السلسلة رقم 05 : الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

التمرين 01: تحقق مما إذا كانت المجموعات الموالية فضاءات شعاعية جزئية من $\mathbb{R}$ - فضاء شعاعي $\mathbb{R}^n$.

- $n = 2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 0\}$
- $n = 3$ $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = a\}$
- $n = 3$ $C = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$
- $n = 3$ $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

التمرين 02 : نعتبر المجموعة $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ المشكلة من التوابع النابعة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. نعرف من أجل كل f و g من $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ومن أجل λ من $\mathbb{R}$ التطبيقين

$$f + g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{array} \qquad \text{و} \qquad \lambda f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array}$$

- أثبت أن المجموعة $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ المزودة بالقانونين + و ·

$$+ : (f, g) \longrightarrow f + g \qquad \cdot : (\lambda, f) \longrightarrow \lambda f$$

$\mathbb{R}$- فضاء شعاعي.

- أثبت أن مجموعة التوابع المحدودة فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- ليكن a عدد حقيقي.
نشير بـ E إلى المجموعة الجزئية من $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ و المشكلة من التوابع f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث $f(a) = 0$.
برهن أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- أثبت أن المجموعة التالية ليست بفضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$N = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

التمرين 03: من أجل أية قيمة للعدد الحقيقي k، يكون الشعاع $X = (1, k, -5)$ من $\mathbb{R}^3$ عبارة خطية للشعاعين $a = (1, 1, 1)$ و $b = (1; 2; 3)$؟

التمرين 04: أثبت أن الأشعة التالية مستقلة خطيا في كل حالة من الحالات التالية:

- في $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, 3); \ v = (1, 1, 1); \ w = (2, -1, 1)$
- في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: التوابع f, g, h المعرفة بـ: $f(x) = Id_{\mathbb{R}}; \ g(x) = \sin x; \ h(x) = \cos(x)$

التمرين 05: برهن أن الجماعات (العائلات) التالية مرتبطة خطيا ثم غستخرج منها أكبر جماعة من حيث العدد مستقلة خطيا.

- في $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -1, 0); \ v = (-1, 0, 1); \ w = (0, 1, -1)$
- في $\mathbb{R}^4$: $u = (1, 0, 2, 0); \ v = (1, -1, 0, 1); \ w = (1, 1, 4, -1)$
- في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: التوابع f, g, h المعرفة بـ: $f(x) = \sin x; \ g(x) = \cos x; \ h(x) = \sin(x - \frac{2\pi}{3})$

التمرين 06: لتكن $C^\infty(\mathbb{R})$ مجموعة التوابع من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تقبل مشتقات من كل الرتب الطبيعية. و $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية متزايدة تماما.

- برهن أن الجماعة $\mathcal{F}_\infty = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ بحيث:

$$f_k : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(u_k x) \in \mathbb{R}$$

مستقلة خطيا في $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

- برهن أن $\mathcal{L}_\infty = (x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(u_k x) \in \mathbb{R})$ مستقلة خطيا في $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

التمرين 07: ليكن $\mathcal{F}$ الفضاء الشعاعي الحقيقي المؤلف من التوابع الحقيقية النابعة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. نضع

$$E = \{y \in \mathcal{F} \ : \ y^{(4)} = 2y^{(3)} - y'', y'(0) = 0\}$$

- تحقق أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}$.

- ليكن E_1 الفضاء الجزئي المولد بواسطة الجماعة $\{(a+bt)\exp^t, t^n\}$ في $\mathcal{F}$.
عين الأعداد a, b من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}$ التي يكون E_1 بموجبها فضاء شعاعيا جزئيا لـ E.

