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{y\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}}_{v_1};\quad y\in\mathbb{R}\right\}\\&=\vec{Vect}\{v_1\}.\end{aligned}$$

مثال 4.7. أوجد نواة التطبيق الخطي المعرف في المثال (4.4).

الحل:

$$\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad f(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad \begin{bmatrix}2x+2y-3z\\x+2y+z\\-x-y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

نحل الجملة الخطية التالية:

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2x&+&2y&-&3z&=&0\\x&+&2y&+&z&=&0\\-x&-&y&+&z&=&0\end{array}\right.$$

باستعمال طريقة حذف غوص نجد:

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&-3&0\\1&2&1&0\\-1&-1&1&0\end{array}\right]\begin{array}{c}\xrightarrow{2L_2-L_1}\\\xrightarrow{2L_3+L_1}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&-3&0\\0&2&5&0\\0&0&-1&0\end{array}\right].$$

إذا الجملة (S) تكافئ الجملة الخطية التالية:

$$(S'):\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2x&+&2y&-&3z&=&0\\&&2y&+&5z&=&0\\&&&&-z&=&0\end{array}\right..$$

باستعمال التعويض الخلفي نجد: $(x,y,z)=(0,0,0)$. إذا

$$\ker(f)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

قضية 4.7

إذا كان $f\in\mathscr{L}(E,F)$، فإنّ $\ker(f)$ هو فضاء شعاعي جزئي من E. ♠

برهان. 1. استنادا إلى القضية 4.3، فإننّا نستنتج أنّ

$$0_E\in\ker(f). \tag{4.11}$$

2. ليكن u و v شعاعين من $\ker(f)$، و لتكن α و β سلميتين. عندئذ استنادا على خطية f ينتج

$$f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)=0.$$

وهذا يثبت أنّ

$$\alpha u+\beta v\in\ker(f). \tag{4.12}$$

من (4.11) و (4.12) نستنتج أنّ $\ker(f)$ فضاء شعاعي جزئي من E.

□

تطبيق 1.3. برهن أنّ المجموعة

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \right\}$$

هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحل:
نعرف التطبيق الخطي

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\mapsto f(u) = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ x-y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

واضح أنّ $G = \ker(f)$، وعليه فإنّ G هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

قضية 4.8

إذا كان $f \in \mathscr{L}(E,F)$، فإنّ القضيتين التاليتين متكافئتين:
1. التطبيق f متباين.
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.

♠

برهان. 1. نفرض أنّ f تطبيق خطي متباين، ونبرهن أنّ $\ker(f) = \{0_E\}$.
ليكن u شعاعا من $\ker(f)$. عندئذ، اعتمادا على القضية 4.3، نستنتج أنّ: $f(u) = f(0_E)$. ومن ثمّ، نظرا لأنّ f تطبيق متباين، فإنّه ينتج $u = 0_E$. وهذا ما يثبت أنّ الفضاء $\ker(f)$ يحوي فقط الشعاع المعدوم 0_E.
2. نفرض أنّ $\ker(f) = \{0_E\}$، و نبرهن أنّ f تطبيق متباين. ليكن u و v شعاعين من E بحيث $f(u) = f(v)$. عندئذ اعتمادا على خطية f، تحصل على

$$f(u-v) = f(u) - f(v) = 0.$$

و هذا يعني أنّ $u-v$ شعاع من الفضاء $\ker(f)$. ولمّا كان هذا الأخير يحوي فقط على الشعاع المعدوم، فإنّه لزاما $u = v$. وبهذا نكون قد أثبتنا أنّ التطبيق f متباين.

□

1 -3 صورة تطبيق خطي

تعريف 4.3. ليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيقا خطيا. نسمي صورة f المجموعة المعرفة بـ:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E). \tag{4.13}$$

مثال 4.8. أوجد صورة التطبيق الخطي المعرف في المثال (4.3).

الحل:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{f((x,y,z));\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} x+y\\ x-2y+z\end{pmatrix};\quad x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{x\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{v_1}+y\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}_{v_2}+z\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{v_3};\quad x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \vec{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}.
\end{aligned}$$

مثال 4.9. أوجد صورة التطبيق الخطي المعرف في المثال (4.4).

الحل:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{f((x,y,z));\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} 2x+2y-3z\\ x+2y+z\\ -x-y+z\end{pmatrix};\quad x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{x\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}}_{v_1}+y\underbrace{\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}}_{v_2}+z\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_3};\quad x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \vec{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}.
\end{aligned}$$

قضية 4.9

إذا كان $f\in\mathscr{L}(E,F)$، فإنّ $\mathrm{Im}(f)$ هو فضاء شعاعي جزئي من F.

♠

برهان. 1. استنادا إلى القضية (4.3) فإنّ

$$0_F\in\mathrm{Im}(f). \tag{4.14}$$

2. ليكن $u=f(x)$ و $v=f(y)$ شعاعين من $\mathrm{Im}(f)$، ولتكن α و β سلميتين. عندئذ استنادا على خطية f ينتج

$$\alpha u+\beta v=\alpha f(x)+\beta f(y)=f(\underbrace{\alpha x+\beta y}_{\in E}).$$

وعليه

$$\alpha u+\beta v\in Im(f). \tag{4.15}$$

من (4.14) و (4.15) نستنتج أنّ $\mathrm{Im}(f)$ هو فضاء شعاعي جزئي من F.

