مستوى : سنة أولى علوم دقيقة (مادة الجبر) السنة الدراسية : 2021-2020

السلسلة رقم 7 التي تتضمن مفاهيم حول الفضاءات الشعاعية

• **ملاحظة هامة !!!** إن الهدف من عرض حلول التمارين هو المراجعة و الاستفادة من أفكارها ، أما الذي يوظفها في غير هذا المحل كاستعمالها في "الغش و نحو ذلك" فنحن لسنا مسؤولون عن هذا و ليتحمل وزره أمام الله عز وجل.

• **ت(1) :** نعتبر المجموعة $E=\mathbb{R}_+^*$ المزودة بعملية الضرب $\times$ بين الأعداد الحقيقية و العملية الخارجية (.) التالية :

$$(.) : \mathbb{R}\times E \longrightarrow E; (a,x) \longrightarrow a.x = x^a$$

المطلوب : برهن أن الثلاثية $(E,\times,.)$ لها بنية فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

⊙ **الحل :** 1. نذكر أن الثنائية $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ لها بنية زمرة تبديلية عنصرها الحيادي هو الـ 1 و لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ عنصر نظير من الشكل x^{-1} ، كما ننبه أيضا أننا سنكتب xy بدلا من $x\times y$.

2. من أجل كل $x,y\in E$ و مهما يكن $a,b\in\mathbb{R}$ لدينا :

$$a.(xy) = (xy)^a = x^a y^a = (a.x)(a.y) \quad ; \quad (a+b).x = x^{a+b} = x^a x^b = (a.x)(b.x)$$
$$(ab).x = x^{ab} = \left(x^b\right)^a = a.(b.x) \quad ; \quad 1.x = x^1 = x$$

مما يدل على أن الثلاثية $(E,\times,.)$ لها بنية فضاء شعاعي على الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$.

• **ت(2) :** ليكن $(E,+,.)$ هو K - فضاء شعاعي . برهن أنه من اجل كل $x,y\in E$ و من أجل كل $a,b\in K$ يكون لدينا دوما :

$$(1)\ \ a.(x-y) = a.x - a.y \ ; \quad (2)\ \ (a-b).x = a.x - b.x \ ; \quad (3)\ \ a.x = 0_E \Longleftrightarrow (a=0_K \vee x=0_E)$$

⊙ **الحل :**

1. لدينا : $a.(x-y)+a.y = a.(x-y+y) = a.x \Rightarrow a.(x-y) = a.x - ay$

2. نتبع نفس الفكرة السابقة كما يلي : $(a-b).x + b.x = (a-b+b).x = a.x \Rightarrow (a-b).x = a.x - b.x$

3. سنتركها للطالب المهتم !!

• **ت(3) :** هل المجموعات التالية هي فضاءات شعاعية جزئية أم لا ؟

$$E_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; xy=0\right\} \ ; E_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+2y+z=0\right\}$$
$$E_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\leq 1\right\} \ ; E_4 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; e^{x+y}=1\right\}$$
$$E_5 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y=1\right\} \ ; E_6 = \{P\in\mathbb{R}[x]; P'=3\}$$
$$E_7 = \{f\in \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; f(1)=0\}$$

⊙ **الحل :**

1. المجموعة E_1 لا تمثل ف،ش،جزئي من $\mathbb{R}^2$ هذا لأن $(1,0),(0,1)\in E_1$ إلا أن $(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin E_1$ (نفس العلة بالنسبة لـ E_5 و كذلك نفس العلة بالنسبة لـ E_3 و هذا بأخذ الشعاعين $(1,0,0),(0,1,0)$).

2. إن E_2 هو ف،ش،جزئي من $\mathbb{R}^3$. التبرير : إن E_2 غير خال هذا لأن $(1,-1,1)$ هو عنصر منه . الآن نختار $X=(x,y,z)$ و $Y=(t,v,w)$ عنصرين منه ، و لنختار أيضا $a\in\mathbb{R}$ عندئذ مركبات الشعاع $a.X+Y$ هي :

$$a.X+Y=(ax+t,ay+v,az+w)$$

إن $a.X+Y$ ينتمي إلى E_2 هذا لأن :

$$(ax+t)+2(ay+v)+(az+w)=a\underbrace{(x+2y+z)}_{=0}+\underbrace{(t+2v+w)}_{=0}=0$$

و كذلك الحال بالنسبة إلى E_4 فهو أيضا ف،ش،جزئي و للتحقق من ذلك نفس الخطوات السابقة .

3. أما E_6 فهو ليس ف،ش،جزئي و E_7 هو ف،ش،جزئي (نترك تبرير ذلك للطالب المجتهد !!).

• **ت(4) :** نختار الفضاء الشعاعي $E=\mathbb{C}^3$ على الحقل المركب $\mathbb{C}$ و لتكن الأشعة الثلاثة التالية :

$$e_1=(i,1,-1)\ ;\ e_2=(-1,i,1)\ ;\ e_3=(1,-1,i)$$

1. برهن أن الأسرة $B=(e_1,e_2,e_3)$ تشكل أساسا للفضاء E .
2. هات مركبات الشعاع $v=(1+i,1-i,i)$ في هذا الأساس .

