II. المجموعات . العلاقات . التطبيقات :

1/ المجموعات :

1. مفهوم المجموعة :

عند الحديث عن فرقة الجنود أو حزمة أقلام نحن أمام شيء يدعى بالمجموعة.

2. خواص المجموعة :

1. المجموعة كائن رياضياتي
2. أشياء المجموعة متمايزة أي أنه لا داعي للتكرار
3. المجموعة هي معينة تماما وواضحة أي يمكننا الحكم بسهولة عن إن كانت تنتمي للمجموعة
4. ليس للترتيب الذي تذكر فيه الأشياء أي أثر عليها

3. عناصر مجموعة :

يسمى كل شيء من الأشياء التي تكون مجموعة عنصرا من هذه المجموعة.

مثال ①: عناصر مجموعة كلمة عربي هي: ع، ر، ب، ي

مثال ②: عناصر مجموعة الأرقام 38635 هي: 3، 6، 8، 5

مثال ③: عناصر مجموعة رؤوس المضلع ABCDEF هي A، B، C، D، E، F

4. طرائق كتابة مجموعة :

• تكتب مجموعة بذكر جميع عناصرها بين حاضنتين مع وضع فاصلة بين كل عنصرين.

مثال:

X هي مجموعة رؤوس المضلع ABCDEF.

$X = \{A; B; C; D; E; F\}$

• تكتب مجموعة بذكر خاصة.

مثال:

Y هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية الأصغر من 10

$Y = \{x :$ x عدد طبيعي أولي أصغر من 10 $\}$

5. تعريف المجموعة المنتهية :

المجموعة المنتهية هي مجموعة يمكن الانتهاء من عدد عناصرها مثلا: المجموعة $\{0;2;4;8\}$.

6. تعريف المجموعة الغير منتهية :

المجموعة الغير منتهية هي مجموعة لا يمكن الانتهاء من عدد عناصرها مثلا: قطعة مستقيم مجموعة غ م، مجموعة الأعداد الطبيعية غ منتهية.

7. المجموعة الخالية ، وحيدة العنصر ، الزوج :

أ. المجموعة الخالية : هي مجموعة لا تحوي أي عنصر ونرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\ \}$.

ب. مجموعة وحيدة العنصر : هي مجموعة تحوي عنصر وحيد.

ج. مجموعة الزوج : هي مجموعة تحتوي على عنصرين فقط.

8. المجموعات الأساسية للأعداد :

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.
- مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$.
- مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

9. مفهوم الانتماء وعدم الانتماء :

إذا كان a عنصر من x نقول a ينتمي لـ x ونكتب $a \in x$

نفي $a \in x$ هو $a \notin x$ (a لا ينتمي لـ x).

10. مفهوم الاحتواء وعدم الاحتواء :

لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين.

إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B نقول A محتواة في B ونكتب $A \subset B$

أو $B \supset A$ ونقرأ B تحتوي على A أو B تحوي A.

• كل من $\in$ و $\notin$ تربط عنصر لمجموعة.

• كل من $\subset$ و $\not\subset$ تربط مجموعة لمجموعة.

مبرهنة ①:

من أجل كل مجموعة x فإن: $\emptyset \subset x$

11- مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن E مجموعة غير خالية تسمى المجموعة $P(E)$ مجموعة أجزاء E

$$P(E)=\{A \mid A\subset E\}$$

مبرهنة ②:

إذا كانت E تشمل n عنصر فإن عناصر P هو 2^n

12. عائلة من المجموعات:

تعريف: نسمي كل مجموعة عناصرها مجموعات "عائلة من المجموعات".

مثال:

$$X=\{\{1\};\{3,5\};\{\emptyset\}\}$$

X هي عائلة من المجموعات.

$$Y=\{5;\{3;7;9\};\{\mathbb{R}\}\}$$

Y ليست عائلة من المجموعات لأن 5 ليست مجموعة

13. العمليات على المجموعات:

لتكن A_1 ، A_2 ---- A_n مجموعات غير خالية.

أ. التقاطع:

تقاطع هذه المجموعات هو المجموعة $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ حيث:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid \forall i\in\{1;2;\dots;n\},\ x\in A_i\}$$

(هي مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعات)

ب. الاتحاد:

اتحاد هذه المجموعات هو المجموعة $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ حيث:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j=\{x \mid x\in A_1 \vee x\in A_2 \vee x\in A_3 \dots x\in A_j\}$$

ج. الفرق:

الفرق بين مجموعتين:

لتكن A و B مجموعتين

$$A-B=A-B=A\setminus B$$

$$=\{x\in A : x\notin B\}$$

مثال: $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}^*_-$

د. الفرق التناظري:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

مثال:

$$\{1;2;3;4\}\Delta\{3;4;5;6\}=\{1;2\}\cup\{5;6\}$$

$$=\{1;2;5;6\}$$

8. متممة مجموعة جزئية إلى مجموعة:

ليكن E مجموعة و $A\subset E$.