□

تطبيق 1.4. برهن أنّ المجموعة

$$G=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix};\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحل:
يمكننا أن نكتب المجموعة G على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}G&=\left\{\begin{bmatrix}\alpha+2\beta\\-\beta\\\alpha\end{bmatrix};\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\1&0\end{bmatrix}}_{A}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix};\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\\&=Im(f_A)\end{aligned}$$

حيث أنّ f_A هو التطبيق الخطي المعرف بـ:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^3\\u=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}&\mapsto f(u)=Au.\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد برهنا أنّ المجموعة G هي صورة مباشرة للتطبيق الخطي f_A. وهذا ما يثبت أنّ المجموعة G هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

2 التطبيقات الخطية المعرفة على الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

قضية 4.10

ليكن $f\in\mathscr{L}(E,F)$. إذا كانت العائلة $\mathscr{U}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ مولدة للفضاء الشعاعي E، فإنّ العائلة $\mathscr{F}=\{f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_n)\}$ مولدة لـ $\mathrm{Im}(f)$. ♠

برهان. نفرض أنّ العائلة $\mathscr{U}$ مولدة للفضاء الشعاعي E، ونبرهن أنّ العائلة $\mathscr{F}$ تولد $\mathrm{Im}(f)$. ليكن w شعاعا من F. عندئذ يوجد $u\in E$ بحيث $w=f(u)$. لمّا كانت العائلة $\mathscr{U}$ مولدة للفضاء الشعاعي E، فإنّ الشعاع u يكتب على شكل:

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n \tag{4.16}$$

حيث أنّ α_1، α_2، $\cdots$، α_n عبارة عن سلميات. بالاعتماد على خطية f، فإنّنا نستنتج من (4.16) أنّ

$$w=f(u)=\alpha_1f(u_1)+\alpha_2f(u_2)+\cdots+\alpha_nf(u_n).$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ كل شعاع من الفضاء $\mathrm{Im}(f)$ يكتب على شكل عبارة خطية لأشعة العائلة $\mathscr{F}$. وهذا ما يثبت أنّ هذه الأخيرة تولد حقا الفضاء $\mathrm{Im}(f)$.

□

قضية 4.11

ليكن $f \in \mathscr{L}(E,F)$ متباينا. إذا كانت العائلة $\mathscr{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ حرة، فإنّ العائلة $\mathscr{F} = \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)\}$ حرة. ♠

برهان. ليكن f تطبيقا خطيا متباينا. نفرض أنّ العائلة $\mathscr{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ حرة، ونبرهن أنّ العائلة $\mathscr{F} = \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)\}$ حرة. إذا كان

$$\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n) = 0_F$$

فإنّه، استنادا إلى خطية f، ينتج

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0_F.$$

وهذا يعني أنّ

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \in \ker(f). \tag{4.17}$$

إذ أنّ f تطبيق متباين، فإنّ $\ker(f) = \{0_E\}$. وعليه، فإنّنا نستنتج من (4.17) أنّ

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$$

وهذا يؤدي، استناد لكون الأشعة u_1، u_2، $\cdots$، u_n مستقلة خطيا، إلى

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

وبذلك فإنّ الأشعة $f(u_1)$، $f(u_2)$، $\cdots$، $f(u_n)$ مستقلة خطيا. □

قضية 4.12

ليكن $f \in \mathscr{L}(E,F)$ تقابليا. إذا كانت العائلة $\mathscr{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ أساس لـ E، فإنّ العائلة $\mathscr{F} = \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)\}$ هي أساس لـ F. ♠

برهان. نظرا لأنّ f تقابليا، فإنّ $\mathrm{Im}(f) = F$. وهكذا لإتمام البرهان يكفي تطبيق القضيتين 4.10 و 4.11. □

قضية 4.13

ليكن $f \in \mathscr{L}(E,F)$. إذا كان E منته البعد، فكذلك الحال بالنسبة للفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\ker(f)$ و $\mathrm{Im}(f)$. وعلاوة على ذلك لدينا:

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

♠

برهان. أنظر إلى [21, مبرهنة 2.2.2].

□

تطبيق 2.1. ليكن E فضاءا شعاعيا منته البعد، وليكن $f \in \mathscr{L}(E,F)$. برهن أنّ التطبيق f يكون غامرا إذا وفقط إذا كان متباينا.

الحل:
الحل بسيط، يترك للقارئ.

3 التطبيقات الخطية و المصفوفات

3 -1 مصفوفة مركبات شعاع بالنسبة إلى أساس

تعريف 4.4. ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، مزودا بالأساس $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. إذا u شعاعا من E يكتب في الأساس $\mathscr{B}$ على الشكل:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

فإنّنا نرمز بـ $[u]_{\mathscr{B}}$ إلى مصفوفة عمود

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

هذه المصفوفة تسمى مصفوفة مركبات الشعاع u بالنسبة إلى الأساس $\mathscr{B}$.

مثال 4.10. نزود الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ بالأساس

$$\mathscr{B} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. أوجد مصفوفة مركبات الشعاع $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ بالنسبة لأساس القانوني.
2. أوجد مصفوفة مركبات الشعاع $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ بالنسبة لأساس $\mathscr{B}$.

الحل:
1. الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ هو

$$\mathscr{E} = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

إذا الشعاع u يكتب في الأساس القانوني على الشكل:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 3e_1 - 5e_2.$$

ومن ثمّ فإنّ

$$[u]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

2. إيجاد السلميتين α_1 و α_2 بحيث أنّ:

$$u=\overset{u}{\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}}=\alpha_1\overset{u_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}+\alpha_2\overset{u_2}{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}.$$

المساواة أعلاه مكافئة للجملة الخطية التالية:

$$(S):\underbrace{\begin{array}{cc}u_1 & u_2\\ \end{array}\!\!\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\overset{u}{\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}}}_{b}.$$

إذ أنّ المصفوفة A قابلة للقلب، فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيد يعطى بـ:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}&=A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3-5\\-3-5\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

إذا الشعاع u يكتب في الأساس $\mathscr{B}$ على الشكل:

$$\begin{aligned}u&=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\\&=-u_1-4u_2.\end{aligned}$$

ومن ثمّ فإنّ

$$[u]_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}.$$

مثال 4.11. نزود الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ بالأساس

$$\mathscr{B}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

1. أوجد مصفوفة مركبات الشعاع $u=\begin{bmatrix}2\\-6\\4\end{bmatrix}$ بالنسبة لأساس القانوني.