التمرين 08: برهن على أن الشعاع $x = (6, 2, -1)$ عبارة خطية للأشعة $a_1 = (2, 1, -3), a_2 = (3, 2, -5), a_3 = (1, -1, 1)$. ثم برهن أن a_1, a_2, a_3 أساس لـ $\mathbb{R}^3$.
أجب على الأسئلة نفسها في $\mathbb{R}^4$ بالنسبة للأشعة :

$$x = (7, -14, -1, 2), a_1 = (2, 3, 0, -1), a_2 = (1, 2, 1, 3), a_3 = (1, 3, -1, 0), a_4 = (1, 2, -1, 2)$$

التمرين 09: عين الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ الذي تولده الأشعة :

$$a_1 = (1, -1, 1, 0), a_2 = (1, 1, 0, 1), a_3 = (2, 0, 1, 1)$$

التمرين 10: إذا كانت x, y, z ثلاث أشعة من فضاء من فضاء شعاعي و كان x, z مرتبطين خطيا و z ,y مرتبطين خطيا فبرهن على أن x, y يكونان مرتبطين خطيا.
التمرين 11: إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من فضاء شعاعي E فسنرمز بـ $A+B$ للمجموعة : $\{x : x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$ و سنرمز بـ αA للمجموعة : $\{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}, x \in A\}$

- هل $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$

- الشرط اللازم و الكافي لكي تكون مجموعة جزئية A من فضاء شعاعي E فضاءا شعاعيا جزئيا من E هو أن يتحقق الشرط : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha A + \beta A \subseteq A$.

التمرين 12: إذا كان E_1, E_2 فضائين شعاعيين جزئيين من فضاء الشعاعي E يحققان الشرطين :

$$E = E_1 + E_2 \text{ و } E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

فإننا سنرمز لـ E بـ $E_1 \oplus E_2$ و سنقول عنه عندئذ إنه مجموع مباشر لـ E_1, E_2.

- إذا كان $E = E_1 \oplus E_2$ فبرهن على أن أي عنصر x من E يكتب بطرقة وحيدة على الشكل : $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ و العكس بالعكس.

- عمم ذلك على أكثر من فضائين شعاعيين جزئيين.

- هل للمساواة التالية معنى؟

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\{0\} \oplus \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} \oplus \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \oplus \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$$

التمرين 13: ليكن E فضاء شعاعي و a_1, a_2, a_3 أساسا له و u تطبيق خطي من E نحو E.

- بين أن u يكون معينا تماما إذا علمت القيم : $u(a_1), u(a_2), u(a_3)$.
- لنفرض أن :
$$u(a_1) = a_2 + a_3, u(a_2) = a_1 + a_3, u(a_3) = a_1 + a_2$$
أحسب $u(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)$.
- برهن على أن u متباين و غامر.
- عين التطبيق العكسي u^{-1}.
- عين نواة هذا التطبيق.

التمرين 14: نعتبر التطبيقين الخطيين f, g من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ حيث :

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y) \text{ و } g(x, y) = (3x - 4y, x - y)$$

- عين $Kerf$ و Imf. بين بعديهما. هل f متباين؟ هل f غامر؟
- أثبت أن g تقابلي. عين g^{-1}. إستنتج بعدي $Kerg$ و Img.

التمرين 15: ليكن u تطبيق من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ معين كمايلي : $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_1, -x_2)$.

- بين أن u تطبيق خطي.
- أحسب مصفوفة u بالنسبة للأساسين القانونيين.
- لتكن الأشعة $a_1 = (1, 1), a_2 = (0, 1), f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (0, 1, 1), f_3 = (0, 0, 1)$. أثبت أن a_1, a_2 أساس لـ $\mathbb{R}^2$ و f_1, f_2, f_3 أساس لـ $\mathbb{R}^3$.
- أحسب المصفوفة الموافقة لـ u بالنسبة للأساسين السابقين.

التمرين 16: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

عين التطبيق الموافق لـ A في كل من الحالتين التاليتين :

- بالنسبة للأساسين القانونيين.
- بالنسبة للأساسين التاليين :

$$\{(1, 1), (0, 1)\}; \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

- أحسب المصفوفة الموافقة لمجموع هذين التطبيقين بالنسبة للأساسين القانونيين، ثم بالنسبة للأساسين الواردين في السؤال السابق.

التمرين 17: v تطبيق من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^4$ معرف كمايلي :

$$v(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_1 + x_2}{3}, x_1 + x_2, x_3)$$

- بين أن v تطبيق خطي ، و أحسب مصفوفته بالنسبة للأساسين القانونيين.

