محمّد حازي

القابلية للاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ : تقعيد نظريّ وتطبيقات

دروس - تمارين محلولة ومسائل

دفاتر التحليل

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها. . .

ديوان المطبوعات الجامعية

محمّد حازي

من دفاتر التحليل ...

القابلية للاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ:

تقعيد نظريّ وتطبيقات

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها

ديوان المطبوعات الجامعية

ديوان المطبوعات الجامعية

رقم النشر: 1.01.5446
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 978.9961.0.1696.1
رقم الإيداع القانوني: 2013-5280

للمؤلّف في ديوان المطبوعات الجامعيّة

أ. في التأليف:

1. Espaces topologiques en particulier et espaces métriques en général.
2. المختصر في الطبولوجيا.
3. Introduction aux espaces normés.
4. السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة.
5. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل.
6. الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني.
7. S.E.M 300 par ses Examens, tome 1.
8. S.E.M 300 par ses Examens, tome 2.
9. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 1: Visite guidée dans les espaces topologiques.
10. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 2: Visite guidée dans les espaces métriques.
11. Topologie: Au delà des travaux dirigés, tome 3: Visite guidée dans les espaces normés.
12. مبادئ مفتاحيّة في مفاهيم طبولوجيّة.
13. الدروس الوافية في الفضاءات المتريّة.
14. المقعّد المجلّي للتحليل الداليّ.
15. من دفاتر التحليل: المتتاليات العدديّة.
16. من دفاتر التحليل: الدوال الحقيقيّة ذات متغيّر حقيقيّ: نهاياتها واستمرارها.

ب. في الترجمة:

1. معادلات الفيزياء الرياضيّة: الجزء الأوّل.
2. معادلات الفيزياء الرياضيّة: الجزء الثاني.
3. دروس في الطبولوجيا.
4. سلاسل وتكاملات.
5. المصفوفات: دروس ومسائل.
6. مسائل وتمارين محلولة.
7. مدخل إلى الطبولوجيا العامّة.
8. دروس في الجبر الخطّيّ.
9. الجبر الخطّيّ.
10. الجبر: تذكير بالدروس وتمارين محلولة.

أنشودة الفالج↓

يا من معدّله عن العشرة قد طفا

فزتَ، فانعم اليوم بالتهاني و "الوفا"

قل للذي دون ذلك لا تراع

كلّ امرئ عن أمــره يوما قد غفا

ما له أن يركن حين الملمات إلى

اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"

لئن لم يضرب الفوز في حزيران له

موعـــدا، ولم ينج من أيلول ضيفا

فله في "الفالج المقروض" خير معين

على الاستذكار، ومن الهم خير "الشفا"

يجلي عن وجهه غلس الأسى

فيغدو مثل السماء حين "الصفــا"

يأتي ركبَكـم يرفل بوشاحه

يحمد اللّه و "الفالج" الذي رفــا

↓ كلام شبه منظّم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويج له لدى جمهور مستخدميه. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم الكرّاس الحاضر ...

الإهداء

إلى

زوجتي وأولادي

الذين جلبت لهم كتبي حرمانا مزدوجا:

فلا هي تركت لي فراغا زمنيّا فألهيهم

ولا هي درّت عليّ مالا فأغنيهم ...

لسم الله الرحمن الرحيم

0

تصدير

«اسم من هام فؤادي به جميعـــــــه شيء وتسعونا
فالشيء إن زدت على نصفه الأوّل كان النصف خمسينا»

ابن هيدور

1.0 كلمة لا بدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:

المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة؛

المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بـــڤاريدي- القبّة؛

المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛

المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة.

إنّها وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة"[↓] الأعداد الحقيقيّة"، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السبيل" قاطرة لها.

أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرّين في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحيّيه منحنيا على ما بذله من جهد وأغدقه من عطاء وتجشّمه من صعاب وتحمّله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.

أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار السنين بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود:

- الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبّة؛
- الأستاذ ابراهيم كاشة المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛
- الأستاذ مسعود جبارني من المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛
- الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة.

[↓] صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

2.0 مدخل

نقف بك الآن في المحطّتين الرابعة والخامسة من مسيرتنا في برنامج السنة الأولى الجامعيّة بكلّ تخصّصاتها وشعبها. إنّهما محطّتا الاشتقاق والنشور المحدودة بشقّيهما النظريّ والتطبيقيّ ...

للمشتقّ تاريخ طويل، وهو وثيق الارتباط والصلة بالمماس. يرجع تلازمهما إلى عهود سحيقة، ولاسيما العهود الإغريقيّة، التي عرفت فيها الأعمال الهندسيّة ازدهارا هائلا. وبالطبع، فقد "عاش" المشتقّ في ظلّ المماس إلى غاية القرن السابع عشر حيث ازدادت أهمية السيطرة على هذا الأخير بحكم بروز تطوّر في تطبيقاته وتعدّدها. يمكن القول بأنّ مفهوم المشتقّ خطا خطواته الأولى نحو النور مع كتابات ليبنيز[1] ونيوتن[2]. وتجاذبته أعمال كبار علماء القرن الثامن عشر من غرب أوروبا بالخصوص. ومع استكمال التحكم الدقيق في مفهوم النهاية في النصف الثاني من القرن التاسع عشر، مكّنت أعمال لاقرانج[3]

1. Gottfried Wilhelm Leibniz: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد بليبزيـف في 01 جويلية 1646 ومات بهانوفر في 14 نوفمبر 1717. اهتمّ بالمتتاليات والسلاسل. أسّس بأعماله للحساب التفاضليّ. يعود إليه الفضل في وضع رمز التكامل ∫ وكثير من الرموز الرياضيّاتيّة المتداولة اليوم.

2. Isaac Newton: أعظم علماء انـڤلترا على الإطلاق. ولد بوولستورب في 04 جانفي 1642 ومات بلندن في 31 مارس 1727. اشتغل بالفيزياء والرياضيّات والفلك. يعتبر بمعيّة ليبنيتز مؤسّس الحساب التفاضليّ والتكامليّ.

3. Joseph Louis Lagrange: رياضيّاتيّ إيطاليّ كبير في الفيزياء والتحليل الرياضيّاتيّ ونظرية الأعداد. ولد في 25 جانفي 1736 بطورينو ومات بباريس في 10 أفريل 1813.

وبولزانو[4] وفيرشتراس[5] من وضع التعريف الدقيق للمشتقّ كما هو متداول اليوم.

لا يكاد موطن من مواطن الفيزياء، فضلا عن الرياضيّات، يخلو منه. فتطبيقاته متنوّعة ومتعدّدة. هكذا، نجده أساسيّا في الدراسة المحليّة لدالّة ما من حيث تغيّراتها ورتابتها وتمتّعها بنقاط حدّيّة وتحدّب بيانها أو تقعّره وقبول هذا البيان لمماس أو عدمه ... أمّا فيزيائيّا فنجد أنّ علم الحركة يكاد يكون مبنيّا عليه. فمن خاض في السرعة والتسارع على وجه الخصوص سارع إلى المشتقّ ليفصّل حديثه ويبين ...

هيكل الدفتر الحالي وفق أربعة أقسام هي:

القسم الأوّل : الاشتقاق

وفيه ثلاثة مقاطع هي:

- تعاريف وخصائص عامّة،
- قواعد حسابيّة،

ساهم بشكل خاص في حسبان التغيّرات والميكانيكا التحليليّة والفلك. إليه يعود رمز المشتقّ f'.

4. Bernhard Bolzano: رياضيّاتيّ وفيلسوف تشيكيّ، ألمانيّ اللغة. ولد في 5 أكتوبر 1781 ببراڤ ومات بها في 18 ديسمبر 1848. اشتغل أساسا في الدوال والمنطق ونظرية الأعداد.

5. Karl Theodor Weierstrass: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 31 أكتوبر 1815 بأستنفيلد ومات في 19 فيفري 1897 ببرلين. من ضمن أعماله الرياضيّاتية نظرية الدوال الآبليّة والتحليليّة. يذكر له التاريخ أنّه عارض زميله وصديقه كرونيكر حول اكتشافات كانتور المثيرة.

- مبرهنات أساسيّة.

القسم الثاني: النشور المحدودة

وفيه ثلاثة مقاطع هي:

- النشر المحدود في جوار الصفر،
- النشر المحدود في جوار نقطة x_0 (غير الصفر)،
- النشر المعمّم في جوار الصفر.

القسم الثالث: تمارين

وفيه ثلاثة مقاطع:

- تمارين محلولة،
- حلول،
- تمارين للبحث.

القسم الرابع: دليلان

- دليل المصطلحات،
- دليل الرياضيّاتيّين المذكورين.

دبّجنا الجانب الدرسيّ في هذا الكرّاس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا. جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل. ثُمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها واحدة وخمسون وحدة، تصدّينا لحلّها بحذق وإمعان.

غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل ما استطعنا إلى ذلك سبيلا. ختمنا الكرّاس بلوحة من التمارين التدريبيّة والتقويميّة، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها وكنّا فيها راشدين. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة أصنافه المختلفة ومشاربه المتعدّدة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا بل وفي الثانويات، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين.

أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القرّاء مدعوّة لتتبّع كلّ واردة مطمسة وتقفّي كلّ مبهمة منفّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ... فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

مرّاكش في 28 مارس 2012

محمّد حازي

القسم الأوّل

الاشتقاق:

تقعيد نظريّ وتطبيقات

ديوان المطبوعات الجامعية

1

تعاريف وخصائص عامّة

1.1 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عنصرا من I.

نقول عن f إنّها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا تمتّعت النسبة اللاتزايديّة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ بنهاية ℓ عندما يؤول x إلى x_0. نرمز لهذه النهاية (إن وجدت) بـــ $f'(x_0)$ ونكتب:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

تسمّى النهاية $f'(x_0)$ **العدد المشتقّ** للدالّة f عند النقطة x_0.

وبالطبع، إذا وضعنا $x-x_0=h$ في هذه العبارة أمكن كتابة هذه الأخيرة على الشكل المكافئ:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

2.1 أمثلة

1) كلّ دالّة ثابتة $f\equiv\lambda$ في جوار نقطة x_0 تقبل الاشتقاق عند x_0، وعلاوة على ذلك فإنّ $f'(x_0)=0$. وبالفعل، لدينا:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\lambda-\lambda}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0.$$

2) الدالّة $f(x)=x^2$ تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$، ذلك لأنّ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2;$$

3) الدالّة $f(x)=\sin x$ تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$، ذلك لأنّ:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

4) الدالّة الحقيقيّة:

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ;\ x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0,\end{cases}$$

لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$، ذلك لأنّ النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

غير موجودة.

5) الدالّة الحقيقيّة:

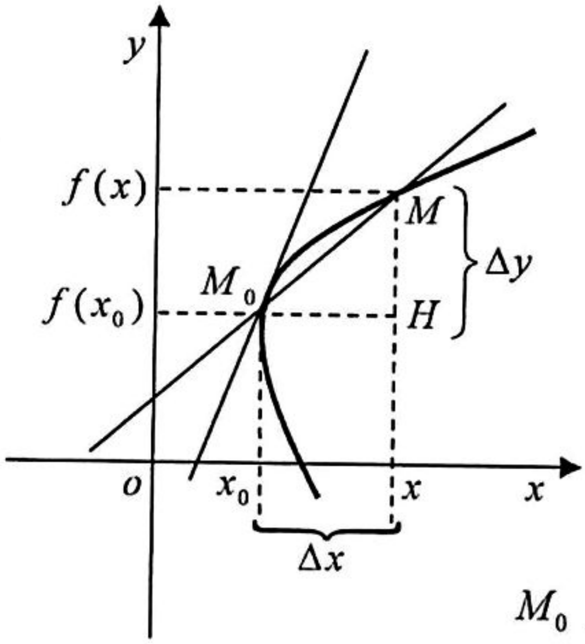
$$x\mapsto f(x)=|x-2|,$$

لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=2$، ذلك لأنّ النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}1 & ;\ x\to 0_+,\\ -1 & ;\ x\to 0_-.\end{cases}$$

غير موجودة.

3.1 التأويل الهندسيّ



إنّ النقطتين $M=(x,f(x))$ و $M_0=(x_0,f(x_0))$ تنتميان إلى بيان f. تمثّل النسبة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{HM}{HM_0},$$

ميل المستقيم MM_0. عندما يؤول x نحو x_0 فإنّ M تؤول نحو M_0 (شريطة أن تكون f مستمرّة عند x_0). وعليه، إذا قبلت f مشتقّا ℓ من $\mathbb{R}$ عند x_0 قبل بيانها Γ_f مماسا عند M_0 ميله ℓ. معادلة هذا المماس هي:

$$y-f(x)=\ell(x-x);$$

أي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

تنبيه

علينا أن نشير هنا إلى أنّه ينبغي توخّي الحذر، إذ يمكن لدالّة أن يقبل بيانها مماسا عند نقطة ما، دون أن تقبل مشتقّا عند فاصلة هذه النقطة. سيأتي ذكر حالة مبيّنة عمّا قليل !

4.1 مبرهنة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإنّ:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\,f'(x_0)+h\,\varepsilon(h),$$

حيث $h \mapsto \varepsilon(h)$ دالّة تذعن للقيد:

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

إثبات

وفعلا، لدينا من أجل كلّ $h\neq 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}=0.$$

ومنه:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}=\varepsilon(h);$$

إذن:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h).$$

5.1 نتيجة

عكس المبرهنة أعلاه صحيح. وبعبارة أوضح، إذا وجد عدد k بحيث:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=kh+h\varepsilon(h), \forall h>0,$$

فإنّ f تقبل الاشتقاق عند x_0 ويعدل مشتقّها العدد k.

وفعلا، من أجل كلّ $h\neq 0$ لدينا:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=k+\varepsilon(h);$$

وعليه، $f'(x_0)=k$.

6.1 نتيجة

كلّ دالّة قابلة للاشتقاق عند x_0 مستمرّة عند x_0.

العكس ليس صحيحا عموما.

إثبات

وبالفعل، لدينا حسب المبرهنة (4.1):

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0,$$

من جهة أخرى، الدالّة $f(x)=|x|$ مستمرّة عند النقطة $x=0$ غير أنّها لا تقبل الاشتقاق عند النقطة ذاتها.

7.1 تعريف

نقول عن دالّة $f:I\to\mathbb{R}$ إنّها تقبل مشتقّا من اليمين (من اليسار على التوالي) عند نقطة x_0 من I إذا تحقّق:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_d^{'}(x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_g^{'}(x_0).)$$

على التوالي).

فإذا استحضرنا الدالّة $f(x)=|x|$ وجدنا كما تقدّم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1=f_d^{'}(x_0);$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1=f_d^{'}(0).$$

8.1 نتيجة

تكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا تطابق مشتقّاها اليمينيّ واليساريّ عند x_0. ونكتب:

f قابلة للاشتقاق عند x_0 $\Leftrightarrow$ $f_d' = f_g' = f'$

إثبات

نتيجة مباشرة لخصائص النهايات.

9.1 مثال

لتكن الدالّة الحقيقيّة:

$$f(x) = \begin{cases} x^3; \ x \le 0, \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x}; \ x > 0. \end{cases}$$

لنفحص قابليتها للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا على $\mathbb{R}_-$:

$$f'(x) = 3x^2;$$

وعلى $\mathbb{R}_+^*$ لدينا:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

أمّا عند الصفر فنحسب:

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0,$$

$$f_g'(0) = \lim_{x\to 0^-} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} h\sin\frac{1}{h} = 0.$$

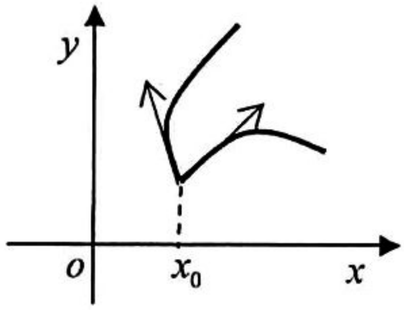
وعليه:

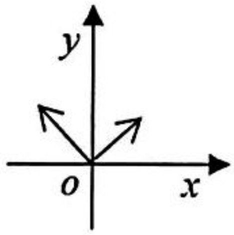
$$f_d'(0) = f_g'(0) = f'(0) = 0.$$

نستخلص أنّ f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

10.1 ملحوظتان

1) إذا اختلف المشتقّان $f'_d(x_0)$ و $f'_g(x_0)$ قيل عن النقطة $(x_0, f(x_0))$ إنّها **نقطة زاوية**. إنّه حال الحالتين الممثّلتين بيانيّ أدناه.





2) لنعتبر الدالّة الحقيقيّة المعطاة على هذا النحو:

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}.$$

لنفحص قابليّتها للاشتقاق عند الصفر. لدينا على اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty. \qquad (*)$$

وعلى اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{-\frac{1}{x^2}} = -\infty. \qquad (**)$$

نستخلص أنّ الدالّة f لا تقبل الاشتقاق لا من يمين الصفر ولا من يساره. إنّها لا تقبل الاشتقاق إذن عند هذه النقطة.

الجدير بالملاحظة هنا هو أنّ منحنى دالّتنا البيانيّ يقبل، على ضوء النهايتين (*) و (**)، نصف مماس عمودي على يمين ويسار الصفر. إذن لمنحنى هذه الدالّة البيانيّ مماس عموديّ عند الصفر. إنّ عدم قابليتها للاشتقاق لم يحل دون ذلك ! هذه بيّنة وعدناك بها منذ حين، **ألا فتمعّن فيها واحترز** !!

تعريف 11.1

نقول عن دالّة حقيقيّة f إنّها تقبل الاشتقاق على مجال مغلق $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ إن قبلت الاشتقاق عند كلّ نقطة من المجال المفتوح $]a,b[$ وتمتّعت بمشتقّ على يمين a وآخر على يسار b.

تعريف 12.1

إذا قبلت دالّة $f:I\to\mathbb{R}$ الاشتقاق عند كلّ نقطة x من I سمّينا الدالّة $x\mapsto f'(x)$ **الدالّة المشتقّة** لـــ f.

وبالطبع، يمكن للدالّة المشتقّة f' أن تقبل بدورها دالّة مشتقّة نرمز لها بــــ f''. يمكن مواصلة العمل هكذا إلى غاية تعريف المشتقّ من الرتبة n (من $\mathbb{N}$) والمدعى **بالمشتقّ النونيّ**. يرمز لهذا الأخير بــــ $f^{(n)}$ أو $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ ويحسب على النحو:

$$f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'.$$

تعريف 13.1

نقول عن دالّة حقيقيّة f إنّها من **الصنف** $\mathscr{C}^p$ على مجال I من $\mathbb{R}$ إن قبلت الاشتقاق p مرّة وكانت مشتقّاتها إلى غاية الرتبة p مستمرّة.

إذا قبلت f الاشتقاق باستمرار على I عددا **غير منته** من المرّات قيل عنها إنّها من **الصنف** $\mathscr{C}^\infty$.

نرمز بــــ $\mathscr{C}^p(I,\mathbb{R})$ لمجموعة الدوال الحقيقيّة من الصنف $\mathscr{C}^p$ على I.

14.1 نتيجة

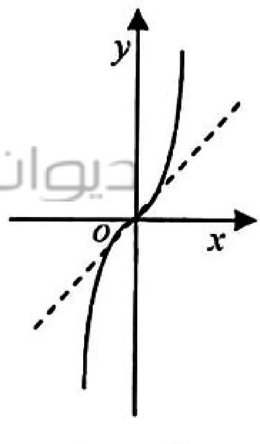
كلّ الدوال الأولية التي مرّت بك في الدفاتر السابقة وكذا دوالها العكسيّة من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على ميادين تعريفها (قد تستثنى أطراف هذه الميادين). إنّه، على سبيل المثال، حال كثيرات الحدود والكسور والدوال اللوغاريتميّة والأسيّة والدائريّة والزائديّة وما ركّب من كلّ هذه وغيرها.

15.1 تعريف

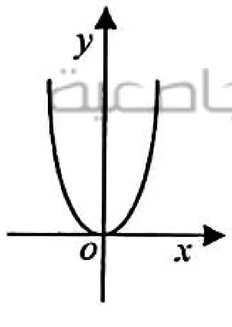
نقول عن بيان دالّة $f: I \to \mathbb{R}$ إنّه يقبل نقطة **انعطافيّة** عند x_0 من I إذا قطعه مماسه عند x_0 وتواجد على جهتين إزاء هذا المماس.

16.1 تعريف

الصفر نقطة انعطاف بالنسبة لبيان الدالّة $f(x) = x^3$ (الرسم 1)، بينما ليس كذلك النسبة لبيان الدالّة $f(x) = x^2$ ، (الرسم 2).



الرسم 1



الرسم 2

ديوان المطبوعات الجامعية

2

قواعد حسابيّة

1.2 مبرهنة

إذا كانت f و g دالّتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة x_0 كان المجموع $f+g$ وحاصل الضرب fg وحاصل القسمة $\frac{f}{g}$ كذلك. (نفترض بخصوص العمليّة الأخيرة أنّ الدالّة g لا تنعدم في جوار x_0). ولدينا فضلا عن ذلك:

أ. $(f+g)' = f' + g'$

ب. $(fg)' = fg' + f'g$

ج. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda f)' = \lambda f',$

د. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (f^n)' = nf^{n-1}f',$

ه. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$

و. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{\lambda}{g}\right)' = \frac{-\lambda g'}{g^2}.$

إثبات

أ. لدينا:

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \frac{(f+g)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

وطبقا للعمليات الحسابيّة في النهايات وبمقتضى قابلية f و g للاشتقاق عند x_0 يأتي على التوّ:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

ب. وبالمثل لدينا:

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

واستنادا إلى استمرار f عند x_0 تأتي النتيجة:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0).$$

ج. يكفي أخذ $g\equiv\lambda$ ثابتة في البند (ب).

د. نستخدم البرهان بالتراجع. العلاقة واضحة الصحّة من أجل $n=1$.
لنفترض بقاء صحّتها إلى غاية قوّة ما k:

$$(f^k)'=kf^{k-1}f'.$$

نستنتج بفضل البند (ب) أنّ:

$$\begin{aligned}\left(f^{k+1}\right)'=\left(ff^k\right)'=f'f^k+f(f^k)'=f'f^k+kff^{k-1}f'\\ =(k+1)f^kf'.\end{aligned}$$

ه. نكتب:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)}.$$

ومنه، يأتي بفضل استمرار g عند x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}.$$

و. يكفي أخذ $g \equiv \lambda$ ثابتة في البند (هـ).

2.2 نتيجة

تتمتّع المجموعة $\mathscr{C}^p(I,\mathbb{R})$ ببنية **فضاء شعاعيّ حقيقيّ** إذا ما زوّدت بقانوني الجمع والضرب في سلّميّ.

ذلك نابع من العمليات الحسابيّة على الاستمرار والبندين (أ . ب) أعلاه. وفضلا عن ذلك، فهي مستقرّة إزاء قانون التركيب كما سيأتي.

3.2 مبرهنة

ليكن I و J مجالين مفتوحين من $\mathbb{R}$ و f دالّة حقيقيّة معرّفا على I بحيث $J \supset f(I)$. ولتكن g دالّة معرّفة على J و x_0 عنصرا من I و $y_0 = f(x_0)$. نفترض أنّ:

أ. f قابلة للاشتقاق عند x_0،

ب. g قابلة للاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$.

تكون الدالّة المركّبة $g \circ f$ عندئذ قابلة للاشتقاق؛ وفضلا لدينا:

$$(f\circ g)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0).$$

إثبات

إنّ قابليّة f و g للاشتقاق عند x_0 و y_0 على الترتيب يسمح بوضع:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\left[f'(x_0)+\varepsilon(x-x_0)\right];\ \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)=0, \qquad (*)$$

$$g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)=\left(f(x)-f(x_0)\right)\left[g'\left(f(x_0)\right)+\varepsilon_1\left(f(x)-f(x_0)\right)\right], (**)$$

مع $\lim\limits_{f(x)\to f(x_0)}\varepsilon_1\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$. وعليه:

$$\begin{aligned} g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right) &= (x-x_0)\left[f'(x_0)+\varepsilon(x-x_0)\right]\times \\ &\quad \times\left[g'\left(f(x_0)\right)+\varepsilon_1\left(f(x)-f(x_0)\right)\right] \\ &= (x-x_0)\left[f'(x_0)g'\left(f(x_0)\right)+\varepsilon_1 f'(x_0)+\varepsilon g' f(x_0)\right] \\ &= (x-x_0)\left[g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)+\varepsilon_2(x-x_0)\right]. \end{aligned}$$

مع $\lim\limits_{x)\to x_0}\varepsilon_2\left(x-x_0\right)=0$. نستخلص أنّ $g\circ f$ قابلة للاشتقاق وأنّ:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right).f'(x_0).$$

4.2 مبرهنة

ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ و $f:I\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I. نفترض أنّ f تقبل دالّة عكسيّة $f^{-1}:J\subset\mathbb{R}\to I$. تكون هذه الدالّة عندئذ قابلة للاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ ويحقّق مشتقّها الدستور:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

إثبات

لدينا:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=y,\ \forall y\in J.$$

وبمقتضى مبرهنة التركيب أعلاه يأتي:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)'(y)=f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y)=1.$$

وعليه:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

وإذا احتفظنا بـــ x متغيّرا كتبنا:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

5.2 ملحوظة

يمكن أن نكتب بالحساب المباشر:

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{f(u)\to f(u_0)}\frac{u-u_0}{f(u)-f(u_0)}$$

$$=\lim_{u\to u_0}\frac{1}{\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}}=\frac{1}{f'(u_0)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}.$$

6.2 أمثلة

1) إذا كانت $f(x)=x^2$ حيث $0\le x$ فإنّ $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ ، وعليه:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{2f^{-1}(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) إذا كانت:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+2,$$

فإنّ:

$$f^{-1}(x)=2x-2;$$

وعليه:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{1/2}=2.$$

3) إذا كانت:

$$f(x)=\sqrt[3]{x},$$

فإنّ:

$$f^{-1}(x)=x^{3};$$

وعليه:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)^{3}}=3x^{2}.$$

4) إذا كانت:

$$f(x)=e^{x},$$

فإنّ:

$$f^{-1}(x)=Logx;$$

وعليه:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

5) إذا كانت:

$$f(x)=Logx,$$

فإنّ:

$$f^{-1}(x) = e^{x};$$

وعليه:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^{x}}} = e^{x}.$$

7.2 مشتقّات شهيرة

مشتقّها	الدالّة
$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = Arc\cos x$
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = Arc\sin x$
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = Arctg\, x$
$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$f(x) = Arccotg\, x$
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x) = Argsh\, x$
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = Argch\, x$
$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$f(x) = Argth\, x$
$f'(x) = \frac{-1}{1-x^2}$	$f(x) = Argcth\, x$

8.2 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0. نفترض أنّ $f(x_0) \neq 0$ نسمّي **المشتقّ اللوغاريتميّ** للدالّة f عند النقطة x_0 العدد:

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

9.2 قضية

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة x_0. لدينا عندئذ:

أ. $$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g};$$

ب. $$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

لا يحتاج تبريرها سوى تطبيق مباشر للتعريف.

10.2 مبرهنة (دستور ليبنيز)

لتكن f و g دالّتين قابلتين للاشتقاق n مرّة. يكون لدينا عندئذ:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

إثبات

نلجأ إلى استخدام البرهان بالتراجع. نذكّر بادئ ذي بدء أنّ:

$$\begin{cases} C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ C_n^0 = C_n^n = 1, \\ f^{(0)} = f. \end{cases}$$

العلاقة صحيحة من أجل $n=0$. وهي كذلك من أجل $n=1$ حسب البند (ب)

من المبرهنة (1.2):

$$(fg)' = f'g + fg' = C_1^0 f'g + C_1^1 fg' = \sum_{k=0}^{1} C_n^k f^{(1-k)} g^{(k)}.$$

لنفترض العلاقة صحيحة إلى غاية رتبة ما m، أي:

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(m-k)} g^{(k)}.$$

يأتي وقتئذ:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(m+1)} &= \left[(fg)^{(m)}\right]' = \left[\sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(m-k)} g^{(k)}\right]' = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(f^{(m-k)} g^{(k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(f^{(m-k+1)} g^{(k)} + f^{(m-k)} g^{(k+1)}\right) \\
&= C_m^0 \left(f^{(m+1)} g + f^{(m)} g^{(1)}\right) + C_m^1 \left(f^{(m)} g^{(1)} + f^{(m-1)} g^{(2)}\right) + \\
&\quad + C_m^2 \left(f^{(m-1)} g^{(2)} + f^{(m-2)} g^{(3)}\right) + \ldots + C_m^{m-2} \left(f^{(3)} g^{(m-2)} + f^{(2)} g^{(m-1)}\right) + \\
&\quad + C_m^{m-1} \left(f^{(2)} g^{(m-1)} + f^{(1)} g^{(m)}\right) + C_m^m \left(f^{(1)} g^{(m)} + f^{(0)} g^{(m+1)}\right) \\
&= C_{m+1}^0 f^{(m+1)} g + \left(C_m^0 + C_m^1\right) f^{(m)} g^{(1)} + \left(C_m^1 + C_m^2\right) f^{(m-1)} g^{(2)} + \ldots \\
&\quad \ldots + \left(C_m^{m-1} + C_m^{m-2}\right) f^{(2)} g^{(m-1)} + \left(C_m^{m-1} + C_m^m\right) f^{(1)} g^{(m)} + C_{m+1}^{m+1} f^{(0)} g^{(m+1)} \\
&= C_{m+1}^0 f^{(m+1)} g + C_{m+1}^1 f^{(m)} g^{(1)} + C_{m+1}^2 f^{(m-1)} g^{(2)} + \ldots \\
&\quad + C_{m+1}^{m-1} f^{(2)} g^{(m-1)} + C_{m+1}^m f^{(1)} g^{(m)} + C_{m+1}^{m+1} f^{(0)} g^{(m+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k f^{(m+1-k)} g^{(k)}.
\end{aligned}$$

لنشر في الأخير إلى أنّ هذه القاعدة معروفة بدستور ليبنيز.

11.2 أمثلة

1) $$(x^m)^{(n)}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}\quad ,\ n\le m.$$

2) $$\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

3) $$\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

4) $$\begin{aligned}(x^2e^x)^{(n)}&=x^2(e^x)^{(n)}+2nx(e^x)^{(n-1)}+n(n-1)(e^x)^{(n-2)}\\&=e^x(x^2+2nx+n(n-1)).\end{aligned}$$

3

مبرهنات أساسيّة

1.3 مبرهنة (رول[6])

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$. نفترض أنّ:

1) f مستمرّة على $[a,b]$،

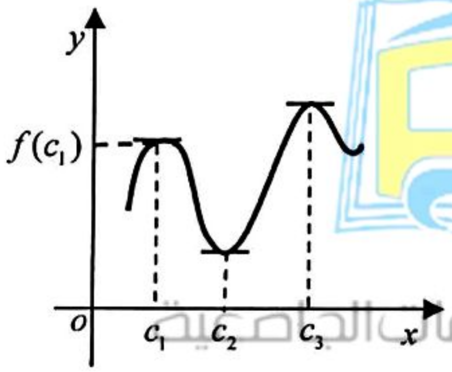
2) f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$،

3) $f(b)=f(a)$.

يوجد عندئذ عنصر c من $]a,b[$ تنعدم عنده الدالّة المشتقّة:

$$\exists c \in]a,b[\,/\, f'(c)=0.$$

إثبات



التأويل الهندسيّ

تفيد هذه المبرهنة أنّ منحنى f البيانيّ يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$.

إذا كانت f ثابتة فإنّ $f'(c)=0$ من أجل كلّ c من $]a,b[$.

إذا لم تكن f ثابتة على $[a,b]$، فإنّ صورة $[a,b]$ وفق f تضمّ أعدادا أخرى مخالفة لـ $f(b)=f(a)$، أي أكبر من $f(a)$ أو أصغر منه.

---

6. Michel Rolle: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أفريل 1652 بأمبير ومات في 8 نوفمبر 1719 بباريس. صنعت له هذه النظرية، التي برهنها في حالة كثيرات حدود حقيقيّة، شهرة حفظها له التاريخ.

نفترض، دونما مسّ بعمومية البرهان، أنّ $f([a,b])$ يضمّ أعدادا أكبر تماما من $f(a)$. نضع حينئذ $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. يوجد طبقا لمبرهنة فيرشتراس، عدد c في $[a,b]$ بحيث $f(c)=M$. بموجب الفرض يأتي أنّ $f(a)<M$. وعليه، فإنّ c موجود في $]a,b[$. ينتج هكذا أنّ f قابلة للاشتقاق عند c أي:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c).$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$f(c+h)\leq M=\sup f=f(c).$$

وعليه، إذا كان $0<h$ فإنّ:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0;$$

وبالتالي، $f'_d(c)\leq 0$. وإذا كان $0>h$ فإنّ:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0;$$

ومنه $f'_g\geq 0$. ولما كان المشتقّان اليمينيّ f'_d واليساريّ f'_g متساويين فإننّا نحصل على:

$$f'_d(c)=f'_g(c)=f'(c)=0.$$

و.هــ.م♥

2.3 ملحوظة

إذا لم تكتمل شروط مبرهنة رول، فإنّه من الممكن أن تسقط نتيجتها، أي ألاّ يوجد أيّ عنصر c من $]a,b[$ يعدم المشتقّ. هذه حالات منها:

♥ نقرأ: وهو المطلوب إثباته.

1) الدالّة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$:

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ ;\ x\neq 0,\\ 1\ ;\ x=0,\end{cases}$$

تحقّق جميع شروط رول ماعدا الاستمرار عند الصفر. لدينا:

$$\forall c\in[0,1]\ ,\ f'(c)\neq 0.$$

2) الدالّة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$:

$$x\mapsto f(x)=x,$$

تحقّق جميع شروط رول ماعدا الثالث $f(b)=f(a)$. لدينا:

$$f'(c)\neq 0,\ \forall c\in\,]0,1[.$$

3) الدالّة $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$:

$$x\mapsto f(x)=|x|,$$

تحقّق جميع شروط رول ماعدا القابليّة للاشتقاق عند الصفر. لا يوجد أيّ عنصر من $]-2,2[$ يعدم المشتقّ.

3.3 تعريف

نقول عن دالّة $f:I\to\mathbb{R}$ إنّه يقبل **قيمة عظمى** (ذروة) (**قيمة صغرى**، (حضيضا) على التوالي) عند نقطة x_0 من I إذا وجد عدد $\alpha>0$ بحيث:

$$\forall x\in I\ \ |x-x_0|\leq\alpha\ \Rightarrow\ f(x)\leq f(x_0).$$

$$(\forall x\in I\ \ |x-x_0|\leq\alpha\ \Rightarrow\ f(x)\geq f(x_0)$$

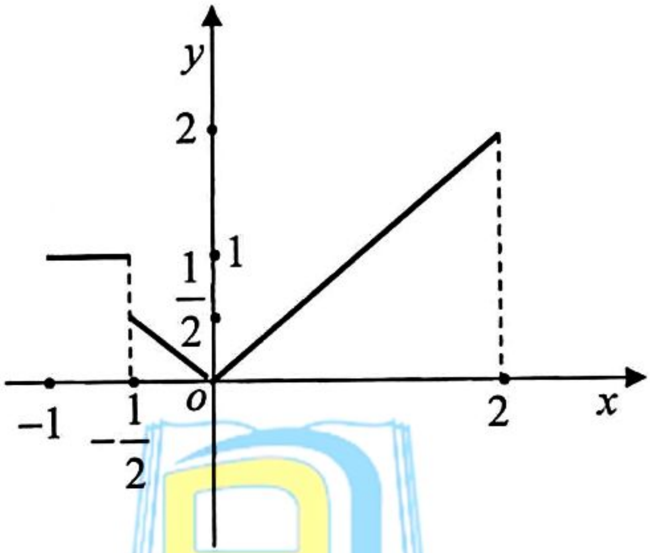
على التوالي.)

يقال عن النقطة x_0، والحال هذه، إنّها **نقطة حدّية محلّية للدالّة** f .

4.3 مثال

لنعتبر الدالّة $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ المعطاة بالصيغة:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ -1<x\le -\dfrac{1}{2},\\ |x| & ; \ -\dfrac{1}{2}<x\le 2.\end{cases}$$



النقطة 2 وكلّ نقطة من المجال $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$ نقطة حدّيّة عظمى محلّيّة؛ والصفر نقطة حدّيّة صغرى محلّيّة.

5.3 قضية

إذا تمتّعت دالّة حقيقيّة f بذروة (حضيض على التوالي) عند نقطة x_0، وكانت قابلة للاشتقاق عند x_0، فإنّ x_0 تعدم المشتقّ f'.

إثبات

نفترض أنّ f تقبل ذروة عند x_0. حالة الحضيض مماثلة.

إذا كان $x_0 \le x \le x_0 + \alpha$ فإنّ:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0.$$

وعليه، $f_d'(x_0) \le 0$. أمّا إذا كان $x_0 - \alpha \le x \le x_0$ ، فإنّ:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0.$$

وعليه، $f_g'(x_0) \ge 0$. ولمّا كان العدد المشتقّ $f'(x_0)$ موجودا تبيّن أنّه معدوم.

ملحوظتان

1) إنّ عكس هذه القضية ليس صحيحا عموما. فلو اعتبرنا الدالة $x \mapsto f(x) = x^3$ وجدنا أنّ مشتقّها ينعدم عند الصفر بيد أنّ الصفر ليس نقطة حدّية.

2) كلّ نقطة تعدم المشتقّ f' **نقطة حرجة** بالنسبة إلى الدالّة f .