2. أوجد مصفوفة مركبات الشعاع $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ بالنسبة لأساس $\mathscr{B}$.

الحل:

1. الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ هو

$$\mathscr{E} = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

إذا الشعاع u يكتب في الأساس القانوني على الشكل:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = 2e_1 - 6e_2 + 4e_3.$$

ومن ثمّ فإنّ

$$[u]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. إيجاد السلميات α_1، α_2 و α_3 بحيث أنّ:

$$u = \overset{u}{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}} = \alpha_1 \overset{u_1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + \alpha_2 \overset{u_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} + \alpha_3 \overset{u_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

المساواة أعلاه مكافئة للجملة الخطية التالية:

$$(S): \underset{A}{\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline \end{array}\!\!\!\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\overset{u}{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}}}.$$

المصفوفة A قابلة للقلب، نظرا لكون أعمدتها مشكلة من أشعة مستقلة خطيا، وعليه الجملة (S) تقبل حلا وحيد يعطى بـ:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا الشعاع u يكتب في الأساس $\mathscr{B}$ على الشكل:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= -2u_1 + 2u_2 + 8u_3. \end{aligned}$$

ومن ثمّ فإنّ

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

قضية 4.14

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، مزودا بالأساس $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. عندئذ التطبيق

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto f(u) = [u]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

خطي.

برهان. ليكن u و v شعاعين من E، ولتكن السلميتين λ و μ. إذا كان الشعاعين u و v يكتبان في الأساس $\mathscr{B}$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ v &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n \end{aligned} \tag{4.18}$$

فإنّ

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad [v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

باستعمال (4.18)، فإنّ $\lambda u + \mu v$ يكتب في الأساس $\mathscr{B}$ على الشكل التالي:

$$\lambda u + \mu v = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\, u_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\, u_2 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)\, u_n.$$

وهذا يؤدي إلى

$$[\lambda u + \mu v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

باستعمال (4.19) و (4.20) فإنّه ينتج أنّ

$$\begin{aligned}
f(\lambda u+\mu v) &= [\lambda u+\mu v]_{\mathscr{B}} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\beta_1 \\ \lambda\alpha_2+\mu\beta_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n+\mu\beta_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda[u]_{\mathscr{B}} + \mu[v]_{\mathscr{B}} \\
&= \lambda f(u) + \mu f(v).
\end{aligned}$$

وهذا ما يثبت أنّ التطبيق f خطي. □

3 -2 مصفوفة تطبيق خطي

قضية 4.15

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$، مزودين بالأساسيين $\mathscr{B}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ و $\mathscr{V}=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ على الترتيب. إذا كان $f:E\longrightarrow F$ تطبيقا خطيا. فإنّه توجد مصفوفة وحيدة $A\in\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ بحيث أنّ:

$$[f(u)]_{\mathscr{V}} = A\cdot[u]_{\mathscr{B}}, \qquad \forall u\in E. \tag{4.21}$$

المصفوفة A تسمى مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساسين $\mathscr{B}$ و $\mathscr{V}$. المصفوفة A يرمز لها بـ $M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f)$ و هي معرفة على الشكل التالي:

$$A = M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} [f(u_1)]_{\mathscr{V}} & [f(u_2)]_{\mathscr{V}} & & [f(u_n)]_{\mathscr{V}} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}.$$

♠

برهان. 1. **إثبات الوجود.** إذ أنّ $f(u_1)$، $f(u_2)$، $\cdots$، $f(u_n)$ عبارة عن أشعة من الفضاء F، فهي تكتب في الأساس $\mathscr{V}$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
f(u_1) &= a_{11}v_1+a_{21}v_2+\cdots+a_{m1}v_m, \\
f(u_2) &= a_{12}v_1+a_{22}v_2+\cdots+a_{m2}v_m, \\
&\vdots \\
f(u_n) &= a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+\cdots+a_{mn}v_m.
\end{aligned}$$

الآن نعرف المصفوفة A بـ:

$$\begin{array}{cccc} [f(u_1)]_{\mathscr{V}} & [f(u_2)]_{\mathscr{V}} & & [f(u_n)]_{\mathscr{V}} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

إذا كان u شعاعا من E، فإنّه يكتب في الأساس $\mathscr{B}$ على الشكل

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n.$$

إذا استنادا لخطية f يكون لدينا:

$$f(u)=\alpha_1f(u_1)+\alpha_2f(u_2)+\cdots+\alpha_nf(u_n).$$

ومن ثمّ فإنّنا نستنتج، استنادا إلى القضية 4.14، أنّ

$$\begin{aligned}
[f(u)]_{\mathscr{V}} &= \alpha_1[f(u_1)]_{\mathscr{V}}+\alpha_2[f(u_2)]_{\mathscr{V}}+\cdots+\alpha_n[f(u_n)]_{\mathscr{V}} \\
&= \alpha_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= A.[u]_{\mathscr{B}}
\end{aligned}$$

2. **إثبات الوحدانية.** نفرض أنه توجد مصفوفتين مختلفتين A و C بحيث:

$$C\cdot[u]_{\mathscr{B}}=[f(u)]_{\mathscr{V}}=A\cdot[u]_{\mathscr{B}},\quad \forall u\in E.$$

بأخذ $u=u_1$ في المساواة أعلاه، ينتج أن الشعاع $f(u_1)$ يكتب في الأساس $\mathscr{V}$ بطريقتين مختلفتين، وهذا غير ممكن. وعليه فإنّه إن وجدت مصفوفة تحقق العلاقة (4.21) فهي وحيدة.