- أثبت أن $g_1 = (1,1,1,1), g_2 = (0,1,1,1), g_3 = (0,0,1,1), g_4 = (0,0,0,1)$ أساس في $\mathbb{R}^4$. ثم أحسب المصفوفة الموافقة لـ v بالنسبة لهذا الأساس و بالنسبة للأساس $\{f_1; f_2, f_3\}$ الوارد في التمرين 15.

- إذا كان u التطبيق الوارد في التمرين 15 فأحسب المصفوفة الموافقة لـ $v \circ u$ النسبة للأساسين القانونيين ، ثم بالنسبة للأساسين $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}, \{f_1, f_2, f_3\}$. و كيف تصبح مصفوفة $v \circ u$ إذا إستبدلنا الأساس القانوني بـ $\{f_1, f_2, f_3\}$.

- عين رتب $u, v, v \circ u$ وإستنتج فيما إذا كانت هذه التطبيقات متباينة.

التمرين 18: عين رتبة التطبيق الخطي الوارد في التمرين 16 ، ماذا تستنتج؟

التمرين 19: لنفترض أن $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ أساس للفضاء الشعاعي E.

- برهن على أن :
$$\mathcal{A}' = \{a_1' = a_2 + a_3; a_2' = a_1 + a_3, a_3' = a_1 + a_2\}$$
أساس لـ E.

- أحسب مصفوفة الإنتقال من $\mathcal{A}$ إلى $\mathcal{A}'$ ومصفوفة الإنتقال من $\mathcal{A}'$ إلى $\mathcal{A}$.

- إذا كانت مصفوفة مركبات عنصر x من E على $\mathcal{A}$ هي $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ فأحسب مركباته على $\mathcal{A}'$.

التمرين 20: ليكن u تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^4$ معرف كمايلي :
$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, 0, x_1 + x_3)$$

- إفترض أساسين $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ في $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5$ على الترتيب و أحسب M مصفوفة u بالنسبة لهذين الأساسين.

- إفترض أساسين أخرين $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ في $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5$ على الترتيب و أحسب A^{-1} مصفوفة لإنتقال من $\mathcal{A}'$ إلى $\mathcal{A}$ ، و أحسب B مصفوفة الإنتقال من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{B}'$ ، ثم أحسب M' مصفوفة u بالنسبة للأساسين $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$.

التمرين 21: ليكن E فضاء شعاعيا و $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ أساسا له ، نرمز بـ Id_E للتطبيق المطابق على E و نعتبر التماثل u المعرف بـ :
$$\begin{cases} u(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \\ u(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \\ u(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3 \end{cases}$$

- جد المصفوفتين A و B الملحقتين بالتماثلين $u - Id_E$ و $u^2 + Id_E$ على التوالي.

- عين نواة التماثل $u - Id_E$ و أساسا لها . إستخلص قيم α, β التي تجعل الشعاع $a_1 = e_1 + \alpha e_2 + \beta e_3$ ينتمي إلى $Ker(u - Id_E)$. ما هو بعد الصورة $Im(u - Id_E)$؟

- عين $Ker(u^2 + Id_E)$ و أساسا لها . إستخلص قيم γ, δ التي تجعل الشعاعين $a_2 = e_1 + \gamma e_2$ و $a_3 = e_2 + \delta e_3$ ينتميان إلى هذه النواة.

- برهن أن الجملة $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ أساس للفضاء E. جد دونما حسابات إضافية ، مصفوفة التطبيق u^2 بالنسبة إلى الأساس $\mathcal{A}$. نرمز بـ M لهذه المصفوفة.

- هات مصفوفة الإنتقال من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{A}$ ، ثم أعد حساب المصفوفة M مستخدما مصفوفة الإنتقال هذه.

حلول السلسلة رقم 02

الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

التمرين 01:

- لدينا $A \subset \mathbb{R}^2$ و $(0,0) \in A$

ليكن (x,y) و (x',y') عنصرين من A و α, β عددين حقيقيين

لدينا $\alpha(x,y)+\beta(x',y')=(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')$

و $(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=\alpha(x+y)+\beta(x'+y')$

بما أن $(x',y')\in A$ و $(x,y)\in A$ فإن $x+y=0$ و $x'+y'=0$

ومنه $(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=0$

إذن $\alpha(x,y)+\beta(x',y')\in F$

وهكذا تكون المجموعة A فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^2$.