6.3 مبرهنة (التزايدات المنتهية للاقرانج)

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال مغلق $[a,b]$ من $\mathbb{R}$.

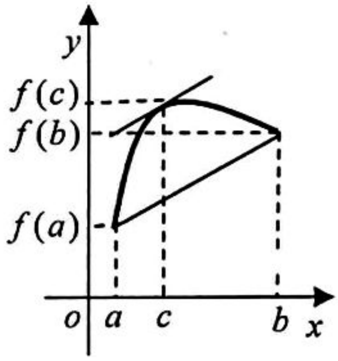
إذا كانت f مستمرّة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ فإنّ يوجد عندئذ عنصر c من $]a,b[$ بحيث:

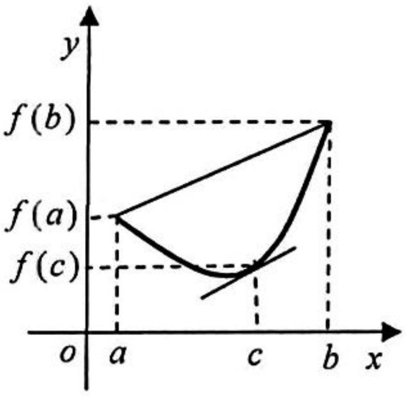
$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

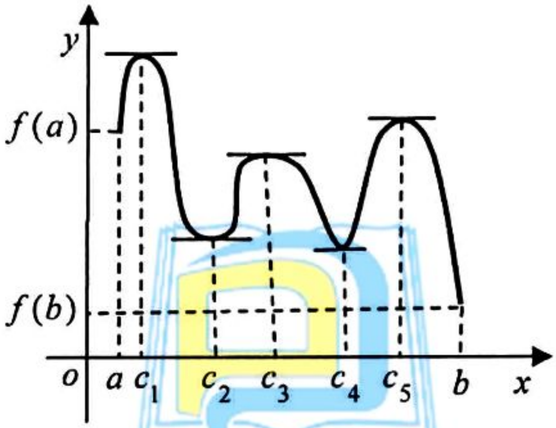
إثبات

لنشر بادئ ذي بدء إلى أنّ التأويل الهندسيّ لهذه النتيجة يفيد أنّ منحنى f البيانيّ يتمتّع عند النقطة $(c, f(c))$ بمماس يوازي القطعة المستقيمة

$.\left[(a, f(a)),(b, f(b))\right]$







لنعتبر الدالّة h المعرّفة على $[a,b]$ كالتالي:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

نلاحظ أنّ:

- ➢ h مستمرّة على $[a,b]$،
- ➢ h قابلة للاشتقاق على $]a,b[$،
- ➢ $h(a) = h(b) = f(a).$

يتّضـــح هكذا أنّ h تتوفّر فيها شروط مبرهنة رول. يوجد تبعا لذلك عنصر c من $]a,b[$ بحيث $h'(c)=0$، ومنه:

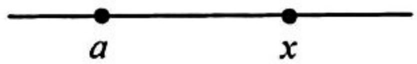
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

و.هـــ.م

7.3 ملحوظة

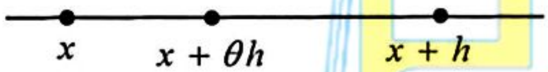
يمكن لنتيجة مبرهنة التزايدات المنتهية أن تتّخذ أشكالا مختلفة، منها:

1) إذا وضعنا $x=b$ كتبنا:



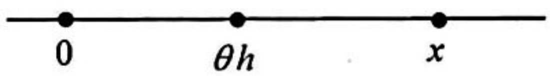
$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(c).$$

2) وإذا وضعنا $a=x$ و $b=x+h$ كتبنا:



$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h);\ 0<\theta<1.$$

3) أمّا إذا وضعنا $a=0$ و $b=x$ فإنّه يأتي:



$$f(x)=f(0)+xf'(\theta x);\ 0<\theta<1.$$

8.3 مثال (تبرير صحّة متباينات)

هبك تريد إثبات صحّة هاتين المتباينتين:

$$x-x^2\leq Log(1+x)\leq x,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+.$$

نسلك في ذلك سبيلين.

1) نطبّق مبرهنة التزايدات المنتهية في هذا الإطار:

$$[a,b]=[0,x]\ ,\ x\geq 0,$$
$$f(x)=Log(1+x);$$
$$g(x)=Log(1+x)+x^2.$$

من أجل $x=0$، الأمر واضح.

من أجل $x>0$ يوجد عنصران c و c' في $]0,x[$ بحيث:

$$Log(1+x)=x\frac{1}{1+c}<x;$$
$$Log(1+x)+x^2=x\left[\frac{1}{1+c}+2c'\right]=x\left[1+c'+\frac{c'^2}{1+c'}\right]>x.$$

2) من أجل كلّ x من $\mathbb{R}_+$ نعتبر الدالّتين (واحدة لكلّ متباينة):

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto f(t)=Log(1+xt);$$
$$g:[0,1]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto g(t)=Log(1+xt)+t^2x^2.$$

إنّهما تحقّقان شرطي مبرهنة التزايدات المنتهية. وعليه:

$$\exists c\in\,]0,1[\,/\,f(1)-f(0)=f'(c);$$
$$\exists c'\in\,]0,1[\,/\,g(1)-g(0)=g'(c').$$

نستخلص أنّ:

$$Log(1+x)=\frac{x}{1+cx}\leq x;$$
$$Log(1+x)+x^2=\frac{x}{1+c'x}+2c'x^2=x\left(1+c'x+\frac{c'^2x^2}{1+c'x}\right)\geq x.$$

9.3 مثال (تقدير خطإ)

إذا علمت أنّ $Log100 = 4,6052$ ، فاثبت مستعينا بدستور التزايدات المنتهية، أنّه إذا كتبت $Log101 = 4,6151$ وقعت في خطإ يقلّ 10^{-4}.

يمكنك أن تسوق هذا التبرير.

لنعتبر الدالّة:

$$f : [100,101] \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto f(x) = Logx.$$

إنّ شرطي مبرهنة التزايدات المنتهية متوفّران فيها (استمرارها وقابليتها للاشتقاق على $[100,101]$). يوجد تبعا لذلك عنصر c من $]100,101[$ بحيث:

$$Log101 - Log100 = (101-100)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

وعليه:

$$\frac{1}{101} < Log101 - Log100 = \frac{1}{c} < \frac{1}{100};$$

و:

$$4,6151 = Log100 + \frac{1}{100} < Log101 < Log100 + 0,01 = 4,6152.$$

وبالتالي:

$$|Log101 - 4,6151| < 0,0001 = 10^{-4}.$$

هكذا، إذا كتبنا $Log101 = 4,6151$ ارتكبنا خطأ يقلّ عن 10^{-4} كما هو مزعوم.

10.3 قضية (التحكّم في رتابة دالّة)

لكي تكون دالّة f ثابتة على مجال I يلزم ويكفي أن تتمتّع بمشتّق معدوم على I.

لكي تكون f متزايدة (متناقصة على التوالي) على I يلزم ويكفي أن يكون $0 \leq f'(x)$ ($0 \geq f'(x)$) على I.

إثبات

1) لزوم الشرط واضح. لنثبت أنّه كاف. نعتبر قصد ذلك عنصرين مختلفين x_1 و x_2 من I. نفترض $x_1 < x_2$. نكتب بمقتضى مبرهنة التزايدات المنتهية:

$$\exists c \in]x_1, x_2[\, / \, f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

ولكن $f'(c) = 0$، إذن:

$$f(x_1) = f(x_2) = \text{ثابت}$$

2) الشرط لازم: لنفترض أنّ f متزايدة و x_0 عنصرا من I. من أجل كلّ $x > x_0$ من I لدينا:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

وعليه:

$$0 \leq f'(x_0).$$

الشرط كاف. لنفترض $0 \leq f'$ على I و x_1 و x_2 عنصرين من I بحيث $x_1 < x_2$. لدينا:

$$\exists c \in]x_1, x_2[\, / \, f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0.$$

وعليه:

$$f(x_2) \geq f(x_1).$$

11.3 مبرهنة (التزايدات المنتهية المعمّمة)

لتكن f و g دالّتين معرّفتين على $[a,b]$.

إذا كانت f و g مستمرّتين على $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$ فإنّه يوجد حينئذ عنصر c من $]a,b[$ بحيث:

$$\left(f(b) - f(a)\right) g'(c) = \left(g(b) - g(a)\right) f'(c);$$

إثبات

لنعتبر الدالّة:

$$h(x) = \left[f(b) - f(a)\right] g(x) - \left[g(b) - g(a)\right] f(x).$$

نلاحظ أنّ:

- h مستمرّة على $[a,b]$،
- h قابلة للاشتقاق على $]a,b[$،
- $h(a) = h(b) = g(a) f(b) - f(a) g(b).$

يوجد بمقتضى مبرهنة رول عدد c من $]a,b[$ ينهي البرهان.

12.3 ملحوظات

1) إذا كانت g' لا تنعدم على I كتبنا النتيجة أعلاه:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2) إذا كان $x = g(x)$ على I تحصّلنا على مبرهنة التزايدات المنتهية لـــ f.

3) إذا طبّقنا على f و g (كلّ على حدة) مبرهنة التزايدات المنتهية وجدنا عنصرين c_1 و c_2 من $]a,b[$ بحيث:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

ولا يمكن الجزم بأنّ $c_2 = c_1$.

13.3 مبرهنة (قاعدة لوبيطال[7])

ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ و x_0 عنصرا منه ولتكن f و g دالّتين حقيقيّتين قابلتين للاشتقاق على I بحيث:

$$g'(x) \neq 0 \,,\, \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

إذا كانت النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ متمتّعة بنهاية منتهية ℓ عند x_0 فإنّ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

إثبات

يمكن، فرضا، أن نكتب:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \eta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \eta \;\; \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

---

7. Guillaume Antoine de l'Hospital: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 1661 ومات في 2 فيفري 1704 بباريس. اهتمّ بالتحليل والهندسة. يعدّ من السابقين في وضع الحساب التفاضليّ.

وطبقا لمبرهنة التزايدات المنتهية المعممّة يوجد عدد ξ في $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ بحيث:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

وعليه:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\ell\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\ell\right|<\varepsilon.$$

و.هـ.م

14.3 ملحوظات

1) النتيجة الواردة في هذه المبرهنة تمثّل شرطا كافيا فقط. وبعبارة أخرى، يمكن للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ أن تتمتّع بنهاية عند x_0 دون أن يكون ذلك شأن النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. هذا مثال يوضّح الوضع:

لتكن $x=g(x)$ و
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0,\\ 0 & ; x=0.\end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0;$$

في حين أنّ النسبة:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

ليست لها نهاية عند الصفر.

2) يمكن في الواقع الاستفادة من قاعدة لوبيطال في وضعيات أعم.

أ. فإذا كانت f و g دالّتين حقيقيّتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$ بحيث:

$$g'(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in]a,b[,$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = 0,$$

كان لدينا عندئذ:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ \Rightarrow \ \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell;$$

سواء كانت النهاية ℓ منتهية أو لا.

ب. إذا كانت f و g دالّتين حقيقيّتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$ بحيث:

$$g'(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in]a,b[,$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty,$$

كان لدينا عندئذ:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ \Rightarrow \ \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell;$$

سواء كانت النهاية ℓ منتهية أو لا.

ج. يمكن استبدال b بـــ $\pm\infty$ والحصول على النتيجة ذاتها.

3) كثيرا ما يستوجب حساب نهاية ما تكرار استخدام قاعدة لوبيطال إلى غاية رفع حالة عدم التعيين.

15.3 أمثلة

1) في حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Log(1+x)}{x}$ يفضي التعويض المباشر إلى حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$. لرفعها نستعين بقاعدة لوبيطال لنجد توّا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

2) التعويض المباشر في حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}$ يفضي إلى حالة عدم التعيين $\frac{+\infty}{+\infty}$. لرفعها نستعين بقاعدة لوبيطال لنجد فورا:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{2}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{2}=+\infty.$$

3) لنحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5-5cosx-4\sin^2 x}{x^4}.$$

نكتب بفضل بقاعدة لوبيطال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5-5cosx-4\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x-8\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{5-8\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{8\sin x}{2x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)^2=1.$$

16.3 حالات عدم تعيين أخرى

1) إذا أفضى التعويض المباشر في حساب النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$، حيث x_0 من $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$، إلى حالة عدم التعيين $0.\infty$، سمحت الصيغتان:

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)};$$

$$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)},$$

بالعودة إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ المعالجتين آنفا.

لنعالج النهايتين $\lim_{x\to 0^+} xLogx$ و $\lim_{x\to+\infty} xLog\left(1+\frac{1}{x}\right)$. نحن أمام حالة عدم التعيين $0.\infty$. لرفعها نكتب:

$$\lim_{x\to 0^+} xLogx=\lim_{x\to 0^+}\frac{Logx}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} xLog\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

2) إذا أفضى التعويض المباشر في حساب النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x)$ حيث x_0 من $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$، إلى حالة عدم التعيين $\infty-\infty$، فإنّه من الممكن إعادة صوغ الفرق $f(x)-g(x)$ بالكيفية التي تمكّن من إزالة حالة عدم التعيين أو العودة إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ المألوفتين الآن.

لنفحص النهايتين $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)$. نحن بطبيعة الحال أمام حالة عدم التعيين $\infty-\infty$. فإذا أعدنا صوغ العبارة الأولى على الشكل $\frac{\sin x - x}{x^2}$ كنّا بشأنها أمام حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$. وعليه، يأتي على الفور:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0.$$

أمّا بخصوص الثاني، فإنّ كتابتها تحت الشكل $x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$ يزيل حالة عدم التعيين ويعطي دونما عناء:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

17.3 مبرهنة (دستور تايلور[8])

ليكن f عنصرا من $\mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{R})$. لنفترض أنّ $f^{(n+1)}$ موجود على $[a,b]$. يوجد عندئذ عنصر c في $]a,b[$ بحيث:

---

8. Brook Taylor : رياضيّاتيّ انـڤليزيّ. ولد في 18 أوت 1685 بإدمنتون ومات في 29 ديسمبر 1731 بلندن. اشتهر بالدستور المستعرض أعلاه. لقد نشره بدون الباقي ودونما اكتراث بالجوانب التقاربيّة له. استخدمه لإيجاد حلول تقريبيّة لمعادلة من النوع $f(x)=0$.

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\dots$$
$$\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

إثبات

لنضع:

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)$$
$$=f(x)+\frac{b-x}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

إذا حسبنا المشتقّ h' واختزلنا الحساب حصلنا على:

$$h'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x);\ x\in\,]a,b[.$$

من جهة أخرى نلاحظ أنّ الدالّة:

$$g(x)=h(x)+\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n+1}[h(b)-h(a)],$$

تحقّق شروط مبرهنة رول على $[a,b]$. يوجد إذن عنصر c من $]a,b[$ بحيث:

$$0=g'(c)=\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)-\frac{n+1}{b-a}\left(\frac{b-c}{b-a}\right)^n[h(b)-h(a)];$$

ومنه:

$$h(b)-h(a)=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

و.هـ.م

18.3 تعريف

تسمّى العبارة:

$$f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

الجزء النظاميّ ذا الرتبة n لنشر تايلور للدالّة f. وتسمّى العبارة:

$$R_n=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

باقي لاڤرانج من الرتبة n.

19.3 ملحوظة (صيغ أخرى لدستور تايلور)

إذا وضعنا $b=a+h$، يكتب العدد c عندئذ $c=a+\theta h$ مع $0<\theta<1$، وعليه، يأتي دستور تايلور على هذا النحو:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+...+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

نلاحظ في هذا الكتابة أنّ العبارة:

$$R_n(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

المعروفة **بباقي كوشي**[9]، تمثّل **الخطأ** المترتّب عن استبدال $f(a+h)$ بالجزء النظاميّ:

---

9. Augustin Louis Cauchy : رياضياتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أوت 1789 بباريس ومات في 23 ماي 1857 بصو. يعتبر الرياضيّاتيّ الفرنسيّ الأغزر إنتاجا. تنطوي أعماله العلميّة على أزيد من 800 بحثا في مواضيع متنوّعة في الرياضيات والفيزياء. له باع طويل في تأسيس التحليل الرياضيّاتيّ الحديث.

$$f(h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

20.3 حالة خاصة

إذا كتبنا دستور تايلور من أجل $a=0$ حصلنا على **دستور ماك لوران**[10]:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

21.3 أمثلة

1) إذا اعتبرنا الدالّة $x \mapsto f(x) = \sin x$ جاءنا مشتقّها النونيّ:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

وعليه:

$$f^{(2p)}(0) = \sin(p\pi) = 0,$$
$$f^{(2p+1)}(0) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos p\pi = (-1)^p.$$

نستخلص أنّه مهما يكن x في جوار الصفر، يوجد عدد θ من $]0,1[$ يتعلّق بـــ x و n بحيث:

$$\sin x = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(\theta x + (n+1)\pi).$$

---

10. Colin Mac-Laurin: رياضيّاتيّ وفيزيائيّ اسكتلنديّ. ولد في فيفري 1698 بكيلمودان ومات في 14 جوان 1746 بإدامبورف. له أعمال في الهندسة. تعلّق اسمه بدستوره أعلاه.

2) لنعتبر الدالّة $f(x)=\cos x$. لدينا:

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

وعليه:

$$f^{(2p)}(0)=\cos\left(2p\frac{\pi}{2}\right)=\cos(p\pi)=(-1)^p;$$
$$f^{(2p+1)}(0)=0.$$
$$\cos x=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

3) لنعالج المتباينة:

$$\forall x\in[0,1]\ \ shx\geq x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

لدينا بوضع $f(x)=shx$:

$$f'(x)=f^{(3)}(x)=f^{(5)}(x)=f^{(7)}(x)=chx;$$
$$f''(x)=f^{(4)}(x)=f^{(6)}(x)=shx.$$

وبمقتضى مبرهنة تايلور المطبّقة على $f(x)=shx$ في المجال $[0,x]$، حيث x من $[0,1]$، نكتب:

$$\exists c\in]0,x[\,/\,shx=\sum_{k=0}^{6}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(7)}(c)}{7!}x^7$$
$$=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{chc}{7!}x^7.$$

ولما كان الباقي $\frac{\operatorname{ch}c}{7!}x^7$ موجبا على $[0,1]$ استنتجنا المطلوب.

22.3 ملحوظة

يمكن أن نصوغ دستور تايلور لـــ f على النحو التالي:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x);$$

$$=f(a)+(x-a)f'(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\theta\left((x-a)^n\right),$$

مع:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=\lim_{x\to a}\frac{\theta\left((x-a)^n\right)}{(x-a)^n}=0.$$

تدعى العبارة $(x-a)^n\varepsilon(x)=\theta\left((x-a)^n\right)$ **باقي يونـــف**[11].

23.3 نتيجة

إذا كانت f دالّة قابلة للاشتقاق عند كلّ نقطة من مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$

11 William Henry,Young: رياضيّاتيّ انـــڤليزيّ. ولد في 20 أكتوبر 1863 بلندن ومات في 7 جويلية 1942 بلوزان. انصبّت أعماله الهامّة حول الدوال متعدّدة المتغيّرات.

حتّى الرّتبة $n+1$، فإنّ f تكون عندئذ كثير حدود لا تتعدّى درجته n إذا وفقط إذا كان $f^{(n+1)}(x)=0$ عند كلّ نقطة x من I.

واضح!

24.3 مبرهنة

لتكن f من صنف $\mathscr{C}^{n+1}$ بجوار نقطة x_0 بحيث:

$$\begin{cases} f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0. \end{cases}$$

1) إذا كانت الرتبة n **فرديّة** لم تقبل الدالّة f لا قيمة عظمى ولا صغرى عند x_0.

2) إذا كانت الرتبة n زوجيّة قبلت الدالّة f قيمة حدّية عند x_0.

وعلاوة على ذلك، إذا كان $f^{(n)}(x_0)>0$ قبلت f عند x_0 قيمة صغرى؛ وإذا كان $f^{(n)}(x_0)<0$ قبلت f عند x_0 قيمة عظمى.

إثبات

1) نكتب طبقا لدستور تايلور:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

$$=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

$$=\frac{h^n}{n!}\left(f^{(n)}(x_0)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\right).$$

نلاحظ أنّ الحدّ $\frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$ يؤول إلى الصفر كلّما آل h إلى الصفر (أو x إلى x_0). نستنتج أنّه مهمل أمام $f^{(n)}(x_0)$. وعليه، فإنّ إشارة العبارة:

$$f^{(n)}(x_0)+\frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x_0+\theta h),$$

من إشارة الحدّ $f^{(n)}(x_0)$. نستخلص أنّ إشارة الفرق $f(x_0+h)-f(x_0)$ من إشارة $h^n f^{(n)}(x_0)$. ولّما كان n فرديّا تبيّن أنّ هذه الإشارة تتغيّر بتغيّر إشارة h. النقطة x_0 لا يمكنها جرّاء ذلك أن تكون حدّية.

2) إشارة الفرق $f(x_0+h)-f(x_0)$ في هذه الحالة من إشارة $f^{(n)}(x_0)$. نستخلص أنّ النقطة x_0 حدّية. وفضلا عن ذلك، فهذه الأخيرة نقطة حدّية صغرى في الحالة $f^{(n)}(x_0)>0$ وحدّية عظمى في الحالة $0>f^{(n)}(x_0)$.

25.3 نتيجتان

1) إذا قبلت دالّة f الاشتقاق مرّتين عند نقطة x_0 وكانت x_0 انعطافيّة كان لدينا عندئذ $f''(x_0)=0$.

2) إذا قبلت دالّة f الاشتقاق n مرّة عند نقطة x_0 بحيث:

$$\begin{cases} f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0, \end{cases}$$

فإنّ:

$$x_0 \text{ انعطافيّة } \Leftrightarrow n \text{ فرديّ}$$

القسم الثاني

النشور المحدودة:

تقعيد نظريّ وتطبيقات

1

النشر المحدود في جوار الصفر

1.1 تعاريف وخصائص عامّة

1.1.1 تمهيد

يشكّل هذا المفهوم إحدى اللبنات الهامّة الكبرى في الرياضيّات، لاسيّما التطبيقيّة منها. ولمّا كان العالم الذي نعيش فيه لا تخلو فيه أيّة مسألة من مسائل الحياة اليوميّة من جوانب لا تدرك بسهولة كان السعي إلى إخراجها من المحسوس إلى الملموس أمر يطلب وغاية تنشد. للنشر المحدود في كثير منها دور ناجع وفعّال. لذا، لا يمكن لأيّ مهندس أينما تواجد تخصّصا وانشغالا، من أن يستغني عنه في دراساته.

لقد سبق أن تعرّفنا على دستور تايلور الذي يقدّم، تحت شروط معيّنة، تقريبا لدالّة f بكثير حدود في جوار نقطة ما. غير أنّه إذا تأمّلنا في الشروط المعنية وجدناها قاسية. فقد يمكن مقاربة دالّة ما في جوار نقطة ما بكثير حدود بقيود أضعف بكثير. تقودنا هذه الفكرة إلى مفهوم النشر المحدود ...

ندرج هذا المفهوم منهجيّا في جوار الصفر أوّلا، ربحا للخفّة التقنيّة.

نعمد بعد ذلك إلى تعميمه إلى جوار أيّة نقطة حقيقيّة x_0، ثمّ ننهي الدراسة عند جوار ∞.

2.1.1 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة في جوار I_0 للصفر (يحتمل ألاّ تكون كذلك عند الصفر) و n عددا طبيعيّا.

نقول عن الدالّة f إنّها تقبل نشرا **محدودا** رتبته n في جوار الصفر إذا وجدت ثوابت حقيقيّة a_0، a_1، ...، a_n ودالّة $x \mapsto \varepsilon(x)$ معرّفة في I_0 (يمكن للصفر أن يستثنى) ومقيّدة بالشرط $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ بحيث:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x). \qquad (*)$$

يسمّى كثير الحدود $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ **الجزء النظاميّ** للنشر المحدود، ويدعى المقدار $x^n \varepsilon(x)$ **باقي** النشر المحدود.

3.1.1 ملحوظتان

1) يمكن توظيف ترميزة لاندو[12] والسماح للباقي $x^n \varepsilon(x)$ بأن يوضع تحت الشكل $\circ(x^n) = x^n \varepsilon(x)$ مع فرض $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\circ(x)}{x^n} = 0$. تصبح العلاقة (*). في هذه الحالة:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + \circ(x^n); \ (x \in I_0). \qquad (**)$$

2) يتبيّن من هذا التعريف أنّ تمتّع دالّة f بنشر محدود يخوّل لها قبول الحدّ الأوّل a_0 من (*) نهاية لها عند الصفر.

12. Edmund Georg Hermann Landau : رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 14 فيفري 1877 ببرلين ومات بها في 19 فيفري 1938. اشتغل في النظرية التحليليّة للأعداد والدوال ذات المتغيّرات العقدية. ارتبط اسمه بالترميزة o و O.

وبالعكس، إذا لم تكن لدالّة f نهاية عند الصفر تعذّر لها قبول أيّ نشر محدود. بعبارة أدقّ، **يعدّ قبول دالّة f نهاية عند الصفر شرطا لازما لها للتمتّع بنشر محدود عند هذه النقطة.**

4.1.1 مثالان

1) إنّ الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـــ :

$$f(x) = 1 + 2x - 5x^2 + x^8 th\frac{1}{x},$$

تقبل نشرا محدودا رتبته 7 في جوار الصفر، ذلك لأنّه يمكن وضعها تحت الشكل:

$$f(x) = 1 + 2x - 5x^2 + x^7\left(xth\frac{1}{x}\right) = 1 + 2x - 5x^2 + x^7\varepsilon(x),$$

حيث:

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim_{x\to 0} xth\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

ممّا يشدّ الانتباه هنا أنّنا أبعد ما نكون عن شروط ماك لوران، إذ الدالّة المختبرة ليست معرّفة عند الصفر.

2) الدالّتان الحقيقيّتان عمدة جيب التمام الزائديّ $Argch\, x$ وعمدة ظل التمام الزائديّ $Argcth\, x$ لا يمكنهما التمتّع بنشر محدود في جوار الصفر. إنّهما غير معرّفتين في أيّ جوار للصفر.

5.1.1 مبرهنة

لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار n مرّة في جوار I_0 للصفر. تتمتّع f عندئذ بنشر محدود رتبته n في I_0 بحيث:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

إثبات

إنّه دستور ماك لوران بعينه!

6.1.1 مبرهنة

إذا كان للدالّة الحقيقيّة f نشر محدود رتبته n في جوار الصفر كان هذا النشر وحيدا.

إثبات

لنفترض أنّ الدالّة f تقبل نشرين محدودين من الرتبة n في جوار الصفر:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x), \qquad (1)$$

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+x^n\varepsilon_1(x), \qquad (2)$$

ولنبيّن أنّ:

$$a_k=b_k\ ,\quad \forall k=0,1,\ldots,n.$$

نستعين بالبرهان بالتناقض. لنفترض إذن أنّ الأمر خلاف ذلك ولنعتبر عندئذ العدد الأصغر r الذي من أجله يكون $a_r\neq b_r$. إذا قمنا بطرح المساواتين السابقتين طرفا طرفا وجدنا:

$$0=(a_r-b_r)x^r+(a_{r+1}-b_{r+1})x^{r+1}+\ldots+(a_n-b_n)x^n+x^n(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))$$

ومن أجل $x\neq 0$ يأتي:

$$0=(a_r-b_r)+(a_{r+1}-b_{r+1})x+\ldots+(a_n-b_n)x^{n-r}+x^{n-r}(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)).$$

وعند مآل x إلى الصفر نحصل على $a_r - b_r = 0$، أي $a_r - b_r = 0$؛ وهذا يتنافى وزعمنا.

7.1.1 قضية

إذا كان لدالّة حقيقيّة f نشر محدود من الرتبة n في جوار الصفر فإنّ الدالّة f تقبل نشرا محدودا من أيّة رتبة $n \geq m$ في جوار الصفر.

إثبات

لدينا فرضا:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + x^m \left(a_{m+1} x + \ldots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x) \right).$$

وإذا وضعنا:

$$\varepsilon_1(x) = a_{m+1} x + \ldots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x),$$

ولاحظنا أنّ $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ أمكن أن نكتب:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + x^m \varepsilon_1(x).$$

و.هـ.م

8.1.1 قضية

إذا قبلت دالّة n نشرا محدودا رتبته n في جوار الصفر من الشكل:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

كان لدينا على التوّ:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=a_0;$$

وإذا كانت f مستمرّة عند الصفر نتج حينئذ:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=a_0=f(0).$$

أخيرا، إذا كانت الرتبة $1\leq n$ وكانت الدالّة f مستمرّة عند الصفر أضحت f عندئذ قابلة للاشتقاق عند الصفر وحقّقت $f'(0)=a_1$.

إثبات

من النشر المفترض ينتج فورا أنّ $\lim_{x\to 0} f(x)=a_0$. وبالطبع، إذا كانت f مستمرّة عند الصفر صحّ أن نكتب:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=a_0=f(0).$$

أمّا بخصوص الدعوى الأخيرة، فنكتب بشأنها:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x).$$

وعليه:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=a_1.$$

9.1.1 ملحوظة

يستشفّ من هذه القضية أنّه إذا كانت دالّة f قابلة للاشتقاق عند الصفر وتمتّعت في جوار هذا الأخير بنشر محدود لم يرد فيه المعامل a_1 (أي $0=a_1$) فإنّ بيان f يقبل عندئذ مماسا موازيا لمحور الفواصل.

10.1.1 قضية

إذا كانت f دالّة فرديّة قابلة لنشر محدود رتبته n في جوار الصفر:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x),$$

فإنّ:

$$a_0 = a_2 = \ldots = a_{2r} = 0;\ \forall r \in \mathbb{N} / 2r \leq n.$$

وإذا كانت زوجيّة فإنّ:

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2r+1} = 0;\ \forall r \in \mathbb{N} / 2r + 1 \leq n.$$

إثبات

لدينا في الحالة الأولى:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x),$$
$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + \ldots + (-1)^n a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x),$$
$$-f(-x) = -a_0 + a_1x - a_2x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_nx^n + x^n\varepsilon_2(x),$$

حيث:

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

بما أنّ:

$$f(x) = -f(-x),$$

والنشر وحيد، إذن، يأتي بالمطابقة:

$$a_0 = -a_0, a_2 = -a_2, \ldots, a_{2r} = -a_{2r};\ \forall r \in \mathbb{N} / 2r \leq n.$$

ومنه النتيجة الموضوعة:

$$a_0 = a_2 = \ldots = a_{2r} = 0;\ \forall r \in \mathbb{N} / 2r \leq n.$$

تعالج الحالة الثانية بأسلوب مماثل.

2.1 مبرهنات أساسيّة وتطبيقات

1.2.1 أمثلة

نستهلّ هذا المقطع باستعراض بعض من النشور المحدودة الاعتياديّة في جوار الصفر (هي في الواقع دساتير ماك لورانيّة).

1) لنعتبر الدالّة الأسيّة $f(x)=a^x$، حيث $0<a$.

المشتقّات النونيّة للدالّة f معطاة بواسطة الصيغة:

$$f^{(n)}(x)=(Loga)^n a^x.$$

وعليه:

$$a^x=1+(Loga)x+\frac{(Loga)^2}{2!}x^2+...+\frac{(Loga)^n}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

2) إذا أخذنا $e=a$ أعلاه حصلنا على التوّ:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

3) $f(x)=ch\,x$:

المشتقّات النونيّة للدالّة f هي:

$$(ch\,x)^{(n)}(x)=\begin{cases} ch\,x; \\ sh\,x; \end{cases}$$

وعليه:

$$ch\,x=1+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{(2r)!}x^{2r}+x^{2r}\varepsilon(x);\quad (2r\le n).$$

4) بالمثل، لدينا من أجل دالّة الجيب الزائدي $f(x)=sh\,x$:

$$(sh\,x)^{(n)}(x)=\begin{cases} sh\,x; \\ ch\,x; \end{cases}$$

وعليه:

$$sh\,x = x+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{(2r+1)!}x^{2r+1}+x^{2r+1}\varepsilon(x);\ \ (2r+1\le n).$$

5) $f(x)=\cos x$:

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+(-1)^r\frac{1}{(2r)!}x^{2r}+x^{2r}\varepsilon(x);$$

$$(2r\le n).$$

6) $f(x)=\sin x$:

$$\sin = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots+(-1)^r\frac{1}{(2r+1)!}x^{2r+1}+x^{2r+1}\varepsilon(x);$$

$$(2r+1\le n).$$

7) إذا كان α عددا حقيقيّا معطى كتبنا من أجل كلّ x مختلف عن -1 في جوار الصفر:

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{x!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

8) إذا وضعنا $\alpha=\frac{1}{2}$ في (7) تحصّلنا على:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

9) بأخذ $-x$ مكان x في (8) نجد:

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\ldots-\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

10) من أجل $\alpha=-1$ نحصل على:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x).$$

11) بأخذ $-x$ مكان x في (10) نجد:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+x^n\varepsilon(x).$$

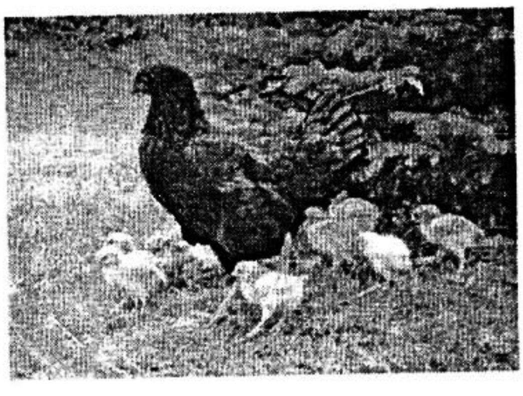
12) بأخذ $\alpha=-\frac{1}{2}$ يأتي:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-...+(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

13) بأخذ $-x$ مكان x في (11) نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+...+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

لا أخالك قد فاتك أنّنا احتفظنا في هذه النشور برمز واحد للبواقي رغم اختلافها. لقد توخّينا في ذلك خفّة النص، مدعّمين بثقتنا في قدرتك على الفرز وقت ما نشدت التدقيق. سوف يكون ذلك شأننا فيما سيلحق من نشور. كما أنّك سجّلت بحرص أشدّ فوائد النشر الوارد في البند السابع. لقد سقنا إليك ستّا من روافدها وغيرها كثير لم نذكره لك. لقد صدق عليه فعلا ما أطلقناه عليه من تسمية **"الدجاجة المفرخة"** أمام كثير من قوافل زملائك الذين حظينا بالمحاضرة فيهم. ألا فاشملها برعاية خاصّة، فإنّ ثمارها لا تعدّ ولا تحصى.



2.2.1 ملحوظة

نعلم أنّه إذا تمتّعت f عند الصفر بمشتقّات مستمرّة f'، f''، ... $f^{(n)}$، ومشتقّ محدود $f^{(n+1)}$ فإنّ دستور ماك لوران يمدّنا بـــ :

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon_1(x). \qquad (*)$$

وبالطبع، فهذه الفرضيّات تسمح بكتابة دستور ماك لوران من الرتبة $n-1$ بالنسبة إلى الدالّة المشتقّة f' :

$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x). \qquad (**)$$

إذا تمعنّا في هذين النشرين وجدنا الجزء النظاميّ في (**) يعدل مشتقّ الجزء النظاميّ في (*). نستخلص أنّه إذا كان دستور ماك لوران مطبّقا على دالّة f وتمتّعت هذه الأخيرة بالنشر المحدود:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x),$$

فإنّنا نستنتج نشر المشتقّ f' على هذا النحو:

$$f'(x)=a_1+2a_2x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x).$$

وبالعكس، إذا كانت f قابلة دستور ماك لوران وكان نشر الدالّة المشتقّة f' معلوما تحت الشكل:

$$f'(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + ... + b_n x^{n-1} + x^{n-1}(x),$$

فإنّه باستطاعتنا أن نستخلص نشر الدالّة f على النحو:

$$f(x) = f(0) + b_1 x + \frac{b_2}{2} x^2 + ... + \frac{b_n}{n} x^n + x^n(x).$$

عمليّا، نكون قد قمنا في الحالة الأولى باشتقاق الجزء النظاميّ لـــ f حدّا حدّا. وفي الحالة الثانية، كاملنا الجزء النظاميّ لـــ f' حدّا حدّا، مضيفين القيمة $f(0)$ إلى الناتج. يمكن أن نبرز مفعول هذه الملحوظة عبر تطبيقها في الحالات التالية:

1) نعلم أنّ:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

وعليه:

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + ... + nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x);$$

$$h(x) = Log(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{n}x^n\right) + x^n \varepsilon(x).$$

2) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^r x^{2r} + x^{2r}\varepsilon(x);\ 2r \leq n.$$

(يمكن الوصول إليه بجعل x^2 يلعب دور x في النشر العاشر أعلاه). وعليه:

$$Arctg\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - ... + (-1)^r \frac{1}{2n+1} x^{2r+1}\varepsilon(x);\ 2r+1 \leq n.$$

لاحظ أنّ $Arctg\, x = 0$.

3) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

وعليه:

$$Log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-...+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+x^{n+1}\varepsilon(x).$$

4) لدينا من النشر 12:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+...+\frac{1.3.5...(2r-1)}{2.4.6...2r}x^{2r}+x^{2r}\varepsilon(x),$$

$$2r\leq n.$$

وعليه:

$$Arc\sin x=x+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1.3}{2.4.5}x^5-...$$

$$...-\frac{1.3.5...(2r-1)}{2.4.6...2r.(2r+1)}x^{2r+1}+x^{2r+1}\varepsilon(x);\ \ 2r+1\leq n.$$

5) بما أنّ:

$$Arc\cos x=\frac{\pi}{2}-Arc\sin,\ \ \forall x\in[-1,1],$$

إذن:

$$Arc\cos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2.3}x^3-\frac{1.3}{2.4.5}x^5-...$$

$$...-\frac{1.3.5...(2r-1)}{2.4.6...2r.(2r+1)}x^{2r+1}+x^{2r+1}\varepsilon(x),2r+1\leq n.$$

6) لدينا من النشر 13:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-...+(-1)^n\frac{1.3.5...(2r-1)}{2.4.6...2r}x^{2r}+x^{2r}\varepsilon(x);$$

$$2r\leq n.$$

وعليه:

$$Argsh\,x = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1.3}{2.4.5}x^5 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r.(2r+1)}x^{2r+1} + x^{2r+1}\varepsilon(x), 2r+1 \le n.$$

7) نعلم أنّ:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2r} + x^{2r}\varepsilon(x),\ \ 2r \le n.$$

وعليه:

$$Argth\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2r+1}}{2r+1} + x^{2r+1}\varepsilon(x);$$
$$2r+1 \le n;\ \ (x \in \left]-1,1\right[.$$

3.2.1 قضية (الجمع)

إذا كانت f و g دالّتين حقيقيّتين تقبلان نشرين محدودين من رتبة واحدة n في جوار الصفر:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) = A(x) + x^n\varepsilon_1(x),$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) = B(x) + x^n\varepsilon_2(x),$$

$f+g$ يقبل نشرا محدودا رتبته n في جوار الصفر؛ جزؤه النظاميّ هو مجموع جزئي نشري f و g النظاميّين.

وبالفعل، لدينا بوضوح:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \left[A(x) + B(x)\right] + x^n\left[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right],$$

حيث $\lim\limits_{x\to 0}\left[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right] = 0$.

4.2.1 مثال

لنعتبر الدالّتين f و g المعرّفتين بـــ $f(x)=e^x$ و $g(x)=e^{-x}$. لدينا:

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+x^n\varepsilon_1(x^n),$$

$$g(x)=e^{-x}=1-x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}x^n+x^n\varepsilon_2(x^n).$$

(لا شكّ في أنّك لاحظت أنّ هذين النشرين انبثقا من تطبيق دستور ماك لوران). ومنه:

$$e^x+e^{-x}=2\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{1}{(2r)!}x^{2r}+x^{2r}\varepsilon_3(x)\right);\ 2r\leq n,$$

$$e^x-e^{-x}=2\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+\frac{1}{(2r+1)!}x^{2r+1}+x^{2r+1}\varepsilon_4(x^n)\right);$$

$$2r+1\leq n.$$

من هذين النشرين نستخلص على الفور:

$$ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{(2r)!}x^{2r}+x^{2r}\varepsilon_3(x);\ (2r\leq n).$$

$$sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{(2r+1)!}x^{2r+1}+x^{2r+1}\varepsilon_4(x^n);$$

$$(2r+1\leq n).$$

إنّهما نشران سبق الظفر بهما ماكلورانيّا.

5.2.1 قضية (الضرب)

إذا احتفظنا بالمعطيات أعلاه جزمنا بأنّ الدالّة fg تقبل نشرا محدودا رتبته n في جوار الصفر، جزؤه النظاميّ هو حاصل ضرب جزئي نشري f و g النظاميّين، مكتفين في حواصل الجداءات بالحدود التي لا تتعدّى درجاتها n.

لنفصّل في الأمر. لدينا:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = \left[A(x) + x^n \varepsilon_1(x)\right]\left[B(x) + x^n \varepsilon_2(x)\right]$$
$$= A(x)\,B(x) + x^n\left[\varepsilon_1(x)B(x) + \varepsilon_2(x)A(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right].$$

إذا رمزنا بـــ $C(x)$ لمجموع الحدود التي لا تتعدّى درجتها n كتبنا:

$$A(x)B(x) = C(x) + x^{n+1}D(x).$$

ومنه:

$$f(x)g(x) = C(x) + x^n\left[\varepsilon_1(x)B(x) + \varepsilon_2(x)A(x) + \right.$$
$$\left. + x^n\,\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(x) + xD(x)\right];$$

أي:

$$f(x)g(x) = C(x) + x^n \varepsilon(x);$$

حيث:

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to 0}\left[\varepsilon_1(x)B(x) + \varepsilon_2(x)A(x) + x^n\,\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(x) + xD(x)\right] = 0.$$

6.2.1 أمثلة

1) هات النشر المحدود من الرتبة السادسة في جوار الصفر للدالّة الحقيقيّة f المعطاة بـــ $f(x) = e^x \sin x$. لدينا بمقتضى دستور ماك لوران:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + x^6\varepsilon_1(x),$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + x^6\varepsilon_2(x).$$

ومنه:

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon_1(x)\right) \times$$

$$\times\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + x^6\varepsilon_3(x).$$

(صدرت هذه النتيجة عمليّا عن طريق إجراء الضرب العاديّ للجزأين النظاميّين المرفقين بالعاملين **مع الاكتفاء، بشأن الجزء النظاميّ للنشر المطلوب، بأخذ الحدود التي لا تتعدّى درجتها 6).**

2) جب على السؤال ذاته بخصوص الدالّة f المعرّفة بـــ:

$$f(x) = \frac{Log(1+x)}{1+x}.$$

نلاحظ في البداية أنّ:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} Log(1+x).$$

وبما أنّ:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^6\varepsilon_1(x),$$

إذن:

$$\frac{Log(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon_2(x)\right) \times$$

$$\times\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^6\varepsilon_1(x)\right)$$

$$= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + \frac{137x^5}{60} - \frac{49x^6}{20} + x^6\varepsilon(x).$$

3) انشر في جوار الصفر إلى غاية الرتبة 3، الدالّة $f(x)=\dfrac{ch\,x}{\sqrt{1-x}}$.

لدينا:

$$ch\,x = 1+\frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon_1(x),$$

(لاحظ أنّ الدالّة جيب التمام الزائدي $ch\,x$ زوجيّة. لما كانت الرتبة المطلوبة فرديّة توقّفنا عند أعلى درجة زوجيّة تصغر الرتبة المفروضة)،

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+x^3\varepsilon_2(x).$$

وعليه:

$$\begin{aligned}\frac{ch\,x}{\sqrt{1-x}} &= ch\,x\frac{1}{\sqrt{1-x}}\\ &= \left(1+\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{16}+x^3\varepsilon_2(x)\right)\\ &= 1+\frac{x}{2}+\frac{7x^2}{8}+\frac{9x^3}{16}x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

7.2.1 قضية (القسمة)

ننطلق كما سبق، من المعطيات والترميزات الواردة في بداية المقطع (1) وندعّمها بفرض القيد $b_0 \neq 0$، وهو ما يضمن عدم انعدام الدالّة g في جوار الصفر. تحت هذه الشروط نجزم بأنّ الدالّة $\dfrac{f}{g}$ تقبل نشرا محدودا رتبته n في جوار الصفر، جزؤه النظاميّ هو حاصل قسمة جزئي نشري f و g النظاميّين وفق القوى المتزايدة.

هذا تعليل ذلك.

إذا قمنا بقسمة كثير الحدود $A(x)$ على كثير الحدود $B(x)$ وفق القوى المتزايدة إلى غاية الرتبة n وجدنا:

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x).$$

يمثّل كثيرا الحدود $Q(x)$ و $x^{n+1}R(x)$ على الترتيب، حاصل وباقي القسمة المعلنة.

بوضع $xR(x) = \varepsilon'(x)$ مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon'(x) = 0$ نكتب أيضا:

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^n\varepsilon'(x).$$

وعليه:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(g(x) - x^n\varepsilon_2(x)\right)Q(x) + x^n\varepsilon'(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ &= g(x)Q(x) + x^n\left(\varepsilon'(x) + \varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x)\right) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\frac{\varepsilon'(x) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{g(x)}$$

فإذا وضعنا:

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon'(x) + \varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x)}{g(x)},$$

ولا حظنا أنّ $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ كنّا قد بلغنا المطلوب وختمنا ردّنا.

8.2.1 أمثلة

1) لنحسب النشر المحدود من الرتبة 5 في جوار الصفر للدالّة الظل الزائديّ $f(x) = th\,x$. نلاحظ أنّ:

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x)}{1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^5\varepsilon_2(x)}.$$

لنجر القسمة الموصوفة أعلاه:

$$
\begin{array}{l|l}
x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120} & 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
- & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15} \\
x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24} & \\ \cline{1-1}
-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30} & \\
- & \\
-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{6}-\dfrac{x^7}{72} & \\ \cline{1-1}
\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{x^7}{72} & \\
- & \\
\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{x^7}{15}+\dfrac{x^9}{180} & \\ \cline{1-1}
-\dfrac{19x^7}{36}-\dfrac{x^9}{180} &
\end{array}
$$

وعليه:

$$th\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x).$$

2) لنرد على السؤال ذاته بخصوص الدالّة $f(x)=tg\,x$. لدينا:

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon_1(x)}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+x^5\varepsilon_2(x)}.$$

وبإجراء القسمة لجزئي البسط والمقام النظاميّين كما فعلنا في المثال الأوّل نجد دونما عناء:

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x).$$

9.2.1 ملحوظة

يمكن الحصول من جديد على النشرين الواردين في (أ) و(ب) من جملة الأمثلة (2.2)، وذلك باستخدام القسمة بدل الضرب. ألا فافعله !

10.2.1 قضية (التركيب)

لتكن u دالّة حقيقيّة مقيّدة بالشرط $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ ومتمتّعة بنشر محدود من الرتبة n في جوار الصفر، مكتوب على النحو:

$$u(x) = B(x) + x^n\varepsilon_1(x) = b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + x^n\varepsilon_1(x),$$

ولتكن $f : u \mapsto f(u)$ دالّة حقيقيّة معرّفة في جوار الصفر ومتمتّعة بنشر محدود رتبته n في جوار $u = 0$:

$$f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n + u^n\varepsilon_2(u)$$

حيث:

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

إنّ الدالّة $h : x \mapsto f(u(x))$ تتمتّع بنشر محدود رتبته n في جوار الصفر. وفعلا، يمكننا، على ضوء المعطيات، أن نكتب:

$$f(u(x)) = a_0 + a_1\left(B(x) + x^n\varepsilon_1(x)\right) + a_2\left(B(x) + x^n\varepsilon_1(x)\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + a_n\left(B(x) + x^n\varepsilon_1(x)\right)^n + x^n\varepsilon_3(x)$$

$$= a_0 + a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (a_1b_n + \ldots + a_1b_1^n)x^n + x^n\varepsilon_4(x).$$

11.2.1 أمثلة

1) لننشر الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـــ $f(x) = Log(\cos x)$ في جوار الصفر إلى غاية الرتبة 4. لدينا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x).$$

لنضع:

$$u(x) = -1 + \cos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x),$$

نعلم أنّ:

$$Log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} x^4 \varepsilon_2(x),$$

وعليه:

$$Log(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{x^4}{8} + x^4 \varepsilon_3(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon_3(x).$$

لم نورد، بطبيعة الحال، سوى الحدود التي لا تتعدّى درجاتها 4.

2) لنجب على السؤال ذاته بشأن الدالّة الحقيقيّة g المعرّفة بـــ $g(x) = e^{chx}$ مع استبدال الرتبة 4 بـــ 3. لدينا:

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x).$$

وبوضع:

$$u(x) = -1 + ch\, x = \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x),$$

يأتي:

$$e^{1+u}=ee^{u}=e\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+u^3\varepsilon_2(x)\right);$$

إذن:

$$e^{chx}=e\left[1+\left(\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_1(x)\right)+x^3\varepsilon_3(x)\right]=e+\frac{ex^2}{2}+x^3\varepsilon_4(x).$$

3) إذا اعتبرنا الدالّة الحقيقيّة h المعرّفة بـــ $h(x)=(1-x)^{\sin x}$ وأردنا نشرها في جوار الصفر إلى غاية الرتبة 3 كتبنا في البداية:

$$h(x)=(1-x)^{\sin x}=e^{\sin x Log(1-x)}.$$

وبما أنّ:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x),$$

$$Log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x),$$

$$e^{u}=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+u^3\varepsilon_3(u),$$

إذن:

$$\sin x\, L\text{og}(1-x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\right)$$

$$=-x^2-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon_4(x),$$

وبالتالي:

$$(1-x)^{\sin x}=e^{\sin x L\text{og}(1-x)}=e^{-x^2-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon_4(x)}$$

$$=1+\left(-x^2-\frac{x^3}{2}\right)+x^3\varepsilon_5(x)=1-x^2-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon_5(x)$$

12.2.1 تطبيقان

1) إنّ من أهم مزايا النشور المحدودة تحكمها المطلق في إزالة حالات عدم التعيين أثناء حساب النهايات. لن يصمد أمامك أيّ منها بعد الآن. لنسق لك في هذا المضمار المثالين المواليين. لك أن تقارن بين نجاعة هذه الطريقة والطرق التي ألفتها من قبل.

هب أنّه طلب منّا تعيين النهايات الثلاث التالية:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{tg2x-2tgx}{\sin x(1-ch4x)};\quad 2)\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\ln(1+sh\,x)};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{1-ch\dfrac{x}{1+x}}{x^2(1+x)^x}.$$

التعويض المباشر يؤدّي، في كلّ واحدة من هذه الحالات، إلى عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$. لرفعه نقوم، بخصوص الأولى، بالإجراء التالي.

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x-2tgx}{\sin x(1-ch4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+\dfrac{8x^3}{3}\right)-2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)+x^3\varepsilon_1(x)}{\left(x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_2(x)\right)\left(-\dfrac{16x^2}{2}+x^3\varepsilon_3(x)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^3\varepsilon_1(x)}{-8x^3+x^3\varepsilon_4(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\varepsilon_1(x)}{-8+\varepsilon_4(x)}=-\frac{1}{4}.$$

من أجل الثانية نسوق هذا الحساب:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x),$$

ومنه:

$$\sqrt{\cos x}=\sqrt{1+\left(-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)\right)}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)\right)+x^2\varepsilon_2(x)=1-\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon_3(x);$$

وبالتالي:

$$1-\sqrt{\cos x}=\frac{x^4}{4}+x^2\varepsilon_4(x).$$

وبالمثل، نكتب:

$$Log(1+sh\,x)=Log\left[1+\left(x+x^2\varepsilon_5(x)\right)\right]=x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_6(x).$$

نستنتج أنّ:

$$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{xLog(1+sh\,x)}=\frac{\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon_4(x)}{x\left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_6(x)\right)}=\frac{\frac{1}{4}+\varepsilon_4(x)}{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon_6(x)}.$$

هكذا نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{xLog(1+sh\,x)}=\frac{1}{4}.$$

نتّبع الخطوات نفسها لحساب النهاية الثالثة. لدينا:

$$ch\frac{x}{1+x}=ch\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=ch\left[1-\left(1-x+x\varepsilon_1(x)\right)\right]$$

$$=ch\left(x+x\varepsilon_2(x)\right)=1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x).$$

ومنه:

$$1-ch\frac{x}{1+x}=-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_4(x).$$

وبالمثل:

$$\begin{aligned}x^2(1+x)^x &= x^2e^{xLog(1+x)}=x^2e^{x(x+x\varepsilon_5(x))}=x^2e^{x^2+x^2\varepsilon_6(x)}\\ &= x^2\left(1+x^2+x^2\varepsilon_5(x)\right)=x^2+x^2\varepsilon_7(x),\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\frac{1-ch\dfrac{x}{1+x}}{x^2(1+x)^x}=\frac{-\dfrac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_4(x)}{x^2+x^2\varepsilon_7(x)}=\frac{-\dfrac{1}{2}+\varepsilon_4(x)}{1+\varepsilon_7(x)},$$

وهو ما يفضي إلى أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-ch\dfrac{x}{1+x}}{x^2(1+x)^x}=-\frac{1}{2}.$$

(إذا انتابتك حيرة بشأن الرتبة التي ينبغي التوقّف عندها أثناء مباشرة هذه النشور همسنا لك بأنّ الذي يحدّدها هو زوال حالة عدم التعيين التي أنت بصدد معالجتها، مبتدئا بالأصغر ما يمكن منها).

2) تعدّ الدراسة المحلّيّة الشاملة للدوال من الخدمات البارزة التي يقدّمها مفهوم النشر. فبعد أن وقفنا على النهاية عند الصفر لدالّة حقيقيّة ما f، يمكن في حالة قبول هذه الدالّة الاشتقاق عند الصفر وتمتّعها بنشر محدود:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_rx^r+x^r\varepsilon(x),$$

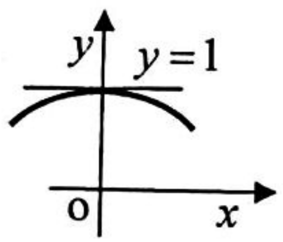
الجزم أنّ منحنى f البيانيّ يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=a_0+a_1x$ مماسا له عند الصفر. إنّ هذا جليّ أمره لسابق علمك بأنّ:

$$f(0)=a_0;\ \ f'(0)=a_1;\ \ y=f(0)+f'(0)(x-0).$$

وعلاوة على ذلك، تسمح إشارة الحدّ $a_r x^r$ (الأوّل الذي يلي معادلة المماس بصفة أعمّ) بتحديد وضعية المماس إزاء المنحنى:

$$f(x)-y=a_r x^r+x^r\varepsilon(x).$$

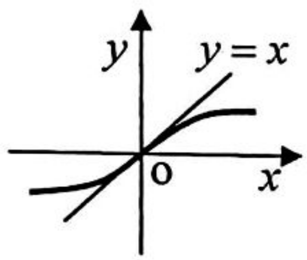
إن كانت هذه الإشارة موجبة كان المماس تحت المنحنى، وإن كانت سالبة كان فوقه. لنستحضر معا الدوال الأوّليّة التي ألفتها:



$$f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x).$$

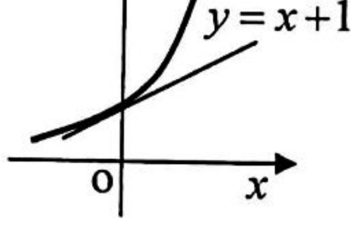
منحنى f يقبل المستقيم $y=1$ مماسا له عند الصفر.

ولما كانت إشارة الحدّ $-\frac{x^2}{2}$ سالبة جاء المماس فوق المنحنى.



$$g(x)=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_2(x).$$

منحنى g يقبل المنصّف الأوّل $y=x$ مماسّا له عند الصفر. ولما كانت إشارة الحدّ $-\frac{x^3}{6}$ سالبة على يمين الصفر جاء المماس فوق المنحنى، ولما كانت هذه الإشارة موجبة على يسار الصفر جاء المماس تحت المنحنى.



$$h(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x).$$

منحنى h يقبل المستقيم $y=x+1$ مماسا له عند الصفر. ولما كانت إشارة الحدّ $\frac{x^2}{2}$ موجبة

جاء المماس تحت المنحنى.

أخيرا، إذا رجعت معي إلى الدالّة $f(x)=(1-x)^{\sin x}$ واستحضرنا نشرها من الرتبة 3 بجوار الصفر:

$$(1-x)^{\sin x}=1-x^2-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x)$$

ظفرنا توّا بالمستقيم $y=1$ مماسا لمنحناها عند الصفر. ولما كانت إشارة الحدّ $-x^2$ (تذكّر أنّه الأوّل بعد المماس) سالبة تبيّن أنّ هذا المماس فوق المنحنى.

2

النشر في جوار نقطة x_0 (غير الصفر)

1.2 النشر في جوار نقطة x_0 من $\mathbb{R}$

1.1.2 تعريف

نقول عن دالّة حقيقيّة f إنّها تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار نقطة x_0 إذا قبلت الدالّة:

$$h: t \mapsto h(t) = f(t + x_0),$$

نشرا محدودا من الرتبة n في جوار الصفر. يكون لدينا عندئذ:

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t),$$

حيث $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$. وعليه:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

2.1.2 أمثلة

1) لننشر الدالّة $x \mapsto \sin x$ في جوار النقطة $\frac{\pi}{2}$ إلى غاية الرتبة 6. نضع $x = t + \frac{\pi}{2}$ وننشر، في جوار الصفر، الدالّة:

$$h : t \mapsto h(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t.$$

لدينا على الفور (بناء على نشر الدالّة $x \mapsto \cos x$ الماكلورانيّ):

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + t^6 \varepsilon(t).$$

وبالعودة إلى المتغيّر الأصليّ x نجد:

$$\sin x = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

مع $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

2) لنرد على السؤال ذاته بخصوص الدالّة $x \mapsto ch\,x$ مع استبدال النقطة المذكورة بـــ 2 والرتبة 6 بـــ 3. للعودة إلى جوار الصفر نعمد، كما هو موصوف، إلى تبديل المتغيّر x بـــ $t = x - 2$. يأتي عندئذ:

$$\begin{aligned}
h(t) &= ch(t+2) = ch2\ cht + sh2\ sht \\
&= ch2\left(1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \varepsilon_1(t)\right) + sh2\left(t + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon_2(t)\right) \\
&= ch2 + sh2\,t + \frac{ch2}{2} t^2 + \frac{sh2}{6} t^3 + t^3 \varepsilon_3(t).
\end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}
chx = ch2 + sh2(x-2) + \frac{ch2}{2}(x-2)^2 + \frac{sh2}{6}(x-2)^3 + \\
+ (x-2)^3 \varepsilon_3(x-2),
\end{aligned}$$

مع $\lim\limits_{x \to 2} \varepsilon_3(x-2) = 0$.

3) هب أنّه طلب منك نشر الدالّة $x \mapsto tg\,x$ في جوار النقطة $\frac{\pi}{4}$ إلى غاية الرتبة 3. يكفيك والحال هذه، اتّباع السبيل الذي سلكناه في المثال السابق. إذا استندنا إلى دساتير الدوال المثلثيّة واستحضرنا النشر الماكلورانيّ للدالّة الظل جاءنا:

$$tg\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+tgt}{1-tgt}=\frac{1+t+\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon_1(t)}{1-t-\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon_2(t)}.$$

بالقسمة وفق القوى المتزايدة للجزأين النظاميّين نحصل على:

$$tg\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1+2t+2t^2+\frac{8t^3}{3}+t^3\varepsilon_3(t).$$

بالعودة إلى متغيّرنا، نكتب في الأخير:

$$tg\,x=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\varepsilon_3\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

3.1.2 ملحوظتان

1) ما النشور المحدودة الموصوفة في هذه الفقرة، في حالة استيفاء الدالّة f لشروط مبرهنة تايلور في جوار x_0، في الواقع، إلا نشور تايلوريّة لـــ f في المجال $[x_0,x]$. ألا فاستعد الأمثلة المسيقة وعالجها بهذه الطريقة.

2) نستفيد هنا أيضا، من خلال النشر المحدود، بالوضع المحليّ للدالّة. فعلاوة على التعيين المباشر لنهاية الدالّة عند النقطة x_0، يمدّنا النشر المحدود، إذا ما توفّر شرط الاشتقاق عند f، بمعادلة المماس ووضعيته إزاء المنحنى. إذا عدنا إلى الأمثلة الثلاثة المدروسة وجدنا على التوالي:

$y=1$ مماس للمنحنى، وهو فوقه لكون الحدّ $-\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}$ سالبا؛

$y=(ch2-2sh2)+sh2\ x$ مماس للمنحنى وهو تحته لكون الحدّ $\dfrac{ch2}{2}(x-2)^2$ موجبا؛

$y=\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)+2x$ مماس للمنحنى، وهو تحته لكون الحدّ $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$ موجبا.

2.2 النشر المحدود في جوار ما لا نهاية

1.2.2 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة في جوار $+\infty$ ($-\infty$ على التوالي)، أي من أجل $A<x$ ($x<-A$ على التوالي)، حيث A عدد حقيقيّ موجب اختياريّ. نقول عن f إنّها تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار ما لا نهاية (بزائده أو ناقصه) إذا كانت الدالّة $t\mapsto h(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ قابلة لنشر محدود رتبته n في جوار الصفر. هكذا، نكتب:

$$h(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+t^n(t)$$

حيث $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$. ومنه:

$$f(x)=a_0+a_1\frac{1}{x}+a^2\frac{1}{x^2}+\ldots+a_n\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

حيث $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

2.2.2 أمثلة

1) انشر في جوار ما لا نهاية إلى غاية الرتبة 4 الدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

بالاحتفاظ بالترميزة السابقة نكتب:

$$h(t)=\frac{1+t^2}{1-t^2}=(1+t^2)\frac{1}{1-t^2}=(1+t^2)(1+t^2+t^4+t^4\varepsilon_1(t))$$
$$=1+2t^2+2t^4+t^4\varepsilon_2(t),$$

ومنه:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

2) هات النشر المحدود من الرتبة n في جوار $+\infty$ للدالّة الحقيقيّة g المعطاة بـــ $g(x)=\frac{x^3+4}{x-1}$. لدينا كما سبق:

$$h(t)=\frac{1+4t^3}{t^2-t^3}=\frac{1+4t^3}{t^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)$$
$$=\frac{1+4t^3}{t^2}(1+t+t^3+...+t^n+t^n\varepsilon_1(t))$$
$$=\frac{1}{t^2}(1+t+t^2+5t^3+5t^4+...+5t^n+5t^{n+1}+5t^{n+2}+t^{n+2}\varepsilon_2(t))$$
$$=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1+5t+5t^2+...+5t^n+t^n\varepsilon_3(t),$$

ومنه:

$$\frac{x^3+4}{x-1}=x^2+x+1+5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^n}\right)+\frac{1}{x^n}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right).$$

3) لنحتفظ بالسؤال نفسه مع أخذ $n=4$ واستبدال الدالّة g بالدالّة k المعطاة بـــ $k(x)=Log\left(x\,tg\frac{1}{x}\right)$.

لدينا:

$$h(t)=Log\left(\frac{1}{t}tg\,t\right)=Log\left[\frac{1}{t}\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}+t^5\varepsilon_1(t)\right)\right]$$
$$=Log\left(1+\frac{t^2}{3}+\frac{2t^4}{15}+t^4\varepsilon_1(t)\right)$$
$$=\left(\frac{t^2}{3}+\frac{2t^4}{15}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{3}+\frac{2t^4}{15}\right)^2+t^4\varepsilon_2(t)=\frac{t^2}{3}+\frac{7t^4}{90}+t^4\varepsilon_3(t).$$

نجد في النهاية:

$$Log\left(x\,tg\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3x^2}+\frac{7}{90x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right).$$

3.2.2 تطبيقان

I. يلعب النشر المحدود في جوار ما لانهاية دورا حاسما في حساب النهايات، تماما كما كان الأمر عند أيّة نقطة x_0.

1) لنحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$، حيث a و b عددان حقيقيّان موجبان تماما. التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم تعيين من النمط 1^∞.

لرفعها نستعين بالنشور المحدودة. نلاحظ في البداية أنّ:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}=e^{xLog\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}.$$

إذا ما وضعنا $t=\frac{1}{x}$ كنّا قد رجعنا، وفق المتغيّر t، إلى جوار الصفر. يأتي عندئذ:

$$a^{t}=1+(Loga)t+t\varepsilon_1(t),$$
$$b^{t}=1+(Logb)t+t\varepsilon_2(t).$$

ومنه:

$$\frac{a^{t}+b^{t}}{2}=1+\frac{Logab}{2}t+t\varepsilon_3(t)$$

وعليه:

$$Log\left(\frac{a^{t}+b^{t}}{2}\right)=Log\left[1+\left(\frac{Logab}{2}t+t\varepsilon_3(t)\right)\right]=\frac{Logab}{2}t+t\varepsilon_4(t);$$

ومنه:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}=e^{\frac{1}{2}Logab+\varepsilon_4\left(\frac{1}{x}\right)};$$

ولما كانت الدالّة الأسيّة مستمرّة على $\mathbb{R}$ وجدنا في الأخير:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}Logab+\varepsilon_4\left(\frac{1}{x}\right)\right)}=e^{\frac{1}{2}Logab+\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon_4\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{Log\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

2) لنحسب بالمثل النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-Logx\right).$$

التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم تعيين من النمط $\infty-\infty$. لرفعها نلاحظ أنّ:

$$Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-Logx=Log\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=Log\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

بوضعنا $\frac{1}{x}=t$ نعود، وفق المتغيّر t، إلى جوار الصفر. وعليه:

$$\begin{aligned}Log\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)&=Log\left[1+\left(1+\frac{1}{2}t^2+t^2\varepsilon_1(t)\right)\right]\\&=Log\left(2+\frac{1}{2}t^2+t^2\varepsilon_1(t)\right)=Log2\left(1+\frac{1}{4}t^2+t^2\varepsilon_2(t)\right)\\&=Log2+Log\left(1+\frac{1}{4}t^2+t^2\varepsilon_2(t)\right)=Log2+\frac{1}{4}t^2+t^2\varepsilon_3(t),\end{aligned}$$

ومنه:

$$Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-Logx=Log2+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right),$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-Logx&=\lim_{x\to+\infty}\left(Log2+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=Log2.\end{aligned}$$

II. تشكّل دراسة الفروع اللانهائية نتيجة هامّة للنشر المحدود في ما لا نهاية.

نعلم أنّه إذا كانت $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ وكانت $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ فإنّ a يمثّل ميل المستقيم الذي يشكّل **اتّجاها تقاربيّا** لبيان f. إذن، فالمستقيم الذي معادلته $y=ax$ يمثّل اتّجاها تقاربيّا.

نقول عن منحنى f البيانيّ Γ_f إنّه يقبل **خطّا مقاربا مائلا** $y = ax + b$ إذا كانت $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right) = b$.

نميّز الحالتين:

- إذا كانت النهاية $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - y\right) = 0^+$ قلنا إنّ البيان Γ_f موجود فوق الخطّ المقارب،
- إذا كانت النهاية $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - y\right) = 0^-$ كان البيان Γ_f تحت الخطّ المقارب.

إذا كان للدالّة f نشر محدود معمّم في جوار ∞:

$$f(x) = ax + \beta + \frac{\gamma}{x^p} + \frac{1}{x^p}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

فإنّنا نحصل على التوّ على معادلة الخطّ المقارب $y = ax + \beta$ وإشارة الحدّ $\frac{\gamma}{x^p}$ تعيّن وضعية هذا الخطّ المقارب بالنسبة للمنحنى Γ_f. ($\frac{\gamma}{x^p}$ هو أوّل حدّ يأتي بعد معادلة الخطّ المقارب. تعتبر الحدود الأخرى مهملة أمامه). لترسيخ هذه الفكرة نسوق الأمثلة الثلاثة التالية.

1) انشر الدالّة الحقيقيّة:

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}},$$

في جوار ∞ إلى غاية الرتبة 2. استخلص وضعية الخطوط المقاربة بالنسبة لبيان الدالّة:

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

لدينا بوضع $t=\frac{1}{x}$:

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{t^2+t+1}.$$

وبوضع $t^2+t=u$ يأتي:

$$\sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{u+1}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+u^2\varepsilon_1(u)$$

$$=1+\frac{(t^2+t)}{2}-\frac{(t^2+t)^2}{8}+t^2\varepsilon_2(t)=1+\frac{t}{2}+\frac{3t^2}{8}+t^2\varepsilon_3(t),$$

ومنه:

$$f(x)=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

وعليه:

$$g(x)=|x|\,f(x)=|x|\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

أي:

$$g(x)=|x|\,f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon_3\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\to+\infty,\\[2ex] -x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon_4\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\to-\infty.\end{cases}$$

ينجرّ عن هذا النشر أنّ المستقيمين ذوي المعادلتين:

$$y=x+\frac{1}{2};\; y=-x-\frac{1}{2},$$

خطّان مقاربان مائلان لمنحنى g البياني في جوار $+\infty$ و $-\infty$ على التوالي.

نلاحظ أنّ المنحنى Γ_g فوق خطّيه المقاربين، ذلك لأنّ المقدار $\dfrac{3}{8x}$ في جوار $+\infty$ والمقدار $\dfrac{-3}{8x}$ في جوار $-\infty$ موجبان.

2) انشر الدالّة $x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ في جوار ∞ إلى غاية الرتبة 2.

استخلص وضعية الخطوط المقاربة بالنسبة لبيان الدالّة $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ لدينا

بوضع $t = \dfrac{1}{x}$:

$$\sqrt{\frac{1}{1-t}} = \sqrt{1+t+t^2+t^2\varepsilon_1(t)} = 1 + \frac{(t^2+t)}{2} - \frac{(t^2+t)^2}{8} + t^2\varepsilon_2(t)$$
$$= 1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + t^2\varepsilon_3(t)$$

ومنه:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

وبالتالي:

$$g(x) = |x| f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon_3\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \to +\infty; \\ -x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon_4\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \to -\infty. \end{cases}$$

نستخلص من هذا النشر أنّ للدالّة g خطّين مقاربين هما $y = x + \dfrac{1}{2}$ في جوار $+\infty$ و $y = -x - \dfrac{1}{2}$ في جوار $-\infty$. تسمح العلّة المذكورة في المثال الأوّل بالجزم بأنّ بيان الدالّة g متواجد فوق، خطّيه المقاربين.

3) بيّن مستخدما النشور المحدودة أنّ الدالّة الحقيقيّة:

$$x \mapsto f(x) = x\,Arctg\frac{x}{x-1},$$

تقبل خطّا مقاربا في جوار $-\infty$ و $+\infty$. حدّد وضعية بيان f بالنسبة إلى هذا الخطّ المقارب.

لدينا بوضع $t = \frac{1}{x}$:

$$Arctg\frac{x}{x-1} = Arctg\frac{1}{1-t} = Arctg\left(1+t+t^2+t^2\varepsilon(t)\right).$$

فإذا وضعنا $1+t+t^2+t^2\varepsilon_1(t) = u$ وتذكّرنا أنّ في جوار $u=1$:

$$Arctg\,u = \frac{\pi}{4} + \frac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^2}{4} + (u-1)^2\varepsilon_2(u-1)$$

حصلنا على:

$$Arctg\left(1+t+t^2+t^2\varepsilon_1(t)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + t^2\varepsilon_3(t);$$

وعليه:

$$f(x) = x\,Arctg\frac{x}{x-1} = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right).$$

نستنتج أنّ منحنى f البياني يقبل المستقيم $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ خطّا مقاربا مائلا له في جواري $+\infty$ و $-\infty$. وتبعا لإشارة الحدّ $\frac{1}{4x}$ نجد هذا المنحنى فوق خطّه المقارب في جوار $+\infty$ وتحته في جوار $-\infty$.

3

النشر المعمّم في جوار الصفر

1.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة في جوار الصفر (قد يستثنى الصفر منه).

نفترض أنّ f لا تقبل نشرا محدودا، من أيّة رتبة كانت، في جوار الصفر، بيد أنّه يوجد عدد طبيعيّ $0 < k$ بحيث تكون الدالّة $x \mapsto h(x) = x^k f(x)$ قابلة لنشر محدود رتبته n في جوار الصفر. يكون لدينا من أجل x غير معدوم:

$$x^k f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

ومنه:

$$f(x) = x^{-k}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)\right).$$

تسمّى العبارة الأخيرة **بالنشر المعمّم** من الرتبة $n-k$ في جوار الصفر للدالّة f.

2.3 مثالان

1) لنأخذ $n = 3$ و $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. لدينا بطبيعة الحال:

$$xf(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

وعليه:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x).$$

2) لنجب على السؤال ذاته بشأن الدالّة $f(x)=\cot g\,x$ مع أخذ $n=4$.

لدينا:

$$xf(x)=\frac{x\cos x}{\sin x}=x\left(\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_1(x)}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^4\varepsilon_2(x)}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_1(x)}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+x^4\varepsilon_2(x)}=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+x^4\varepsilon_3(x).$$

إذن:

$$\cot g\,x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+x^3\varepsilon_3(x).$$

القسم الثالث

تمارين

تمارين محلولة

1. احسب، مستدلاً بالتعريف، مشتقّات الدوال الموالية عند نقطة من ميادين تعريفها:

$$1)\ f(x)=x^2;\ \ 2)\ f(x)=x^2\sin\frac{\pi}{\sqrt{x+1}};$$

$$3)\ f(x)=\sup(2x+2,x^2-1).$$

2. لتكن f دالّة معرّفة بـــ:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;\ x\le x_0, \\ ax+b & ;\ x>x_0. \end{cases}$$

ما هي قيم الثابتين a و b التي تكون من أجلها f قابلة للاشتقاق عند x_0؟

3. لتكن f و g و h ثلاث دوال حقيقيّة معرّفة في جوار V للصفر وتذعن للقيد:

$$\forall x\in V\ \ f(x)\le h(x)\le g(x).$$

نفترض أنّ $f(0)=g(0)$ و $f'(0)=g'(0)$, اثبت أنّ:

$$h'(0)=f'(0)=g'(0).$$

4. احسب مشتقّات الدوال الحقيقيّة المعطاة بعباراتها الموالية.

$$f(x)=Arctg\,(x^2);\ \ g(x)=Arc\cos(tg\,x);\ \ h(x)=Log(Arc\sin x).$$

5. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=\begin{cases} x^p \sin\frac{1}{x} \ , & x\neq 0 \\ 0 \ , & x=0 \end{cases} \ ; \ p\in\mathbb{N}.$$

1) برهن أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على $\mathbb{R}^*$ ثمّ احسب f'.

2) عيّن قيم الوسيط p التي من أجلها :

أ. تقبل الدالّة f نهاية عند الصفر،

ب. تكون الدالّة f مستمرّة عند الصفر،

ج. تقبل الدالّة f الاشتقاق عند الصفر،

د. تكون الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على $\mathbb{R}$.

6. 1) احسب بطريقين المشتقّ النونيّ لكثير الحدود $P(x)=(x^2-1)^n$.