□

مثال 4.12. ليكن الفضاءين الشعاعيين $E=\mathbb{R}^3$ و $F=\mathbb{R}^2$ المزودين بالأساسيين القانونيين

$$\mathscr{B}=\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

و

$$\mathscr{V}=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

على الترتيب. أوجد مصفوفة التطبيق الخطي المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} x+y+z\\ 2x-y+3z\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بالنسبة لأساسين $\mathscr{B}$ و $\mathscr{V}$.

الحل:

1. نكتب الشعاع $f(u_1)$ في الأساس $\mathscr{V}$.

لدينا:

$$f(u_1)=f(1,0,0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=v_1+2v_2$$

وعليه فإنّ

$$[f(u_1)]_{\mathscr{V}}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

2. نكتب الشعاع $f(u_2)$ في الأساس $\mathscr{V}$.

لدينا:

$$f(u_2)=f(0,1,0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=v_1-v_2.$$

وهكذا ينتج أنّ

$$[f(u_2)]_{\mathscr{V}}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

3. نكتب الشعاع $f(u_3)$ في الأساس $\mathscr{V}$.

لدينا:

$$f(u_3)=f(0,0,1)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=v_1+3v_2.$$

ومنه يأتي

$$[f(u_3)]_{\mathscr{V}}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

من (4.22)، (4.23) و (4.24) نستنتج أنّ

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f)=\begin{array}{c}\begin{matrix}[f(u_1)]_{\mathscr{V}} & [f(u_2)]_{\mathscr{V}} & [f(u_3)]_{\mathscr{V}}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\end{array}.$$

مثال 4.13. نرجع إلى المثال السابق. نقوم بتغيير أساس كل من فضاء البدء و فضاء الوصول، إذ نزود $E=\mathbb{R}^3$ بالأساس

$$\mathscr{B}'=\left\{u'_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, u'_2=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, u'_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

كما نزود $F=\mathbb{R}^2$ بالأساس

$$\mathcal{V}'=\left\{v_1'=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, v_2'=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

أوجد مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساسين $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{V}'$.

الحل:

1. كتابة الشعاع $f(u_1')$ في الأساس $\mathcal{V}'$.

$$\begin{aligned} f(u_1') &= \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \alpha_1 \overset{\overset{v_1'}{\downarrow}}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} + \alpha_2 \overset{\overset{v_2'}{\downarrow}}{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-8\\5\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

وعليه الشعاع $f(u_1')$ يكتب في الأساس $\mathcal{V}'$ كما يلي:

$$f(u_1') = -8v_1' + 5v_2'.$$

إذا

$$[f(u_1)]_{\mathcal{V}'} = \begin{bmatrix}-8\\5\end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

2. كتابة الشعاع $f(u_2')$ في الأساس $\mathcal{V}'$.

$$\begin{aligned} f(u_2') &= \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = \alpha_1 \overset{\overset{v_1'}{\downarrow}}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} + \alpha_2 \overset{\overset{v_2'}{\downarrow}}{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

وعليه الشعاع $f(u_2')$ يكتب في الأساس $\mathcal{V}'$ كما يلي:

$$f(u_2') = 5v_1' + 0v_2'$$

وهكذا يكون لدينا

$$[f(u_2')]_{\mathcal{V}'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

3. كتابة الشعاع $f(u_3')$ في الأساس $\mathcal{V}'$.

$$\begin{aligned} f(u_3') = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} &= \alpha_1 \overset{v_1'}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} + \alpha_2 \overset{v_2'}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

و عليه الشعاع $f(u_3')$ يكتب في الأساس $\mathcal{V}'$ كما يلي:

$$f(u_3') = -7v_1' + 5v_2'.$$

وهكذا يكون لدينا

$$[f(u_3')]_{\mathcal{V}'} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

من (4.25)، (4.26) و (4.27) نستنتج أنّ

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{V}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [f(u_1')]_{\mathcal{V}'} & [f(u_2')]_{\mathcal{V}'} & [f(u_3')]_{\mathcal{V}'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -8 & \quad 5 \quad & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

مثال 4.14. ليكن التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} x-y+z \\ x+3z \\ 2y+2z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

نزود الفضاء الشعاعي $E=\mathbb{R}^3$ بالأساس

$$\mathscr{B}'=\left\{u_1'=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2'=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3'=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

أوجد المصفوفة $M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

الحل:

1. نكتب الشعاع $f(u_1')$ في الأساس $\mathscr{B}'$.

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{f(u_1')} &= \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1'} + \alpha_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_2'} + \alpha_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_3'} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا الشعاع $f(u_1')$ يكتب في الأساس $\mathscr{B}'$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} f(u_1') &= \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' \\ &= -8u_1' - 7u_2' + 5u_3'. \end{aligned}$$

وهكذا يكون لدينا

$$[f(u_1')]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

2. نكتب الشعاع $f(u_2')$ في الأساس $\mathscr{B}'$.

$$\begin{array}{ccccccc} f(u_2') & & u_1' & & u_2' & & u_3' \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} & = \alpha_1 & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & + \alpha_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & + \alpha_3 & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

إذا الشعاع $f(u_2')$ يكتب في الأساس $\mathscr{B}'$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} f(u_2') &= \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' \\ &= 2u_1' + 5u_2' - u_3'. \end{aligned}$$

ومن ثمّ فإنّه ينتج

$$[f(u_2')]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

3. نكتب الشعاع $f(u_3')$ في الأساس $\mathscr{B}'$.

$$\begin{array}{ccccccc} f(u_3') & & u_1' & & u_2' & & u_3' \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} & = \alpha_1 & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & + \alpha_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & + \alpha_3 & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