متممة A إلى E هي المجموعة $C_E A$

حيث: $C_E A=E-A$

مثال: $C_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_+=\mathbb{R}-\mathbb{R}_+=\mathbb{R}^*_-$

14. تجزئة مجموعة غير خالية:

لتكن E مجموعة غير خالية و $\{A_1;A_2;A_3\dots A_n\}$ عائلة من المجموعات حيث:

$$\forall i\in\{1;2;\dots n\}\ A_i\subset E$$

تعريف:

نقول عن العائلة $\{A_1;A_2\dots A_n\}$ تجزئة لـ E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- $\forall i\in\{1;2;3\dots n\}\quad A_i\neq\emptyset$
- $\bigcup_{j=1}^{n} A_j=E$
- $\forall i\in\{1;2;\dots n\};\ \forall j\in\{1;2;\dots n\}\ i\neq j$

$$A_i\cap A_j=\emptyset$$

15. الجداء الديكارتي لمجموعة في مجموعة:

$$A\times B=\{(x;y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

تعميم:

إذا كانت A_1 ، A_2 ، .... A_n مجموعات فإن:

$$\prod_{j=1}^{n} A_j=A_1\times A_2\times\dots\times A_n$$

$$=\{(x_1;x_2;x_3;\dots;x_n) \mid x_k\in A_k\}$$

المجموعة $\prod_{j=1}^{n} A_j$ تدعى الجداء الديكارتي للمجموعات A_1 ، A_2 ، --- A_n

حالة خاصة: $A_1=A_2=A_3\dots=A_n$

$$A^n=A\times A\times A\dots\times A=\{(x_1;x_2\dots;x_n) \mid x_i\in A\}$$

A^n تسمى القوة الديكارتية ذات الرتبة n

II/ العلاقات :

تعريف العلاقات : نعتبر مجموعتين غير خاليتين E ، F .

نسمي علاقة بين المجموعتين F و E كل خاصية تسمح بأن نرفق عناصر من E بعناصر من F .

نرمز للعلاقات بالأحرف ... T ، S ، R .

وإذا كان العنصر $a\in E$ مرتبطا مع العنصر $b\in F$

نكتب aRb .

بيان علاقة :

لتكن R علاقة بين المجموعتين E ، F .

نسمي بيان العلاقة R المجموعة الجزئية من $E\times F$

والمعرفة ب : $G_R=\{(a;b)\in E\times F / aRb\}$

مثال :

1. لتكن $E=\{2;3;5\}$ و $F=\{3;4;6;9\}$ نعرف العلاقة R كالتالي :

من أجل $a\in E$ ، $b\in F$ ؛ aRb إذا وفقط إذا كان a يقسم b .

لدينا :

$3R9$ ، $3R6$ ، $3R3$ ، $2R6$ ، $2R4$

ومنه بيان العلاقة $G_R=\{(2;4);(2;6);(3;3),(2;6);(2;4)\}$

2. لتكن $E=\{2;3;5\}$ و $F=\{3;4;6;9\}$ نعرف العلاقة S كالتالي :

من أجل $a\in E$ ، $b\in F$: aSb إذا وفقط إذا كان a أكبر تماما من b لدينا : $5S4$ ، $5S3$

$G_R=\{(5;4);(5;3)\}$

ملاحظة :

- نلاحظ أن خلاصة دراسة علاقة هي تحديد بيانها ، ومنه يمكننا كتابة $(a;b)\in R$ عوض aRb
- نسمي $\emptyset$ علاقة مستحيلة .

تعريف العلاقة الثنائية :

نسمي علاقة ثنائية على المجموعة E كل مجموعة جزئية من $E\times E$

أمثلة :

1. العلاقة "يقسم" المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية الغير معدومة $\mathbb{N}^*$.
2. العلاقة "أصغر من أو يساوي" " " الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

خواص علاقة ثنائية :

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E .

أ- الإنعكاس :

نقول أن العلاقة R إنعكاسية إذا تحقق

$\forall a\in E : (a;a)\in R$ أي aRa .