ميّز حالتين تبعا لشفعية n).

2) استنتج قيمتي المجموعين:

$$S_1=\sum_{k=0}^{2q}(-1)^k\left(C_{2q}^k\right)^2;$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{2q+1}(-1)^k\left(C_{2q+1}^k\right)^2.$$

7. نضع $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

1) اثبت أنّ:

$$x\,f(x)=(1+x^2)\,f'(x).$$

2) احسب مستخدما دستور ليبنيتز، المشتقّ من الرتبة $(n+1)$ لطرفي هذه المساواة.

3) استنتج المساواة:

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n-1)xf^{(n+1)}(x)+n(n-2)f^{(n)}(x)=0.$$

.8 لتكن الدالّة الحقيقيّة g المعطاة على المجال $[1,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=\pi-Arc\sin\frac{1}{x}.$$

إذا علمت أنّها الدالّة العكسيّة للدالّة $f:\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\to\mathbb{R}$:

$$x\mapsto f(x)=\frac{1}{\sin x},$$

فاحسب عندئذ الدالّة المشتقّة g' بطريقتين مختلفتين.

.9 ليكن a عددا حقيقيّا موجبا. نعرّف الدالّة:

$$f:\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto f(x)=Arctg\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

1) بيّن أنّ الدالّة f مستمرّة وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{a}\right[$.

2) احسب المشتقّ f'.

3) استنتج أنّ:

أ. $\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[\quad f(x)=Arctgx+Arctga;$

ب. $\underset{xy<1}{\forall x,y\in\mathbb{R}^2}\quad Arctgx+Arctgy=Arctg\dfrac{x+y}{1-xy}.$

4) أ. نضع $\alpha=Arctg\frac{1}{5}$. احسب عندئذ $tg(2\alpha)$ و $tg(4\alpha)$.

ب. تحقّق من أنّ:

$$0 < 4\alpha < \frac{\pi}{2}.$$

ج. استنتج أنّ:

$$4Arctg\frac{1}{5} = Arctg\frac{120}{119};$$

$$4Arctg\frac{1}{5} - Arctg\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

10. لتكن $\{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}\}$ مجموعة من أعداد حقيقيّة بحيث:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{p-1}}{p} = \frac{1}{p+1}.$$

اثبت مستخدما مبرهنة رول أنّ المعادلة:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1} = x^p,$$

تقبل جذرا حقيقيّا في المجال $]0,1[$.

11. 1) احسب:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(Arctg(x+2) - Arctgx \right).$$

2) اثبت أنّ:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \left| \frac{y}{1+y^2} - \frac{x}{1+x^2} \right| \leq |y - x|.$$

3) اثبت أنّ:

$$\forall x \in]1, +\infty[\ \ Logx > \frac{2}{x}\left(\frac{x-1}{x+1} \right).$$

12. اثبت أنّ:

$$1)\ \forall x,x'\in\mathbb{R}\quad |thx-thx'|\le|x-x'|;$$

$$2)\ \forall x,x'\in\mathbb{R}\quad |Argshx-Argshx'|\le|x-x'|.$$

$$3)\ \forall x\ge 0,\ \ \frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\le Arcctgx\le\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}.$$

13. برهن أنّه مهما يكن x و y من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $x<y$ فإنّ:

$$\frac{x}{y}<\frac{\sin x}{\sin y}<\frac{\pi}{2}\frac{x}{y}.$$

14. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق ومحقّقة $f(0)=0$ و:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad f(x)\ge x.$$

1) اثبت أنّ:

$$f'(0)\ge 1.$$

2) برهن مستعينا بمبرهنة التزايدات المنتهية وجود متتالية (x_n) تتقارب نحو الصفر وتحقّق:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f'(x_n)\ge 1.$$

15. ليكن a عددا حقيقيّا و $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق ومحقّقة الشرط $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$. لتكن الدالّة الحقيقيّة g المعرّفة على النحو:

$$g(x)=\begin{cases} f\left(a+\dfrac{1}{x}-1\right) & ;\ 0<x\le 1,\\ f(a) & ;\ x=0.\end{cases}$$

1) اثبت أنّ الدالّة g مستمرّة على المجال المغلق $[0,1]$ وتقبل الاشتقاق على المجال المفتوح $]0,1[$.

2) عيّن المشتقّ g'.

3) استنتج وجود نقطة c من $]a,+\infty[$ بحيث $f'(c)=0$.

16. 1) برهن أنّ:

$$\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*},\ \frac{1}{x+1}<Log(x+1)-Logx<\frac{1}{x}.$$

2) استنتج حساب نهاية المتتالية الحقيقيّة ذات الحدّ العام:

$$u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}.$$

3) احسب مجدّدا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ باستخدام دستور ريمان.

17. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة متزايدة تماما وقابلة للاشتقاق ومشتقّتها دالّة متناقصة تماما. نفترض أنّ $f(1)=0$. لتكن المتتالية العدديّة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة بـــ:

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}f'(k)-f(n),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

1) اثبت أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ \exists c_n\in]n,n+1[\,/\,u_{n+1}-u_n=f'(n+1)-f'(c_n).$$

2) استنتج رتابة المتتالية $(u_n)_n$.

3) برهن أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\} \ \exists c_k \in]k,k+1[:$$

$$u_n = f'(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(f'(k) - f'(c_k)\right).$$

4) استنتج طبيعة المتتالية $(u_n)_n$.

5) تطبيق: باستعمال ما سبق عيّن طبيعة المتتالية العدديّة المعرّفة $(v_n)_n$ بـــ:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - Logn,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

18. نعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على النحو:

$$f(x) = Arctg\left(\frac{\sqrt{3}+3x}{3-\sqrt{3}x}\right).$$

1) عيّن ميدان التعريف D_f. قل لماذا f مستمرّة على D_f.

2) بسّط عبارة f (اكتب f بدلالة $Arctgx$).

3) برهن أنّ منحنى الدالّة f البيانيّ يقبل مماسا موازيا للمستقيم المارّ من الفاصلتين 0 و $\frac{1}{\sqrt{3}}$، ثمّ عيّن نقطة المماس.

4) برهن أنّ:

$$\frac{\pi}{6} + x \le f(x) \le \frac{\pi}{6} + \frac{x}{1+x^2};\ \forall x \in]-\infty,0].$$

19. I. لتكن الدالّة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}\right) & ;\ x \neq 0, \\ 2 & ;\ x = 0. \end{cases}$$

1) برهن أنّ f مستمرّة على $\mathbb{R}$.

2) هل f قابلة للاشتقاق عند الصفر؟

II. لتكن الدالّة الحقيقيّة المعطاة بـــ:

$$f(x) = Arctg\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x}.$$

1) عيّن ميدان تعريف الدالّة f.

2) احسب النهايتين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) اكتب العبارتين $\sin t$ و $\cos t$ بدلالة $tg\frac{t}{2}$.

4) برهن أنّ $f(x)=\frac{1}{2}Arctg2x$. (إرشاد: يمكن استعمال التبديل $(t = Arctg2x;\ x\in\mathbb{R}^*$)

5) برهن أنّ منحنى الدالّة f البيانيّ Γ_f لا يقبل مماسا موازيا للمستقيم $y=-x$.

6) برهن أنّ Γ_f يقطع المستقيم $y=\frac{1}{2}$ في نقطة وحيدة فاصلتها x_0.

7) برهن أنّ الدالّة f تقبل دالّة عكسيّة f^{-1} على ميدان يطلب تعيينه ثمّ عيّن f^{-1}.

20. ليكن α عددا حقيقيّا موجبا تماما. نعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعطاة بـــ :

$$f(x)=\begin{cases} Arctg\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)-\dfrac{\pi}{4} & ;\ x\le 0,\\[2mm] \dfrac{\sin\alpha x}{x}+(x^2-a^2)E\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right) & ;\ x>0,\end{cases}$$

حيث $E(x)$ يرمز لجزء x الصحيح.

1) عيّن ميدان تعريف f .

2) من أجل أيّة قيمة للوسيط α تكون الدالّة f مستمرّة عند الصفر؟

3) علما بقيمة α المطلوبة في (2):

أ. هل الدالّة f مستمرّة بانتظام على المجال $[-1,0]$؟

ب. ادرس قابليّة f للاشتقاق عند النقطتين 0 و1.

ج. عيّن ميدان القابلية للاشتقاق H للدالّة f ثمّ عرّف المشتقّ f' على H .

4) هل يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على المشتقّ f' في المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$؟

21. 1) برهن صحّة هذه المتباينة:

$$\forall x \in]-1;+\infty[\quad \frac{x}{1+x} \leq Log(1+x) \leq x.$$

2) اثبت أنّ:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

3) استخلص العلاقة:

$$kLog\left(\frac{1+k}{k}\right) < 1 < (k+1)Log\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

4) استنتج أنّ:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(k+1)+Logk}{k+1} < \left(Log(n+1)\right)^2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{Log(k+1)+Logk}{k}.$$

.22 احسب مستخدما قاعدة لوبيطال، النهايات التالية:

$$\ell_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2e^{-x} - 4x}{3x - 3\sin x};\ \ell_2 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Log \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$\ell_3 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - tg\, x \right);\ \ell_4 = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

.23 لتكن f دالّة مستمرّة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$. نضع:

$$g(x) = f(x) - f(a) - A(x-a). \qquad (*)$$

1) كيف نختار A حتى تحقق g شروط مبرهنة رول ؟

2) برهن أنّه يوجد عدد حقيقيّ c ينتمي إلى المجال $]a,b[$ بحيث:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

3) نفترض أنّ f تقبل الاشتقاق مرّتين على المجال $]a,b[$. نضع:

$$h(x) = f(b) - f(x) - (b-x) f'(x) - B\frac{(b-x)^2}{2}. \qquad (**)$$

أ. كيف نختار B حتّى تحقّق h شروط مبرهنة رول ؟

ب. برهن أنّه يوجد عدد حقيقيّ c ينتمي إلى المجال $]a,b[$ بحيث:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

.24 لتكن f دالّة من الصنف $\mathscr{C}^2([a,b])$. نفترض أنّ f''' موجود عند كلّ نقطة من $]a,b[$ ونعرّف الدالّة g على $[a,b]$ كما يلي:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\left(f'(x) + f'(a) \right).$$

1) تأكّد من أنّ $g(a) = g'(a) = 0$ وأنّ g' يقبل الاشتقاق عند النقطة a ويحقّق مشتقّه $g''(a) = 0$.

2) نعرّف الدالّة الجديدة h بـــ:

$$h(x) = g(x) - \lambda(x-a)^3;\ x \in [a,b].$$

عيّن قيمة λ التي من أجلها يكون $h(b) = 0$. برهن عندئذ أنّ الدالّة h تحقّق شروط مبرهنة رول.

3) برهن أنّ:

$$\exists c \in]a,b[\ /\ f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}\big(f'(a) + f'(b)\big) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(c).$$

25. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. نفترض أنّ النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ حقيقيّتان متساويتان. برهن أنّه يوجد عدد حقيقيّ c يعدم المشتقّ f'.

26. ليكن a عددا حقيقيّا موجبا و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حقيقيّة معطاة على النحو:

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

1) برهن أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x}{1+x} \le Log(1+x) \le x.$$

2) استنتج أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{a}{1+\frac{a}{n}} \le Log u_n \le a.$$

3) اثبت أنّ المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

4) احسب نهايتها.

27. لتكن المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_n$ المعرّفة بـــ:

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-Log\, n.$$

1) برهن أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} < Log(1+n) - Logn < \frac{1}{n}.$$

2) برهن أنّ المتتالية الحقيقيّة ذات الحدّ العام $u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ متباعدة نحو $+\infty$.

3) نضع:

$$v_n = u_n - Logn.$$

أ. ادرس رتابة المتتالية $(v_n)_n$.

ب. استنتج أنّ $(v_n)_n$ متقاربة نحو نهاية ℓ، تنتمي إلى $[0,1]$.

28. 1) اثبت صحّة العلاقتين:

$$\forall \underset{a<b}{a,b} \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{b-a}{1+b^2} < Arctgb - Arctga < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : Arctg(1+x) - Arctgx = Arctg\frac{1}{1+x+x^2}.$$

2) استنتج العبارة:

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} arctg\frac{1}{1+k+k^2}.$$

3) ما هي النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ؟

29. لتكن الدالّة الحقيقيّة المعطاة بـــ :

$$f(x) = Log(1+x^2) - Arctgx.$$

1) اثبت أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n},$$

بحيث $P_n(x)$ يرمز إلى كثير حدود من الدرجة n.

2) عيّن قيمة معامل الحدّ ذي الدرجة n لـــ $P_n(x)$.

3) برهن أنّ $P_n(x)$ يقبل n جذرا حقيقيّا مختلفا.

4) لتكن الدالّة g المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بـــ:

$$g(x) = Log(1+x^2) + Arctgx.$$

برهن أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{x}{1+x^2} \leq g(x) \leq 2x^2 + x.$$

ما هو الشكل المستطيليّ ذو أكبر مساحة تمكن إحاطته بخيط حديديّ طوله ℓ؟

30. نعتزم صنع علبة من قطعة ورق مقوّى، مربّعة الشكل ضلعها 12سم. يتعلّق الأمر باقتطاع أربعة مربّعات متساوية المساحة من كلّ ركن من أركان القطعة؛ ثمّ طيّ الأضلاع للحصول على علبة يكون عاليها مفتوحا. ما هو الطول الذي ينبغي أن يكون عليه ضلع كلّ مربّع مقتطع حتّى يضحى حجم العلبة أعظميّا؟

31. تمتلك عائلة من الأسلاك الشائكة ما يكفي لإعداد سياج طوله 100م.

تنوي إغلاق الجهات الثلاث لحديقتها المستطيلة الشكل. (الجهة الرابعة مغلقة بحائط بناية). ما هي الأبعاد التي ينبغي أن تكون للحديقة حتى تكون مساحة هذه الأخيرة أعظميّة.

32. لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـــ $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

1) احسب المشتقّ النونيّ $f^{(n)}(x)$.

(إرشاد: لاحظ أنّ $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$).

2) اكتب نشر f التايلوريّ من الرتبة $2n+1$ مع باقي لاغرانج في جوار الصفر.

3) استنتج هذه المتباينة:

$$\frac{1}{1-x^2}\geq 1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n},\ \forall x\in\left]-1,1\right[,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

33. اثبت أنّ الصفر ليس نقطة حدّية محلّية للدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x)=e^{x^3}.$$

34. نعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على النحو:

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}+Arctg\,\frac{x-1}{x+1}.$$

1) هات ميدان تعريف f.

2) ما النقاط التي تكون f مستمرّة وقابلة للاشتقاق عندها.

3) اثبت أنّ منحنى f البيانيّ Γ_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها من المجال $\left]0,1\right[$.

4) ادرس تغيّرات f ثمّ ارسم المنحنى Γ_f في معلم متعامد متجانس.

5) اثبت أنّ f تقبل دالّة عكسيّة f^{-1}.

6) عيّن مجموعتي البدء والوصول لـ f^{-1}.

7) احسب $f(0)$ وعيّن $f^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

8) ارسم منحنى f^{-1} البيانيّ $\Gamma_{f^{-1}}$.

35. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـــ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

1) عيّن ميدان تعريف واستمرار f.

2) احسب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x);\ \lim_{x\to+\infty} f(x);\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x};\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x.$$

3) استخلص أنّ منحنى f البيانيّ يقبل خطّا مقاربا مائلا، يطلب تحديد وضعيته إزاء المنحنى.

4) احسب المشتقّ وضع جدول تغيّرات f.

5) ارسم منحنى f البيانيّ في معلم متعامد متجانس.

36. ادرس ثمّ ارسم المنحنى البيانيّ للدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x)=(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}.$$

37. ادرس ثمّ ارسم المنحنى البيانيّ للدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x)=\frac{x}{chx}.$$

38. ادرس ثمّ ارسم المنحنى البيانيّ للدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x) = x^2 Arctg\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

39. ادرس ثمّ ارسم المنحنى البيانيّ للدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & ;\ x<0, \\ 0 & ;\ x=0 \\ x^2 Log(1+x) - x^2 Logx & ;\ x>0. \end{cases}$$

40. برهن صحّة المتباينات الموالية:

$$x - \frac{x^3}{3} \leq Arctg\, x \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},\ (\forall x \in \mathbb{R}_+);$$

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq Arc\cot g\, x \leq \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3},\ (\forall x \in \mathbb{R}_+).$$

41. 1) اثبت مستخدما علاقة ماك لوران من الرتبة n على الدالّة الأسيّة $f: x \mapsto e^x$ أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) استخلص أنّ:

$$\frac{8}{3} < e < 3.$$

3) اثبت أنّ:

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!};$$

واستنتج النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right).$$

4) استخلص قيمة تقريبيّة للعدد e لا يتعدّى الخطأ فيها $0,005$.

42. احسب مستعينا بالنشور المحدودة، هذه النهايات الخمس:

$$\ell_1=\lim_{x\to+\infty}\left(5.4^{\frac{1}{n}}-4.5^{\frac{1}{n}}\right)^n;\ \ \ell_2=\lim_{x\to 0}\frac{Log(1+x)-x\sqrt{1-x}}{x-\sin x}$$

$$\ell_3=\lim_{x\to 0}\frac{Log(1+x^2)}{xArctgx};\ \ \ell_4=\lim_{x\to 0}(1+tg^2x)^{\frac{1}{x\sin x}};\ \ \ell_5=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(tg\frac{3x}{2}\right)^{tg3x}.$$

43. ليكن m وسيطا حقيقيّا موجبا تماما. نضع:

$$u(x)=\sqrt[3]{x^3+mx^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1};\ \ \varphi(x)=(u(x))^x.$$

1) اثبت أنّ النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار ما لا نهاية للدالّة u يتمتّع بالشكل:

$$u(x)=\frac{m}{3}-\frac{m^2}{9x}+\frac{27+5m^3}{81x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2) استنتج تبعا لقيم الوسيط m النهاية $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

44. اجر دراسة محلّيّة عند النقطة التي فاصلتها الصفر (من حيث طبيعة النقطة: هل هي ذروة؟ حضيض؟ انعطاف؟...) للدالّة:

$$f(x)=\frac{Log(ch\,x)}{\cos x}ch\,x.$$

45. عيّن قيمتي الوسيطين الحقيقيّين a و b اللتين تنعدم من أجلهما النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x} Arctgx}{Log(1+x)} - \frac{a}{x} - b\right).$$

46. 1) عيّن العددين a و b اللذين تكون من أجلهما الدالّة f المعرّفة بـــ:

$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2},$$

لا متناهيا في الصغر ذا أكبر رتبة ممكنة في جوار الصفر.

2) جد عندئذ جزأه الرئيسيّ.

47. لتكن f الدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}}$.

نرمز بـــ Γ لمنحناها البيانيّ في معلم متعامد متجانس.

1) هات ميدان تعريف f.

2) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. ماذا تستخلص؟

3) استعن بنشر محدود لـــ f في جوار النقطة $x_0 = 1$ لإعطاء:

أ. النهاية $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ؛

ب. معادلة المماس للمنحنى Γ في جوار النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$.

ج. قيمة العدد $f'(1)$ وكذا وضعية المنحنى بالنسبة إلى مماسه في جوار النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$.

48. 1) هات النشر المحدود من الرتبة الرابعة في جوار ∞ للدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\sqrt{1+x^2};$$

ثمّ استنتج معادلة الخطّ المقارب ووضعية منحنى f البيانيّ بالنسبة إلى هذا الخطّ المقارب.

2) لتكن الدالّة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـــ:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & ;\ x\in]-2,0[,\\ e^{\frac{x}{x-1}}\sqrt{x(x+2)} & ;\ x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[.\end{cases}$$

أ. عيّن، مستعينا بالنشور المحدودة، معادلة مماس منحنى g عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-1$.

ب. وضّح وضعية هذا المماس بالنسبة لمنحنى g.

ج. هات، مستندا إلى نشر محدود في جوار ما لا نهاية، معادلتي الخطّين المقاربين لمنحنى g ثمّ حدّد وضعية كلّ منهما إزاء هذا المنحنى.

49. لتكن الدالّتين الحقيقيّتين f و g المعرّفتين على بـــ:

$$f(x)=Log(e+\sin ex);\ e\approx 2,7183;$$

$$g(x)=\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{2}Arctgx.$$

1) أ. جد النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار الصفر للدالّة f.

ب. جد نشر f المحدود من الرتبة الثانية في جوار النقطة ذات الفاصلة $x_0=\dfrac{\pi}{2e}$.

ج. استنتج معادلة المماس لمنحنى f البيانيّ عند الصفر.

د. استنتج أنّ الدالّة f تقبل ذروة محلّيّة عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \frac{\pi}{2e}$.

2) أ. جد النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار الصفر للدالّة g.

ب. اثبت بطريقتين مختلفتين أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad Arctgx + Arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

ج. اثبت مستعينا بالنشر المحدود في جوار $+\infty$، أنّ الدالّة g تقبل خطّا مقاربا.

د. عيّن وضعية منحنى g البيانيّ بالنسبة إلى هذا الخطّ المقارب.

50. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة بـــ :

$$f(x) = xe^{\frac{2x}{1-x}},$$

وليكن Γ_f منحناها البياني و (D) المماس لـــ Γ_f عند الصفر.

1) ضع جدولا مقتضبا لتغيّرات f.

2) هات بطريقتين مختلفتين معادلة (D) ثمّ عيّن وضعيته إزاء Γ_f.

3) قم بدراسة مفصّلة لفروع f اللانهائيّة.

4) ارسم Γ_f في معلم متعامد متجانس.

حلول

1. لتكن a النقطة المعنية في كلّ حالة. لدينا:

$$1)\quad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(h+a)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ha+h^2}{h}\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a;$$

$$2)\quad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-a^2\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a^2+2ah+h^2)\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-a^2\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{h}$$

$$=2a\sin\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}+a^2\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}\right)}{h}.$$

حساب النهاية الواردة في هذه العبارة يتمّ على النحو:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}\right)}{h}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}+\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{2}\right)}{h}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{2}\right)}{\dfrac{\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{2}}\frac{\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}-\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{2h}\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\dfrac{\pi}{\sqrt{(a+h)+1}}+\dfrac{\pi}{\sqrt{a+1}}}{2}\right)$$

$$= \pi\cos\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{(a+h)+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}}{h}$$

$$= \pi\cos\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{a+h+1}-\dfrac{1}{a+1}}{h\left(\dfrac{1}{\sqrt{(a+h)+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)}$$

$$= \pi\cos\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{(a+h)+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)(a+h+1)(a+1)}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{(a+1)\sqrt{a+1}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

المشتقّ المطلوب هو:

$$f'(a) = 2a\sin\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}-\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{(a+1)\sqrt{a+1}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

علينا قبل الشروع في حساب مشتقّ الدالّة الثالثة أن نبحث عن هيئتها الصريحة. تسمح دراسة إشارة الفرق:

$$(x^2-1)-(2x+2) = x^2-2x-3 = (x+1)(x-3),$$

بالحصول توّا على:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 \ ; \ x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[3,+\infty\right[,\\ 2x+2 \ ; \ x\in[-1,3].\end{cases}$$

نميّز حسب تموضع a أربع حالات:

أ. إذا كان a من $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]3,+\infty\right[$ كتبنا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-1-a^2+1}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a.$$

ب. إذا كان a من $\left]-1,3\right[$ كتبنا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)+2-2a-2}{h}=2.$$

ج. إذا كان $a=-1$ كتبنا:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{2(h-1)+2}{h}=2.$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(h-1)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-2+h)=-2.$$

نخلص من هذا الحساب أنّ f لا تقبل الاشتقاق عند $a=-1$.

د. إذا كان $a=3$ كتبنا:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{(h+3)^2-1-8}{h}=\lim_{h\to 0^+}(6+h)=6.$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{2(h+3)+2-8}{h}=2.$$

نرى كما سبق أنّ f لا تقبل الاشتقاق عند $a=3$.

2. علينا أوّلا التأكّد من استمرار f عند x_0. نكتب بهذا الشأن:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=ax_0+b=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=x_0^2=f(x_0). \qquad (*)$$

بعد هذا، تكون الدالّة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا تحقّق:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0^-}\frac{ax+b-x_0^2}{x-x_0}. \qquad (**)$$

يسمح تكأكأ العلاقتين (*) و(**) بالحصول على المعادلة:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{ax+(x_0^2-ax_0)-x_0^2}{x-x_0}=2x_0;$$

التي تمدّنا على الفور بـــ $a=2x_0$؛ ممّا يقود في الأخير إلى أنّ $b=-x_0$.

3. انطلاقا من الافتراض الأوّل والقيد الموضوع نجد من أجل $x=0$:

$$h(0)=f(0)=g(0).$$

بخصوص المشتقّ نميّز هاتين الحالتين:

أ. من أجل $x>0$ نكتب:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\le\frac{g(x)-g(0)}{x-0}.$$

وعند الانتقال إلى النهاية بجعل x يؤول إلى الصفر من أعلى يأتي:

$$f'(0)\le h'_d(0)\le g'(0).$$

ب. ومن أجل $x<0$ نكتب:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\le\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

وعند الانتقال إلى النهاية بجعل x يؤول إلى الصفر من أدنى يأتي:

$$g'(0)\le h'_g(0)\le f'(0).$$

وبالاستناد إلى الافتراض الثاني نجد:

$$f'(0) = g'(0) = h'_g(0) = h'_d(0) = h'(0).$$

رمزنا هنا بـــ $h'_d(0)$ و $h'_g(0)$ لمشتق h من اليمين ومن اليسار عند الصفر على التوالي.

4. لدينا بتطبيق قاعدة اشتقاق التركيب:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4};\quad g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-tg^2 x}}(1+tg^2 x);$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\, Arc\sin x}.$$

5. 1) الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على $\mathbb{R}^*$ لأنّها جداء وتركيب دوال من الصنف $\mathscr{C}^1$. أمّا حساب f' على $\mathbb{R}^*$ فيعطي:

$$f'(x) = px^{p-1}\sin\frac{1}{x} - x^{p-2}\cos\frac{1}{x}.$$

2) أ. تقبل f نهاية عند الصفر في حالة $p \geq 1$ ذلك لأنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} x^p \sin\frac{1}{x} = 0, \quad p \geq 1.$$

ب. f مستمرّة عند الصفر من أجل $p \geq 1$ ذلك لأنّ:

$$\lim_{x\to 0} x^p \sin\frac{1}{x} = f(0) = 0.$$

ج. حتّى تكون f قابلة للاشتقاق عند الصفر يجب أن تكون النهاية

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x},$$

موجودة. ولكن:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^p\sin\frac{1}{x}}{x}=x^{p-1}\sin\frac{1}{x};$$

إذن، تكون f قابلة للاشتقاق عند الصفر إذا كان $p\geq 2$. ولدينا بالخصوص:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}x^{p-1}\sin\frac{1}{x}=0,\ \ p\geq 2.$$

د. لكي تكون f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على $\mathbb{R}$ يكفي، بمقتضى السؤال الأوّل والفرع (ج)، أن يكون مشتقّها الأوّل مستمرّا عند الصفر. من أجل $p\geq 2$ لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases} px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}; & x\neq 0,\\ 0 & ;\ x=0.\end{cases}$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}\right)=0,$$

من أجل $p\geq 3$. نستخلص أنّ f من الصنف $\mathscr{C}^1$ على $\mathbb{R}$ إذا كان $p\geq 3$.

6. 1) أ. بمقتضى دستور ثنائي الحدّين لنيوتن نكتب:

$$P(X)=(X^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kX^{2k}.$$

وعليه:

$$P^{(2q)}(X)=\sum_{k=0}^{2q}(-1)^{2q-k}C_{2q}^k(X^{2k})^{(2q)}=(-1)^qC_{2q}^q(2q)! \qquad (1)$$

$$P^{(2q+1)}(X)=\sum_{k=0}^{2q+1}(-1)^{2q+1-k}C_{2q+1}^{k}(X^{2k})^{(2q+1)}=0. \qquad (2)$$

ب. نلاحظ أنّ:

$$P(X)=(X^2-1)^n=(X+1)^n(X-1)^n.$$

وعليه، يأتي بموجب دستور ليبنيتز أنّ:

$$P^{(2q)}(X)=\sum_{k=0}^{2q}C_{2q}^{k}\left((X-1)^{2q}\right)^{(k)}\left((X+1)^{2q}\right)^{(2q-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{2q}\left[C_{2q}^{k}\frac{(2q)!}{(2q-k)!}(X-1)^{2q-k}\right]\left[\frac{(2q)!}{k!}(X+1)^{k}\right] \qquad (3)$$

(استخدمنا هنا العلاقة البسيطة المعروفة $(X^n)^{(m)}=\dfrac{n!}{(n-m)!}X^{n-m}$).

وبالمثل، نجد:

$$P^{(2q+1)}(X)=\sum_{k=0}^{2q+1}C_{2q+1}^{k}\left((X-1)^{2q+1}\right)^{(k)}\left((X+1)^{2q+1}\right)^{(1q+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{2q+1}\left[C_{2q+1}^{k}\frac{(2q+1)!}{(2q+1-k)!}(X-1)^{2q+1-k}\right]\left[\frac{(2q+1)!}{k!}(X+1)^{k}\right] \qquad (4)$$

2) أ. إذا وضعنا $x=0$ في العلاقة (4) وأخذنا بعين الاعتبار (2) حصلنا على :

$$0=P^{(2q+1)}(0)=\sum_{k=0}^{2q+1}\left[C_{2q+1}^{k}\frac{(2q+1)!}{(2q+1-k)!}(-1)^{2q+1-k}\right]\left[\frac{(2q+1)!}{k!}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{2q+1}(C_{2q+1}^{k})^2(2q+1)!(-1)^{k-1}.$$

وعليه:

$$\sum_{k=0}^{2q+1}(-1)^k(C_{2q+1}^{k})^2=0=S_2.$$

ب. وبالمثل، نضع $x=0$ في (3) ونطابق مع (1) فيأتينا توّاً:

$$P^{(2q)}(0)=\sum_{k=0}^{2q}C_{2q}^{k}\frac{(2q)!}{(2q-k)!}(-1)^{k}\frac{(2q)!}{k!}=\sum_{k=0}^{2q}(C_{2q}^{k})^{2}(-1)^{k}(2q)!$$
$$=(-1)^{q}C_{2q}^{q}(2q)!.$$

وعليه:

$$S_1=(-1)^{q}C_{2q}^{q}.$$

7. 1) لدينا بالحساب المباشر:

$$(1+x^2)f'(x)=(1+x^2)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\sqrt{1+x^2}=xf(x).$$

2) يسمح دستور ليبنيز من الرتبة $(n+1)$ المطبّق على طرفي المساواة المعنية بأن نكتب:

$$\left((1+x^2)f'(x)\right)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{k=n+1}C_{n}^{k}(1+x^2)^{(k)}f^{(n+2-k)}(x)$$
$$=(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+2nxf^{(n+1)}(x)+n(n-1)f^{(n)}(x).$$

$$\left(xf(x)\right)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{k=n+1}C_{n}^{k}x^{(k)}f^{(n+1-k)}(x)=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x).$$

3) بمطابقة العبارتين الواردتين في السؤال (2) يأتي:

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+2nxf^{(n+1)}(x)+n(n-1)f^{(n)}(x)=$$
$$=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x).$$

وعليه:

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n-1)xf^{(n+1)}(x)+n(n-2)f^{(n)}(x)=0.$$

8. الطريقة الأولى. انطلاقا من صيغة g نحسب:

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

الطريقة الثانية. بتطبيق قانون اشتقاق الدوال العكسيّة نجد:

$$g'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{-\frac{\cos\left(\pi-Arc\sin\frac{1}{x}\right)}{\sin^2\left(\pi-Arc\sin\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=-\frac{\sin^2\left(Arc\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(Arc\sin\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

9. 1) الدالّة f مستمرّة وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{a}\right[$، ذلك لأنّها مركّبة من دوال تتّصف بذلك.

2) لدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)'}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

3) أ. انطلاقا من المشتقّ يأتي بالمكاملة:

$$f(x)=Arctgx+C=Arctg\left(\frac{a+x}{1-ax}\right);\ C\in\mathbb{R}.$$

لتعيين الثابت C يكفي أخذ $x=0$ لنجد توّا $C = Arctga$، وهو ما ينهي الردّ.

ب. يكفي أخذ $y = a$ في البند (أ) للظفر بالنتيجة المنشودة.

4) أ. لدينا:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2tg\left(Arctg\frac{1}{5}\right)}{1-tg^2\left(Arctg\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12};$$

$$tg(4\alpha) = \frac{2tg2\alpha}{1-tg^2 2\alpha} = \frac{2\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

ب. لدينا:

$$tg\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) =]0,+\infty[.$$

ولما كان:

$$tg(4\alpha) = \frac{120}{119} \in]0,+\infty[,$$

تبيّن من كون الدالّة $Arctg$ متزايدة على المجال $]0,+\infty[$ أنّ:

$$4\alpha = Arctg\frac{120}{119} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

ج. بالاستناد إلى الفرع (أ) نحصل على:

$$Arctg(tg(4\alpha)) = Arctg\frac{120}{119}.$$

وعليه:

$$4Arctg\frac{1}{5} = Arctg\frac{120}{119}.$$

أخيرا، نلاحظ على ضوء الفرع (ب) من السؤال الثالث أنّ:

$$4Arctg\frac{1}{5} - Arctg\frac{1}{239} = Arctg\frac{120}{119} - Arctg\frac{1}{239}$$

$$= Arctg\left(\frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\frac{1}{239}}\right) = Arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

10. لنعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعطاة على المجال $[0,1]$ بـــ :

$$f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_{p-1}}{p}x^p - \frac{1}{p+1}x^{p+1}.$$

نلاحظ أنّ f مستمرّة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,1[$ وتحقّق فضلا عن ذلك $f(0) = f(1) = 0$. نرى بذلك أنّ شروط مبرهنة رول مجتمعة في f . يوجد تبعا لذلك عنصر c من $]0,1[$ بحيث $f'(c) = 0$. ولمّا كان:

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} - x^p.$$

تبيّن أنّ المعادلة:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} = x^p.$$

تقبل جذرا حقيقيّا في المجال $]0,1[$.

11. 1) التعويض المباشر يفضي إلى حالة عدم التعيين من النمط $\infty.0$. لرفعها نستعمل مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالّة $Arctgx$ في المجال $[x,x+2]$، حيث x من $\mathbb{R}_+$. نكتب:

$$\exists c\in\,]x,x+2[\,/\,Arctg(x+2)-Arctgx=2\frac{1}{1+c^2}.$$

وعليه:

$$2\frac{x^2}{1+(x+2)^2}\le 2\frac{x^2}{1+c^2}\le 2\frac{x^2}{1+x^2};\ \forall x\ge 0.$$

نجد بفضل مبرهنة الحصر:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(Arctg(x+2)-Arctgx\right)=\lim_{x\to+\infty}2\frac{x^2}{1+c^2}=2.$$

2) نستعمل مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالّة $t\mapsto\frac{t}{1+t^2}$ في المجال $[x,y]$، حيث x و y من $\mathbb{R}$، فنكتب:

$$\exists c\in\,]x,y[\,:\left|\frac{y}{1+y^2}-\frac{x}{1+x^2}\right|=|y-x|\left|\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}\right|<|y-x|.$$

3) هنا أيضا، نستعين بمبرهنة التزايدات المنتهية. يمكّن تطبيقها على الدالّة $t\mapsto(1+t)Logt$ في المجال $[1,x]$، حيث x كيفيّ في $]1,+\infty[$، من أن نكتب:

$$\exists c\in\,]1,x[\,:(1+x)Logx=(x-1)\left(Logc+\frac{1+c}{c}\right).$$

وعليه:

$$Logx=\frac{x-1}{1+x}\left(Logc+\frac{1+c}{c}\right).$$

يكفي أن نبيّن أنّ:

$$\forall x \in \left]1,+\infty\right[: Logx+\frac{1+x}{x}>2.$$

أي:

$$\forall x \in \left]1,+\infty\right[: Logx+\frac{1}{x}>1.$$

نلاحظ أنّ الدالّة $\left]1,+\infty\right[\mapsto f(x)=Logx+\frac{1}{x}$ تتمتّع بمشتقّ موجب تماما، وعليه، فهي متزايدة تماما، وبالتالي:

$$x>1 \ \Rightarrow f(x)>f(1);$$

أي:

$$x>1 \ \Rightarrow Logx+\frac{1}{x}>1;$$

ومنه المطلوب.

12. بمقتضى مبرهنة التزايدات المنتهية نكتب بشأن العلاقتين الأوليين:

$$\forall x,x'\in\mathbb{R} \quad \exists c_{xx'}>0 / \, thx-thx'=(x-x')\frac{1}{ch^2 c_{xx'}};$$

$$\forall x,x'\in\mathbb{R} \quad \exists d_{xx'}>0 / \, Argshx-Argshx'=(x-x')\frac{1}{\sqrt{1+(d_{xx'})^2}}.$$

ولما كان:

$$\frac{1}{ch^2 c_{xx'}}\le 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(d_{xx'})^2}}\le 1,$$

حصلنا على الفور على المتباينتين.

بخصوص العلاقة الثالثة نلاحظ أوّلا أنّها صحيحة من أجل $x=0$.