- نميز حالتين $a=0$ و $a\neq 0$

الحالة 01: $a=0$ لدينا:

$B \subset \mathbb{R}^3$ و $(0,0,0)\in B$

ليكن الآن، $X=(x,y,z)$ و $X'=(x',y',z')$ عنصرين من B

عندئذ يأتي:

$X+X'=(x,y,z)+(x',y'+z')=(x+x',y+y',z+z')$

و $(x+x')+(y+y')+(z+z')=(x+y+z)+(x'+y'+z')=0$

إذن $X+X'\in B.$

ومن جهة أخرى، إذا كان $X=(x,y,z)\in B$ و α عددا حقيقيا فإن

$\alpha X=\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

و $\alpha x+\alpha y+\alpha z=\alpha(x+y+z)=0$

إذن $\alpha X\in B$

وهكذا تكون المجموعة B فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$

الحالة 02: $a\neq 0$

نلاحظ في هذه الحالة أن $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin A$

ولكننا نعلم أن على كل فضاء شعاعي جزئي أن يحوي دوما العنصر الحيادي للفضاء الشعاعي، وعليه نستنتج أن B ليست فضاء شعاعي جزئيا

- C ليست فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathbb{R}^3$ لأن العنصر الحيادي $(0,0,0)$ لا ينتمي إلى C

- D ليست فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathbb{R}^3$ لأنه مثلا لو أخذنا $X=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و α

لدينا $X\in D$ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\leq 1\right)$ و $\alpha X\notin D$ $(1+1+1=3>1)$.

- التمرين 02:

- يتعلق الأمر هنا بإثبات أن المجموعة $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ المزودة بالقانونين معطيين: $+$، $\cdot$، تتحقق فيها مسلمات الفضاء الشعاعي.

لنشير إلى أن القانون $+$ داخلي و أن القانون $\cdot$ خارجي.

+ تبديلي: ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ لإثبات أن $f+g=g+f$

يكفي إثبات أن: $\forall x\in\mathbb{R}\ \ (f+g)(x)=(g+f)(x)$

لدينا: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

طبقا لتعريف القانون $+$ في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

و بما أن $\mathbb{R}$ فضاء شعاعي فإن $+$ تبديلي في $\mathbb{R}$ و مادام $f(x)$ و $g(x)$ عنصرين من $\mathbb{R}$، نستطيع أن نكتب

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

و لكن، حسب تعريف القانون $+$ في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$، يكون لدينا

$$g(x)+f(x)=g(x)+f(x)$$

(~~[illegible]~~)

و منه $\forall x\in\mathbb{R}\ \ (f+g)(x)=(g+f)(x)$.

+ تجميعي: ليكن f، g و h عناصر من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ~~[illegible]~~ نبرهن أن

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \ ((f+g)+h)(x)=(f+(g+h))(x)$$

ليكن $x\in\mathbb{R}$،

$$((f+g)+h)(x)\overset{\text{تعريفا}}{=}(f+g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x)$$

حسب تعريف القانون $+$ في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

و لكن $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ أعداد حقيقية و مجموعة الأعداد الحقيقية فضاء شعاعي، عندئذ نكتب

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

لأن $+$ تجميعي في $\mathbb{R}$.

و باستعمال، من جديد، لتعريف القانون $+$ في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$، يكون لدينا:

$$f(x)+(g(x)+h(x))=f(x)+(g+h)(x)=(f+(g+h))(x)$$

ا تأتي المساواة المطلوبة

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

- وجود العنصر الحيادي للقانون + في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ليكن φ التطبيق المعرف ب :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

لدينا $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ومن أجل كل f من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ يمكننا أن نكتب

$$(\varphi+f)(x) = (f+\varphi)(x) = f(x)+\varphi(x) = f(x)+0 = f(x) \quad \forall x \in$$

أي أن :

$$\varphi+f = f+\varphi = f$$

إذن φ هو العنصر الحيادي ل $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ، يسمى φ التطبيق المنعدم.

