2) المتتاليات العددية:

تعريف: نسمي متتالية عددية كل تطبيق من $\mathbb{N}$ أو جزء غير خالي من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ (أي $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$)

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto U_n$$

نرمز عادة للمتتالية ب $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(U_n)_{n\geq 0}$

ونسمي المجموعة $\{U_n ; n\in\mathbb{N}\}$ مجموع حدود متتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

إتجاه تغير متتالية عددية:

لتكن متتالية عددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لدراسة اتجاه تغير $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ ولدينا:

- اذا كان $U_{n+1} - U_n \geq 0$ فإن (U_n) متتالية متزايدة.
- اذا كان $U_{n+1} - U_n \leq 0$ فإن (U_n) متتالية متناقصة.
- اذا كان $U_{n+1} - U_n = 0$ فإن (U_n) متتالية ثابتة.

المتتاليات المحدودة:

تعريف: نقول عن متتالية عددية (U_n) أنها محدودة من الأعلى اذا تحقق ما يلي

$$\exists M ; \forall n\in\mathbb{N} ; U_n \leq M$$

- متتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل اذا كان

$$\exists M, m \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad m \leq U_n \leq M$$

أو: $\exists A\in\mathbb{R}^* \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad U_n \leq A$

أمثلة :

$U_n = \frac{1}{n}$ واضح أن $0 < \frac{1}{n} < 1$

$U_n = n^2$ ← $0 < U_n$ ولكنها ليست محدودة من الأعلى

يعني أن $\forall M \; \exists n \in \mathbb{N} \; ; U_n > M$

• ليكن M عدد حقيقي موجب تماما لدينا

$U_n > M \Rightarrow n^2 > M > 0$

ومنه $n > \sqrt{M}$ إذ نضع $n = [\sqrt{M}] + 1$

فيتحقق التعريف

• ليكن M ع حقيقي سالبا

نهاية متتالية :

تعريف : نقول أن متتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

تقبل نهاية $l \in \mathbb{R}$ (أو أن متتالية (U_n)

تتقارب نحو العدد l) ونرمز لذلك ب

$\lim_{n\to\infty} U_n = l$ أو $U_n \xrightarrow[]{n\to\infty} l$ إذا وفقط

إذا تحقق الشرط التالي

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} , \forall n \in \mathbb{N} \; [n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon]$

مثال:

بينة أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

لتكن $\varepsilon > 0$

$|U_n - \ell| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

ومنه $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

أي $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

ومنه نأخذ $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$

ومنه $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

نظرية (وحدانية النهاية):

اذا تقاربت متتالية عددية نحو عدد ما فإن النهاية وحيدة

البرهان:

لتكن (U_n) متتالية عددية متقاربة نحو نهايتين ℓ_1 و ℓ_2 عند ئذ لدينا:

$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 \Rightarrow |U_n - \ell_1| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} U_n = \ell_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 \Rightarrow |U_n - \ell_2| < \varepsilon$

نضع $N = \max\{n_1 ; n_2\}$ لدينا:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \left(\begin{matrix} n \geq n_1 \\ n \geq n_2 \end{matrix}\right)$

$\Rightarrow 0 \leq |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - U_n + U_n - \ell_2| \leq |U_n - \ell_1| + |U_n - \ell_2| < 2\varepsilon$

ومنه $|\ell_1 - \ell_2| = 0$ ومنه $\ell_1 - \ell_2 = 0$ أي $\ell_1 = \ell_2$

ملاحظة :

لتكن (U_n) متتالية عددية

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

$$\forall A>0 ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} ,\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow U_n > A$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$$

$$\forall B<0 ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} ,\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow U_n < B$$

مثال : هل $\lim_{n\to\infty} e^n + n = +\infty$

لتكن $0<A$ لدينا :

$$e^n + n > e^n > A > 0$$

ومنه $n > \ln A$

لما $0<A\leq 1$ لدينا $n > \ln A$ نأخذ $n_0 = 1$

لما $A>1$ لدينا $n \geq \ln A$ نأخذ $n_0 = [\ln A]+1$ مع الجزء الصحيح

فتحقق النظرية

ومنه $\lim_{n\to\infty} e^n + n = +\infty$

خواصها :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين

لدينا :

1) $\lim_{n\to\infty} (U_n \mp V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n \mp \lim_{n\to\infty} V_n$

2) $\lim_{n\to\infty} (U_n \times V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n \times \lim_{n\to\infty} V_n$

نظرية: كل متتالية رتيبة ومحدودة فهي متقاربة.

1) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو حدها الأعلى.

2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو حدها الأدنى.