ومنه فإنّ

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

إذا الشعاع $f(u_3')$ يكتب في الأساس $\mathscr{B}'$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} f(u_2') &= \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' \\ &= -9u_1' - 4u_2' + 6u_3'. \end{aligned}$$

وبهذا يكون لدينا

$$[f(u_3')]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

من (4.28)، (4.29) و (4.30) نستنتج أنّ

$$M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [f(u_1')]_{\mathscr{B}'} & [f(u_2')]_{\mathscr{B}'} & [f(u_3')]_{\mathscr{B}'} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & 5 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

قضية 4.16

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

إذا كان f التطبيق الخطي الملحق بالمصفوفة A المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\mapsto f(u) = Au \end{aligned}$$

فإنّ $M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f) = A$، حيث أنّ $\mathscr{B}$ و $\mathscr{V}$ يمثلان الأساسين القانونيين للفضاءين $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ على الترتيب. ♠

برهان. البرهان بسيط لدى فإنّنا نتركه للقارئ. □

تطبيق 3.1. لقد برهنا في المثال (4.12) أنّ مصفوفة التطبيق الخطي

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} x+y+z\\ 2x-y+3z\end{bmatrix}\end{aligned}$$

هي:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

حيث أنّ $\mathscr{B}$ و $\mathscr{V}$ هما، على الترتيب، الأساسين القانونيين للفضاءين $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$. الآن نود أن نطبق القضية السابقة؛ لحصول على المصفوفة $M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f)$.
إذ أنّه يمكن كتابة عبارة التطبيق الخطي f على الشكل المصفوفي:

$$\begin{aligned} f(u)&=\begin{bmatrix} x+y\\ x-2y+z\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\\ &=Au\end{aligned}$$

فإنّه، استناد إلى القضية السابقة، ينتج:

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f)&=A\\ &=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

تطبيق 3.2. ليكن التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} x-y+z\\ x+3z\\ 2y+2z\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

نزود الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ بأساسه القانوني

$$\mathscr{B}=\left\{e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

أوجد المصفوفة $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

الحل:
إذ أنّه يمكن كتابة عبارة التطبيق الخطي f على الشكل المصفوفي:

$$\begin{aligned} f(u) &= \begin{bmatrix} x-y+z \\ x+3z \\ 2y+2z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= Au \end{aligned}$$

فإنّه، استناد إلى القضية السابقة، ينتج:

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f) &= A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ملاحظة 4.2

من الآن و صاعدا الكتابة $f:(E;\mathscr{B}) \to (E;\mathscr{V})$ تعني أنّ f عبارة عن تطبيق مجموعة بدئه هو الفضاء الشعاعي E مزود بالأساس $\mathscr{B}$، ومجموعة وصوله هو الفضاء الشعاعي F مزود بالأساس $\mathscr{V}$. ♣

3 -3 مصفوفة التطبيق المطابق

قضية 4.17

مصفوفة التطبيق المطابق لـ E المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:(E;\mathscr{B}) &\longrightarrow (E;\mathscr{B}) \\ u &\longmapsto Id_E(u) = u \end{aligned}$$

تساوي مصفوفة الوحدة I_n، أي أنّ: $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(Id_E) = I_n$. ♠

برهان. البرهان بسيط، يترك للقارئ. □

3 -4 مصفوفة تركيب تطبيقين خطين

قضية 4.18

إذا كان $(E;\mathscr{U}) \xrightarrow{f} (F;\mathscr{V}) \xrightarrow{g} (G;\mathscr{W})$ تطبيقين خطيين، فإنّ مصفوفة التركيب $g\circ f$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$M_{\mathscr{U},\mathscr{W}}(g\circ f) = M_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(g)\cdot M_{\mathscr{U},\mathscr{V}}(f).$$ ♠

3 -5 مصفوفة التطبيق العكسي لتطبيق خطي تقابلي

قضية 4.19

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، مزودا بالأساس $\mathscr{B}$. إذا كان $f:(E;\mathscr{B}) \longrightarrow (E;\mathscr{B})$ تطبيقا خطيا تقابليا، فإنّ $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^{-1}) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)^{-1}$.

4 تغيير الأسس

4 -1 مصفوفة الانتقال

تعريف 4.5. نزود الفضاء الشعاعي E بالأساسيين $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ و $\mathscr{B}' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$.
مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$ هي المصفوفة:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [u'_1]_{\mathscr{B}} & [u'_2]_{\mathscr{B}} & & [u'_n]_{\mathscr{B}} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array}.$$

بمعنى آخر، مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$ هي مصفوفة التطبيق المطابق Id_E المعرف بـ:

$$\begin{aligned} Id_E : (E;\mathscr{B}') &\longrightarrow (E;\mathscr{B}) \\ u &\mapsto Id_E(u) = u. \end{aligned}$$

مثال 4.15. نزود الفضاء الشعاعي $E = \mathbb{R}^3$ بالأساسين

$$\mathscr{B} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$\mathscr{B}' = \left\{ u'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- أوجد مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$، ثم مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}'$ إلى الأساس $\mathscr{B}$.