ومن أجل $x>0$ نعتبر الدالّتين:

$$t \mapsto f(t) = Arcctg(tx) - \frac{\pi}{2} - xt + \frac{x^3t^3}{3} - \frac{x^5t^5}{5};$$
$$t \mapsto g(t) = Arcctg(tx) - \frac{\pi}{2} + xt - \frac{x^3t^3}{3};$$

ونطبّق عليهما مبرهنة التزايدات المنتهية في المجال $[0,x]$. يأتي على ضوء ذلك:

$$\begin{aligned}\exists c \in]0,1[: f(1) - f(0) &= \left(Arcctgx - \frac{\pi}{2} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= (1-0)\left(-\frac{x}{1+x^2c^2} + x - c^2x^3 + c^4x^5\right)\\ &= \frac{-x + x - c^2x^3 + c^4x^5 + x^3c^2 - c^4x^5 + c^6x^7}{1+x^2c^2}\\ &= \frac{c^6x^7}{1+x^2c^2} > 0;\end{aligned}$$

ومنه:

$$Arcctgx - \frac{\pi}{2} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} > 0;$$

أي:

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} < Arcctgx.$$

وبالمثل، لدينا:

$$\exists d \in]0,1[: g(1)-g(0) = \left(Arcctgx - \frac{\pi}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (1-0)\left(-\frac{x}{1+x^2d^2} + x - d^2x^3\right)$$

$$= \frac{-x+x-d^2x^3+x^3c^2-d^4x^5}{1+x^2d^2} = \frac{-d^4x^5}{1+x^2d^2} < 0;$$

ومنه:

$$Arcctgx - \frac{\pi}{2} + x - \frac{x^3}{3} < 0;$$

أي:

$$Arcctgx < \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3}.$$

إذا أجملنا في الخلاصة ما سبق حصلنا على المطلوب:

$$\forall x \geq 0,\ \ \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq Arcctgx \leq \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3}.$$

13. لنبدأ بإثبات المتباينة اليسرى: يمكن أن نحوّلها إلى الشكل المكافئ:

$$\forall x, y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \ x < y \Rightarrow \ \ \frac{x}{\sin x} < \frac{y}{\sin y}.$$

إذا اعتبرنا الدالّة $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ وجدناها متزايدة على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ، إذ أنّ:

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{tgx - x}{\sin x\, tgx} > 0,\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

وعليه، تأتي متباينتنا.

لنفحص المتباينة اليمنى:

$$\forall x, y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ x < y \Rightarrow \ \frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\pi}{2}\frac{x}{y}.$$

يمكن كما كان الحال أعلاه أن نحوّلها بدورها إلى الشكل المكافئ:

$$\forall x, y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ x < y \Rightarrow \ \frac{\sin x}{x}\frac{y}{\sin y} < \frac{\pi}{2}.$$

نلاحظ أنّ:

$$\forall x, y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{\sin x}{x} < 1.$$

وعليه، يكفي أن نبيّن أنّ:

$$\forall y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{y}{\sin y} < \frac{\pi}{2}.$$

هذه النتيجة مضمونة بفضل تزايد الدالّة المستمرّة $y \mapsto \frac{y}{\sin y}$ على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\forall y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{y}{\sin y} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

14. 1) نستقي من الشرط الموضوع:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \frac{f(x)}{x} \geq 1.$$

وعليه:

$$f'(0) = f_d'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq 1.$$

2) من أجلّ كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n توجد، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية، نقطة x_n من $\left]0,\frac{1}{n}\right[$ بحيث:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\frac{1}{n}f'(x_n).$$

ومنه:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f'(x_n)\geq\frac{1}{n}.$$

وعليه:

$$f'(x_n)\geq 1.$$

نرى هكذا أنّ هذه المتتالية المبنية في المجال $\left]0,\frac{1}{n}\right[$ تتقارب نحو الصفر ويفوق مشتقّ f عند كلّ واحدة من نقاطها القيمة 1 المعلنة.

15. 1) لدينا:

$$0<x\leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}\geq 1 \;\Rightarrow\; a+\frac{1}{x}-1\geq a.$$

نستنتج أنّ الدالّة g مستمرّة على المجال $]0,1]$ كتركيب لدوال مستمرّة.

وعلاوة على ذلك نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} f\left(a+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=f(a)=g(0);$$

وهو ما ينهي استمرار g على المجال المغلق $[0,1]$.

أخيرا، الدالّة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0,1[$ كتركيب لدوال تتّصف بذلك.

1) لدينا:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(a + \frac{1}{x} - 1\right);\ x \in \left]0,1\right[.$$

2) نلاحظ أنّ $g(0) = g(1) = f(a)$. يوجد بمقتضى مبرهنة رول عنصر b في $\left]0,1\right[$ بحيث $g'(b) = 0$. وبالتعويض يأتي:

$$g'(b) = -\frac{1}{b^2} f'\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) = 0.$$

ومنه:

$$f'\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) = 0.$$

يكفي أخذ $c = a + \frac{1}{b} - 1$.

16. 1) ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$. تسمح مبرهنة التزايدات المنتهية المطبّقة على الدالّة $t \mapsto Logt$ في المجال $[x, x+1]$ بالجزم بأنّه:

$$\exists c \in \left]x, x+1\right[: Log(x+1) - Logx = \frac{1}{c}.$$

ولكن:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x};$$

إذن:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{x+1} < Log(x+1) - Logx < \frac{1}{x}.$$

2) انطلاقا من السؤال الأوّل نكتب:

$$\frac{1}{n} < Logn - Log(n-1) < \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n+1} < Log(n+1) - Logn < \frac{1}{n}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{2n} < Log(2n) - Log(2n-1) < \frac{1}{2n-1}$$

$$\frac{1}{2n+1} < Log(2n+1) - Log(2n) < \frac{1}{2n}$$

وبجمع هذه المساويات طرفا لطرف نجد:

$$u_n + \frac{1}{2n+1} < Log(2n+1) - Log(n-1) < u_n + \frac{1}{n-1}.$$

وعليه:

$$Log\frac{2n+1}{n-1} - \frac{1}{n-1} < u_n < Log\frac{2n+1}{n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

على ضوء مبرهنة الحصر (الدرك) نحصل على النهاية المطلوبة:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = Log2.$$

3) دستور ريمان من أجل دالّة مستمرّة f على مجال متراص $[a,b]$ هو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

بأخذ $a=1$ و $b=2$ و $f(x)=\frac{1}{x}$ نجد على التوّ:

$$Log2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

17. 1) لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = f'(n+1) - \big(f(n+1) - f(n)\big).$$

نستخلص بفضل مبرهنة التزايدات المنتهية أنّ:

$$\exists c_n \in]n, n+1[: f(n+1) - f(n) = f'(c_n).$$

وعليه:

$$\exists c_n \in]n, n+1[: u_{n+1} - u_n = f'(n+1) - f'(c_n).$$

2) بما أنّ المشتقّة f' دالّة متناقصة تماما فإنّ:

$$c_n < n+1 \Rightarrow f'(n+1) < f'(c_n).$$

ومنه، $u_{n+1} - u_n < 0$، وبالتالي فإنّ المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة.

3) لدينا:

$$\begin{aligned} u_n &= f'(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f'(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(f(k) - f(k+1)\big) - f(1) \\ &= f'(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f'(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \big(f(k+1) - f(k)\big). \end{aligned}$$

تسمح مبرهنة التزايدات المنتهية بأن نكتب من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n:

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \exists c_k \in]k, k+1[: f(k+1) - f(k) = f'(c_k).$$

وعليه:

$$u_n = f'(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(f'(k) - f'(c_k)\big).$$

4) تناقص الدالّة المشتقّة يعطي توّا:

$$c_k > k \Rightarrow f'(k) > f'(c_k);$$

وتزايد الدالة f التام يضمن $f'(n)>0$، نستخلص أنّ الحدّ العام u_n موجب، وهو ما يعني أنّ المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأدنى بالصفر. ولما كانت متناقصة تماما استنتجنا أنّها متقاربة,

5) المتتالية $(v_n)_n$ متقاربة، يكفي للتأكّد من ذلك أخذ $f(x)=Logx$ في الدراسة السابقة,

18. 1) الدالّة $Arctgx$ معرّفة على $\mathbb{R}$. نستخلص أنّ ميدان التعريف D_f هو $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt{3}\right\}\right)$. f مستمرّة على D_f كنسبة وتركيب لدوال مستمرّة.

2) لتبسيط عبارة f نقترح طريقتين. الأولى بالاشتقاق. لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

وعليه:

$$f(x)=\begin{cases} Arctgx+c_1\ ;\ x\in\left]\sqrt{3},+\infty\right[, \\ Arctgx+c_2\ ;\ x\in\left]-\infty,\sqrt{3}\right[. \end{cases}$$

لتعيين الثابتين c_1 و c_2 نحلّ الجملة الجبريّة:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=Arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} Arctgx+c_1=\dfrac{\pi}{2}+c_1; \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=Arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} Arctgx+c_2=-\dfrac{\pi}{2}+c_2; \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+c_1, \\ -\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}+c_2. \end{cases}$$

نجد على الفور $c_1=-\frac{5\pi}{6}$ و $c_2=\frac{\pi}{6}$. وعليه:

$$Arctg\frac{\sqrt{3}+3x}{3-\sqrt{3}x}=\begin{cases}Arctgx-\frac{5\pi}{6} & ; x\in\left]\sqrt{3},+\infty\right[,\\ Arctgx+\frac{\pi}{6} & ; x\in\left]-\infty,\sqrt{3}\right[.\end{cases}$$

الطريقة الثانية: التحويل.

بوضع:

$$\begin{cases}x=tg\theta,\\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[,\\ x\in\left]-\infty,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[;\end{cases}$$

يأتي:

$$f(x)=Arctg\frac{\sqrt{3}+3x}{3-\sqrt{3}x}=Arctg\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+tg\theta}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}tg\theta}\right)=Arctg\left(\frac{tg\frac{\pi}{6}+tg\theta}{1-tg\frac{\pi}{6}tg\theta}\right)$$

$$=Arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right).$$

نميّز تبعا لقيم θ حالتين. إذا كان θ من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right[$ كان $\theta+\frac{\pi}{6}$ من المجال $\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$. وعليه:

$$f(x)=\frac{\pi}{6}+\theta=Arctgx+\frac{\pi}{6};\ x\in\left]-\infty,\sqrt{3}\right[.$$

وإذا كان θ من المجال $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$ كان $\theta+\frac{\pi}{6}$ من المجال $\left]\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right[$. ولما كان:

$$tg\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=tg\left(\theta+\frac{\pi}{6}-\pi\right)=tg\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right);\ \theta-\frac{5\pi}{6}\in\left]-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right[,$$

وجدنا:

$$f(x)=\theta-\frac{5\pi}{6}=Arctgx-\frac{5\pi}{6};\ x\in\left]\sqrt{3},+\infty\right[.$$

نكون هكذا قد أدركنا النتيجة المعلومة ذاتها.

3) الدالّة f تحقّق شروط مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. نستنج أنّ منحنى f البيانيّ يقبل مماسا موازيا للمستقيم المارّ من النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

لتعيين نقطة التماس نكتب فحوى المبرهنة المذكورة:

$$\exists c\in\left]0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\ /\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-f(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}f'(c).$$

وعليه:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+c^2};$$

وبالتالي:

$$c=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}-1}.$$

النقطة المنشودة هي $(c,f(c))$.

4) إذا قمنا بتوظيف الردّ الوارد على السؤال الثاني اتّخذت المتباينتان المطلوبتان الشكل الجديد:

$$x \le Arctgx \le \frac{x}{1+x^2};\ \forall x \in \left]-\infty, 0\right],$$

واضح أنّهما مساواتان جليّتان عند الصفر. ليكن x من المجال $]-\infty,0[$. نعتبر الدالّة المعطاة على المجال $[0,1]$ بـــ:

$$f(t) = Arctgxt.$$

بالاستناد إلى مبرهنة التزايدات المنتهية نكتب:

$$\exists c \in \left]0,1\right[\,/\, Arctgx = \frac{x}{1+x^2c^2}.$$

ولما كان:

$$\frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2c^2} \le 1;\ \forall x \in \mathbb{R},$$

تبيّن أنّ:

$$\frac{x}{1+x^2} \ge \frac{x}{1+x^2c^2} = Arctgx \ge x;\ \forall x \in \left]-\infty, 0\right],$$

19. **I.** 1) الدالّة f مستمرّة على $\mathbb{R}^*$ لأنّها تركيب لدوال أوليّة مستمرّة.

أمّا من أجل $x = 0$ فنعيد صوغ عبارة f هكذا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(|1+x| - |1-x|\right) & ; x \ne 0, \\ 2 & ; x = 0. \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{x} & ; 1 \le x, \\ 2 & ; x \in [-1,1], \\ -\frac{2}{x} & ; x \le -1. \end{cases}$$

وهذا ما يظهر أنّ f ثابتة في جوار الصفر ويضمن استمرارها عند الصفر أيضا.

2) f تقبل الاشتقاق عند الصفر لنفس السبب (ثابتة في جوار الصفر بما فيه الصفر.)

II. 1) الدالّتان $x \mapsto \sqrt{4x^2+1}-1$ و $x \mapsto Arctgx$ معرّفتان على $\mathbb{R}$. إذن الدالّة f معرّفة على $\mathbb{R}^*$.

2) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} Arctg\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} Arctg\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{2} = Arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

وبالمثل:

$$\lim_{x\to-\infty} Arctg\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x} = -\lim_{t\to+\infty} Arctg\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2t} = \frac{-\pi}{4}.$$

3) لدينا:

$$\sin t = \sin 2\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} = 2\frac{tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}};$$

بالمثل:

$$\sin t = \sin 2\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} = 2\frac{tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}};$$

$$\cos t = \cos 2\frac{t}{2} = \frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}.$$

4) نضع كما هو مشار إليه:

$$\begin{cases} 2x = tgt,\ x \in \mathbb{R}^* \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = Arctg2x,\ x \in \mathbb{R}^* \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

وعليه يأتي:

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x} = \frac{\sqrt{tg^2t+1}-1}{tgt} = \frac{1-\cos t}{\sin t}.$$

وباستحضار السؤال (3) نكتب:

$$\frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{1-\dfrac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}}{\dfrac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}} = \frac{1+tg^2\frac{t}{2}-1+tg^2\frac{t}{2}}{2tg\frac{t}{2}} = tg\frac{t}{2}.$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{t}{2} = \frac{1}{2}Arctg2x.$$

5) يفيد هذا السؤال أنّ المعادلة $f'(x) = -1$ لا تقبل حلاً، والحال كذلك لأنّ:

$$f'(x) = \frac{1}{1+4x^2} > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

6) علينا أن نبيّن أنّ للمعادلة $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ حلاً وحيدا x_0 في $\mathbb{R}$.

أ. بالحساب المباشر. لدينا:

$$\frac{1}{2}Arctg2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow Arctg2x = 1 \Leftrightarrow 2x = tg1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}tg1$$

ب. بالاستدلال. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}>0;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0.$$

ولما كانت f مستمرّة على $\mathbb{R}_+^*$ تبيّن، على ضوء مبرهنة القيم المتوسّطة، وجود نقطة فاصلتها x_0 من $\mathbb{R}_+^*$ تحلّ المسألة المطروحة.

أمّا وحدانية x_0 فنابعة من كون الدالّة f متزايدة تماما.

(تذكّر أنّ:

$$(f'(x)=\frac{1}{1+4x^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*.$$

7) الدالّة f مستمرّة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ ،

إذن فهي تقبل دالّة عكسيّة معرّفة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

لنعيّنها. نضع $f^{-1}(x)=y$ ونحلّ المعادلة:

$$y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}tg2x \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}Arctg2y$$

.20 1) ميدان التعريف المطلوب هو:

$$D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[.$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} Arctg\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{4} = 0 = f(0);$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin ax}{x} + (x^2 - a^2)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$= a - a^2 E\left(\frac{2}{1^+}\right) = a - a^2 E\left(2^-\right) = a - a^2.$$

نخلص من هذا الحساب إلى أنّه لكي تكون الدالّة f مستمرّة عند الصفر يلزم ويكفي أن تتحقّق المساواة:

$$a - a^2 = 0;$$

وهو ما يكافئ $a = 0$ أو $a = 1$. ولمّا كان الوسيط a موجبا تماما تبيّن أنّ القيمة المعنية هي $a = 1$.

3) أ. الدالّة f مستمرّة على المجال $[-1,0]$ بموجب المبرهنات العامّة في حقل الاستمرار. وبما أنّ هذا المجال مغلق ومحدود فإنّ مبرهنة فيرشتراس تضمن استمرار f المنتظم عليه.

ب. لدينا:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{Arctg\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}.$$

لحساب هذه النهاية نستخدم التبديل $y = \frac{1}{1+x^2}$، وهو يمدّنا بـ $x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$ ويفضي إلى:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{Arctgy-Arctg1}{\sqrt{\frac{1-y}{y}}}=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{y}\,\frac{Arctgy-Arctg1}{\sqrt{1-y}}$$

$$=-\lim_{x\to 1^-}\sqrt{y(1-y)}\,\frac{Arctgy-Arctg1}{y-1}=0.$$

بالمثل، لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}+(x^2-1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)}{x}.$$

وإذا لاحظنا أنّ $E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=1$ في المجال $]0,1[$ أمكن أن نكتب من جديد:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}+x^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x-x+x^3}{x^2}\right).$$

نجد بفضل قاعدة لوبيطال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x-1+3x^2}{2x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x+6x}{2}\right)=0.$$

نستخلص ممّا سبق أنّ f قابلة للاشتقاق عند الصفر ومشتقّها يساوي $f'(0)=0$.

نعالج حالة النقطة $x_1=1$ بالمثل. لدينا:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin x}{x}+(x^2-1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)-\frac{\sin 1}{1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 1}{1}}{x-1}+(x+1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'(1)+\lim_{x\to 1}(x+1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$=\cos 1-\sin 1+\lim_{x\to 1}(x+1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right).$$

إذا تفحّصنا النهاية الأخيرة وجدنا بشأنها:

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=2E\left(1^-\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=2E\left(1^+\right)=2.$$

نستخلص أنّ:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\cos 1-\sin 1\neq\cos 1-\sin 1+2=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}.$$

وعليه، فإنّ f ليست قابلة للاشتقاق عند $x_1=1$.

ج. لدينا:

$$x\in\left]0,1\right]\ \Rightarrow\ \frac{2}{1+x^2}\in\left[1,2\right[\ \Rightarrow\ E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=1,$$

$$x\in\left]1,+\infty\right[\ \Rightarrow\ \frac{2}{1+x^2}\in\left]0,1\right[\ \Rightarrow\ E\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=0.$$

وعليه:

$$f(x)=\begin{cases} Arctg\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)-\dfrac{\pi}{4} & ;\ x\le 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}+x^2-1 & ;\ x<0\le 1,\\ \dfrac{\sin x}{x} & ;\ x>1. \end{cases}$$

المبرهنات العامّة في الاشتقاق تبرز قابلية f للاشتقاق على المجالات $]-\infty,0[$ و $]0,1[$ و $]1,+\infty[$. ولسبق علمنا بقبول f الاشتقاق عند الصفر وتعذّر ذلك عند 1 استنتجنا أنّ الميدان H المستهدف هو $H=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

وفضلا عن هذا لدينا:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x}{x^4+2x^2+2} & ;\ x\le 0,\\ 0 & ;\ x=0,\\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+2x & ;\ x<0<1,\\ ? & ;\ x=1,\\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & ;\ x>1. \end{cases}$$

رمزنا بعلامة الاستفهام للدلالة على أنّ المشتقّ غير موجود كما تقدّم.

4) العبارة الصريحة للمشتقّ f' في المجال $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ هي:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x}{x^4+2x^2+2} & ;\ -\dfrac{1}{2}\le x\le 0,\\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+2x & ;\ x<0\le\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

واضح أنّ f' مستمرّ على الميدان $\left[-\frac{1}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{1}{2}\right]$ بمقتضى العمليات الحسابيّة؛ وهو مستمرّ عند الصفر كذلك إذ أنّ:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x^4+2x^2+2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+2x = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0).$$

نستخلص أنّ f' يحقّق شرط الاستمرار على المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. من جهة أخرى، تضمن العمليات الحسابيّة قبول الاشتقاق على الميدان $\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{1}{2}\right[$. أمّا عند الصفر فلدينا:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x^4+2x^2+2} = -1;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}+2 = \frac{5}{3}.$$

إنّ اختلاف النهايتين يحرم f' من قبول الاشتقاق عند الصفر. نستخلص أنّ الشرط الثاني لمبرهنة التزايدات المنتهية غير متوفّر، وهو ما يحول دون إمكانية تطبيق هذه المبرهنة على f' .

21. 1) إنّ تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالّة $t\mapsto Log(1+t)$ في المجال $[0,x]$ (إذا كان $x>0$) وفي المجال $[x,0]$ (إذا كان $x<0$) يضمن وجود عنصر c من $]0,x[$ بحيث:

$$Log(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

وبما أنّ $0 < c < x$ فإنّ:

$$1 < 1+c < 1+x \ \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x.$$

ومنه:

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\quad \frac{x}{1+x} \leq Log(1+x) \leq x.$$

تعالج الحالة $x < 0$، بالمثل. نستخلص أنّ:

$$\forall x \in \left]-1;+\infty\right[\quad \frac{x}{1+x} \leq Log(1+x) \leq x.$$

2) بأخذ $x = \frac{1}{k}$ في المتباينة السابقة نجد:

$$\frac{1}{1+k} \leq Log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

وعليه:

$$Log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \ \Rightarrow kLog\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Log\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leq 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leq e;$$

وكذلك:

$$\frac{1}{1+k} \leq Log\left(1+\frac{1}{k}\right) \ \Rightarrow \ (k+1)Log\left(1+\frac{1}{k}\right) \geq 1 \ \Rightarrow \ e \geq \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

ومنه:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

3) يكفي أخذ لوغاريتم أطراف المتباينات السابقة للحصول على المطلوب:

$$kLog\left(\frac{1+k}{k}\right)<1<(k+1)Log\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

4) انطلاقا من المتباينة:

$$1<(k+1)Log\left(\frac{k+1}{k}\right),$$

يأتي:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{Log(k+1)+Logk}{k+1}\leq\sum_{k=1}^{k=n}\frac{Log(k+1)+Logk}{k+1}(k+1)Log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\left(Log(1+k)+Logk\right)\left(Log(1+k)-Logk\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\left(Log^2(1+k)-Log^2k\right)=\left(Log(1+n)\right)^2.$$

نحصل بالطريقة نفسها على المتباينة الثانية. ونستنتج أخيرا:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(k+1)+Logk}{k+1}<\left(Log(n+1)\right)^2<\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(k+1)+Logk}{k}.$$

22. التعويض المباشر في العبارات المقترحة يفضي إلى حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$.

لرفعها نستخدم قاعدة لوبيطال عددا كافيا من المرّات لنجد:

$$\ell_1=\lim_{x\to0}\frac{2e^x-2e^{-x}-4x}{3x-3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^x+2e^{-x}-4}{3-3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2e^x-2e^{-x}}{3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^x+2e^{-x}}{3\cos x}=\frac{4}{3};$$

$$\ell_2 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{Log \sin x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-4(\pi-2x)\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{8\sin x - 4(\pi-2x)\cos x} = -\frac{1}{8};$$

$$\ell_3 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - tg\, x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = 0;$$

$$\ell_4 = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} (Loga)\, a^x - (Logb) b^x$$

$$= Loga - Logb = Log \frac{a}{b}.$$

.23 1) g مستمرّة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ كنتيجة لمبرهنة العمليات الحسابيّة. لكي تحقّق g شروط مبرهنة رول يكفي أن نختار A بحيث نضمن المساواة $g(a) = g(b)$. ولكن $g(a) = 0$، إذن ينبغي أن يكون $g(b) = 0$. وعليه:

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

2) بما g تحقّق شروط مبرهنة رول إذن يوجد عدد حقيقيّ c ينتمي إلى المجال $]a,b[$ بحيث $g'(c) = 0$. باشتقاق العلاقة (*) والتعويض نجد:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

3) أ. نجد باستعمال نفس طريقة البرهان السابق:

$$B = 2\frac{f(b) - f(a) - (b-a) f'(a)}{(b-a)^2}.$$

ب. h تحقّق شروط مبرهنة رول؛ إذن يوجد عدد حقيقيّ c ينتمي إلى المجال $]a,b[$ بحيث $h'(c)=0$. باشتقاق العلاقة (**) والتعويض نصل إلى العلاقة المطروحة.

24. 1) بالحساب المباشر نجد أنّ $g(a)=g'(a)=0$ و:

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)-f'(a)-(x-a)f''(x)\right).$$

وعليه:

$$\begin{aligned} g''(a) &= \lim_{x\to a}\frac{g'(x)-g'(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{2}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}-\frac{1}{2}f''(x)\right)=\frac{1}{2}\left(f''(a)-f''(a)\right)=0. \end{aligned}$$

2) يكفي لكي يكون لدينا $h(b)=0$ أخذ $\lambda=\dfrac{g(b)}{(b-a)^3}$. بهذا القيد تستكمل الدالّة h الشروط الروليّة الثلاثة. فهي مستمرّة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وتحقّق $h(a)=h(b)=0$.

3) يوجد، بمقتضى إذعان h لشروط مبرهنة رول، عنصر c_1 من $]a,b[$ بحيث $h'(c_1)=0$. ولما كان $h'(a)=0$ تبيّن أنّ المشتقّ h' يحقّق بدوره شروط مبرهنة رول على المجال $[a,c_1]$. وعليه:

$$\exists c\in\,]a,c_1[\,/\,h''(c)=0.$$

ولما كان:

$$h''(x)=g''(x)-6\lambda(x-a)=-\frac{x-a}{2}f'''(x)-6\lambda(x-a),$$

جاءنا:

$$-\frac{c-a}{2} f'''(c) - 6\lambda(c-a) = 0,$$

وعليه:

$$f'''(c) = -12\lambda.$$

باستحضار قيمة λ نجد:

$$\begin{aligned} f'''(c) &= -12\frac{g(b)}{(b-a)^3} \\ &= \frac{-12}{(b-a)^3}\left(f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\left(f'(b)+f'(a)\right)\right) \\ &= \frac{6}{(b-a)^2}\left(f'(b)+f'(a)-2\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right). \end{aligned}$$

وهو ما يفضي إلى العلاقة المطلوبة:

$$f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(c).$$

25. نستهلّ هذه المعالجة بالإشارة إلى أنّ **النتيجة الحاضرة تعدّ تعميما لمبرهنة رول.** لدينا فرضا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

نكتب تعريفا:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R} : x \le -A \Rightarrow |f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall\varepsilon>0\,\exists B>0/\forall x\in\mathbb{R}: x\geq B\Rightarrow |f(x)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ليكن $\varepsilon>0$ و a و b عددين حقيقيّين بحيث $a\geq -A$ و $b\geq B$. لدينا:

$$|f(a)-f(b)|=|f(a)-\ell+\ell-f(b)|\leq|f(a)-\ell|+|\ell-f(b)|\leq\varepsilon.$$

نستنتج أنّ $f(a)=f(b)$، وهو ما تكتمل به شروط مبرهنة رول على f في المجال $[a,b]$. يوجد بمقتضى هذه المبرهنة عدد حقيقيّ c من $]a,b[$ يعدم المشتقّ f'.

26. 1) نستخدم مبرهنة التزايدات المنتهية. ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$. الدالّة:

$$f:[0,x]\to\mathbb{R}$$
$$t\mapsto f(t)=Log(1+xt),$$

تحقّق شرطي المبرهنة المعنية. وعليه:

$$\exists c\in\,]0,x[: Log(1+x)=\frac{x}{1+xc}.$$

وعلاوة على هذا، نلاحظ أنّ:

$$0<c<1\Rightarrow 0\leq cx\leq x\Rightarrow 1\leq 1+xc\leq 1+x$$
$$\Rightarrow\frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{1+xc}\leq 1\Rightarrow\frac{x}{1+x}\leq\frac{x}{1+xc}\leq x;$$

ومنه النتيجة.

2) لدينا:

$$Logu_n = Log\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = nLog\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

بأخذ $x = \frac{a}{n}$ في العلاقة الواردة في السؤال الأوّل يأتي:

$$\frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \le Log\left(1+\frac{a}{n}\right) \le \frac{a}{n}.$$

نستخلص أنّ:

$$\frac{a}{1+\frac{a}{n}} \le nLog\left(1+\frac{a}{n}\right) \le a;$$

أي أنّ:

$$\frac{a}{1+\frac{a}{n}} \le Logu_n \le a.$$

3) انطلاقا من هذا الحصر، يسمح تزايد الدالّة الأسيّة بالظفر بـــ:

$$e^{\frac{a}{1+\frac{a}{n}}} \le u_n \le e^a.$$

ولما كانت المتتاليتان الحاصرتان $(e^a)_n$ و $\left(e^{\frac{a}{1+\frac{a}{n}}}\right)_n$ متقاربتين نحو نهاية مشتركة واحدة تبيّن أنّ متتاليتنا $(u_n)_n$ متقاربة بدورها ونحو النهاية ذاتها.

4) لدينا على الفور $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^a$.

27. 1) نقوم بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالّة $x \mapsto Logx$ في المجال $[n, n+1]$. نكتب عندئذ:

$$\exists c \in \left]n, n+1\right[: Log(1+n) - Logn = \frac{1}{c}.$$

وبما كان:

$$n < c < n+1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n};$$

كانت العلاقة المطروحة قد برّرت.

2) لنجعل الدليل n يمسح المجموعة $\{1,2,...,n-1\}$ في الحصر السابق.

نحصل على:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} < Log2 - Log1 < 1,\\
&\frac{1}{3} < Log3 - Log2 < \frac{1}{2},\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\frac{1}{n} < Logn - Log(n-1) < \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

وبجمع هذه المتباينات طرفا طرفا يأتي:

$$u_n - 1 < Logn < -\frac{1}{n} + u_n. \qquad (*)$$

وعليه:

$$u_n > \frac{1}{n} + Logn$$

وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + Logn\right) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) أ. لدينا:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - Log(n+1)) - (u_n - Logn)\\
&= \frac{1}{n+1} - (Log(n+1) - Logn) < 0.
\end{aligned}$$

نرى هكذا أنّ المتتالية $(v_n)_n$ متناقصة.

ب. من العلاقة (*) نستقي:

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n} < v_n = u_n - Logn < 1.$$

نستنتج أنّ المتتالية المتناقصة $(v_n)_n$ محدودة من الأدنى بالصفر. إنّها بذلك متقاربة.

النهاية ℓ تحقّق الحصر:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \leq \ell \leq \lim_{n\to+\infty} 1;$$

وهو ما يجعل ℓ من المجال $[0,1]$.

28. 1) لنفحص العلاقة الأولى. نطبّق دستور التزايدات المنتهية على الدالّة $x \mapsto f(x) = Arctgx$ في المجال $[a,b]$. يأتي تبعا لذلك:

$$\exists c \in]a,b[\,/\, Arctgb - Arctga = \frac{(b-a)}{1+c^2}.$$

وعليه:

$$0 \leq a < c < b \;\; \Rightarrow \; 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2;$$

وبالتالي:

$$0 \leq a < c < b \;\; \Rightarrow \; \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2};$$

ومنه نستنتج العلاقة المعلنة.

نقوم بغية معالجة العلاقة الثانية، باستعمال الاشتقاق. نجد:

$$\left(Arctg(1+x)-Arctgx\right)'=\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{-1-2x}{(1+2x+x^2)(1+x^2)}$$
$$=\frac{-1-2x}{(1+x+x^2)^2}=\left(Arctg\frac{1}{1+x+x^2}\right)'.$$

نستنتج أنّ:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ Arctg(1+x)-Arctgx=Arctg\frac{1}{1+x+x^2}+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

وبأخذ $x=0$ نجد $C=0$.

2) نستنتج ممّا سبق:

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}Arctg\frac{1}{1+k+k^2}=Arctg(n+1)-Arctg1=Arctg(n+1)-\frac{\pi}{4}.$$

3) حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(Arctg(n+1)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

.29 1) نستخدم الاستدلال بالتراجع. لدينا بسهولة:

$$f'(x)=\frac{2x-1}{1+x^2}.$$

إذن الدستور المقترح صحيح من أجل $n=1$. لنفترض صحّته إلى غاية رتبة ما k. لدينا من أجل الرتبة الموالية:

$$f^{(k+1)}(x)=f^{(k)'}(x)=\left(\frac{P_k(x)}{(1+x^2)^k}\right)'$$
$$=\frac{(1+x^2)^kP_k'(x)-2kx(1+x^2)^{k-1}P_k(x)}{(1+x^2)^{2k}}$$
$$=\frac{(1+x^2)P_k'(x)-2kxP_k(x)}{(1+x^2)^{k+1}}.$$

إذا لاحظنا أنّ العبارة:

$$P_{k+1}(x) = (1+x^2)P_k'(x) - 2kxP_k(x),$$

كثير حدود درجته استخلصنا أنّ دستورنا صحيح من أجل $k+1$.

2) لنرمز بـــ a_{n-1} لمعامل x^{n-1} في كثير الحدود $P_{n-1}(x)$. يأتي أنّ معامل x^n في كثير الحدود:

$$P_n(x) = (1+x^2)P_{n-1}'(x) - 2(n-1)xP_{n-1}(x),$$

مقيّد بالعلاقة التراجعيّة:

$$a_n = (n-1)a_{n-1} - 2(n-1)a_{n-1} = -(n-1)a_{n-1},$$

الأمر الذي يفضي بالتراجع إلى:

$$a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!a_1 = 2(-1)^{n-1}(n-1)!$$

3) الخاصية بيّنة صحّتها من أجل $k=1$. لنفترض بقاء هذه الصحّة إلى غاية $k=n-1$، أي أنّ كثير الحدود $P_{n-1}(x)$ يقبل $n-1$ جذرا α_1، α_2، ...، α_{n-1}. إذا لاحظنا أنّ:

$$\lim_{n\to-\infty} f^{(n-1)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f^{(n-1)}(x) = 0,$$

سمحت لنا مبرهنة رول المعمّمة المطبّقة على المشتقّ $f^{(n-1)}$ في المجالات:

$$]-\infty, \alpha_1] \;\; [\alpha_1, \alpha_2], \ldots, \; [\alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}], [\alpha_{n-1}, +\infty[,$$

بالجزم بأنّ المشتقّ $f^{(n)}$ ينعدم في كلّ مجال من هذه المجالات، أي n مرّة. نستخلص أنّ هذه الأصفار المتمايزة جذور لكثير الحدود $P_n(x)$.

4) العلاقة مساواة واضحة من أجل $x=0$. أمّا إذا $x>0$ عمدنا إلى تطبيق دستور التزايدات المنتهية على g في المجال $[0,x]$. نكتب توّا:

$$\exists c \in]0,1[: g(x) - g(0) = xg'(c),$$

أي:

$$\exists c \in]0\,,1[: Log(1+x^2) + Arctgx = x\left(\frac{2c+1}{1+c^2}\right).$$

نلاحظ أنّ:

$$c \in]0,x[\;\Rightarrow \begin{cases} 1 < 2c+1 < 2x+1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < 1 \end{cases}$$

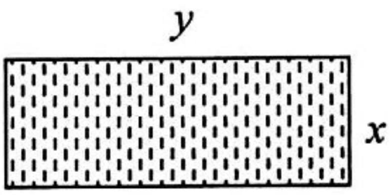
$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{2c+1}{1+c^2} < 2x+1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < x\frac{2c+1}{1+c^2} < 2x^2+x.$$

نخلص في الأخير إلى أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; \frac{x}{1+x^2} \le g(x) \le 2x^2 + x.$$

30. لدينا:



$$x + y = \frac{1}{2}\ell$$

وعليه، $y = \frac{1}{2}\ell - x$. مساحة المستطيل هي:

$$S(x) = \frac{1}{2}\ell x - x^2.$$

الدالّة المولودة S مستمرّة وقابلة للاشتقاق وتتمتّع بالعبارة :

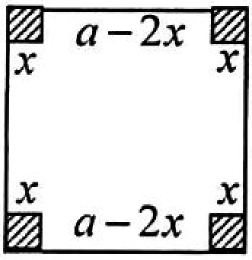
$$S'(x) = \frac{1}{2}\ell - 2x,$$

مشتقّا لها. النقطة $x_0 = \frac{1}{4}\ell$ مستقرّة (إذ تعدم S') إزاء S ويأخذ لديها هذا الأخير قيمته العظمى (إذ المشتقّ S'' سالب). نستخلص من هذا الحساب أنّ أبعاد الشكل المطلوب هما:

$$x_0 = \frac{1}{4}\ell = y_0$$

إنّه المربّع ذو الضلع $\frac{1}{4}\ell$.

31. لنرمز لحجم العلبة بـــ V. لدينا على الفور:



$$V(x) = x(a-2x)(a-2x)$$
$$= x(a-2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3.$$

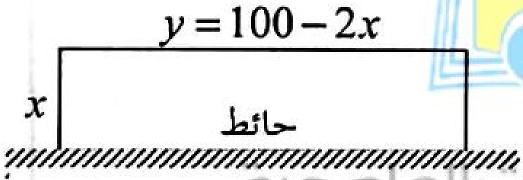
وعليه:

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2.$$

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{27}a^3$	$\searrow$	0

يبرز من هذه الدراسة أنّ V يكون أعظميًا عندما يكون $x = \frac{a}{6}$.

32. لدينا:



$$2x + y = 100.$$

مساحة الحديقة هي:

$$S(x) = x(100-2x) = 100x - 2x^2.$$

هذه الدالّة تأخذ قيمتها العظمى عند $x_0 = 25$. وعليه $y_0 = 50$.