الآن نعتبر الفضاء الشعاعي F على الحقل $\mathbb{R}$ الذي يتركب من كثيرات الحدود الحقيقية بدرجة أقل من أو تساوي 2 .

3. أثبت أن الأسرة $A=\{1+x^2,x+x^2,1+2x+x^2\}$ تشكل أساسا لـ F ثم اعط مركبات الشعاع $w=1+4x+7x^2$ في هذا الأساس .

⊙ **الحل :**

1. لإثبات أن الأسرة B تشكل أساسا للفضاء E يلزم و يكفي أن نتأكد من أنها تحقق التعريف .

أ. التحقق من خاصية التوليد . ليكن $(x,y,z)\in E$ و لنبحث عن a,b,c التي تحقق المساواة التالية :

$$(x,y,z)=a.e_1+b.e_2+c.e_3=(a.i-b+c,a+b.i-c,-a+b+c.i)\quad (*)$$

إن هاته الأخيرة ما هي إلا جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل و هي a,b,c حلولها هي :

$$a=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)y-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z\ ;\ b=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}i\,(x+y+z)\ ;\ c=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}i\,(x+y+z)\quad (**)$$

و هي موجودة مهما كان العنصر المختار (x,y,z) .

ب. التحقق من خاصية الاستقلالية : من العلاقة $(*)$ أعلاه فإنه يظهر لدينا وضوحا أنه إذا كان $(x,y,z)=(0,0,0)$ فإن العلاقة $(**)$ تستلزم أن هناك ثلاثية وحيدة (a,b,c) من $\mathbb{C}$ تحقق المساواة : $a.e_1+b.e_2+c.e_3=(0,0,0)$ و هي الثلاثية $(0,0,0)$.

2. تعيين مركبات الشعاع v في الأساس B . لو نعوض الثلاثية (x,y,z) بالثلاثية $(1+i,1-i,i)$ في المساواة $(**)$ نجد أن المركبات المطلوبة هي :

$$a=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\ ;\ b=-\frac{3}{2}i\ ;\ c=1-\frac{1}{2}i$$

3. إثبات أن الأسرة A تشكل أساسا لـ F . هنا نستعمل فكرة غير التي رأيناها في السؤال (1) - حتى يستفيد القارئ أكثر - و هي التي تتضمنها القضية التالية :

- قضية : ليكن E هو K - فضاء شعاعي و B أسرة كيفية منه . عندئذ ، القضايا الثلاث التالية هي قضايا متكافئة :

ق(1) : الأسرة B هي أساس لـ E .

ق(2) : الأسرة B مولدة أصغرية [1] .

ق(3) : الأسرة B هي مستقلة أعظمية [2] .

إذن للتحقق من أن الأسرة A أساسا لـ F فيكفي (مثلا) أن نحقق من أنها "مولدة أصغرية" ، لنبدأ على بركة الله :

أ. التوليد . ليكن $P \in F$ ، إذن هو يكتب من الشكل : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \;\; ; \;\; a_i \in \mathbb{R}$

و لنبحث عن السلميات a, b, c بحيث :

$$P(x) = a.(1+x^2) + b.(x+x^2) + c.(1+2x+x^2) = (a+b+c)\,x^2 + (b+2c)\,x + (a+c)$$

بالنشر و المقارنة طرف لطرف نحصل على :

$$a = \frac{1}{2}\,(a_0 - a_1 + a_2) \;\; ; \; b = -a_0 + a_2 \; ; \; c = \frac{1}{2}\,(a_0 + a_1 - a_2) \quad (***)$$

من هنا نستنتج أن الأسرة A هي أسرة مولدة للفضاء F .

ب. التحقق من الأصغرية . لو ننزع - مثلا - العنصر $1+x^2$ من الأسرة A فإن الأسرة المتبقات $B = \{x+x^2, 1+2x+x^2\}$ لا تولد الفضاء F هذا لأن العنصر $1+4x$ (مثلا) لا يمكن له أن ينتمي إلى الفضاء المولد بالأسرة B (تحقق من هذا رحمك الله). كما أننا نحصل على نفس النتيجة إذا نزعنا العنصر $x+x^2$ أو العنصر $1+2x+x^2$.

أما لتعيين مركبات الشعاع w فيكفي أن نضع $(a_0, a_1, a_2) = (1, 4, 7)$ في العلاقة (***) لنجد أن المركبات المطلوبة هي :

$$a = 2 \; ; \; b = -6 \; ; \; c = 5$$

- **ت(5) :** نعتبر الفضاء الشعاعي المعروف $\mathbb{R}$ و لنختار منه ما يلي :

$$u = (0,4,-1) \; ; \; v = (3,-2,5) \; , \; w = (2,0,3) \; , \; E_1 = \langle u, v\rangle \;\; , \; E_2 = \langle w\rangle$$

1. أوجد أساسا لكل من الفضاءات التالية : $E_1 \; , \; E_2 \; , \; E_1 \cap E_2 \; , \; E_1 + E_2$

2. هل : $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$ ؟ برر إجابتك .