ب- التناظر :

نقول أن العلاقة R تناظرية إذا تحقق

$$\forall a;b\in E : (a;b)\in R \Rightarrow (b;a)\in R$$

أي $\forall a;b\in E : aRb \Rightarrow bRa$

ج- ضد التناظر :

نقول أن العلاقة R ضد تناظرية إذا تحقق

$$\forall a;b\in E ; (a;b)\in R \wedge (b;a)\in R \Rightarrow a=b$$

د- التعدي : نقول أن العلاقة R متعدية إذا تحقق

$$\forall a;b;c\in E : (a;b)\in R \wedge (b;c)\in R \Rightarrow (a;c)\in R$$

ملاحظة :

إن خاصيتي التناظر وضد التناظر ليستا متعاكستين ويمكن أن تجتمعا في نفس العلاقة مثل علاقة المساواة في مجموعة .

مثال :

1. لتكن $E=\mathbb{N}^*$ نعرف العلاقة الثنائية

من أجل $a\in\mathbb{N}^* ; b\in\mathbb{N}^*$: aRb إذا وفقط إذا كان a مضاعف لـ b .

أي : $aRb \Rightarrow a=mb$, $m\in\mathbb{N}^*$

$a=1a$ إذن العلاقة R إنعكاسية لأن

ضد تناظرية لأن :

$$aRb \wedge bRa \Rightarrow a=mb \wedge b=m'a$$
$$\Rightarrow a=mm'a \Rightarrow mm'=1 , m;m'\in\mathbb{N}^*$$
$$\Rightarrow m=m'=1$$

ومنه $a=b$

ومتعدية لأن:

$aRb \wedge bRc \Rightarrow a=mb \wedge b=m'c$

$\Rightarrow a=mm'c \Rightarrow a=kc \,/\, k=mm'$

ومنه aRc

لكنها ليست تناظرية لأن مثلا: $4R2$ لكن $2 \not R 4$

علاقة تكافؤ:

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E.

تعريف:

نقول أن R علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية في آن واحد.

أصناف التكافؤ:

لتكن المجموعة E المزودة بعلاقة التكافؤ R.

وليكن $a \in E$.

نسمي صنف تكافؤ العنصر $a \in E$ المجموعة الجزئية التالية:

$$\bar{a} = \{x \in E : xRa\}$$

مثال:

1- نعتبر المجموعة $E=\{1;2;3\}$ والعلاقتين

$R_1 = \{(1;1),(2,2),(3;3),(1;3),(3;1)\}$

$R_2 = \{(1;1),(2;2),(3;3)\}$

لدينا من أجل R_1:

$\bar{1}=\{1;3\};\ \bar{2}=\{2\},\ \bar{3}=\{1;3\}$

من أجل R_2:

$\bar{1}=\{1\};\ \bar{2}=\{2\};\ \bar{3}=\{3\}$

خواص أصناف التكافؤ:

1. $\bar{a} \neq \emptyset$ $(a \in \bar{a})$
2. $aRb \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$
3. $a \not R b \Leftrightarrow \bar{a} \cap \bar{b}$
4. $\bigcup_{a \in E} \bar{a} = E$

ملاحظة:

نلاحظ أن صفوف التكافؤ تشكل تجزئة للمجموعة E.

علاقة ترتيب:

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E.

تعريف:

نقول أن R علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية في آن واحد.

الترتيب الكلي والترتيب الجزئي:

لتكن المجموعة المزودة بعلاقة الترتيب

نقول أن الترتيب كلي إذا كان كل عنصرين من E قابلين للمقارنة وفق العلاقة R أي إما aRb وإما bRa.

وإذا لم يكن الترتيب كليا قلنا إنه جزئي.

III التطبيقات:

لتكن E و F مجموعتين:

تعريف: نسمي تطبيقا من E نحو F كل علاقة تسمح بأن نرفق بكل عنصر من E عنصرا وحيدا من F ونرمز للتطبيق

$f: E \to F$

$x \to y=f(x)$

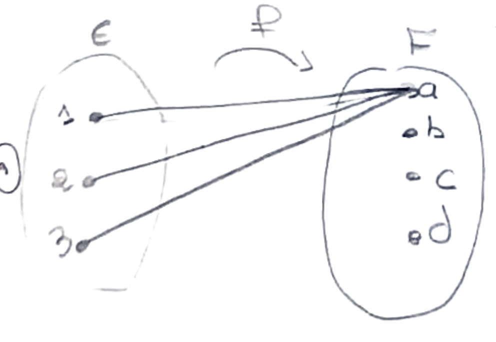
ترميز:

تسمى E مجموعة الانطلاق (البدء).

تسمى F مجموعة الوصول.