الحل:

1. إيجاد مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$.
أشعة الأساس $\mathscr{B}'$ تكتب في الأساس $\mathscr{B}$ كالآتي:

$$
\begin{aligned}
u'_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = u_1 + 2u_2 - u_3 \\
u'_2 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2u_1 + 2u_2 + u_3 \\
u'_3 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -u_1 + 3u_2 + u_3
\end{aligned}
$$

وعليه فإنّ:

$$
[u'_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [u'_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [u'_3]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

إذا مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$ هي المصفوفة:

$$
P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [u'_1]_{\mathscr{B}} & [u'_2]_{\mathscr{B}} & [u'_3]_{\mathscr{B}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

2. إيجاد مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}'$ إلى الأساس $\mathscr{B}$.
(ا). نكتب الشعاع u_1 في الأساس $\mathscr{B}'$.

$$
\begin{aligned}
\overset{\overset{u_1}{\downarrow}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} &= \alpha_1 \overset{\overset{u'_1}{\downarrow}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}} + \alpha_2 \overset{\overset{u'_2}{\downarrow}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} + \alpha_3 \overset{\overset{u'_3}{\downarrow}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

إذا

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 5 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/15 \\ 1/3 \\ -4/15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

إذا الشعاع u_1 يكتب في الأساس $\mathbb{B}'$ على الشكل:

$$u_1 = \frac{1}{15} u_1' + \frac{1}{3} u_2' - \frac{4}{15} u_3'.$$

وبهذا يكون لدينا

$$[u_1]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1/15 \\ 1/3 \\ -4/15 \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

بنفس الطريقة نجد

$$[u_2]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

و

$$[u_3]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} -8/15 \\ 1/3 \\ 2/15 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

إذا مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}'$ إلى الأساس $\mathscr{B}$ هي المصفوفة:

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [u_1]_{\mathscr{B}'} & [u_2]_{\mathscr{B}'} & [u_3]_{\mathscr{B}'} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/15 & 1/5 & -8/15 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -4/15 & 1/5 & 2/15 \end{bmatrix} \end{array} \\
&= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 5 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

قضية 4.20

إذا كان E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، مزود بالأساسيين $\mathscr{B}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ و $\mathscr{B}'=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. فإن مصفوفة الانتقال P من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$ هي مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها P^{-1} هي نفسها مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}'$ إلى الأساس $\mathscr{B}$.

مثال 4.16. في المثال (4.15) وجدنا أنّ مصفوفة الانتقال من الأساس

$$\mathscr{B}=\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

إلى الأساس

$$\mathscr{B}'=\left\{u'_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, u'_2=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, u'_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

هي المصفوفة:

$$P=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&2&3\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

و أنّ مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}'$ إلى الأساس $\mathscr{B}$ هي المصفوفة:

$$Q=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1&3&-8\\5&0&5\\-4&3&2\end{bmatrix}.$$

لمّا كان:

$$\begin{aligned}PQ&=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&2&3\\-1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3&-8\\5&0&5\\-4&3&2\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}15&0&0\\0&15&0\\0&0&15\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\&=I,\end{aligned}$$

فإنّ $Q=P^{-1}$.

قضية 4.21

ليكن E فضاءا شعاعيا على $\mathbb{R}$، مزود بالأساسيين $\mathscr{B}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ و $\mathscr{B}'=\{u'_1,u'_2,\cdots,u'_n\}$، ولتكن P مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$. عندئذ يكون لدينا:

$$[u]_{\mathscr{B}'}=P^{-1}[u]_{\mathscr{B}},\quad \forall u\in E.$$

تطبيق 4.1. نزود الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ بالأساسين

$$\mathscr{B}=\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

و

$$\mathscr{B}'=\left\{u'_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},u'_2=\begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix},u'_3=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}\right\}.$$

- أكتب الشعاع $w=(-1,3,2)$ في الأساس $\mathscr{B}'$.

الحل: مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$ هي المصفوفة:

$$P=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}[u'_1]_{\mathscr{B}} & [u'_2]_{\mathscr{B}} & [u'_3]_{\mathscr{B}}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&3&-2\\1&0&4\\1&-3&5\end{bmatrix}\end{array}.$$

استنادا إلى القضية السابقة، فإنّه ينتج:

$$\begin{aligned}[w]_{\mathscr{B}'}&=P^{-1}[w]_{\mathscr{B}}\\&=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}12&-9&12\\-1&7&-6\\-3&6&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-12-27+24\\1+21-12\\3+18-6\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1\\2/3\\1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

إذا الشعاع w يكتب في الأساس $\mathscr{B}'$ على الشكل التالي:

$$w=-u'_1+\frac{2}{3}u'_2+u'_3.$$

4 -2 مصفوفة تطبيق خطي الناتجة عن تغيير الأسس

قضية 4.22

إذا كانت A مصفوفة التطبيق الخطي $f:(E;\mathscr{B})\ \to(F;\mathscr{V})$ فإن مصفوفة التطبيق f عندما نعوض الأساسين $\mathscr{B}$ و $\mathscr{V}$ على الترتيب بالأساسين $\mathscr{B}'$ و $\mathscr{V}'$ تعطى بالصيغة التالية:

$$B=Q^{-1}AP$$

حيث P تمثل مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ نحو الأساس $\mathscr{B}'$ و Q تمثل مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{V}$ نحو الأساس $\mathscr{V}'$.

برهان. حسب المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{V}) \arrow[d, "Q^{-1}"', "Id_F"] \\
(E,\mathscr{B}') \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "f", "B"'] & (F,\mathscr{V}')
\end{tikzcd}$$

نستنتج أنّ $f = Id_F \circ f \circ Id_E$، وعليه ينتج $B = Q^{-1}AP$.

□

تطبيق 4.2. ليكن التطبيق الخطي:

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^3,\mathscr{B}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2,\mathscr{V}) \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longmapsto f(u) = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x-y+3z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حيث أنّ:

$$\mathscr{B} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$\mathscr{V} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

لقد برهنا في المثال (4.12) أنّ:

$$A = M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

كما بينا في المثال (4.13) أنّ

$$B = M_{\mathscr{B}',\mathscr{V}'}(f) = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

هي مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساسين

$$\mathscr{B}' = \left\{ u_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$\mathscr{V}' = \left\{ v_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

تحقق أنّ $B = Q^{-1}AP$، حيث أنّ P هي مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ نحو الأساس $\mathscr{B}'$، وأنّ Q هي مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{V}$ نحو الأساس $\mathscr{V}'$.