(المساحة المعنية هي: $x_0 y_0 = 25 \times 50 = 1250$م^2)

33. 1) لدينا كما جاء في الإرشاد:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

لنضع:

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x};$$
$$x \mapsto h(x) = \frac{1}{1-x}.$$

الدالّتان g و h من صنف $\mathscr{C}^{\infty}$ على الميدان $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ بمقتضى مبرهنات العمليّات الجبريّة في الاستمرار والاشتقاق. من جهة أخرى، لدينا:

$$g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2};$$
$$g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3};$$
$$g(x)''' = \frac{-2.3}{(1+x)^4} = (-1)^3 \frac{3!}{(1+x)^4}.$$

لنبرهن بالتراجع أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

العلاقة صحيحة من أجل $n=0$. إذا افترضنا صحّتها إلى غاية رتبة ما جاءنا من أجل الرتبة الموالية:

$$g^{(n+1)}(x) = g^{(n)'}(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' = (-1)^n n! \frac{-1(n+1)}{(1+x)^{n+2}}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}.$$

ومنه المطلوب.

وبالطريقة ذاتها نحصل على:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; h^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

هكذا، نجد في الخلاصة:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(g^{(n)}(x)+h^{(n)}(x)\right)$$
$$=\frac{n!}{2}\left(\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right).$$

3) الدالّة f من صنف $\mathscr{C}^\infty$ على المجال $]-1,1[$. وعليه، يمكن، من أجل كلّ عنصر غير معدوم x من $]-1,1[$، أن نكتب الدستور:

$$\exists c\in\left]-1,1\right[,\ f(x)=f(0)+f'(0)+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\dots$$
$$\dots+f^{(2n+2)}(c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

ولما كان $f^{(2k)}(0)=(2k)!$ و $f^{(2k+1)}(0)=0$ جاءنا:

$$f(x)=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+c)^{2n+2}}+\frac{1}{(1-c)^{2n+2}}\right)x^{2n+2}.$$

4) نلاحظ أنّ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+c)^{2n+2}}+\frac{1}{(1-c)^{2n+2}}\right)x^{2n+2}>0,\ \forall c,x\in\left]-1,1\right[,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

وعليه:

$$\frac{1}{1-x^2}\ge 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n},\ \forall x\in\left]-1,1\right[,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

34. نلاحظ أنّ $f'(x)=3x^2e^{x^3}$. وعليه، فإنّ الصفر يعدم المشتقّ، وبالتالي فهو نقطة حرجة. وعلاوة على ذلك، لدينا:

$$f''(x)=3(2xe^{x^3}+3x^4e^{x^3})=(6x+9x^4)e^{x^3};$$
$$f'''(x)=\left(3x^2(6x+9x^4)+6+36x^3\right)e^{x^3}=\left(6+54x^3+27x^6\right)e^{x^3}.$$

وعليه:

$$f''(0)=0;\quad f'''(0)=6\neq 0.$$

نستخلص بناء على المبرهنة (24.3)، أنّ الصفر ليس نقطة حدّية.

35. 1) الميدان المطلوب هو:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[.$$

2) نلاحظ أنّ الدالّة $x\mapsto\dfrac{x-1}{x+1}$ مستمرّة وقابلة للاشتقاق على D_f. ولما كانت بقية الدوال التي تركّب f مستمرّة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تبيّن أنّ f مستمرّة وقابلة للاشتقاق على D_f.

3) يفيد فحوى السؤال بأنّ المعادلة $f(x)=0$ تتمتّع بحلّ وحيد في المجال المذكور. نلاحظ في هذا الصدد أنّ f مستمرّة على $[0,1]$ وتحقّق:

$$f(0)f(1)=-\frac{\pi}{4}.1=-\frac{\pi}{4}<0.$$

يوجد بمقتضى مبرهنة القيم المتوسّطة عنصر c من $]0,1[$ يعدم f.

بخصوص وحدانية نلجأ إلى الاستدلال بالخلف. فلو انعدمت عند نقطة أخرى d من $]0,1[$ لاكتملت فيها شروط مبرهنة رول. وعليه، يوجد على ضوء هذه المبرهنة عنصر α من $]0,1[$ بحيث $f'(\alpha)=0$؛ غير أنّ هذا مستبعد ذلك لأنّ:

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$$

$$=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0,\ \forall x\in D_f.$$

4) لدينا:

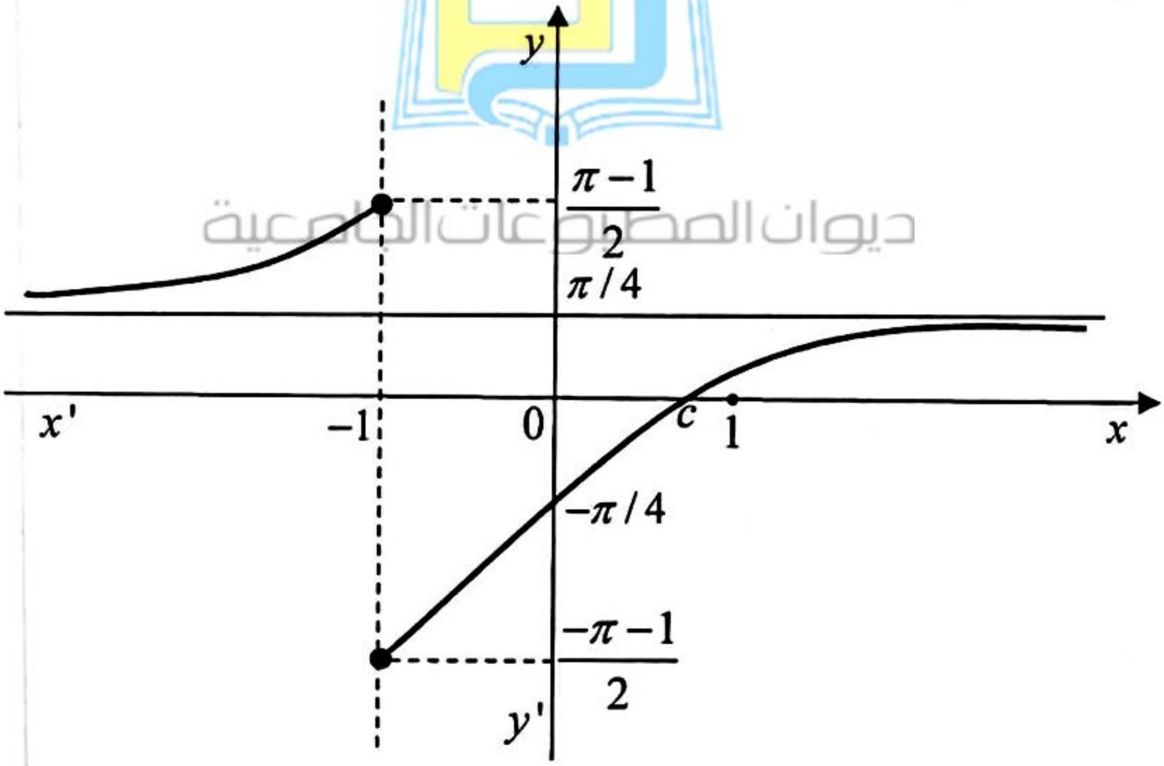
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{\pi}{4};\qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2};\qquad \lim_{x\to-1^-} f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}.$$

يقطع Γ_f محور الفواصل $x'ox$ في $(c,0)$ ويقطع محور التراتيب $y'oy$ في $\left(0,-\frac{\pi}{4}\right)$.

جدول التغيّرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi-1}{2}$ ‖ $-\frac{\pi+1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

رسم المنحنى Γ_f



5) الدالّة f مستمرّة ومتزايدة تماما من D_f نحو $f(D_f)$. نستنتج أنّها تقبل دالّة عكسيّة f^{-1}، مستمرّة ومتزايدة تماما من $f(D_f)$ نحو D_f.

6) مجموعة بدء f^{-1} هي:

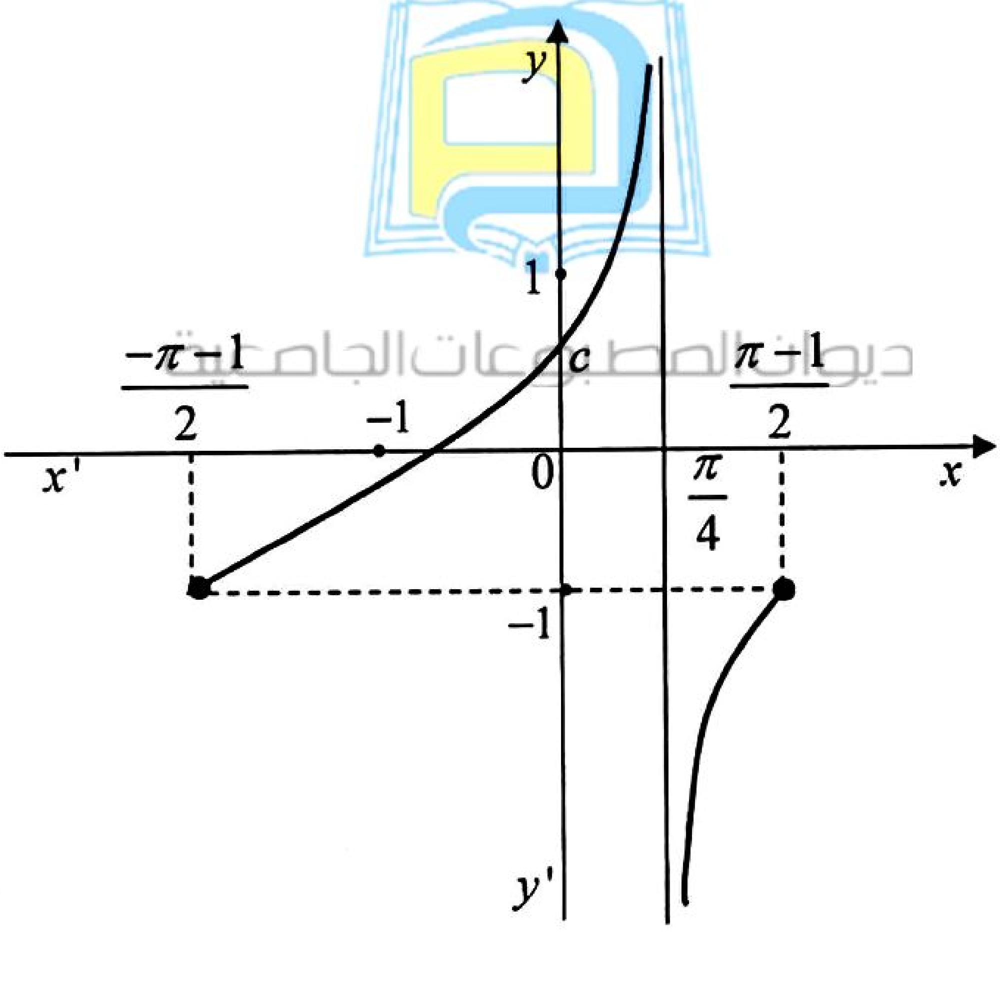
$$f(D_f) = f\left(\left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,+\infty\right[\right) = \left]-\frac{\pi+1}{2},\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi-1}{2}\right[.$$

ومجموعة وصولها هي $D_f = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,+\infty\right[$.

7) لدينا $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ وعليه:

$$f^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f^{-1}\left(f(0)\right) = 0.$$

8) رسم المنحنى $\Gamma_{f^{-1}}$



36. 1) الدالّة المقترحة معرّفة ومستمرّة على $D_f = \mathbb{R}$.

2) لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = 1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3-3x+2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3-3x+2} - \sqrt[3]{x^3}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+2}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}\right)^2 + x\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}\right) + x^2} = 0$$

3) نستخلص أنّ منحنى f البيانيّ يقبل المنصّف الأوّل $y = x$ خطّ مقاربا له في جوار $\mp\infty$. يمكن أنّ نستدلّ بالحساب الأخير على أنّ f تقبل نقطة صامدة فاصلتها $\frac{2}{3}$.

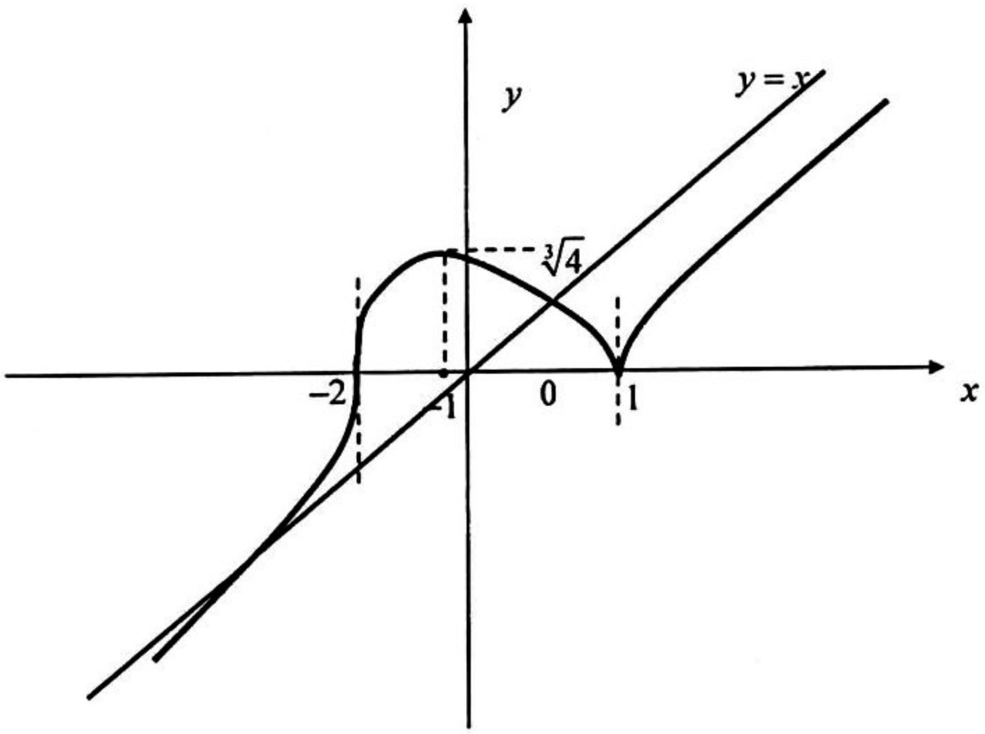
4) حساب المشتقّ:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}.$$

جدول التغيّرات

x	$-\infty$		-2		-1		0		$2/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$		$-$			$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	$2/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) رسم منحنى f البيانيّ



37. 1) الدالّة المقترحة معرّفة ومستمرّة على $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ وتحقّق:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e.$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) - ex = \lim_{x\to \pm\infty} (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} - ex = \lim_{x\to \pm\infty} \left(e^{\frac{x}{x-1}} - e\right)x - e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\left(e^{\frac{1}{1-u}} - e\right)}{u} - e = \lim_{u\to 0} \frac{1}{(1-u)^2} e^{\frac{1}{1-u}} - e = 0.$$

نستخلص أنّ منحنى f البيانيّ يقبل المستقيم $y = ex$ خطّا مقاربا له في جوار $\mp\infty$.

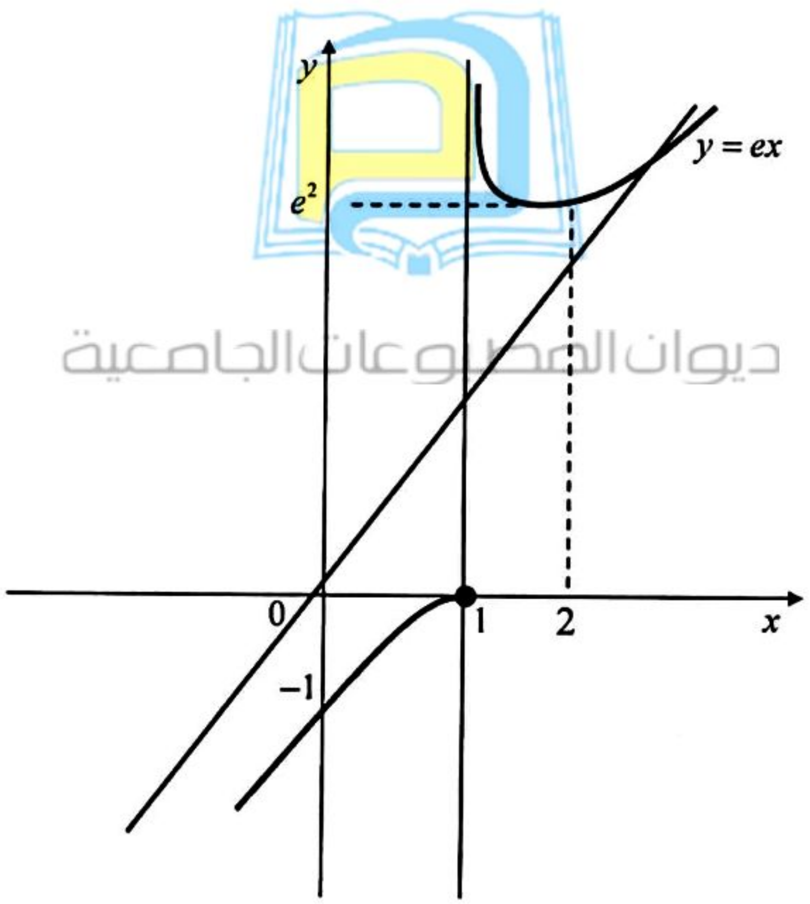
حساب المشتقّ

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

جدول التغيّرات

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$0 \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

2) رسم منحنى f البيانيّ



38. الدالّة f معرّفة ومستمرّة على $D_f = \mathbb{R}$. إنّها فرديّة. وعليه، نكتفي بدراستها على المجال $[0,+\infty[$. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{chx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{shx} = 0.$$

نستخلص أنّ منحنى f البيانيّ يقبل محور التراتيب $y=0$ خطّا مقاربا له في جوار $\mp\infty$.

حساب المشتقّ:

$$f'(x) = \frac{chx - x\,shx}{ch^2x}.$$

نلاحظ أنّ إشارة المشتقّ من إشارة بسط الكسر الذي يعرّفه. إذا وضعنا:

$$g(x) = chx - x\,shx;$$

جاءنا:

$$g'(x) = -x\,chx.$$

وعليه:

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) \le 0;$$

إذن:

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g(x) \le g(0) = 1.$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$g(1)g(2) = \frac{e}{2}\left(\frac{3}{e^4} - 1\right) < 0.$$

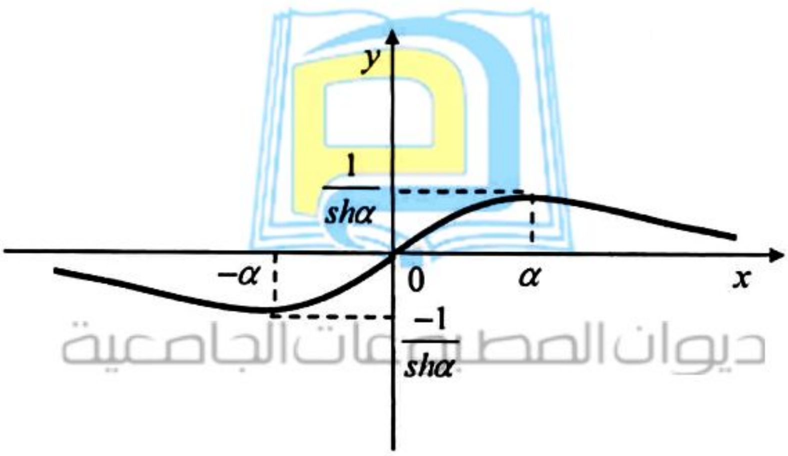
نكتب بمقتضى مبرهنة القيم المتوسّطة:

$$\exists \alpha \in]1,2[\quad g(\alpha) = 0.$$

جدول التغيّرات:

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{sh\alpha}$	$\searrow$	0

رسم منحنى f البيانيّ:



39. الدالّة f معرّفة ومستمرّة على $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ كتركيب لدوال تتّصف بذلك. لدينا:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2};\ \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2};$$

التعويض المباشر في حساب النهايتين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ يفضي إلى حالة

عدم التعيين من النمط $0.\infty$. لرفعها نستعين بتبديل في المتغيّر ثمّ قاعدة لوبيطال.

هكذا نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 Arctg\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{Arctg\left(\frac{t}{t+1}\right)}{t^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{2t}\frac{1}{(1+t)^2+t^2}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 Arctg\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{Arctg\left(\frac{t}{t+1}\right)}{t^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2t}\frac{1}{(1+t)^2+t^2}=+\infty.$$

وبالطريقة ذاتها نحصل على:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 Arctg\left(\frac{1}{x+1}\right)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{Arctg\left(\frac{t}{t+1}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{(1+t)^2+t^2}=1.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} x^2 Arctg\left(\frac{1}{x+1}\right)-x&=\lim_{t\to0}\frac{Arctg\left(\frac{t}{t+1}\right)}{t^2}-\frac{1}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{Arctg\left(\frac{t}{t+1}\right)-t}{t^2}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{(1+t)^2+t^2}-1}{2t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-1-t}{(1+t)^2+t^2}=-1.\end{aligned}$$

نستخلص أنّ منحنى f البيانيّ يقبل المستقيم $y=x-1$ خطّا مقاربا مائلا له في جوار $\mp\infty$.

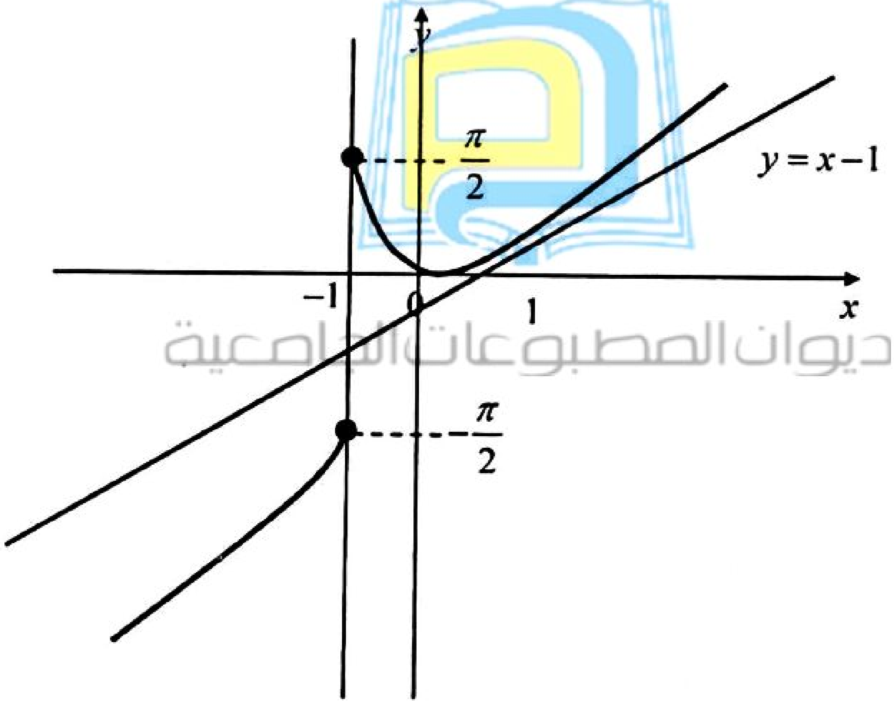
حساب المشتقّ:

$$f'(x) = 2x\, Arctg\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2}{(x+1)^2+1}.$$

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}\ \Vert\ \frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

رسم منحنى f البيانيّ:



40. الدالّة f معرّفة على $\mathbb{R}$. وهي واضحة الاستمرار على $\mathbb{R}^*$؛ ذلك لأنّها مركّبة من دوال أوّلية تتّصف بذلك. لننظر حالة الصفر. لدينا:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 Log(1+x) - x^2 Logx\right) = 0.$$

إذن، الدالّة f مستمرّة عند الصفر أيضا.

من جهة أخرى، نرى وللعلّة ذاتها أنّ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$. أمّا عند الصفر فلدينا:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(xLog(1+x) - xLogx\right) = 0.$$

نرى هكذا أنّ f قابل للاشتقاق عند الصفر أيضا.

لنفحص الفروع اللانهائيّة. لدينا في جوار عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y} = 1.$$

نستنتج أنّ المستقيم $y = 1 + x$ خطّ مقارب مائل لمنحنى f في جوار $+\infty$ ويقع فوق المنحنى إذ العبارة $xe^{\frac{1}{x}} - x - 1 = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1$ سالبة في هذا الجوار.

أمّا في جوار $+\infty$ فلدينا بالمثل:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 Log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{y}\frac{Log(1+y)}{y}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 Log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty} xLog\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0^+}\frac{Log(1+y)}{y}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 Log\left(1+\frac{1}{x}\right)-x=\lim_{x\to+\infty} x^2 Log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{Log(1+y)-y}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

نستنتج أنّ المستقيم $y=x-\frac{1}{2}$ خطّ مقارب مائل لمنحنى f في جوار $+\infty$ ويقع تحت المنحنى، إذ العبارة:

$$xe^{\frac{1}{x}}-x+\frac{1}{2}=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+\frac{1}{2},$$

موجبة في هذا الجوار.

حساب المشتقّ:

من أجل $x<0$:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)>0.$$

من أجل $x>0$:

$$f'(x)=x\left(2Log\left(\frac{1+x}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right).$$

لدراسة إشارة هذه العبارة نضع:

$$g(x)=2Log\left(\frac{1+x}{x}\right)-\frac{1}{1+x}.$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ و:

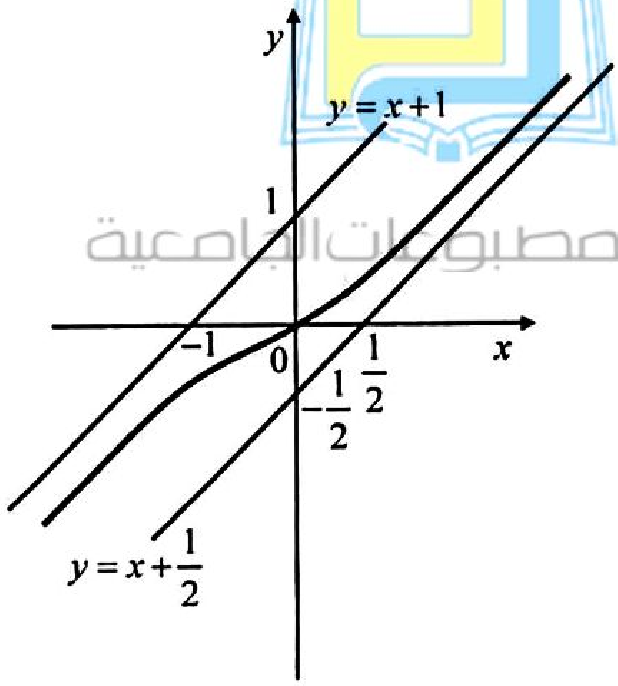
$$g'(x)=-\frac{2+x}{x(1+x)^2}.$$

هذا المشتقّ سالب على $\mathbb{R}_+^*$. نستخلص أنّ g متناقصة من $+\infty$ إلى الصفر، وهي بذلك موجبة على الدوام. يترتّب عن هذا أنّ المشتقّ f' موجب على المجال $]0,+\infty[$.

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

رسم المنحنى البيانيّ:



41. لنبدأ بمعالجة المتباينتين الأوليين:

$$x-\frac{x^3}{3}\le Arctg\,x\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5},\ (\forall x\in\mathbb{R}_+);$$

من الواضح أنّ العلاقتين تضحيان مساواتين عند الصفر:

$$0=Arctg\,0=0.$$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$. نضع:

$$f(x)=Arctg\,x-x+\frac{x^3}{3},$$

$$g(x)=Arctg\,x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}.$$

هاتان الدالّتان تحقّقان شرطي مبرهنة ماك لوران في المجال $[0,x]$. يسمح تطبيقها بأن نكتب:

$$\exists c_1\in\,]0,x[\,/\,f(x)=f(0)+xf'(c_1),$$

$$\exists c_2\in\,]0,x[\,/\,g(x)=g(0)+xg'(c_2).$$

وعليه:

$$Arctg\,x-x+\frac{x^3}{3}=x\left(\frac{1}{1+c_1^{\,2}}-1+c_1^{\,2}\right)=x\left(\frac{c_1^{\,4}}{1+c_1^{\,2}}\right)>0,$$

$$Arctg\,x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}=x\left(\frac{1}{1+c_2^{\,2}}-1+c_1^{\,2}-c_2^{\,4}\right)=x\left(\frac{-c_2^{\,6}}{1+c_2^{\,2}}\right)<0.$$

وهو ما ينهي الردّ.

نعالج المتباينتين المتبقيتين بالمثل. إنّهما محقّقتان بداهة عند الصفر. ومن أجل كلّ x من $\mathbb{R}_+^*$. نضع:

$$h(x)=Arc\cot g\,x-\frac{\pi}{2}+x-\frac{x^3}{3},$$

$$k(x)=Arc\cot g\,x-\frac{\pi}{2}+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}.$$

وبفضل نشر ماك لوران من الرتبة الأولى نحصل على:

$$\exists \beta_1 \in]0,x[\,/\, Arc\cot g\, x - \frac{\pi}{2} + x - \frac{x^3}{3} = x\left(-\frac{1}{1+\beta_1^{\,2}} + 1_1 - \beta_1^{\,2}\right)$$

$$= x\left(\frac{-\beta_1^{\,4}}{1+\beta_1^{\,2}}\right) < 0,$$

$$\exists \beta_2 \in]0,x[\,/\, Arc\cot g\, x - \frac{\pi}{2} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} =$$

$$= x\left(-\frac{1}{1+\beta_2^{\,2}} + 1 - \beta_2^{\,2} + \beta_2^{\,4}\right) = x\left(\frac{\beta_2^{\,6}}{1+\beta_2^{\,2}}\right) > 0.$$

نستخلص في الأخير أنّ المتباينات المستعرضة قائمة على $\mathbb{R}_+$.

42. 1) نلاحظ أنّ الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^\infty$ على $\mathbb{R}$ وأنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad f^{(n)}(x) = e^x.$$

بمقتضى دستور ماك لوران المطبّق على f في المجال $[0,x]$، حيث x من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد عدد θ من $]0,1[$ بحيث:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x\theta}.$$

وبما أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x\theta} \geq 0,$$

إذن:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\quad e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) بأخذ $n=2$ و $x=1$ في السؤال الأوّل يأتي:

$$e=\frac{5}{2}+\frac{e^{\theta}}{6}.$$

وبما أنّ θ من $]0,1[$ جاءنا على الفور:

$$\begin{cases}\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{6}<e,\\[2mm] e<\dfrac{5}{2}+\dfrac{e}{6},\end{cases}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases}\dfrac{16}{6}<e,\\[2mm] \dfrac{5}{6}e<\dfrac{5}{2},\end{cases}$$

أي:

$$\frac{8}{3}<e<3.$$

3) لدينا من السؤال الأوّل:

$$e^{x}-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}\right)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x\theta}.$$

ومن أجل $x=0$ نكتب:

$$e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}.$$

وبما أنّ:

$$1<e^{\theta}<e<3,$$

إذن:

$$\frac{1}{(n+1)!}<\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

الطرفان الحاصران في هذه العلاقة يؤولان إلى الصفر. وعليه، تسمح مبرهنة الحصر بالظفر على الفور بالنهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

4) القيمة المطلوبة مرتبطة بأكبر قيمة للدليل n التي من أجلها تتحقّق المتباينة:

$$\frac{3}{(n+1)!} \le 0,005;$$

وعليه:

$$600 \le (n+1)!$$

ومنه $n = 5$. هكذا، تأتي النتيجة:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60}.$$

43. لدينا:

$$4^x = 1 + (Log4)x + x\varepsilon_1(x); \ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0,$$
$$5^x = 1 + (Log5)x + x\varepsilon_2(x); \ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

بوضع $m = \frac{1}{n}$ يأتي:

$$\ell_1 = \lim_{m\to 0}\left(5.4^m - 4.5^m\right)^{\frac{1}{m}}$$
$$= \lim_{m\to 0}\left[5(1 + (Log4)m + m\varepsilon_1(m) - 4(1 + (Log5)m + m\varepsilon_2(m)\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$= \lim_{m\to 0}\left[1+(5Log4-4Log5)m+m\varepsilon_3(m)\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$= e^{\lim\limits_{m\to 0}\frac{1}{m}Log[1+(5Log4-4Log5)m+m\varepsilon_3(m)]} = e^{\lim\limits_{m\to 0}\frac{1}{m}[(5Log4-4Log5)m+m\varepsilon_4(m)]}$$

$$= e^{\lim\limits_{m\to 0}[(5Log4-4Log5)+\varepsilon_4(m)]} = e^{5Log4-4Log5} = \frac{4^5}{5^4}.$$

وبالمثل، لدينا:

$$Log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_1(x);\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0,$$

$$\sqrt{1+x} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon_2(x);\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0,$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_3(x);\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0.$$

وعليه:

$$\ell_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-x\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)+x^3\varepsilon_4(x)}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+x^3\varepsilon_5(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{11x^3}{24}+x^3\varepsilon_4(x)}{\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_5(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{24}+\varepsilon_4(x)}{\frac{1}{6}+\varepsilon_5(x)} = \frac{11}{4};$$

حيث:

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0$$

بشأن النهايتين ℓ_3 و ℓ_4 نذكّر بأنّ:

$$Log(1+x^2) = x^2-\frac{x^4}{2}+x^4\varepsilon_1(x);\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0,$$

$$Arctgx = x-\frac{x^3}{3}+x^2\varepsilon_2(x);\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0,$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x); \ \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0,$$

وعليه:

$$\ell_3 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_1(x)}{x\left(x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{1 + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_2(x)} = 1.$$

$$\ell_4 = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sin x}Log(1+tg^2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{Log\left((1+x^2+x^2\varepsilon_5(x)\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_4(x)\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x^2\varepsilon_5(x}{x\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_4(x)\right)}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\varepsilon_5(x)}{1-\frac{x}{6}+x\varepsilon_4(x)}\right)} = e.$$

لحساب النهاية ℓ_5 نقوم بالتبديل $t = x - \frac{\pi}{6}$ فيأتي:

$$\left(tg\frac{3x}{2}\right)^{tg3x} = \left(\frac{1-tg\frac{3}{2}t}{1+tg\frac{3}{2}t}\right)^{\frac{1}{tg3t}}.$$

وعليه:

$$\ell_5 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-tg\frac{3}{2}t}{1+tg\frac{3}{2}t}\right)^{\frac{1}{tg3t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{tg3t}Log\left(\frac{1-tg\frac{3}{2}t}{1+tg\frac{3}{2}t}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{3t+t\varepsilon_1(t)}Log\left(\frac{1-\frac{3}{2}t+t\varepsilon_2(t)}{1+\frac{3}{2}t+t\varepsilon_2(t)}\right)} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{3t+t\varepsilon_1(t)}Log(1-3t+t\varepsilon_3(t))}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-3t+t\varepsilon_4(t)}{3t+t\varepsilon_1(t)}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-3+\varepsilon_4(t)}{3+\varepsilon_1(t)}} = \frac{1}{e}.$$

44. 1) لنستحضر في جوار الصفر الدستور:

$$(1+t)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}t+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}t^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}t^3+o(t^3)$$

$$=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2+\frac{5}{81}t^3+o(t^3).$$

إذا لاحظنا أنّ:

$$(x^3+mx^2+2)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{m}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ووضعنا:

$$\frac{m}{x}+\frac{2}{x^3}=t,$$

جاءنا:

$$\left(1+\frac{m}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(\frac{m}{x}+\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{m}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2+$$

$$+\frac{5}{81}\left(\frac{m}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=1+\frac{m}{3x}+\frac{2}{3x^3}-\frac{m^2}{9x^2}+\frac{5m^3}{81x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=1+\frac{m}{3x}-\frac{m^2}{9x^2}+\frac{54+5m^3}{81x^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

وعليه:

$$(x^3+mx^2+2)^{\frac{1}{3}}=x+\frac{m}{3}-\frac{m^2}{9x}+\frac{54+5m^3}{81x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

وبالمثل نجد:

$$(x^3+1)^{\frac{1}{3}} = x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$= x+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

هكذا، يأتي في الأخير:

$$u(x) = \frac{m}{3}-\frac{m^2}{9x}+\frac{27+5m^3}{81x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2) لحساب النهاية المقترحة نكتب:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}(u(x))^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} xLogu(x)};$$

مع:

$$xLogu(x) = xLog\frac{m}{3}\left(1-\frac{m}{3x}+\frac{27+5m^3}{27mx^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= xLog\frac{m}{3}+xLog\left(1-\frac{m}{3x}+\frac{27+5m^3}{27mx^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= xLog\frac{m}{3}+x\left[-\left(\frac{m}{3x}-\frac{27+5m^3}{27mx^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3x}-\frac{27+5m^3}{27mx^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$= xLog\frac{m}{3}+x\left[-\left(\frac{m}{3x}-\frac{27+5m^3}{27mx^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{m^2}{9x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$= xLog\frac{m}{3}-\frac{m}{3}+\frac{54+7m^3}{54mx}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

وعليه:

$$\lim_{x\to\infty} xLogu(x) = \lim_{x\to\infty}\left(xLog\frac{m}{3}-\frac{m}{3}\right).$$

- إذا كان $1<\frac{m}{3}$ أي $m>3$، كانت $\lim_{x\to\infty}\left(xLog\frac{m}{3}-\frac{m}{3}\right)=+\infty$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} xLogu(x)} = +\infty.$$

- إذا كان $1=\frac{m}{3}$ أي $m=3$، كانت $\lim_{x\to+\infty}\left(xLog\frac{m}{3}-\frac{m}{3}\right)=-1$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} xLogu(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

- إذا كان $0<\frac{m}{3}<1$ كانت $\lim_{x\to+\infty}\left(xLog\frac{m}{3}-\frac{m}{3}\right)=-\infty$ وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} xLogu(x)} = 0.$$

45. الدالّة f من الصنف $\mathscr{C}^{\infty}$ في جوار الصفر. للنظر فيها محلّيًا يكفي أن نحسب نشرها الماكلورانيّ. لدينا:

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x);$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x),$$

$$Log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_3(x),$$

$$L\log(ch\,x) = Log\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x),$$

$$ch\,x\,L\log(ch\,x) = \left(1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)\left(\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)\right) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x).$$

وعليه:

$$f(x) = \frac{\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x)}{1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)} = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_6(x).$$

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ النقطة التي فاصلتها 0 هي المبدأ $(0,0)$. نستخلص من النشر أنّ منحنى f البيانيّ يقبل محور الفواصل $y = 0$ مماسا له عند $(0,0)$. ولمّا كان الحدّ $\frac{x^2}{2}$ موجبا على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ المنحنى يقع تحت المماس. نخلص من هذا إلى أنّ النقطة $(0,0)$ حدّية صغرى.