البرهان: لنبرهن ②

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل لدينا $\{U_n, n\in\mathbb{N}\}$ غير خالية ومحدودة من الأسفل إذن حسب مسلمة الحد الأعلى $\inf U_n = b$ موجود.

- لنكتب الخاصية المميزة للحد الأدنى

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}, \quad b \leq U_{n_\varepsilon} < b+\varepsilon$$

ومنه:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow b-\varepsilon < b \leq U_n \leq U_{n_\varepsilon} < b+\varepsilon$$

لأن (U_n) متناقصة.

ومنه

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_\varepsilon \Rightarrow b-\varepsilon<U_n<b+\varepsilon$$

$$\Rightarrow |U_n - b| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} U_n = b$

بنفس الطريقة نبرهن ① : نضع $\sup U_n = a$ ونكتب
الخاصية الصيغة للحد الأعلى،
$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} , a - \varepsilon < U_{n_\varepsilon} \leq a$$
ومنه،
$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} , n \geq n_\varepsilon$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < U_{n_\varepsilon} \leq U_n < a < a + \varepsilon$$
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة .

ومنه:
$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} , \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |U_n - a| < \varepsilon$$
ومنه $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = a$

مثال:
$$A = \left\{ \frac{1}{n} + 1 , n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
نضع $U_n = \frac{1}{n} + 1$ $\{ U_n , n \in \mathbb{N}^* \}$
لدينا، (U_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل
$U_n > 0$ حسب النظرية السابقة لدينا:
$$\inf A = \inf U_n = \lim_{n \to \infty} U_n = 1$$
لأن (U_n) متناقصة فإن $\max A = \max U_n = \sup A = U_1 = 2$

المتتاليات المتجاورة:

• تعريف: نقول عن متتاليتين عدديتين (U_n) و (V_n)
أنهما متجاورتين إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى
متناقصة وكان $\lim\limits_{n \to \infty} (U_n - V_n) = 0$

مثال: $U_n = \frac{1}{n}$ و $V_n = -\frac{1}{n}$ متجاورتين لماذا؟ .

نظرية: كل متتاليتين متجاورتين متقاربتين نحو نفس النهاية.

البرهان:

لتكن (v_n) و (u_n) متتاليتين متجاورتين ولنفرض أن (v_n) متناقصة و (u_n) متزايدة ولنعرف المتتالية (w_n) بحيث: $\forall n \in \mathbb{N} ;\ w_n = u_n - v_n$.

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

ومنه (w_n) متتالية محدودة لأنها متقاربة (حسب نظرية سابقة)

كما لدينا:

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - v_{n+1} - u_n + v_n$$

$$= \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0} - \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0}$$

ومنه (w_n) متتالية متزايدة

بما أن (w_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فحسب النظرية السابقة فإن:

أي أن: $\sup w_n = 0$

$\forall n \in \mathbb{N} ,\ w_n \leq 0$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \leq v_n$.

أي: $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$

(v_n) محدودة من الأسفل بأي حد من حدود (u_n)

(مثال v_n) و B هنا قمة اذن فهي متقاربة.

(v_n). محدودة من الأعلى بـ ... ومحدود (u_n)

كذلك (u_n) وهي متزايدة اذن فهي متتالية متقاربة

اضافة الى ذلك لدينا

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}v_n-\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

ومنه
$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}u_n$$

المتتاليات الجزئية (المستخرجة)

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية.

نقول عن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ انها متتالية جزئية (أو مستخرجة) من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اذا وجد تطبيق $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايد تماما

بحيث: $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=u_{f(n)}$

ملاحظات:

1) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جزئية من (u_n) يعني أن $\{v_n, n\in\mathbb{N}\}\subseteq\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$

2) كل متتالية هي جزئية من نفسها

3) اذا كان $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايدة تماما فإن $\forall n\in\mathbb{N},\quad f(n)\geq n$

البرهان: من أجل $n=0$ لدينا $f(0)\geq 0$ محققة)

نفرض أن $f(n)\geq n$ لدينا

$f(n+1) \geq f(n) \geq n \Rightarrow f(n+1) \geq n$

$\Rightarrow f(n+1) \geq n+1$ ومنه العلاقة صحيحة.