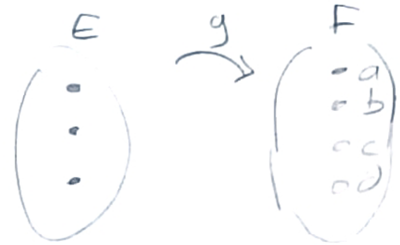
x تسمى سابقة و $y=f(x)$ تسمى صورة العنصر.

مثال:



f تطبيق

(1)

② 

وليس تطبيقًا

③ $f: N \longrightarrow N$

$n \longrightarrow f(n)=n-3$

f ليس تطبيق

خواص التطبيق:

التباين:

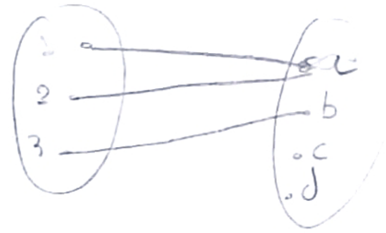
ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقًا.

تعريف:

نقول أن f متباين إذا تحقق:

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

مثال:

① 

f ليس متباين

② $f: IN \longrightarrow IN$

$n \longrightarrow n+5$

لان f متباين لأنه:

$n; m \in N : f(n)=f(m) \Rightarrow n+5=m+5$

$n=m$

③: $f: R \longrightarrow IR$

$x \longrightarrow x^2$

لان f ليس متباين، نعتبر $x_1=-2$ ، $x_2=2$

$4=f(x_1)=f(x_2)$ لكن $x_1 \neq x_2$

ملاحظة:

في التمثيل السهمي للتطبيق، التباين يكافئ: كل عنصر من مجموعة الوصول يصله سهم على الأكثر

الغمر:

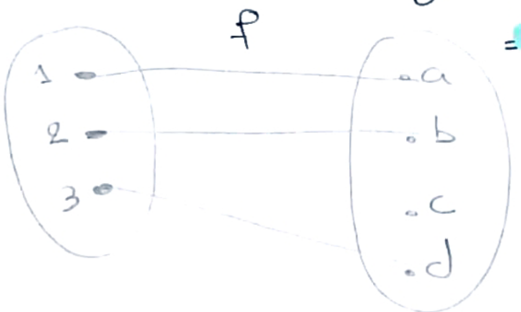
ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقًا

نقول f غامر إذا تحقق: $\forall y \in F, \exists x \in E : f(x)=y$

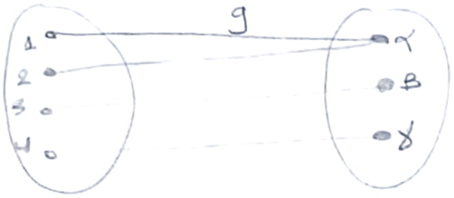
وهو ما يكافئ:

من أجل كل y من F ، المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلاً على الأقل.

مثال:

① 

f ليس غامرًا

② 

وتطبيق غامر.

③ $f: IN \longrightarrow IN$

$n \longrightarrow n+5$

f ليس غامرًا

من أجل $y=1$ مثلا المعادلة $f(n)=n+5=1$ لا تقبل حل في IN.

④. $f: IR-\{1\} \longrightarrow IR-\{1\}$

$x \longrightarrow \frac{x}{x-1}$

لندرس الغمر $y \in IR-\{1\}$

$$f(x)=y \Longrightarrow \frac{x}{x-1}=y$$

$$x=y(x-1)$$

$$x-yx=-y$$

$$x(1-y)=-y$$

$$x=\frac{-y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{y-1}$$

نلاحظ x موجود دومًا ومنه f غامر.

التقابل:

ليكن $f:E\to F$ تطبيقاً

نقول f تقابل إذا كان متباينًا وغامرًا، وهو ما يكافئ أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلاً وحيدًا من أجل كل $y\in F$

الصورة المباشرة:

ليكن $f:E\to F$ تطبيقاً ولتكن $A\subset E$

نسمي الصورة المباشرة للجزء A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F والمعرفة ب:

$$f(A)=\{f(x)/x\in A\}$$

$$=\{y\in F/\exists x\in A;y=f(x)\}$$

خواص الصورة المباشرة الأولى:

أ. $f(\emptyset)=\emptyset$

ب. $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$

ج. $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$

الصورة العكسية:

نسمي الصورة العكسية للجزء $B\subset E$ وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E والمعرفة ب

$$f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$$

ملاحظة:

إن f^{-1} في تعريف الصورة العكسية هو الرمز ولا علاقة مبدئية له بالتطبيق العكسي إلا إذا كان f تقابلاً.

خواص الصورة العكسية:

1. $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$

2. $f^{-1}(F)=E$

3. $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

4. $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$