46. لدينا:

$$e^x - e^{-x}Arctgx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) -$$

$$-\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)\left(x + x^2\varepsilon_3(x)\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) - \left(x - x^2 + x^2\varepsilon_4(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x),$$

$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_6(x).$$

وعليه:

$$x\frac{e^x - e^{-x}Arctgx}{Log(1+x)} = \frac{1 + \frac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_6(x)} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{17x^2}{12} + x^2\varepsilon_7(x);$$

وهو ما يمدّنا بالنشر المعمّم عند الصفر:

$$\frac{e^x - e^{-x}Arctgx}{Log(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{7x}{4} + x\varepsilon_7(x).$$

إذن:

$$\frac{e^x - e^{-x}Arctgx}{Log(1+x)} - \frac{a}{x} - b = \frac{1-a}{x} + \frac{1}{2} - b + \frac{7x}{4} + x\varepsilon_7(x).$$

يكفي بغية انعدام النهاية المعتبرة أن يكون $a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$.

47. 1) إذا قمت بالقسمة وفق القوى المتزايدة لكثير الحدود $1+ax^2$ على كثير الحدود $1+bx^2$ وكتابة النشر المحدود من الرتبة 6 عند جوار الصفر للدالة $\cos x$، وجدت:

$$f(x)=\left(-\frac{1}{2}-a+b\right)x^2+\left(\frac{1}{4!}+ab-b^2\right)x^4+$$
$$+\left(-\frac{1}{6!}-ab^2+b^3\right)x^6+\circ(x^6).$$

لكي يكون اللامتناهي في الصغر $f(x)$ من أعلى رتبة ممكنة لمّا يؤول x إلى الصفر يكون لزاما عليك أن تختار الوسيطين a و b بالكيفية التي تقصي الحدّين الأوليين:

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}-a+b=0,\\[2mm] \dfrac{1}{4!}+ab-b^2=0,\end{cases}$$

وهو ما يعطي:

$$a=-\frac{5}{12};\ b=\frac{1}{12}.$$

2) بتعويض هاتين القيمتين في النشر المحدود أعلاه نحصل على:

$$f(x)=\frac{1}{480}x^6+\circ(x^6).$$

وعليه:

$$f(x)=\frac{1}{480}x^6\left(1+480\frac{\circ(x^6)}{x^6}\right),$$

و:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+480\,\frac{\circ(x^6)}{x^6}\right)=1 .$$

إذن، f تكافئ $\frac{1}{480}x^6$ $x\mapsto$ لما x لها في جوار الصفر. نستخلص أنّ f تتمتّع العبارة $\frac{1}{480}x^6$ جزءا رئيسيّا لها في جوار الصفر.

48. 1) ميدان تعريف f هو:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0;\,1-x\neq 0\}=]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{xL\text{og}\,x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{xL\text{og}\,x}{1-x}}=e^0=1.$$

نستخلص أنّ الدالّة f تقبل تمديدا بالاستمرار على يمين الصفر. يمكن أن نضع فيما يلي $f(0)=1$.

وبالمثل، لدينا:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{xL\text{og}\,x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{xL\text{og}\,x}{1-x}}=e^{-\infty}=0.$$

نستخلص أنّ المنحنى Γ يقبل محور الفواصل خطّا مقاربا أفقيّا له في جوار $+\infty$.

3) إذا ما وضعنا $t=x-1$ رجعنا إلى جوار الصفر وفق المتغيّر t. وعليه:

$$f(x)=f(t+1)=e^{\frac{(t+1)\text{Log}(t+1)}{-t}}=e^{\frac{(t+1)\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon_1(t)\right)}{-t}}=e^{-1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+t^2\varepsilon_2(t)}$$

$$=e^{-1}e^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+t^2\varepsilon_2(t)}=e^{-1}\left(1+\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}\right)^2+t^2\varepsilon_3(t)\right)$$

$$=e^{-1}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{7t^2}{24}+t^2\varepsilon_4(t)\right).$$

أي:

$$f(x)=e^{-1}\left(1-\frac{x-1}{2}+\frac{7(x-1)^2}{24}+(x-1)^2\varepsilon_4(x-1)\right).$$

أ. لدينا:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}e^{-1}\left(1-\frac{x-1}{2}+\frac{7(x-1)^2}{24}+(x-1)^2\varepsilon_4(x-1)\right)=e^{-1}.$$

ب. معادلة المماس المطلوبة تستخلص توّا من النشر السابق فنجدها:

$$y=e^{-1}\left(1-\frac{x-1}{2}\right)=-\frac{e^{-1}}{2}x+\frac{3e^{-1}}{2}.$$

ج. لدينا من النشر المحدود $f'(1)=-\frac{e^{-1}}{2}$. وعلاوة على هذا نلاحظ أنّ الحدّ $\frac{7(x-1)^2}{24}$ إشارته موجبة. نستنتج أنّ المنحنى فوق مماسه في جوار النقطة التي فاصلتها $x_0=1$.

49. 1) نضع $t=\frac{1}{x}$. وبه يأتي:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}+1}-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t}\frac{t^2+t+1}{1+t}-\frac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2}.$$

ولما كان:

$$\begin{aligned}\frac{1+t+t^2}{1+t}&=(1+t+t^2)\frac{1}{1+t}\\&=(1+t+t^2)(1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+o(t^5))\\&=(1-t+t^2-t^3+t^4-t^5)+(t-t^2+t^3-t^4+t^5)+\\&\qquad+(t^2-t^3+t^4-t^5)+o(t^5)\\&=1+t^2-t^3+t^4-t^5+o(t^5);\end{aligned}$$

$$f(x)=g(t)=\frac{1}{t}.\frac{1+t+t^2}{1+t}-\left|\frac{1}{t}\right|\sqrt{1+t^2}$$

$$\frac{1}{t}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{1}{t}+t-t^2+t^3-t^4+o(t^4);$$

$$\left|\frac{1}{t}\right|\sqrt{1+t^2}=\left|\frac{1}{t}\right|\left(1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4o(t^4)\right);$$

فإنّ:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}t-t^2+\frac{9}{8}t^3-t^4+o(t^4); & t\to 0^+,\\ \frac{2}{t}+\frac{3}{2}t-t^2+\frac{7}{8}t^3+o(t^4); & t\to 0^-.\end{cases}$$

بالعودة إلى المتغيّر x نجد :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{9}{8x^3}-\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right); & x\to+\infty,\\ 2x+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right); & x\to-\infty.\end{cases}$$

نستنتج أنّ $y=0$ هي معادلة الخطّ المقارب في جوار $+\infty$. ولما كان الحدّ $\frac{1}{2x}$ ذا إشارة موجبة تبيّن أنّ المنحنى فوق خطّه المقارب.

أمّا في جوار $-\infty$، فإنّ منحنى f يقبل خطّا مقاربا معادلته $y=2x$.

وتبعا لإشارة الحدّ $\frac{3}{2x}$ السالبة فإنّ هذا الخطّ المقارب يقع فوق منحنى f.

2) أ. في جوار النقطة $x_0=-1$ الدالة معطاة بالصيغة:

$$g(x)=\frac{x}{x-1}.$$

إذا وضعنا $u=x+1$ انتقلنا من جوار -1 وفق المتغيّر الأصليّ x إلى جوار الصفر وفق المتغيّر الجديد u. وعليه، نكتب:

$$\begin{aligned}
g(x)=g(u-1)&=\frac{u-1}{u-2}=-\frac{1}{2}(u-1)\left(1-\frac{u}{2}\right)^{-1}\\
&=-\frac{1}{2}(u-1)\left[1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}+u^2\varepsilon_1(u)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left[-1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}+u^2\varepsilon_2(u)\right]=\frac{1}{2}-\frac{u}{4}-\frac{u^2}{8}+u^2\varepsilon_3(u).
\end{aligned}$$

وعليه:

$$g(x)=\frac{1}{2}-\frac{x+1}{4}-\frac{(x+1)^2}{8}+(x+1)^2\varepsilon_3(x+1).$$

هكذا، نجد أنّ:

$$y=\frac{1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{x}{4},$$

هي معادلة المماس المطلوبة.

ب. وضعية المماس مرتبطة بإشارة الحدّ $-\frac{(x+1)^2}{8}$. ولما كانت هذه الأخيرة سالبة استخلصنا أنّ المنحنى تحت مماسه.

ج. في جوار ∞ الدالّة معطاة بالصيغة:

$$g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}\sqrt{x(x+2)}.$$

إذا وضعنا $u = \frac{1}{x}$ انتقلنا من جوار ∞ وفق المتغيّر الأصليّ x إلى جوار الصفر وفق المتغيّر الجديد u. وعليه نكتب:

$$g(x) = g\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{|u|}e^{\frac{1}{1-u}}\sqrt{1+2u}.$$

وإذا تذكّرنا أنّ:

$$e^{\frac{1}{1-u}} = e^{(1-u)^{-1}} = e^{1+u+u^2+u^3+u^3\varepsilon_1(u)} = ee^{u+u^2+u^3+u^3\varepsilon_1(u)}$$
$$= e\left[1+u+\frac{3}{2}u^2+\frac{13}{6}u^3+u^3\varepsilon_2(u)\right];$$

$$\sqrt{1+2u} = (1+2u)^{\frac{1}{2}} = 1+u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u^3+u^3\varepsilon_3(u),$$

جاءنا:

$$g(u) = \frac{e}{|u|}\left[1+2u+2u^2+\frac{11}{3}u^3+u^3\varepsilon_4(u)\right];$$

وعليه:

$$g(x) = e|x|\left[1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{11}{3x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon_4\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

نميّز حالتين.

- في جوار $+\infty$ لدينا:

$$g(x) = ex+2e+\frac{2e}{x}+\frac{11e}{3x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_5\left(\frac{1}{x}\right).$$

نستنتج أنّ $y=ex+2e$ هي معادلة الخطّ المقارب في جوار $+\infty$. ولما كان الحدّ $\frac{2e}{x}$ ذا إشارة موجبة تبيّن أنّ المنحنى فوق خطّه المقارب.

- وبالمثل، لدينا في جوار $-\infty$:

$$g(x)=-ex-2e-\frac{2e}{x}-\frac{11e}{3x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right).$$

نستنتج أنّ $y=-ex-2e$ هي معادلة الخطّ المقارب في جوار $-\infty$. ولما كان الحدّ $-\frac{2e}{x}$ ذا إشارة موجبة تبيّن أنّ المنحنى فوق خطّه المقارب هنا أيضا.

50. 1) أ. نعلم أنّ:

$$\sin ex=ex-\frac{1}{6}e^3x^3+o(x^3);$$

$$Log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3).$$

وعليه:

$$\begin{aligned}
f(x)&=Log\left(e+ex-\frac{1}{6}e^3x^3+o(x^3)\right)\\
&=1+Log\left(1+x-\frac{1}{6}e^2x^3+o(x^3)\right)\\
&=1+\left(x-\frac{1}{6}e^2x^3\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}e^2x^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}e^2x^3\right)^3+o(x^3)\\
&=1+x-\frac{1}{6}e^2x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\\
&=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

ب. بوضع $u = x - \frac{\pi}{2e}$ نكون بجوار الصفر وفق المتغيّر الجديد u ممّا يمكّن من الحصول على:

$$f(x) = f\left(u + \frac{\pi}{2e}\right) = Log\left(e + \sin\left(eu + \frac{\pi}{2}\right)\right) = Log(e + \cos eu)$$

$$= Log\left(e + 1 - \frac{e^2}{2}u^2 + o(u^2)\right)$$

$$= Log\left((e+1)\left(1 - \frac{e^2}{2(e+1)}u^2 + o(u^2)\right)\right)$$

$$= Log(e+1) + Log\left(1 - \frac{e^2}{2(e+1)}u^2 + o(u^2)\right)$$

$$= Log(e+1) - \frac{e^2}{2(e+1)}u^2 + o(u^2).$$

هكذا يكون النشر المطلوب:

$$f(x) = Log(e+1) - \frac{e^2}{2(e+1)}\left(x - \frac{\pi}{2e}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2e}\right)^2\right).$$

ج. نستخلص من السؤال (أ) أنّ معادلة المماس هي $y = 1 + x$.

د. يتبيّن من النشر الأخير (الوارد في الفرع (ب)) أنّ المشتقّ $f'\left(\frac{\pi}{2e}\right)$ معدوم. وعلاوة على هذا لدينا في جوار $\frac{\pi}{2e}$:

$$f(x) - f\left(\frac{\pi}{2e}\right) = -\frac{e^2}{2(e+1)}\left(x - \frac{\pi}{2e}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2e}\right)^2\right) \leq 0.$$

نستخلص أنّ النقطة $\left(\frac{\pi}{2e}, Log(e+1)\right)$ ذروة محلّيّة.

2) أ. نعلم أنّ:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{48}x^3+o(x^3);$$

$$Arctgx = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

وعليه:

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+o(x^3) = 1+x^2+o(x^3).$$

ب. نضع:

$$h(x) = Arctgx + Arctg\frac{1}{x}.$$

الطريقة الأولى: استعمال المشتقّ.

نلاحظ أنّ الدالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. وفضلا عن ذلك لدينا:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

نستخلص أنّ h ثابت على $\mathbb{R}_+^*$. وعليه:

$$h(x) = h(1) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

الطريقة الثانية: استعمال التحويل.

نضع:

$$\begin{cases} x = tg\theta, \\ x \in \mathbb{R}_+^*, \\ \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

وعليه:

$$h(tg\theta)=\theta+Arctg\frac{1}{tg\theta}=\theta+Arctg(ctg\theta)$$
$$=\theta+Arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}.$$

ج. نضع $x=\frac{1}{t}$ لنردّ إلى جوار الصفر وفق t. يأتي عندئذ:

$$g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2t}Arctg\frac{1}{t}=\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2t}\left(\frac{\pi}{2}-Arctg\,t\right)$$
$$=\frac{4+\pi}{4}\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{t^2}{6}+o\left(t^2\right).$$

بالرجوع إلى المتغيّر الأصليّ x نجد:

$$g(x)=-\frac{1}{2}+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

نستنتج أنّ f يقبل خطّا مقاربا في جوار $+\infty$ معادلته:

$$y=-\frac{1}{2}+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x.$$

د. نرى على ضوء النشر الموضوع أنّ الخطّ المقارب يقع تحت منحنى f البيانيّ لأنّ إشارة الحدّ $\frac{1}{2x}$ موجبة (في جوار $+\infty$).

51. 1) الدالّة f معرّفة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ويتحقّق بموجبها:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty;$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=0;\ \lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty.$$

$$f'(x)=\frac{1+x^2}{(1-x)^2}e^{\frac{2x}{1-x}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

يمكن الآن أن نضع:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	0 $\nearrow$	$+\infty$

2) **الطريقة الأولى**

نأتي نشر المحدود من الرتبة الثانية فنجد دونما عناء:

$$f(x)=x+x^2+o(x^2).$$

نستخلص أنّ معادلة المماس المطلوبة هي $y=x$. ولما كان الحدّ x^2 موجبا في جوار الصفر أيقنّا أنّ المنحنى Γ_f فوق مماسه.

الطريقة الثانية

نلجأ إلى التعريف المباشر فيعطينا على الفور:

$$y=(x-0)f'(0)+f(0)=x.$$

$$\lim_{x\to0}\left(f(x)-y\right)=\lim_{x\to0}x\left(e^{\frac{2x}{1-x}}-1\right)=\lim_{x\to0}x\left(e^{-2}e^{\frac{2}{1-x}}-1\right)=0^{+}.$$

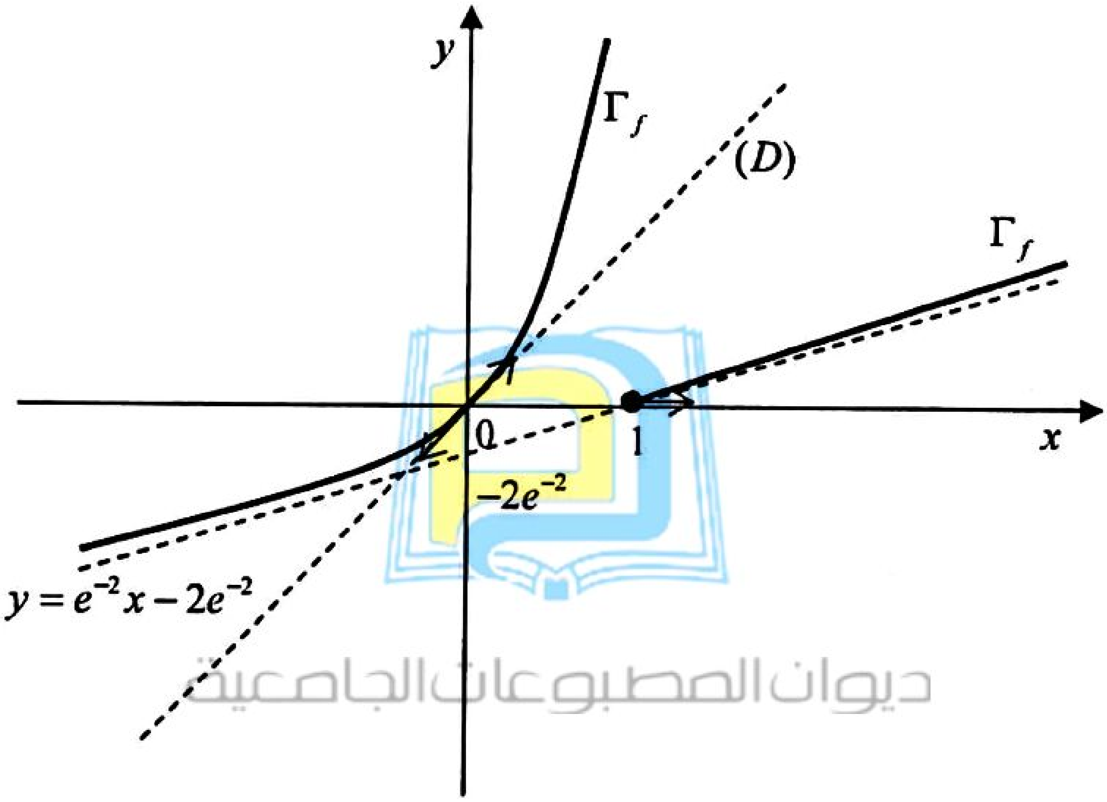
ومنه النتيجة المعلنة.

3) النشر المعمّم من الرتبة الثانية في جوار ∞ للدالّة f معطى بـــ:

$$f(x)=e^{-2}\left(x-2+\frac{2}{3x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

نستخلص أنّ المنحنى Γ_f يقبل المستقيم $y = e^{-2}x - 2e^{-2}$ خطّا مقاربا مائلا له في جوار ∞. ونظرا لكون إشارة الحدّ $\frac{2e^{-2}}{3x^2}$ موجبة في جوار ∞ تبيّن أنّ المنحنى Γ_f فوق خطّه المقارب المائل.

4) **الرسم.**



3

تمارين للبحث

1. احسب مستدلاً بالتعريف، مشتقّات الدوال الموالية عند نقطة من ميادين تعريفها:

$$1)\ f(x)=x^3;\quad 2)\ f(x)=\frac{1}{x};\quad 3)\ f(x)=\frac{1}{x^2};\quad 4)\ f(x)=\frac{x}{1+x^2};$$

$$5)\ f(x)=x^2-5x+3;\quad 6)\ f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x=0,\\ x^2\left[\dfrac{1}{x}\right] & ;\ x\neq 0.\end{cases}$$

2. جد، من أجل كلّ واحدة من الدوال التالية:

أ. مجموعة التعريف $D \subset \mathbb{R}$؛

ب. المجموعة E التي تكون من أجلها الدالّة قابلة للاشتقاق؛

ج. المشتقّ من أجل نقطة x من E.

$$1)\ f(x)=|2x-3|;$$

$$2)\ f(x)=\inf(x,3,2x^2-5);$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases}x^2+2x\ ; & x\leq 1,\\ 4x-1\ ; & x>1;\end{cases}$$

$$4)\ f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & ;x\leq 1\\ -x^2+4x+4\ ; & x>1\end{cases};$$

$$5)\ f(x)=\begin{cases} x+1 & ;\ x<-1 \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & ;\ -1\le x\le 1 \\ \dfrac{(x-1)^2 E\left((x-1)^2+1\right)}{(x-1)^3+1} & ;\ x>1 \end{cases}$$

$6)\ f(x)=a^x\,(a>0)$; $7)\ f(x)=(\sin x)^{x^2}$; $8)\ f(x)=\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$;

$9)\ f(x)=\dfrac{x^p}{x^m-a^m}$; $10)\ f(x)=(1+\sqrt[3]{x})^3$; $11)\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

$12)\ f(x)=Arc\sin e^x$; $13)\ f(x)=\left(Arc\sin\dfrac{1}{x}\right)^2$;

$14)\ f(x)=Arc\cos\dfrac{2x}{1+x^2}$;

$15)\ f(x)=Arc\cos(tg\,x)$; $16)\ f(x)=(Arctg\,x)^4$;

$17)\ f(x)=Arctg\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$; $18)\ f(x)=\dfrac{5x^2}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{3}{x\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$;

$19)\ f(x)=6\left(1-\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\right)^2$; $20)\ f(x)=\dfrac{tg\dfrac{x}{2}+ctg\dfrac{x}{2}}{2x}$;

$21)\ f(x)=tg(Log\,x)^3$; $22)\ f(x)=Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

$23)\ f(x)=Log(\cos x)$; $24)\ f(x)=x^{Log\,x}$; $21)\ f(x)=e^{x^x}$;

$25)\ f(x)=\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$; $26)\ f(x)=e^{Arctg\,x}$;

$27)\ f(x)=Log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/4}-\dfrac{1}{2}Arctg\,x$; $28)\ f(x)=sh\sqrt{x^3+1}$;

$$29)\ f(x)=\frac{1}{(ch\,x)^2+\sqrt{ch\,x}};\ 30)\ f(x)=ch\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}sh\,x;$$

$$31)\ f(x)=cth\sqrt{\frac{1+e^x}{x^2}};\ 32)\ f(x)=Arg\,th\left|\cos x\right|;$$

$$33)\ f(x)=\frac{1}{Arg\,ch\,x};\ 34) f(x)=e^{Argsh\,x}.$$

3. 1) لتكن الدالّة $x \mapsto y=\dfrac{Arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$. جد كثيري الحدود P و Q اللذين يحقّقان:

$$P(x)y'+Q(x)y=0.$$

2) ليكن α و β عددين حقيقيّين. نضع:

$$f(x)=\begin{cases}Log^3x\ ;\ 0<x\le e,\\ \alpha x+\beta\ ;\ x\ge e.\end{cases}$$

عيّن قيم الوسيطين α و β التي من أجلها تكون الدالّة $x\mapsto f(x)$ قابلة للاشتقاق على ميدان تعريفها.

3) لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفة على النحو:

$$f(x)=\left|x\right|^3.$$

أ. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ حيث x من $\mathbb{R}$.

ب. اثبت أنّ المشتقّ $f'''(0)$ غير موجود.

4. ليكن I مجالا حقيقيّا و a نقطة منه. هل الدعاوى الموالية صحيحة أم خاطئة:

1) f قابلة للاشتقاق على $I\setminus\{a\}$ و $\lambda=\lim\limits_{x\to a} f'(x)$

$$\Downarrow$$

f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a)=\lambda$.

2) f لا تقبل الاشتقاق عند a $\Leftarrow$ $\pm\infty=\lim\limits_{x\to a} f'(x)$

3) f' لا تقبل نهاية منتهية أو غير منتهية عند a

$$\Downarrow$$

f لا تقبل الاشتقاق عند a.

4) $f'(0)=0 \Leftarrow f$ قابلة للاشتقاق عند الصفر و $f(0)=2$

5) $|f|$ قابلة للاشتقاق و $|f|=|f'| \Rightarrow f$ قابلة للاشتقاق على I

.5 1) لتكن الدالّتان $x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}\sin(x^2)$ و $x\mapsto g(x)=\sin(\sqrt{x})$.

احسب النهايات التالية (في حالة وجودها):

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x);$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x);$

2) لتكن $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق. ادرس صحّة الدعويين:

أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

3) هات مثالا لدالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ بحيث لا تكون النهايتان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ موجودتين.

.6 لتكن $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق.

1) اثبت صحّة الدعاوى الموالية:

أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\ell>0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \wedge \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$

ب. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

ج. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \wedge \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

2) ماذا تمثّل النهاية بالنسبة إلى منحنى f البيانيّ ؟

3) هات أمثلة مضادّة تبيّن فيها خطأ الاستلزامات العكسيّة.

4) نفترض هنا أنّ f محدودة أيضا. برهن عندئذ أنّه إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\ell$ فإنّ $\ell=0$.

7. جد معادلات المماسات للدوال الموالية عند النقاط ذات الفواصل المرافقة:

$1)\ f(x)=\dfrac{1}{x}, x_0=1, x_1=-1\ ;\ 2)\ f(x)=x^3, x_0=1, x_1=-1\ ;$

$3)\ f(x)=-3x^2-x+5, x_0=3, x_1=-1;$

$4)\ f(x)=7x^2+8x-1, x_0=3, x_1=-1\ ;$

$5)\ f(x)=x^3 Log(x^3+2), x_0=2\ ;\ 6)\ f(x)=Arc\sin\dfrac{x}{3}, x_0=-1.$

8. 1) احسب المشتقّ من اليمين ومن اليسار عند الصفر للدوال التالية:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}\ ;\quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}\ ;$$

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & ; x\neq 0, \\ 0 & ; x=0. \end{cases}$$

2) ادرس استمرار مشتقّات الدوال القابلة للاشتقاق منها (عند الصفر).

9. لتكن الدالّتان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفتان بـــ:

$$f(x)=\begin{cases} x\left(1+x+\sin x\ \sin\dfrac{1}{x}\right) & ;\ \neq 0, \\ 0 & ;\ x=0; \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & ;\ x\in\left]-2,0\right[, \\ e^{\frac{x}{x-1}}\sqrt{x(x+2)} & ;\ x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]0,+\infty\right[. \end{cases}$$

1) عيّن:

أ. ميداني تعريفهما؛

ب. ميداني استمرارهما؛

ج. ميداني قابليتهما للاشتقاق.

2) اعط عبارتي مشتقّيهما عند كلّ نقطة يكون ذلك ممكنا.

10. برهن أنّ الدالّة $f:\left]-1,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ المعطاة بـــ :

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases} \dfrac{Log(1+x)}{x} & ;\ x\neq 0, \\ 1 & ;\ x=0, \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق مرّتين على $\left]-1,+\infty\right[$.

11. لتكن الدالّة f المعرّفة على المجال $I=\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ بـــ:

$$f(x)=Argch\left(\sqrt{1+-\sin^2 x)}\right).$$

1) اثبت أنّ f تقبل الاشتقاق على I.

2) اثبت أنّ:

$$\forall x \in I,\ f'(x) = -\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}} = -\sqrt{\cos(2Arctg(\sin x))}.$$

إرشاد: يمكنك الاستعانة بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{1-tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

12. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على النحو:

$$f(x) = Arc\cos(4x^3 - 3x).$$

1) عيّن ميادين التعريف والاستمرار والقابلية للاشتقاق للدالّة f .

2) احسب $f'(x)$.

3) اثبت أنّ:

$$f(x) = \begin{cases} 3Arc\cos x + c_1 & ;\ x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \\ -3Arc\cos x + c_2 & ;\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 3Arc\cos x + c_3 & ;\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

13. لتكن f دالّة معرّفة في جوار نقطة a. نضع:

$$f'_{\Delta}(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\right).$$

(نقول بأنّ لـــ f **مشتقّا تناظريّا** في حالة وجود هذه النهاية).

1) بيّن أنّ الدالّة العدديّة f المعرّفة بـ $f(x)=|x|$ تقبل مشتقّا تناظريّا عند الصفر.

2) بيّن أنّه إذا قبلت f مشتقّا يمينيّا $f'_d(a)$ ومشتقّا يساريّا $f'_g(a)$ عند a قبلت f عندئذ مشتقّا تناظريّا عند a.

3) بيّن أنّ عكس النتيجة (1) خاطئة عموما. (يمكنك فحص الحالة:

$a=0$ و $$\left(f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases} \right)$$

14. لتكن f دالّة معرّفة على المجال $]-1,1[$ وقابلة للاشتقاق عند الصفر.

لتكن $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متتاليتين حقيقيّتين متقاربتين نحو الصفر بحيث:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ -1<a_n<0<b_n<1.$$

برهن أنّ المتتالية $\left(\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)_n$ متقاربة نحو $f'(0)$.

15. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. نهدف إلى إثبات أنّ المشتقّة f' تحقّق خاصية القيم المتوسّطة.

ليكن a و b عنصرين من I بحيث $a<b$. نفترض أنّ $f'(a)<f'(b)$. برهن أنّ:

$$\forall\beta\in\left]f'(a),f'(b)\right[\ \exists\alpha\in\left]a,b\right[:f'(\alpha)=\beta.$$

إرشاد:

يمكن إثبات أنّ الدالّة $x\mapsto f(x)-\beta x$ تدرك حدّها الأدنى على $]a,b[$.

16. احسب المشتقّ النونيّ عند الصفر للدالّة $x\mapsto f(x)=x^2e^x$.

17. لتكن الدالّة $x \mapsto f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$.

1) احسب f' وامتحن المساواة $2\sqrt{1+x^2} f'(x) = f(x)$.

2) استنتج أنّ f'' يحقّق المساواة:

$$4(1+x^2) f''(x) + 4x f'(x) - f(x) = 0.$$

18. 1) برهن أنّه إذا كانت دالّة f محدودة على $[-1,1]$ كانت الدالّة $x \mapsto x^2 f(x)$ عندئذ قابلة للاشتقاق عند الصفر.

2) هل الأمر كذلك بالنسبة للدالّة $x \mapsto x^n = f(x)$، حيث n من $\mathbb{N}^*$؟

3) ليكن h من $\mathbb{R}_+^*$. برهن أنّه إذا كانت دالّة g تحقّق:

$$\forall x \in [-h, h] \ \left(g(x)\right)^2 \leq x^4,$$

فإنّها تقبل مشتقّا معدوما عند الصفر.

4) برهن أنّه إذا كانت دالّة h متمتّعة بمشتقّ معدوم عند الصفر فإنّ:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{h(2x) - h(x)}{x} \right) = h'(0).$$

5) هل العكس صحيح ؟ (يمكنك فحص الحالة $h(x) = [x]$).

19. ليكن $r > 0$ و f دالّة مستمرّة عند نقطة a وقابلة للاشتقاق على $]a-r, a+r[\setminus \{a\}$.

1) اثبت أنّه إذا كانت $\lim_{x \to a} f'(x) = k$ كانت f عندئذ قابلة للاشتقاق عند a و $k = f'(a)$.

2) هل العكس صحيح ؟ (يمكنك فحص الحالة:

$$\left(f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases} \right. \text{،} \; 0=a$$

20. لتكن f دالّة مستمرّة على $[a,b]$ وتقبل مشتقّا محدودا على $]a,b[$.

1) برهن أنّه إذا كانت $\ell=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ فإنّ f تقبل مشتقّا يمينيّا عند a يساوي ℓ.

2) طبّق هذه النتيجة على الدالّة $x\to\sqrt{x}\sin x$، مع $[a,b]=[0,\pi]$.

21. 1) برهن أنّ مشتقّ دالّة زوجيّة دالّة فرديّة، وبالعكس.

2) برهن أنّ مشتقّ دالّة دوريّة دالّة دوريّة، بالدور ذاته.

22. لتكن الدالّة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعطاة بــ:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & ; x>0, \\ ax^2+bx+c & ; x\leq 0. \end{cases}$$

1) عيّن قيم a و b و c التي من أجلها تكون f من الصنف $\mathscr{C}^2$.

2) أعد الإجابة مع الصنف $\mathscr{C}^3$.

23. برهن أنّ:

$$(x^m)^{(n)}=m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n};\; (a^x)^{(n)}=a^x(Log\,a)^n;$$

$$(Log\,x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};\; (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

24. 1) احسب المشتقّ النونيّ للدوال التالية:

$$f(x)=\frac{1}{(ax+b)^m},\ (a\neq 0, m\in\mathbb{N}^*);\ \ g(x)=\frac{1-x}{1+x};$$

$$h(x)=Log(1+x);\ k(x)=\sin^3 x\cos x.$$

25. 1) احسب المشتقّ النونيّ للدالّة $x\mapsto f(x)=(x-a)^n(x-b)^n$.

2) بأخذ $b=a$ في النتيجة المحصّل عليها قارن هذه الأخيرة مع المشتقّ النونيّ للدالّة $x\mapsto g(x)=(x-a)^{2n}$.

3) استخلص المساواة:

$$C_{2n}^n=1+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+...+(C_n^n)^2.$$

26. لتكن الدالّة $x\mapsto f(x)=Arctg\,x$.

1) تأكّد من أنّ $(1+x^2)f'(x)=1$.

2) بيّن أنّ:

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nx\,f^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0.$$

27. 1) اثبت أنّ المعادلة:

$$x^3-2x^2-1=0,$$

تقبل في المجال $]2,3[$ جذرا حقيقيّا وحيدا.

2) برهن أنّ بين كلّ جذرين من جذور كثير حدود يوجد جذر لمشتقّه.

28. 1) برهن دونما حساب للمشتقّ أنّ الدالّة:

$$x\mapsto f(x)=1+(x-1)(x+1)(x-2)$$

تقبل قيمتين حدّيتين.

2) أ. جب على السؤال ذاته بشأن الدالّة:

$$x\mapsto g(x)=3+x(x-2)(x-4)$$

ب. احسب $g(3)$ ثمّ بيّن أنّ عدد نقاط تقاطع بيان g مع محور الفواصل أكبر (من) أو يساوي 2.

29. اعط حادّا أعلى للخطإ المرتكب عند استعمال التقريبين التاليين في المجالين المرافقين:

$$Log(1+x)=1-\frac{x^2}{2},\ \left[0,10^{-2}\right];\ \sin x=x-\frac{x^3}{6},\ [0,1].$$

30. 1) هل يمكن تطبيق مبرهنتي رول والتزايدات المنتهية في هذه الحالات:

$$f(x)=x^3+5x^2-6x,\ I=[0,1];$$
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3),\ I=[1,3];$$
$$f(x)=1-\sqrt[5]{x^4},\ I=[-1,1];\ f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2},\ [0,4];$$
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-\frac{1}{2}},[-1,1];\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2};\ x\neq 0\\ 0\ ;\ x=0\end{cases},[-1,1];$$
$$f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}\ ;\ x<1,\\ 1\ ;\ x=1,\\ \frac{1}{2}\ ;\ x>1,\end{cases}\quad I=[0,2];$$
$$f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2},\ I=[0,2];\ f(x)=tg\,x,\ I=[0,\pi];$$
$$f(x)=(x-a)^m(x-b)^n,\ I=[a,b].$$

31. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $[0,1]$ بـــ:

$$f(x)=1-|2x-1|.$$

ما هي قيم a و b التي تسمح بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على $[a,b]$ ؟

32. 1) في مبرهنة التزايدات المنتهية المكتوبة تحت الشكل:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

احسب θ للدوال التالية:

$$i) f(x)=ax^2+bx+c;\ ii) f(x)=a+bx+ce^{5x};\ iii) f(x)=x^4$$

2) ما هي نهاية θ لمّا يؤول h إلى الصفر، في كلّ حالة.

33. 1) لتكن الدالّتان الحقيقيّتان f و g المعرّفتان بـــ:

$$f(x)=1+x(x-1)(x+2);\quad g(x)=2+(x-2)(x-1)(x+1).$$

اثبت، دونما حساب للمشتقّين f' و g'، أنّ f' ينعدم مرّتين في المجال $]-2,1[$ و g' ينعدم ثلاث مرّات في المجال $]-1,2[$.

2) اثبت أنّ المعادلة $2x^3+3x^2-12x-13=0$ تقبل حلاً وحيدا في $[-2,1]$، ثمّ احسب الحلول الأخرى.

34. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومحقّقة:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

اثبت وجود عدد c من $\mathbb{R}$ بحيث $f'(c)=0$.

35. اثبت دونما حساب للمشـــــتقّ، وجود نقطـــة في بيان الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـــ $f(x)=x^2-5x+4$، يكون فيها المماس موازيا الوتر المارّ من النقطتين ذواتي الفاصلتين $x_1=2$ و $x_2=4$. عيّن هذه النقطة.