الحل: مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$ هي المصفوفة:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} [u_1']_{\mathscr{B}} & [u_2']_{\mathscr{B}} & [u_3']_{\mathscr{B}} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{V}$ نحو الأساس $\mathscr{V}'$ هي المصفوفة:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} [v_1']_{\mathscr{V}} & [v_2']_{\mathscr{V}} \end{array} \\ Q = & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

وهكذا يكون لدينا:

$$\begin{aligned} Q^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= B. \end{aligned}$$

تطبيق 4.3. ليكن التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longmapsto f(u) = \begin{bmatrix} x-z \\ x-y \\ 2y+z \\ x-y+z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

أوجد مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساسين

$$\mathscr{B}' = \left\{ u_1' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$\mathscr{V}' = \left\{ v_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_4' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

الحل:
يمكن كتابة التطبيق الخطي f على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{aligned} f(u) &= \begin{bmatrix} x-z \\ x-y \\ 2y+z \\ x-y+z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= Au. \end{aligned}$$

إذا المصفوفة A تمثل مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساسين القانونيين

$$\mathscr{B} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$\mathscr{V} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ نحو الأساس $\mathscr{B}'$ هي المصفوفة:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} [u_1']_{\mathscr{B}} & [u_2']_{\mathscr{B}} & [u_3']_{\mathscr{B}} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{array}$$

مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{V}$ نحو الأساس $\mathscr{V}'$ هي المصفوفة:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [v_1']_{\mathcal{V}} & [v_2']_{\mathcal{V}} & [v_3']_{\mathcal{V}} & [v_3']_{\mathcal{V}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

استنادا إلى القضية 4.22، فإنّ مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساسين $\mathscr{B}'$ و $\mathcal{V}'$ يمكن حسابها كما يلي:

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{B}',\mathcal{V}'}(f) &= B = Q^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -2 \\ 8 & 4 & 6 \\ -2 & -5 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 57 & 31 & 49 \\ -36 & -20 & -32 \\ -1 & 1 & 3 \\ -20 & -18 & -24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

قضية 4.23

إذا كانت A مصفوفة التطبيق الخطي

$$(E;\mathscr{B}) \xrightarrow{f} (E;\mathscr{B})$$

فإنّ مصفوفة التطبيق f عندما نعوض الأساس $\mathscr{B}$ بالأساس $\mathscr{B}'$ تعطى بالصيغة التالية:

$$M = P^{-1}AP,$$

حيث P تمثل مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ نحو الأساس $\mathscr{B}'$.

♠

برهان. يكفي أخذ $E = F$، $\mathcal{V} = \mathscr{B}$ و $\mathcal{V}' = \mathscr{B}'$ في القضية السابقة. □

تطبيق 4.4. في المثال (4.14) وجدنا أن المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & 5 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

تمثل مصفوفة التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:(\mathbb{R}^3,\mathscr{B}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3,\mathscr{B}) \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} x-y+z\\ x+3z\\ 2y+2z\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

حيث أنّ:

$$\mathscr{B}=\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

- أحسب هذه المصفوفة باستعمال القضية 4.23.

الحل:

إذ أنّ التطبيق الخطي f يكتب على الشكل المصفوفي

$$\begin{aligned} f(u) &= \begin{bmatrix} x-y+z\\ x+3z\\ 2y+2z\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} \\ &= Au, \end{aligned}$$

فإنّ المصفوفة A هي نفسها مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة لأساس القانوني

$$\mathscr{B}=\left\{e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathscr{B}$ نحو الأساس $\mathscr{B}'$ هي:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

باستعمال 4.23، فإنّنا نتحصل على:

$$\begin{aligned}
M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f) &= B = P^{-1}AP \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & 5 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5 تمارين

تمرين 4.1

هل التطبيقات التالية

$$
\begin{aligned}
&f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; \quad f_1(x,y)=(x+y,2x-3y),\\
&f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; \quad f_2(x,y)=(xy,x),\\
&f_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; \quad f_3(x,y)=\left(x-2y,e^{x+y}\right),\\
&f_4:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; \quad f_4(x,y,z)=(2x+y+z,y-z,x+y),\\
&f_5:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4; \quad f_5(x,y)=(y,0,x-7y,x+y),\\
&f_6:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2; \quad f_6(x,y,z,t)=(x-z,y-t),\\
&f_7:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2; \quad f_7(x,y,z,t)=(x+y-2z,x-t+1),\\
&f_8:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}; \quad f_8(x,y,z)=x+2y-z,\\
&f_9:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2; \quad f_9(x,y,z)=(|x|,\,y-z)
\end{aligned}
$$

خطية؟

تمرين 4.2

ليكن التطبيق:

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\
u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\mapsto f(u)=x+2y-z.
\end{aligned}
$$

1. برهن أنّ f تطبيق خطي.
2. حدد $\ker(f)$، ثم أوجد أساس له.
3. حدد $\mathrm{Im}(f)$، ثم أوجد أساس له.

تمرين 4.3

برهن أنّ المجموعة

$$
G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad \begin{cases}-x+y=0\\ 2x-3y+z=0\end{cases}\right\}
$$

هي نواة تطبيق خطي f يطلب تعينه، ثم حدد صورة هذا التطبيق.

تمرين 4.4

برهن أنّ الفضاء الشعاعي

$$
G=vect\left\{v_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}\right\}
$$

هو صورة تطبيق خطي f يطلب تعينه، ثم حدد نواة هذا التطبيق.