- وجود عنصر نظير لعنصر f من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. نرمز ب $\bar{f}$ للتطبيق المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ب

$$\bar{f}(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

لدينا :

$$(\bar{f}+f)(x) = (f+\bar{f})(x) = f(x)+\bar{f}(x) = f(x)-f(x) = 0 = \varphi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن

$$\bar{f}+f = f+\bar{f} = \varphi$$

وهكذا يكون $\bar{f}$ العنصر النظير ل f. يرمز ل $\bar{f}$ في غالب الأحيان ب $-f$

- ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و ليكن $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ لدينا عندئذ :

$$(\lambda(f+g))(x) \overset{\text{تعريفا}}{=} \lambda((f+g)(x)) \overset{\text{تعريفا}}{=} \lambda(f(x)+g(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وبما أن $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ يأتي عندئذ :

$$\lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وطبقا لتعريف القانون . ، يكون لدينا

$$\lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وبالتالي ، يأتي بإستعمال تعريف القانون + :

$$(\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g.$$

- ليكن λ و μ عددين حقيقيين و $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. لدينا عندئذ ، تعريفا

$$((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ومادام $\mathbb{R}$ فضاء شعاعيا يكون لدينا

$$(\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ولدينا من بعد ذلك بالتعريف

$$\lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن:
$$(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$$
- ليكن $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ، $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. لدينا تعريفا:
$$((\lambda\mu)f)(x)=(\lambda\mu)f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
وبما أن $\mathbb{R}$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ ، يمكن أن نكتب:
$$(\lambda\mu)f(x)=\lambda(\mu f(x))\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
وبالتعريف لدينا
$$\lambda(\mu f(x))=\lambda(\mu f)(x)=(\lambda(\mu f))(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
أي أن:
$$(\lambda\mu)f=\lambda(\mu f)$$
- ليكن f من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ من أجل 1 لدينا تعريفا:
$$(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
لأن $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$ فضاء شعاعي، ومنه
$$1\cdot f=f\quad\forall f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$
ومما سبق نستنتج أن $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

- لتكن B مجموعة التوابع المحدودة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ، لدينا
$$f\in B \iff \exists M\in\mathbb{R}_+ : |f(x)|\leq M\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
$B\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $B\neq\phi$ لأن التطبيق المعدوم محدود.
وزيادة على ذلك، إذا كان f و g من B ~~[illegible]~~
f من B يعني أنه يوجد $M\in\mathbb{R}_+$ بحيث $|f(x)|\leq M\quad\forall x\in\mathbb{R}$
g " " " $M'\in\mathbb{R}_+$ " $|g(x)|\leq M'\quad\forall x\in\mathbb{R}$
لدينا $|(f+g)(x)|=|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\quad\forall x\in\mathbb{R}$
بما أن f و g من B فإن
$$|f(x)+g(x)|\leq M+M'$$
أي أن $f+g\in B$
إذا كان $\lambda\in\mathbb{R}$ و $f\in B$ عندئذ يكون لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$
$$|(\lambda f)(x)|=|\lambda f(x)|=|\lambda||f(x)|$$
بما أن $f\in B$ فإنه يوجد $M\in\mathbb{R}_+$ بحيث $\forall x\in\mathbb{R}\ |f(x)|\leq M$
إذن $|\lambda||f(x)|\leq|\lambda||M|$
بمعنى $\lambda f\in B$

وهكذا تحقق المجموعة B للتوابع المحدودة خصائص فضاء شعاعي جزئي
- لدينا: $E\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $E\neq\phi$ لأن $\varphi(a)=0$ ومنه التطبيق المعدوم ينتمي إلى E.

$5\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \quad \ldots (٣)$

من (٤) و (٣) نجد $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

بتعويض في (١) نجد $\lambda_3 = 0$

ومنه $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

وهكذا فإن الأشعة u, v, w مستقلة خطيا.