نختار الآن :

$$x = (1,-1,1) \; ; \; y = (0,-1,2) \; ; \; z = (1,-2,3) \; ; \; F = \langle x, y, z\rangle \;\; ; \; G = \{(x,y,z) \in E; x + 2y + z = 0\}$$

3. عين أساسا لكل من F و G ثم استنتج بعدهما .

4. برهن أن $F \subset G$ ثم استنتج أنهما متساويان .

5. هات مكملا لـ G في E .

[1] الأسرة B هي مولدة أصغرية ، إذا وفقط إذا كانت ، مولد لـ E + الأسرة $B - \{x\}$ $(\forall x \in B)$ لا تولد E .

[2] الأسرة B مستقلة أعظمية ، إذا وفقط إذا كانت ، B هي أسرة مستقلة + $B \cup \{x\}$ هي أسرة مرتبطة خطيا مهما يكن $x \in E - B$.

⊙ **الحل :**

1. بما أن الشعاعين u, v مستقلان خطيا (الفص ذلك) فإن الاسرة (u, v) تصبح أساسا لـ E_1 هذا لأن التوليد متوفر من معطيات التمرين. أما بالنسبة لـ E_2 فإن الشعاع w هو أساس له هذا لأنه يولدة و هو غير معدوم .
بالنسبة لـ $E_1 \cap E_2$. نلاحظ أن $2v + u = 2w$ ، مما يعني أن $E_2 \subset E_1$ ، إذن $E_1 \cap E_2 = E_2$ و اعتمادا على نفس هاته الفكرة أيضا فإنه يصبح لدينا $E_1 + E_2 = E_1$.

2. إن القضية $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$ هي قضية خاطئة هذا لأن $E_1 \cap E_2 = E_2 \neq \{0_E\}$.

3. يظهر وضوحا أن $x + y = z$ مما يعني أن الأسرة (x, y, z) هي أسرة مرتبطة خطيا ، و لهذا لو نأخذ الأسرة (x, y) نجد أنها تشكل أساسا لـ F هذا لأنها تولده (من المعطيات) و هي أيضا مستقلة خطيا (الفص ذلك) . نستنتج من هذا أن بعد F - على الحقل $\mathbb{R}$ - يساوي 2 . من المعادلة الديكارتية لـ G يظهر لنا G بأنه مستوي يمر من المبدأ ، أي أن بعده يساوي 2 (هذا لأنه مستوي من الفضاء $\mathbb{R}^3$) و لتعيين أساس له يكفي أن نختار شعاعين منه يكونا مستقلين خطيا ، إذن فلنأخذ مثلا $e_1 = (1, 0, -1); e_2 = (2, -1, 0)$.

4. لإثبات أن $F \subset G$ يكفي أن نبرهن أن أشعة أساس F تنتمي إلى G و هذا متوفر لأن :

$$1 + 2.(-1) + 1 = 0 \Rightarrow x = (1, -1, 1) \in G \quad ; \quad 0 + 2.(-1) + 2 = 0 \Rightarrow y = (0, -1, 2) \in G$$

و لما كان لهما نفس البعد فهذا يستلزم مباشرة أنهما متساويان .

5. لتعيين مكملا لـ G يكفي أن نختار شعاعا لا ينتمي إليه - و ليكن $t = (1, 1, 1)$ - ثم نأخذ الفضاء المولد بهذا الشعاع لنتحصل على ما نريد .

• **ت(6) :**

1. عين حسب قيم x رتبة الأسرة التالية : $A = \{(1, x, -1); (x, 1, x); (-1, x, 1)\}$

2. هات رتبة الأسرة التالية : $B = \{(0, 2, 1, 0); (4, 0, 2, 1); (2, 3, 1, 0); (2, -1, 2, 1)\}$

⊙ **الحل :** إذا كان x معدوما فإن رتبة الأسرة A تساوي 2 ، و إذا كان x غير معدوم فإن رتبة A تساوي 3 . أما الأسرة B فرتبتها تساوي 3 (سنترك التبرير للطالب الماهر !).

• **أسئلة مهمة حول هاته السلسلة تحتاج منك الإهتمام و التأمل :**

- لماذا نشترط على الفضاء الشعاعي أن يكون زمرة تبديلية و لم نشترط بنية جبرية أخرى ؟ لو نغير في تعريف الفضاء الشعاعي الحقل K (بحلقة A مثلا) ، ماذا يحدث ؟ لماذا - في التعريف - نشترط على الحقل K أن يكون تبديليا ؟
- هل المسلمات الأربع المذكورة في تعريف الفضاء الشعاعي متكافئة أو غير متكافئة ؟
- هل يوجد مفهوم الفضاء ات الشعاعية في أرض الواقع ؟ و ما السبب الذي جعل العلماء يطرحون هذا المفهوم؟
- متى ظهر (تاريخيا) هذا المفهوم و من كان صاحب الفضل في ذلك ؟
- ما هي فوائد و تطبيقات "الفضاءات الشعاعية" في الرياضيات و غير الرياضيات ؟

أتممنا بفضل الله تعالى ...

toufik.hh.17@gmail.com