تمرين 4.5

ليكن التطبيق:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\mapsto f(u)=\begin{bmatrix} x-y+2z\\ 2x-z\\ 4x+2y-7z\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. برهن أنّ f تطبيق خطي.
2. حدد $\ker(f)$، ثم أوجد أساس له.
3. أوجد عائلة مولدة لـ $\mathrm{Im}(f)$، ثم استنتج أساس لـ $\mathrm{Im}(f)$.

تمرين 4.6

ليكن التطبيق:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\mapsto f(u)=\begin{bmatrix} x+y+z\\ x-y+2z\\ x-2y+z\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. برهن أنّ f تطبيق خطي.
2. حدد $\ker(f)$، ثم أوجد أساس له.
3. أوجد عائلة مولدة لـ $\mathrm{Im}(f)$، ثم استنتج أساس لـ $\mathrm{Im}(f)$.
4. استنتج أنّ f تطبيق تقابلي، ثم أعط عبارة f^{-1}.

تمرين 4.7

ليكن التطبيقين:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\mapsto f(u)=\begin{bmatrix} 2x+3y-z\\ x+2y-z\\ -5x+y+4z\end{bmatrix}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\mapsto g(u)=\begin{bmatrix} -x+y+z\\ x-y+z\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. برهن أنّ f و g تطبيقين خطيين.
2. برهن أنّ f تطبيق تقابلي، ثم أعط عبارة f^{-1}.
3. حدد $Ker(g)$ و $Im(g)$، ثم أوجد أساس لكل واحد منهما.
4. برهن أنّ gof تطبيق خطي.

تمرين 4.8

ليكن التطبيق: $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ:

$$f(e_1)=\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\quad f(e_2)=\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad f(e_3)=\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{bmatrix},\quad f(e_4)=\begin{bmatrix} 0\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$$

حيث أنّ $\mathscr{B}=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ يمثل الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$.

1. أوجد عبارة $f(u)$ من أجل كل شعاع u من $\mathbb{R}^4$.
2. تحقق أنّ التطبيق f خطي.
3. حدد $\ker(f)$. هل التطبيق f متباين؟
4. حدد $\operatorname{Im}(f)$. هل التطبيق f غامر؟ هل هو تقابلي؟

تمرين 4.9

لتكن

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ بالنسبة للأساسين القانونيين.

1. حدد $\ker(f)$، ثم أوجد أساس له. هل التطبيق f متباين؟
2. حدد $\operatorname{Im}(f)$، ثم استنتج أساس له. هل التطبيق f غامر؟
3. استنتج أساس للفضاء $\mathbb{R}^4$ يضم أشعة أساس الفضاء $\operatorname{Im}(f)$.

تمرين 4.10

ليكن التطبيق: $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ:

$$f(e_1)=v_1+v_2,\quad f(e_2)=-v_1+v_2,\quad f(e_3)=v_1+3v_2+2v_3,\quad f(e_4)=v_1+v_2+v_3,$$

حيث أنّ $\mathscr{B}=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ يمثل الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$، و $\mathscr{B}=\{v_1, v_2, v_3\}$ يمثل الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

1. أوجد عبارة $f(u)$ من أجل كل شعاع u من $\mathbb{R}^4$.
2. تحقق أنّ التطبيق f خطي.
3. حدد $\operatorname{Im}(f)$، ثم أعط أساس له. هل التطبيق f غامر؟
4. أحسب $\dim\ker(f)$. هل التطبيق f متباين؟
5. حدد $\ker(f)$.

تمرين 4.11

نزود الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ بالأساس

$$\mathscr{B}'=\left\{u'_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, u'_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

1. أكتب مصفوفة الانتقال P من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$.
2. أكتب الشعاع $w=(-1,3,2)$ في الأساس $\mathscr{B}'$.

تمرين 4.12

ليكن التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} x+2y-z\\ y-2z\\ 3x-y+2z\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. أوجد المصفوفة $A=M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$، حيث أنّ $\mathscr{B}$ يمثل الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$.
2. نزود الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ بالأساس

$$\mathscr{B}'=\left\{u_1'=\begin{bmatrix} 2\\ -3\\ 1\end{bmatrix}, u_2'=\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}, u_3'=\begin{bmatrix} -1\\ 6\\ 4\end{bmatrix}\right\}.$$

(ا). أكتب مصفوفة الانتقال P من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$.
(ب). أحسب مقلوب المصفوفة P.
(ج). أوجد المصفوفة $B=M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

تمرين 4.13

ليكن التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ u=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} &\longmapsto f(u)=\begin{bmatrix} 2x+3z\\ -x+4y+z\\ y-z\\ x-y+z\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. أوجد المصفوفة $A=M_{\mathscr{B},\mathscr{V}}(f)$، حيث أنّ $\mathscr{B}$ و $\mathscr{V}$ هما، على الترتيب، الأساسين القانونيين للفضاءين $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^4$.
2. نزود الفضاءين الشعاعيين $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^4$ على الترتيب، بالأساسين

$$\mathscr{B}'=\left\{u_1'=\begin{bmatrix} 4\\ 2\\ -3\end{bmatrix}, u_2'=\begin{bmatrix} 1\\ 5\\ 6\end{bmatrix}, u_3'=\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right\}$$

و

$$\mathscr{V}'=\left\{v_1'=\begin{bmatrix} 1\\ 3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}, v_2'=\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}, v_3'=\begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}, v_4'=\begin{bmatrix} 2\\ 4\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right\}.$$

(ا). أكتب مصفوفة الانتقال P من الأساس $\mathscr{B}$ إلى الأساس $\mathscr{B}'$.
(ب). أكتب مصفوفة الانتقال Q من الأساس $\mathscr{V}$ إلى الأساس $\mathscr{V}'$.
(ج). أحسب مقلوب المصفوفة Q.
(د). أوجد المصفوفة $B=M_{\mathscr{B}',\mathscr{V}'}(f)$.