- لتكن السلميات α, β, γ بحيث

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = \varphi$$

حيث φ هو العنصر الحيادي (التابع المعدوم) لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

ومن المساواة السابقة يأتي

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha x + \beta \sin x + \gamma \cos x = 0$

من أجل $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ يكون لدينا على الترتيب

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 = 0 \\ \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0 \\ \alpha \pi + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

ومنه $\alpha = \beta = \gamma = 0$

وهكذا $\alpha f + \beta g + \gamma h = \varphi \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

إذن تكون التوابع f, g, h مستقلة خطيا في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

تمرين ٠٢:

- نفرض أن $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

حيث α, β, γ أعداد حقيقية، عندئذ يكون لدينا:

$$\alpha(0, 1, -1) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

نحصل على الجملة التالية

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه $\alpha = \beta = \gamma$

ويتضح من ذلك أن للجملة مالا نهاية من الحلول، وتوجد إذن أعداد (سلميات) حقيقية α, β, γ غير منعدمة كلها معًا بحيث

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

التمرين 06:

نلاحظ أن من أجل كل $k\in\mathbb{N}$، التوابع $x\in\mathbb{R}\mapsto \exp(u_k x)\in\mathbb{R}$ و $x\in\mathbb{R}\mapsto \sin(u_k x)\in\mathbb{R}$ تقبل مشتقات من كل الرتب الطبيعية على $\mathbb{R}$. إذن التابعين ينتميان إلى $C^\infty(\mathbb{R})$.

البرهان يكون على مرحلتين

المرحلة 01: نبرهن أن كل عائلة جزئية منتهية من $\mathcal{F}$ من الشكل $\mathcal{F}_n=(f_k)_{0\le k\le n}, n\in\mathbb{N}$ مستقلة خطيا نستعمل البرهان بالتراجع $\mathcal{F}_n$ مستقلة خطيا. البرهان أن $n=0$ بديهية. ($\lambda_0 f_0=0$ يعني $\forall x\in\mathbb{R}, \lambda_0\exp(u_0 x)=0$ ومنه $\lambda_0=0$)

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل الرتبة n ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $n+1$

ليكن $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{R}$

نفرض أن $\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k f_k=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_{n+1}f_{n+1}=0$

أي $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k \exp(u_k x)=0 \quad \cancel{\forall x\in\mathbb{R}}\dots ①$

ما يعني $\lambda_{n+1}=-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k \exp((u_k-u_{n+1})x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \dots ②$

من المعطيات لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما ومنه $u_k<u_{n+1}$ $\forall k=\overline{1,n}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\exp((u_k-u_{n+1})x)=0$ من أجل كل $k=\overline{1,n}$

من ② نستنتج أن $\lambda_{n+1}=0$ بإدخال النهاية داخل المجموع لأن المجموع منتهٍ.

① تصبح على شكل $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sum_{k=0}^{n}\lambda_k \exp(u_k x)=0$

من فرض التراجع نستنتج أن $\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$

المرحلة 02: نبرهن أن كل عائلة جزئية منتهية من $\mathcal{F}_\infty$ مستقلة.

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أنه إذا كانت $\mathcal{F}$ عائلة جزئية من $\mathcal{F}_\infty$ فإنه يوجد بالضرورة عائلة أكبر من $\mathcal{F}$ من الشكل $\mathcal{F}_n$

برهنا في المرحلة 1 أنه من أجل كل عدد طبيعي n العائلة $\mathcal{F}_n$ مستقلة خطيا

ونعلم أنه ~~[illegible]~~ كل عائلة جزئية من عائلة مستقلة هي أيضا مستقلة

ومنه العائلة $\mathcal{F}$ مستقلة خطيا

وهكذا نكون قد برهنا أن العائلة غير منتهية $\mathcal{F}_\infty$ مستقلة خطيا وذلك لأن كل عائلة جزئية منتهية هي مستقلة.

التمرين 07:

ليكن F الفضاء الجزئي المولد بواسطة ~~[illegible]~~ العائلة (الجماعة) $\{u,v,w\}$.