مثلاً :

لتكن $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$ متتالية

$v_n = u_{n^2} = n^4 + \frac{1}{n^2}$

$w_n = u_{n+1} = (n+1)^2 + \frac{1}{n+1}$ متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ترميز :

نرمز بـ $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ للمتتالية الجزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\{u_{n_1}; u_{n_2}; u_{n_3} \dots\}$ $\qquad \lim_{k\to\infty} u_{n_k}$

نظرية :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية و $\ell \in \mathbb{R}$ لدينا

$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \iff \lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \ell$

بحيث $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

البرهان :

ليكن $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \ell$ (كل المتتاليات الجزئية متقاربة نحو ℓ)

عندئذ : $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ لأن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جزئية من نفسها

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \ell$ يعني

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} ; \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow |U_n-\ell|<\varepsilon$$

لتكن $(U_{f(n)})$ متتالية جزئية من $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايدة تماما)

لدينا: $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, f(n)\geq n\geq N$
$$\Rightarrow |(U_{f(n)})-\ell|<\varepsilon$$

ومنه:

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, f(n)\geq N \Rightarrow |U_{f(n)}-\ell|<\varepsilon$$

أي $\lim\limits_{n\to\infty} U_{f(n)} = \ell$ وهذا ينهي البرهان.

نتيجة:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة ⟸ توجد على الأقل متتالية جزئية منها متباعدة.

مثال: $U_n=(-1)^n$ متباعدة لأن:

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} v_n = U_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$
$$\neq$$
$$-1 \xleftarrow{n\to\infty} w_n = U_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

Cours .

مبرهنة بولزانو فيرشتراس.

كل متتالية محدودة تحتوي على الأقل على متتالية جزئية متقاربة

المتتاليات الكوشية

نقول عن متتالية عددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متتالية كوشية (أو وأنها لكوشي) إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: متقاربة =

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n,m\in\mathbb{N}$$

$$n\geq m\geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n-U_m|<\varepsilon$$

مثال: نثبت أن $U_n=\frac{1}{n+1}$ كوشية

ليكن $\varepsilon>0$ ولتكن $n,m\in\mathbb{N}$ حيث $n\geq m$

لدينا:

$$|U_n-U_m|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right|$$

$$n\geq m \Rightarrow n+1\geq m+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\leq 0$$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{m+1}<\varepsilon$$

ومنه $m>\frac{1}{\varepsilon}-1$

$$N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1.$$

نظرية : (مقياس كوشي)

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية لدينا :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة $\Leftarrow$ (U_n) متتالية كوشية

البرهان : $\Leftarrow$

لتكن (U_n) متتالية عددية متقاربة نحو l أي $l \in \mathbb{R}$ أن :

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ,\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$n \geq m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - U_m| = |U_n - l + l - U_m| < |U_n - l| + |U_m - l| < 2\varepsilon$$

ومنه

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$n \geq m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - U_m| < \varepsilon$$

ومنه (U_n) كوشية .

د) المتتاليات التراجعية :

تعريف : نقول عن متتالية (U_n) إنها متتالية تراجعية إذا كانت معرفة كما يلي : (معطى)

$$\begin{cases} U_0 \in D \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

بحيث : $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

بحيث $f(D) \subseteq D$

مثال:

$U_0 = 2$

$U_{n+1} = \sqrt{U_n}$

دراسة متتالية تراجعية

لتكن (U_n) متتالية عددية بحيث

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $\begin{cases} U_0 \in D \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

$f(D) \subseteq D$

2) الرتابة:

نظرية (1):

إذا كانت f تابعا متزايدا فإن (U_n) متتالية

رتيبة كما لدينا إذا كان $f(U_0) \geq U_0$ فإن

(U_n) متتالية متزايدة

إذا كان $f(U_0) \leq U_0$ فإن (U_n) متناقصة

أما إذا كان f تابعا متناقصا فإن (U_n)

ليست رتيبة

البرهان:

لنثبت (1)

ليكن f تابعا متزايدا ولنفرض أن $f(U_0) \geq U_0$

لنثبت أن (U_n) متزايدة أي $U_{n+1} \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نستعمل البرهان بالتراجع

من أجل $n = 0$ لدينا $U_n = f(U_0) \geq U_0$ (1) فرضا محققة

نفرض أن $U_{n+1} \geq U_n$ ومنه $f(U_{n+1}) \geq f(U_n)$

ومنه $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ أي الخاصية محققة من أجل $(n+1)$
ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

2- التقارب :

نفرض أن f تابع مستمر ورتيب على D فإن إذا
تقاربت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو عدد $l \in D$
فإن هذه النهاية تحقق $f(l) = l$
(l حل المعادلة $f(x) = x$)

ملاحظة :

لدراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحل المعادلة $f(x)=x$ في D
1) إذا لم تقبل المعادلة $f(x)=x$ حلول فإن (u_n) متباعدة
2) إذا كانت للمعادلة $f(x)=x$ حلول فندرس قابلية المتتالية
(u_n) لنهاية من بين حلول المعادلة $f(x)=x$

مثال :

أدرس
$$\begin{cases} u_0 = a \geq 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$f(x) = \sqrt{x+2}$ و $D = [-2; +\infty[$
ندرس الرتابة $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$