36. ليكن f عنصرا قابلا للاشتقاق من $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ وذا إشارة واحدة على $[a,b]$. برهن أنّه توجد نقطة c من $]a,b[$ بحيث:

$$\frac{f(a)}{f(b)}=e^{\frac{(a-b)f'(c)}{f(c)}}.$$

37. لتكن f دالّة حقيقيّة معدومة عند الصفر وموجبة تماما على $]0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $[0,1]$. ليكن α و β من $\mathbb{R}_+^*$. برهن عندئذ أنّ:

$$\exists c\in\,]0,1[,\ \frac{f'(c)}{f(c)}=\beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

38. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ ومحقّقة:

$$f'(a)=f'(b)=0.$$

1) اثبت وجود عدد c من $]a,b[$ بحيث:

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

(يمكنك إدخال الدالّة $x\mapsto F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$).

2) اعط تأويلا هندسيّا لهذه النتيجة.

39. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق n مرّة على مجال $]a,b[$. نفترض أنّها تنعدم

$n+1$ مرّة على هذا المجال. اثبت عندئذ وجود عدد c من $]a,b[$ بحيث $f^{(n)}(c)=0$.

40. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق باستمرار على المجال $]0,1[$. نفترض أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{2n}\right) \geq 1, f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \leq 0.$$

اثبت أنّه بوجد عددان α و β من $]0,1[$ بحيث $f'(\alpha) \geq 300$ و $f'(\beta) = e$.

41. ليكن p و q عددين حقيقيّين موجبين و n عددا طبيعيّا. نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^n + px + q$. اثبت أنّه:

أ. إذا كان n زوجيّا فإنّ P لا يقبل أكثر من جذرين؛

ب. إذا كان n فرديّا فإنّ P لا يقبل أكثر من ثلاثة جذور.

42. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ ومحقّقة:

$$f(a) = f(b) = 0.$$

نفترض أنّ f'' موجود على $]a,b[$ ونضع:

$$g(x) = \frac{(x-a)(x-b)f(c)}{(c-a)(c-b)};\ c \in]a,b[.$$

اثبت وجود عدد t من $]a,b[$ بحيث:

$$f(c) = (c-a)(c-b)\frac{f''(t)}{2}.$$

(يمكنك اللجوء إلى تطبيق مبرهنة رول على الدالّتين $f-g$ و $f'-g'$).

43. لتكن g دالّة قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$. نفترض أنّ g تقبل مشتقّا ثانيا على $]a,b[$، ونضع:

$$\varphi(x) = g(b) - g(x) - (b-x)g'(x) - k(b-x)^2,$$

حيث k ثابت يحقّق $\varphi(a) = 0$.

1) تحقّق من أنّ الدالّة φ تذعن لشروط رول على $[a,b]$.

2) اثبت أنّ:

$$\exists \theta \in]0,1[: g(x+h) = g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(x+\theta h);$$
$$(a \le x \le x+h \le b).$$

3) اثبت أنّه إذا كانت f دالّة قابلة للاشتقاق مرّتين فإنّه يوجد، من أجل كلّ x و h عدد θ من $]0,1[$ بحيث:

$$f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h) = h^2 f''(x+2\theta h).$$

(إرشاد: خذ الدالّة المساعدة:

$$\varphi(t) = f(x) - 2f(x+t) + f(x+2t) - t^2 k,$$

حيث k ثابت يحقّق المساواة $\varphi(k)=0$.)

44. لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق مرّتين على مجال $[a,b]$ وليكن c عددا من $]a,b[$. نعتبر العدد الحقيقيّ k المعروف بواسطة العلاقة:

$$f(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) + k\frac{(c-a)(c-b)}{2},$$

وندخل الدالّة المساعدة:

$$x \mapsto F(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) - k\frac{(x-a)(x-b)}{2}.$$

1) تحقّق من أنّ $F(a) = F(b) = F(c) = 0$.

2) اثبت مستعينا بمبرهنة رول أنّه يوجد عدد δ من $]a,b[$ بحيث:

$$F''(\delta) = 0.$$

3) استنتج أنّه من أجل كلّ c من $]a,b[$ يوجد عدد δ من $]a,b[$ بحيث:

$$f(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) + \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\delta).$$

45. احسب مستخدما قاعدة لوبيطال، النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos - \sin x}{x^3};\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x};\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\sin^2 x};\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^4};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$$

46. 1) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق عند نقطة a ولتكن المتتالية الحقيقيّة ذات الحدّ العام:

$$x_n = f\left(\frac{1}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

عيّن النهايتين:

أ. $\lim_{n\to\infty} x_n$

ب. $\lim_{n\to\infty} n\left(x_n - f(0)\right)$

2) لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق على $]0,1[$. نفترض أنّ:

$$\exists k\in\,]0,1[,\ \forall x\in\,]0,1[\,:\ |f'(x)|<k.$$

نعرّف المتتالية (u_n) على النحو:

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}_*.$$

برهن أنّ (u_n) لكوشي.

47. نعتبر الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـــ:

$$f(x) = Arctgx - Argshx.$$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) عيّن ميدان تعريف الدالّة الحقيقيّة g المعرّفة بـــ $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^3}$.

3) اثبت أنّ الدالّة g تقبل التمديد بالاستمرار عند الصفر.

4) برهن أنّ:

$$\forall[a,b]\subset\mathbb{R}_+\ \exists\lambda<0: Arctgx\geq\lambda+Arg\,shx,\ \forall x\in[a,b].$$

5) اثبت أنّ منحنى f البيانيّ يقبل مماسا عند كلّ نقطة من ميدان تعريفه.

6) اكتب معادلة المماس لمنحنى f البيانيّ عند النقطة التي فاصلتها الصفر.

48. يعبر قريتنا نهران A و B مساراهما معطيان بـــ:

$$A(x)=Arctg\left(\frac{Arc\cos x}{\pi}\right);\ B(x)=Arctg\left(\frac{Arc\sin x}{\pi}\right)$$

1) اجر دراسة مقتضبة لتغيّرات A و B ثمّ مثّل منحنيهما البيانيّين في معلم متعامد متجانس.

2) بيّن أنّ A متناقصة و B متزايدة.

3) برهنّ أنّ النهرين يلتقيان في نقطة فاصلتها موجبة.

4) اثبت مستخدما مبرهنة رول أنّ هذه النقطة وحيدة.

5) اثبت أنّ الدالّة المعطاة بـــ $f(x)=A(x)-B(x)$ تقبل دالّة عكسيّة مستمرّة ومتناقصة f^{-1} على ميدان $D_{f^{-1}}$ يطلب تعيينه.

49. برهن، مستعينا بمبرهنة التزايدات المنتهية، أنّ:

$$1)\forall x\in\mathbb{R}\ \ |\sin x|\leq|x|;\ 2)\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\ tg\,x\geq x;$$

$$3)\forall x\in\mathbb{R}\ \ \cos x\geq1-\frac{x^2}{2};\ 4)\frac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x\ \ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];$$

$$5)\forall x\in\mathbb{R}_+\ \frac{x}{1+x^2}\le Arctgx\le x;\quad 6)\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<Arctg\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}.$$

.50 ليكن a عددا من $]0,1[$.

1) اثبت المتراجحات التالية، مستعينا بمبرهنة التزايدات المنتهية المطبّقة على الدالّة $x\mapsto x^a$:

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}}\le(n+1)^a-n^a\le\frac{a}{n^{1-a}};\ n\in\mathbb{N}^*.$$

2) استنتج أنّ المجموع:

$$\frac{1}{1^{1-a}}+\frac{1}{2^{1-a}}+...+\frac{1}{n^{1-a}},$$

يكافئ An^b في جوار $+\infty$، حيث A و b عددان مطلوب تعيينهما.

.51 لتكن f دالّة معرّفة على $[a,b]$ ومحقّقة:

$$\forall x,x'\in[a,b]\ |f(x)-f(x')|\le(|x-x'|)^{\alpha+1};\ \alpha>0.$$

برهن أنّ f ثابتة.

.52 ارتفاع قذيفة معطى في الزمن t ثانية، بـــ :

$$f(t)=-16t^2+32t+40.$$

1) تأكّد من أنّ ارتفاع القذيفة في الزمن 2 ثانية يعدل ارتفاعها عند الزمن الابتدائيّ $(t=0)$.

2) ماذا يمكن قوله حسب مبرهنة رول إزاء سرعة القذيفة ؟

3) عيّن قيمة c المنصوص عليه في مبرهنة رول في المجال $[0,2]$.

.53 لنافذة شكل مثلّث متساوي الأضلاع، موضوع على مستطيل.

ما هي من أجل محيط ما معطى، الأبعاد التي من أجلها تكون مساحة النافذة أعظميّة ؟

54. نقطع سلكا طوله L لنحصل على جزأين. يمثّل أحدهما محيط مثّلث متساوي الأضلاع، والآخر محيط مربّع. أين ينبغي قطع السلك إذا رمنا:

أ. تصغير مجموع مساحتي المثلث والمربّع ؟

ب. تكبير مجموع مساحتيهما ؟

55. ننوي إرسال طرد أسطوانيّ الشكل. ما هي الأبعاد التي ينبغي أن يكون عليها الطرد حتّى يكون حجمه الداخليّ أعظميّا؟

56. عيّن من بين جميع علب المصبّرات ذات حجم داخليّ مساو 1000 سم^3 تلك التي يتطلّب صنعها أقلّ كميّة من المعدن.

57. ادرس الدوال التالية:

$$f(x)=\frac{\cos 4x}{\cos x};$$

$$g(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3};\ h(x)=x^3;$$

$$k(x)=Arc\cos(1-x^4);$$

$$l(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2};$$

$$f_1(x)=e^{\frac{1}{x}};\ g_1(x)=e^{-x}\sin x;\ h_1(x)=Arc\cos(4x^3-3x);$$

$$k_1(x)=Arctg\frac{1-x}{1+x};\ l_1(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2(x-5)}{x+3}}.$$

58. حلّل وفق قوى $(x+3)$ كثير الحدود:

$$P(x)=1+x-4x^3+3x^5+x^7.$$

59. 1) جد مستخدما دستور ماك لوران المطبّق على الدالّة الأسيّة، نهاية المتتالية الحقيقيّة ذات الحدّ العام:

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

2) بيّن أنّ المتتالية الحقيقيّة ذات الحدّ العام $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ تتقارب نحو $Log2$.

60. 1) استخدم دستور ماك لوران من الرتبة 4 لحساب قيمة تقريبيّة للعدد $\sqrt{2}$.

2) اكتب دستور ماك لوران من الرتبة 2 من أجل الدالّة $\sqrt{x+1}$، ثمّ قيّم خطأ المساواة التقريبيّة $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ من أجل $x=0,02$.

61. ليكن x عنصرا من $]0,1[$. اكتب دستور تايلور ـــ يونغ من الرتبة 3 في المجال $[0,x]$ في حالة الدوال التالية:

$$1)f(x)=th\,x;\ 2)f(x)=\sqrt{2+th\,x};\ 3)\ f(x)=2^x;$$

$$4)\ f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\ ;\ 5)\ f(x)=Arc\sin x;$$

$$6)\ f(x)=Arc\cos x\ ;\ 7)\ f(x)=Arctg\,x\ ;$$

$$8)\ f(x)=Arc\cot g\,x\ ;\ 9)\ f(x)=Argsh\,x.$$

.62 1) ليكن f عنصرا من $\mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. برهن أنّه يوجد عدد $0<M$ بحيث:

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-f'(x_0)\right|\le Mh^2,$$
$$\forall x_0\ ]a,b[,\forall(x_0\pm h)\in\ ]a,b[.$$

2) اثبت أنّه إذا كان f من $\mathscr{C}^3([a,b],\mathbb{R})$ فإنّه يوجد عندئذ عدد $0<M'$ بحيث:

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-f'(x_0)\right|\le M'h^2,$$
$$\forall x_0\ ]a,b[,\forall(x_0\pm h)\in\ ]a,b[.$$

3) ليكن I مجالا مفتوحا يتضمّن الصفر و h دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق على I. نفترض أنّه يوجد عدد حقيقيّ $A>0$ وعدد طبيعيّ n بحيث:

$$\forall x\in I\ \ |h'(x)|\le A|x^n|.$$

اثبت أنّ:

$$\forall x\in I\ \ |h'(x)-h(0)|\le A\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|.$$

.63 برهن مستعينا بدستور تايلور المتباينات الموالية :

$$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},(\forall x\in[0,\pi]);\ (1$$

$$tg\,x\ge x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15},\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right);\ (2$$

$$x-\frac{x^2}{2}<Log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);\ (3$$

$$\frac{x}{x^2+1} \le Arctg\, x \le x, \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$ (4

.64 هل للدالّتين المواليتين نشور محدودة من الرتب 3، 4، 5 في جوار الصفر:

$$f(x) = -1 + 5x + 2x^2 - 4x^3 + 3x^5 \cos\frac{1}{x} \ ;$$

$$f(x) = \frac{2}{3} + x - \frac{x^3}{4} + 6x^4 - x^{5+x} \ ; \ f(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x}$$

.65 1) هات (مستعملا حساب قيم المشتقّات المتتالية) النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار النقطة x_0 للدوال التالية:

$$1) f(x) = \frac{1}{3-2x}, \ x_0 = 3 \ ; \ 2) \ f(x) = \frac{x}{x^2-2x-3}, x_0 = 0;$$

$$3) \ f(x) = \sin(2x+1), x_0 = -1; \ \ 4) \ f(x) = Log(2-x), x_0 = 0$$

$$5) \ f(x) = \sqrt{2+2e^x}, x_0 = 0; \ 6) \ f(x) = e^{\sin x}, \ x_0 = 0;$$

$$7) \ f(x) = \sqrt{\cos x}, x_0 = 0 \ ; 8) \ f(x) = \sin(2tg\, x), \ x_0 = \pi;$$

$$9) \ f(x) = Log(\sin x), x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

2) جب على السؤال نفسه بأخذ $x_0 = 0$، مع الاستعانة بالعمليات الحسابيّة في النشور المحدودة:

$$1) \ f(x) = \frac{1}{\cos x}, n = 5; \ \ 2) \ f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}, n = 3;$$

$$4) \ f(x) = \sin x\, ch\, x - sh\, x \cos x, n = 7; \ \ 3) \ f(x) = \sqrt[3]{1+e^{x^2}}, \ n = 4;$$

$$5) \ f(x) = 4(tg^2 x - x^2), n = 7; \ \ 6) \ f(x) = \sqrt{\cos x}, n = 5;$$

$7)\ f(x)=ch\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2, n=6;\ \ 8)\ f(x)=\sqrt{1+\sin x}, n=4;$

$9)\ f(x)=Log(1+sh\,x), n=6\ ;\ \ 10)\ f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{Log(\cos x)}, n=4;$

$11)\ f(x)=(1+x)^x, n=4\ ;\ \ 12)\ f(x)=(1+x)^{\sin x}, n=6;$

$13)\ f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{Log(\cos x)}, n=4;\ \ 14)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2-\sqrt{1-x}}}{2}}, n=3;$

$15)\ f(x)=\sqrt[3]{1+e^{x^2}}, n=4;\ \ 16)\ f(x)=e^{\sqrt{\cos x}}, n=4;$

$17)\ f(x)=e^{x\cos x}, n=4\ ;\ \ 18)\ f(x)=tg(\cos x)^x-\dfrac{x^2}{\cos^2 x}, n=7;$

$19)\ f(x)=tgx\,e^{tg\,x}, n=4.$

3) جب على السؤال نفسه مع تغيير النقطة x_0:

$1)\ f(x)=\dfrac{Log\,x}{x}, n=4, x_0=1;\ \ 2)\ f(x)=\cos(\pi\sin x), n=8, x_0=\dfrac{\pi}{2};$

$3)\ f(x)=x^{Log\,x}, n=4, x_0=1;\ \ 4)\ f(x)=\sqrt{tg\,x}, n=3, x_0=\dfrac{\pi}{4};$

66. اختبر صحّة هذه النشور المحدودة في جوار الصفر:

5) $(1+Arc\sin x)Log(1+x)=1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x);$

6) $Log\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=-\dfrac{x^2}{6}+x^3\varepsilon(x);$

7) $Ar\cos\left(\dfrac{\sin^2 x}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-x+\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x);$

8) $\sin(Log(1+x))=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x);$

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\cos x}=1+\frac{5}{6}x^2+\frac{19}{72}x^4+x^4\varepsilon(x); \quad (9$$

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+x^4\varepsilon(x); \quad (10$$

$$tgxe^{tgx}=x+x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{5}{6}x^4+x^4\varepsilon(x); \quad (11$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4+x^4\varepsilon(x); \quad (12$$

$$\frac{1}{1+Log(1+x))}=1-x+\frac{3x^2}{2}-\frac{7x^3}{3}+\frac{11x^4}{3}+x^4\varepsilon(x); \quad (13$$

$$\frac{e^{\cos x}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=e\sqrt{2}\left(1-x+x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{43x^4}{24}\right)+x^4\varepsilon(x); \quad (14$$

$$\frac{(\sin x)^2}{Log(\cos x)}=-2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}\right)+x^4\varepsilon(x); \quad (15$$

67. اختبر صحّة هذه النشور المحدودة في جوار النقاط المرفقة:

$$\sqrt{tgx}=1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{5}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+$$

$$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right); \quad x\to\frac{\pi}{4}$$

$$Log\left(xtg\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3x^2}+\frac{7}{90x^4}+\frac{62}{2835x^6}+o\left(\left(\frac{1}{x^6}\right)\right); \quad x\to+\infty,$$

$$Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-Log\left(\sqrt{1+x^2}\right)=$$

$$=Log2-\frac{1}{4x^2}+\frac{5}{32x^4}+o\left(\left(\frac{1}{x^4}\right)\right);$$
$$x\to+\infty$$

.68 اكتب النشر المحدود من الرتبة 5 بجوار الصفر للدالّة $\frac{Arc\sin}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ ثمّ استنتج النشر المحدود من الرتبة 6 بجوار الصفر للدالّة:

$$g(x)=(Arc\sin x)^2.$$

.69 1) اكتب النشر المحدود من الرتبة 3 بجوار الصفر للدالّة:

$$f(x)=e^{-x}L\text{og}(1+e^x),$$

ثمّ استنتج قيمتي $f''(0)$ و $f'''(0)$.

2) هات النشر المحدود من الرتبة الرابعة في جوار الصفر للدالّة الأصليّة المعدومة عند الصفر للدالّة $f(x)=e^{\sin x}$.

3) جب على السؤال ذاته بخصوص الدالّتين:

$$g(x)=\cos^{Arc\sin x};\ h(x)=Argsh\left(xe^{e^x}\right).$$

.70 1) هل تقبل الدالّة $f(x)=\frac{1}{1+|x|}$ نشرا محدودا من الرتبة n (من $\mathbb{N}^*$) بجوار الصفر؟ إذا أجبت بالإيجاب فاكتب هذا النشر.

2) جب على السؤال ذاته بخصوص جوار الواحد.

.71 لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بـــ :

$$f(x)=\begin{cases}1+x+\dfrac{x^2}{2}+x^3\cos\dfrac{1}{x} & ; x\neq 0,\\ 0 & ; x=0.\end{cases}$$

أ. اثبت أنّ f تقبل نشرا محدودا بجوار الصفر من الرتبة 2.
اكتب هذا النشر.

ب. اثبت أنّ $f''(0)$ غير موجود. ماذا تستخلص؟

72. لتكن الدالّة الحقيقيّة المعرّفة بـــ :

$$f(x)=\begin{cases}x^2 Log|x| & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$$

برهن أنّ f تقبل الاشتقاق عند النقطة $x_0=0$، غير أنّها لا تتمتّع بنشر محدود تفوق رتبته 1 في جوار هذه النقطة.

73. 1) احسب النشرين المحدودين من الرتبة 3 على يمين ويسار الصفر للدالّة:

$$f(x)=e^{\sqrt{x^2(1+x)}}.$$

2) هل تقبل f نشرا محدودا من الرتبة 3 عند الصفر؟

74. لتكن $(f_i)_{1\leq i\leq 7}$ الدوال الحقيقيّة المعرّفة في جوار 0 بـــ :

1) $f_1(x)=ch(\sin x)-\cos(sh x)$; 2) $f_2(x)=x\,Arc\cos x$;
3) $f_3(x)=x^3\,ch\,x$; 4) $f_4(x)=e^x sh\,x^4$; 5) $f_5(x)=e^x ch\,x$;
6) $f_6(x)=e^{x^2} ch\,x$; 7) $f_7(x)=Argth\,x(1+Log(1+x))^2$.

1) احسب من أجل كلّ i من $\{1,2...,7\}$، المقادير $f_i(0)$، $f_i'(0)$، $f_i''(0)$، ...، $f_i^{(p)}(0)$، حيث رمزنا بـــ p لأصغر عدد طبيعيّ يفوق 2 ويحقّق $f_i^{(p)}(0)\neq 0$.

2) استنتج وضعية منحنى f_i $(1 \le i \le 7)$ البيانيّ في جوار الصفر بالنسبة مماسه عند 0.

75. ليكن a عددا حقيقيّا غير معدوم و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقا معرّفا بـــ :

$$f(x) = sh\left(aL\mathrm{og}(x+\sqrt{1+x^2})\right).$$

1) تأكّد من أنّ:

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - a^2 f(x) = 0.$$

2) اثبت، مطبّقا دستور ليبنيتز على المعادلة التفاضليّة أعلاه، أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n+2)}(0) = (a^2 - n^2) f^{(n)}(0).$$

3) استنتج النشر المحدود من الرتبة 5 لــ f في جوار الصفر.

76. 1) جد النشر المحدود من الرتبة 4 بجوار الصفر للدالّة:

$$f(x) = Arctg(\sin x).$$

2) عيّن معادلة المماس عند الصفر ووضعية هذا المماس بالنسبة لمنحنى f البيانيّ.

77. جد النشر المحدود من الرتبة الأولى بجوار الصفر للدالّة:

$$f(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{1+x}} - \sqrt{1+2\sin^2 x}}{x\,tg\,x\,sh\,x};$$

ثمّ احسب النهاية $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. (إرشاد: اكتب نشرا محدودا من الرتبة 4 بجوار الصفر للدوال المكوّنة لـــ f).

78. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على المجال $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بـــ :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x} & ; x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 0 & ; x=0.\end{cases}$$

1) اثبت أنّ f مستمرّة على I.

2) اثبت أنّ f قابلة للاشتقاق باستمرار على I.

79. احسب مستخدما النشور المحدودة، نهاية $f(x)$ لما يؤول x إلى الصفر في الحالات التالية:

$$1)\ f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{Log(1+x)};\quad 2)\ f(x)=\frac{sh\,x+\sin x-2x}{x(ch\,x+\cos x-2)};$$

$$3)\ f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x};\quad 4)\ f(x)=\frac{(1-\cos x)\,Arctg\,x}{x\sin^2 x};$$

$$5)\ f(x)=\frac{1}{x}Log\frac{e^x-1}{x};\quad 6)\ f(x)=\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x};$$

$$7)\ f(x)=\frac{x^2+x^3}{(Arctg\,x)^2};\ 8)\ f(x)=\frac{Log(\cos x)}{\sin x};$$

$$9)\ f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}};\ 10)\ f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x^2};\ 11)\ f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{Arctg\,x};$$

$$12)\ f(x)=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}};\quad 13)\ f(x)=\frac{x^3}{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}};$$

$$14)\ f(x)=\frac{3^x-4^x}{x};\quad 15)\ f(x)=\frac{x^2\cos x-(e^x-1)^2}{\sin^3 x};$$

$$16)\ f(x)=\frac{x^2\cos x-(e^x-1)^2}{(\sin x)^3};\quad 17)\ f(x)=\frac{\sin x Log(1+x^2)}{x\,tg\,x};$$

$$18)\ f(x)=\frac{2}{x(e^x-1)}-\frac{2}{x^2};\ 19)\ f(x)=\frac{e^{-tg\,x}+\cos(Log(1+x))-2+x}{x^4};$$

$$20)\ f(x)=\frac{e^{\frac{\cos x-1}{x}}-e^{-\sin\frac{x}{2}}}{x^3};\ 21)\ f(x)=\frac{Log(1+\sin x)-Arctg\dfrac{2x}{x+2}}{x^3};$$

$$22)\ f(x)=\frac{Arctg(x^2-x^2\cos x)}{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)Log\dfrac{\sin x}{x}};\ 23)\ f(x)=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\left(\frac{x}{x-\sin x}\right)};$$

$$24)\ f(x)=\frac{(1-\cos x)Arc\sin x}{x\,tg^2\,x};\ 25)\ f(x)=\left(\frac{ch2x+chx+1}{e^{2x}+e^x+1}\right)^{\frac{1}{shx}}.$$

80. 1) اكتب النشر المحدود من الرتبة 3 بجوار الصفر للدالّة:

$$f(x)=(\cos x+x\,th\,x)^{\frac{1}{\sin x}};\quad 0<|x|<1.$$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) لتكن الدالّة الحقيقيّة g المعرّفة بـ:

$$g(x)=\frac{Log(\cos x)Arctg(2tg\,x)}{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)tg\,x}.$$

أ. احسب النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار الصفر لكلّ من بسط ومقام g.

ب. استخلص النهاية $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

ج. بيّن أنّ الممدّد $\tilde{g}$ المعرّف بـ:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

قابل للاشتقاق عند الصفر.

د. ما هي قيمة $\tilde{g}'(0)$ ؟

81. لتكن الدالّة $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ المعرّفة بـــ :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x+2x^2}}{1-x}.$$

1) جد نشر f المحدود من الرتبة 2 بجوار الصفر.

2) استنتج أنّ f تقبل قيمة قصوى.

3) عيّن المماس عند الصفر ووضعيته بالنسبة للمنحنى.

82. اجر دراسة محلّية عند النقاط المرفقة (ذروة، حضيض، انعطاف) للدوال التالية:

$$f(x) = 6Log\, x - 2x^3 + 9x^2 - 18x;\ x_0 = 1;$$
$$f(x) = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20;\ x_0 = 0;$$
$$f(x) = \frac{Log(ch\, x)}{\cos x} ch\, x;\ x_0 = 0.$$

83. اكتب النشر المحدود من الرتبة 2 بجوار $+\infty$ للدالّتين:

$$f(x) = Log(1+x) - Logx - \frac{1}{1+x},$$
$$g(x) = \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt[3]{x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x + 1},$$

ثمّ احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} x^2 g(x)$.

84. هات النشور المحدودة من الرتبة n في جوار $+\infty$ في الحالات التالية:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-1},\ n=3;\quad 2)(x)=\frac{x^3+4}{x-1},\ n=n;$$

$$3)\ f(x)=\frac{x^2+2}{x(x-1)},\ n=n;\quad 4)\ f(x)=e^{\frac{x+4}{x+2}},\ n=4;$$

$$5)\ f(x)=Arctg\frac{1+x}{x+2},\ n=2.$$

85. عيّن العدد الحقيقيّ λ حتّى تقبل الدالّة:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3+\lambda x^2+1}$$

الصفر نهاية لها لمّا يؤول x إلى $+\infty$.

86. 1) هات النشر المحدود من الرتبة الأولى في جوار $+\infty$ للدالّة:

$$f(x)=Log\left(\frac{x+1}{x-1}\right);$$

ثمّ احسب:

$$\lim_{x\to+\infty} Log(e^x+1)Log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

2) نفس السؤال بأخذ الدالّة:

$$g(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\sqrt{1+x^2}.$$

87. 1) هات النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالّة:

$$f(x)=\frac{1}{1+Log(x+\cos x)}.$$

2) نضع $g(x)=\dfrac{1+x^2+x^3}{1+x}$ ونرمز لمنحني f و g البيانيّين بـ Γ_f و Γ_g. عيّن وضعية أحد المنحنيين إزاء الآخر في جوار الصفر.

3) لتكن الدالّة الحقيقيّة h المعطاة بـــ :

$$h(x)=\frac{x}{1+Log\left(\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}.$$

ادرس سلوك الدالّة h في جوار ∞.

88. احسب مستخدما النشور المحدودة، نهاية $f(x)$ لما يؤول x إلى x_0 في الحالات التالية:

1) $$f(x)=\frac{1}{Logx}-\frac{x}{Logx},\ x_0=1;$$

2) $$f(x)=\frac{x^a-a^x}{Arctg\,x-Arctg\,a},\ x_0=a>0;$$

3) $$f(x)=\frac{1-x+Logx}{1-\sqrt{2x-x^2}},\ x_0=1;$$

4) $$f(x)=(x-2+\sqrt{x^2+3})^{\frac{1}{x-1}},\ x_0=1;$$

5) $$f(x)=x-x^2Log\left(1+\frac{1}{x}\right),\ x_0=+\infty;$$

6) $$f(x)=\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x}},\ x_0=+\infty;$$

7) $$f(x)=x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right),\ x_0=+\infty;$$

8) $$f(x)=\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2},\ x_0=+\infty.$$

9) $$f(x)=x^5\left(Argsh\frac{1}{x}-Arc\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right),\ x_0=+\infty$$

89. ادرس الفروع اللانهائيّة للمنحنى ذي المعادلة:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2-x-1}.$$

(يطلب تعيين النهايتين في جوار $\pm\infty$، معادلة الخطّ المقارب ووضعية المنحنى إزاء هذا الخطّ.)

90. ادرس الدوال الحقيقيّة الموالية مستخدما النشور المحدودة لحساب النهايات وتعيين الخطوط المقاربة ووضعية هذه الأخيرة بالنسبة إلى المنحنى البيانيّ:

$$1)\ f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3};\ 2)\ f(x)=\sqrt{x^3-2x+2};\ 3)\ f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-5)}{x+3}};$$

$$4)\ f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}};\ 5)\ f(x)=Arctg\frac{1-x}{1+x};\ 6)\ f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}};$$

91. لتكن $(u_n)_n$ متتالية حقيقيّة حدودها موجبة، معطاة على النحو:

$$\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}^2-u_n^2=8n+5;\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

1) هات نشر u_n المعمّم من الرتبة الثانية في جوار $+\infty$.

2) هات نشر المعمّم من الرتبة الأولى في جوار $+\infty$ للدالّتين والمعطاتين بـــ:

$$\alpha_n=\cos(\pi u_n);$$
$$\beta_n=\sin(\pi u_n);\ n\in\mathbb{N}.$$

3) استنتج طبيعة المتتاليتين $(\alpha_n)_n$ و $(\beta_n)_n$.

92. لتكن الدالّة f المعرّفة على النحو:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\sqrt{1+x^2}.$$

1) ادرس تغيّرات f .

2) هات معادلة المماس لمنحنى f البيانيّ عند النقطة $(0,0)$.

3) وضّح وضعية المنحنى بالنسبة إلى هذا المماس.

4) ادرس فروع المنحنى اللاّنهائية (وجود الخطوط المقاربة ووضعية المنحنى إزاءها).

5) ارسم منحنى f .

93. عيّن الأعداد a و b و c بحيث تكون الدالّتان الآتيتان متناهيتين في الصغر من أعلى رتبة لمّا يؤول x إلى $+\infty$:

$$f(x)=Arctg\,x-x\frac{a+bx^3}{15+cx^2}\ ;\ g(x)=x+a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x.$$

94. لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ:

$$f(x)=\frac{Arctgx}{e^x-1}.$$

1) اكتب النشر المحدود من الرتبة الثالثة عند الصفر لـــ f .

2) لتكن الدالّة الحقيقيّة g المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ:

$$g(x)=\frac{xArctg\dfrac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1}.$$

أ. اكتب النشر المحدود من الرتبة الثانية في جوار ∞ لـــ g .

ب. عيّن معادلتي الخطّين المقاربين لمنحنى g عند $+\infty$ و $-\infty$.

ج. استنتج وضعية المنحنى بالنسبة للخطّين المقاربين.

95. 1) عيّن العدد ℓ لكي تكون العبارة $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}}-\ell$ متناهيا في الصغر لما $x \to +\infty$.

2) هات جزأه الرئيسيّ.

96. لتكن a و b و c ثلاث أعداد حقيقيّة و f دالّة حقيقيّة معرّفة بـــ :

$$f(x)=\frac{ax+bx^3}{1+cx^2}-Arctg\,x.$$

1) عيّن الأعداد a و b و c بحيث يكون $f(x)$ متناهيا في الصغر من أعلى رتبة في جوار الصفر.

2) ما هو الجزء الرئيسيّ لـــ $f(x)$ لما $x \to 0$ (مع احتفاظ الأعداد a و b و c بقيمها المحدّدة في (1)).

3) تأكّد من أنّ $f(-x)=-f(x)$ ، ثم احسب $f'(x)$ وعيّن إشارته.

4) اثبت أنّ المنحنى ذا المعادلة $y=f(x)$ يقبل في جوار ∞ خطّا مقاربا يطلب تعيينه.

5) ما هو سلوك f في جوار $-\infty$ ؟ ارسم المنحنى y .

97. اختبر صحّة هذه النشور المحدودة المعمّمة في جوار الصفر:

(1 $$\frac{1}{Log(1+\sin x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{12}+\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{144}+x^3\varepsilon(x);$$

(2 $$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x}+\frac{17x}{120}+x^2\varepsilon(x);$$

$$\frac{\cos x}{Log(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{7x}{12}-\frac{5x^2}{24}+\frac{41x^3}{720}+x^3\varepsilon(x);\ \ (3$$

98. 1) اعط النشر المحدود المعمّم في جوار الصفر لكلّ من هذه الدوال:

$$a)\ f(x)=\frac{1}{\sin x}, n=4;\ \ b)\ f(x)=\frac{1}{Log(1+\sin x)}, n=3;$$

$$c)\ f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}, n=3;\ \ d)\ f(x)=\frac{\cos x}{Log(1+x)}, n=3;$$

$$e)\ f(x)=\frac{1}{(Arc\sin x)^2}, n=5.$$

2) عيّن النشر المحدود المعمّم في جوار 0^+ في الحالتين التاليتين:

$$a)\ f(x)=\sqrt{x+x^2}, n=3;\ \ b)\ f(x)=\frac{Log\, x}{1+x}, n=2.$$

3) عيّن النشر المحدود المعمّم من الرتبة 2 في جوار $+\infty$ للدالّة:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}.$$

99. لتكن الدالّتان الحقيقيّتان المعطاتان على النحو:

$$f(x)=e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{1+x}};\ \ g(x)=x^2\left(e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{1+x}}\right).$$

1) هات نشر f المعمّم من الرتبة 3 في جوار ∞.

2) استنتج نشر g المعمّم من الرتبة الأولى في جوار ∞.

3) عيّن النهاية $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

4) هل يقبل منحنى g البيانيّ خطّا مقاربا في جوار ∞؟

5) إن نعم، اعط حينئذ وضعيّة المنحنى إزاء خطّه المقارب.

100. لتكن الدالّة الحقيقيّة المعطاة على النحو:

$$f(x) = Log\left(\frac{e^{2x}+3}{e^{x}+1}\right).$$

1) هات جدول تغيّرات f .

2) اثبت أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = x + Log\left(\frac{1+3e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right).$$

3) اثبت أنّ منحنى f البيانيّ يقبل خطّين مقاربين متقاطعين في نقطة A منه.

4) هات معادلة المماس عند A .

5) عيّن وضعيّة المنحنى إزاء خطّيه المقاربين.

6) ارسم منحنى f البيانيّ.

القسم الرابع

دليلان

ديوان المطبوعات الجامعية

دليل المصطلحات

انتهجنا إرجاع القارئ إلى الصفحة التي يظهر فيه المصطلح المذكور للمرّة الأولى.

2

دليل الرياضياتيّين المذكورين

عمدنا في وضع هذا الدليل إلى الإتيان بصور الرياضيّاتيّين، وتمّ إرجاع القارئ إلى أوّل صفحة ذكر فيها العالم.

ليبنيز (9)

نيوتن (9)

لاڤرانج (10)

بولزانو (10)

فيرشتراس (10)

الصورة غير متوفرة

رول (35)

دو لوبيطال (46)

تايلور (51)

كوشي (53)

ماك لوران (54)

يونــڤ (56)

لاندو (62)

مراجع

1. م. حازي: الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل، ديوان المطبوعات الجامعية، 1999.

2. م. حازي: الطلع النضيد للطالب والمعيد، دار القصبة للنشر، 2010.

3. ي. عتيق: امتحانات الرياضيات مع حلولها المفصّلة، ديوان المطبوعات الجامعية، 1992.

4. K. Allab: Eléments d'analyse, Fonctions d'une variable réelle, OPU, 1984.
5. J. M.Arnaudies, H.Frayssé: Cours de mathématiques 2, Analyse, Dunod-Université; 1988.
6. C. Baba-Hamed, K. Ben Habib : Analyse I : Rappels de cours et Exercices avec solutions, O.P.U; 1988.
7. S. Benachour: Exercices d'analyse avec solutions, Khawarysm; 1991
8. R. Couty, J.Ezra: Analyse, tome1, Armand Collin; 1967.
9. C. Deschamps, A.Warusfel: mathématiques 1[re] année; Dunod; 1999.
10. J. Dieudonné: Eléments d'analyse, tome 1, fondement de l'analyse moderne, Gauthier-Villars; 1968.
11. J. Dixmier: Cours de mathématiques du premier cycle, Gauthier-Villars; 1976
12. R. Godement: Cours d'analyse, collection enseignement des sciences, Hermann; 1980.
13. M.Hazi: S.E.M 300 par ses Examens, tome 1, O.P.U; 2004
14. D.E.Mejdadi, M.Boukra, A.Djadane, B.K.Sadallah: Analyse mathématique, fonctions d'une variable réelle, volume 1, OPU; 1994.

ديوان المطبوعات الجامعية

الفهرس

تصدير

القسم الأوّل: الاشتقاق

القسم الثاني: النشور المحدودة

النشر في جوار الصفر:

النشر في جوار نقطة x_0 (غير الصفر):

القسم الثالث: تمارين

القسم الرابع : دليلان

ديوان المطبوعات الجامعية

أنـــجز طبعه على مطابـــع

ديوان المطبوعات الجامعية

1 ، الساحة المركزية – بن عكنون –