نكتب حينئذ:

$$V\in F \iff \exists\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\ V=\alpha u+\beta v+\gamma w$$

إذا كانت x,y,z,t إحداثيات V بالنسبة إلى الأساس القانوني المزود به الفضاء $\mathbb{R}^4$ كتبنا من جديد

$$V=(x,y,z,t)=\alpha u+\beta v+\gamma w=(\alpha+\beta+2\gamma,\ -\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\gamma)$$

أي

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta+2\gamma \\ y=-\alpha+\beta \\ z=\alpha+\gamma \end{cases}$$

بحيث $z=\frac{1}{2}(x-y)$ و $t=\frac{1}{2}(x+y)$. ومنه:

$$F=\left\{x\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+y\left(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

نستخلص أن بعد F يساوي 2 ذلك لأن الشعاعين $\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و $\left(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ المولدين له مستقلان خطيا لأن:

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\alpha\left(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\beta\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0_{\mathbb{R}^4}$$

نحصل على الجملة

$$\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=0\\ -\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=0\\ \frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=0\end{cases}$$

التمرين 08:

- واضح أن E غير خال، لأنه يحتوي التابع المعدوم، من جهة أخرى إذا كان f_1 و f_2 من E محققا

$$f_2'(0)=0;\ f_2^{(4)}=2f_2^{(3)}-f_2'';\ f_1'(0)=0;\ f_1^{(4)}=2f_1^{(3)}-f_1''$$

ومنه:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad(\alpha f_1+\beta f_2)^{(4)}=\alpha f_1^{(4)}+\beta f_2^{(4)}$$
$$=\alpha\left(2f_1^{(3)}-f_1''\right)+\beta\left(2f_2^{(3)}-f_2''\right)$$
$$=2(\alpha f_1+\beta f_2)^{(3)}-(\alpha f_1+\beta f_2)''$$

و

$$(\alpha f_1+\beta f_2)'(0)=\alpha f_1'(0)+\beta f_2'(0)=0$$

إذن $\alpha f_1+\beta f_2$ ينتمي إلى E الذي يصبح بذلك فضاء شعاعيا جزئيا من F.

- لنضع $f(t)=(a+bt)e^t$ و $g(t)=t^n$. لكي يكون E_1 فضاء شعاعيا جزئيا من E يلزم أن ينتمي f و g إلى E. بعبارة أخرى، ينبغي الحصول على:

$$f'(0)=0\Rightarrow a+b=0\Rightarrow a=-b$$
$$g'(0)=0\Rightarrow n=0$$

الآن نتأكد أن المجموعة E_1 المولدة بواسطة $f(t)=a(1-t)e^t$ و $g(t)=1$ بنية فضاء شعاعي جزئي من E.

$E_1\neq\emptyset$ لأن $\varphi\in E_1$ [$\varphi(t)=0f(t)+0g(t)$].

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall t\in\mathbb{R}\quad \alpha f+\beta g=0$

أي $\forall t\in\mathbb{R}\quad \alpha a(1-t)e^t-\beta=0$

من أجل $t=0,t=1$ نجد

$$\begin{cases}\alpha a-\beta=0\\ \beta=0\end{cases}$$ ومنه $\alpha=\beta=0$

إذن E_1 فضاء شعاعي جزئي من E

ملاحظة: إذا كانت $a=0$ يصبح الفضاء E_1 مولد فقط بـ g وهو أيضا فضاء شعاعي جزئي لذلك لم نأخذها بعين الاعتبار في الجملة السابقة.

ت 09 :

عين الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالأشعة التالية :

$a_1 = (1;-1;1;0)$

$a_2 = (1;1;0;1)$

$a_3 = (2;0;1;1)$

نلاحظ أن :

$$a_3 = a_1 + a_2$$

نستنتج أن :

$$\langle \{a_1;a_2;a_3\} \rangle = \langle \{a_1;a_2\} \rangle$$

$$= \{x \cdot a_1 + y \cdot a_2 ; (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1;-1;1;0) + y(1;1;0;1) \ (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(x+y; y-x; x; y) ; (x;y \in \mathbb{R}\}$$

حل تمارين السلسلة الأخيرة (حول الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

الأستاذ : الهدرة توفيق

☚ لقد اخترت النصف الثاني من السلسلة لأن أغلب تمارين النصف الأول (التسعة الأولى) قد قمنا بحلها مع الطلبة في القسم.
راعينا في هاته الحلول بعض الاختصارات و التبسيطات بما يتوافق و ذهن الطالب .. و تركنا بعض الأسئلة بدون حل على أمل أن يعود لحلها ذلك الطالب المجتهد ..

ت(10).

بفرض أن x ، z مرتبطان خطيا هذا يعني أنه يوجد a من K يحقق $x=a.z$ ، و لما كان z مرتبطا خطيا مع y فإنه يوجد b من K يحقق $z=b.y$ ، من هنا نستنتج أنه يوجد c من K (بحيث $c=ab$) يحقق $x=c.y$ ، و منه المطلوب.
ملاحظة : إذا كان أحد الأشعة x,y,z معدوما فإنه يكون مرتبطا خطيا مع البقية دون توفر الشرط الأول من الاستلزام ، و لهذا فالإجابة أعلاه أتت بعد فرض أن الأشعة الثلاث (غير عدومة).

ت(11).

1. هل $a.A+b.A=(a+b).A$ ؟؟
ليكن x من $(a+b).A$ ، عندئذ يوجد t من A بحيث $x=(a+b).t=a.t+b.t$ ، و لما كان $a.t$ ينتمي إلى $a.A$ و $b.t$ ينتمي إلى $b.A$ ، فإن x يصبح عنصرا من $a.A+b.B$ ، و منه :

$$(a+b).A\subseteq a.A+b.A$$

العكس، لو نختار العنصر x بحيث $x=a.t+b.v$ مع t و v عنصران (مختلفان) من A فإنه من الواضح جدا أن x لا يساوي $a.t+b.t$ و الذي يساوي بدوره $(a+b).t$ ، إذن الاحتواء العكسي غير محقق دوما.
2. لو نفرض أن A هي ف،ش،ج ن A فإنه – حسب تعريف ف،ش،ج – من أجل كل a,b من K و من أجل كل x,y من A فإن $a.x+b.y$ يكون عنصرا من A ، مما يعني أن $a.A+b.A$ محتواة في A.
العكس ، نفرض أن $a.A+b.A$ محتواة في A و لنبرهن أن A هي ف،ش،ج من E.
أولا : A جزء غير خال من الفرض (لكن اللفظ "غير خال" سقط سهوا من تمرين السلسلة)
ثانيا : من أجل كل x,y من A فإن $a.x+b.y$ هو عنصر من $a.A+b.B$ ، و بسبب الاحتواء أعلاه ينتج لنا أن $a.x+b.y$ هو عنصر من A ، و منه المراد.

ت(12).

نفرض أن x يكتب بصيغتين مختلفتين كما يلي :
$x=x_1+x_2=y_1+y_2$ مع x_i,y_i من E_i
من هذه المساواة نستنتج أن : $x_1-y_1=y_2-x_2$
و بما أن x_1,y_1 من E_1 ، و E_1 هو ف،ش،ج من E فإن : $x_1-y_1\in E_1$ ، و كذلك الحال بالنسبة للفرق x_2-y_2 فهو ينتمي إلى E_2 ، إذن :

$$x_1-y_1=y_2-x_2\in E_1\cap E_2=\{0\}$$

و من هذا نجد :

$$x_1-y_1=y_2-x_2=0 \Longrightarrow x_i=y_i \ ;\ i=1\ ,2$$

ت(13).

ليكن E هو K- فضاء شعاعي يتمتع بأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ ، و ليكن f تطبيق خطي ينطلق من E نحو E.
تبيين أنه يكون f معينا إذا كانت القيم $f(e_i)$ معينة :
من أجل كل $X=(x,y,z)$ من E لدينا :

$$\begin{aligned}F(X)&=f((x,y,z))=f(x.e_1+y.e_2+z.e_3)\\&=f(x.e_1)+f(y.e_2)+f(z.e_3)\\&=x.f(e_1)+y.f(e_2)+z.f(e_3)\quad (*)\end{aligned}$$

من هذه الأخيرة نلاحظ بكل وضوح أن تعيين قيم $f(e_i)$ يحدد لنا تعيين عبارة f
- حساب $f(x.e_1+y.e_2+z.e_3)$:
من العبارة (*) السابقة لدينا :

$f(x.e_1+y.e_2+z.e_3)= x.f(e_1)+y.f(e_2)+z.f(e_3)$

$=x.(e_2+e_3)+y.(e_1+e_3)+z.(e_1+e_2)$

$=(y+z).e_1+(x+z).e_2+(x+y).e_3$

$=(y+z,x+z,x+y)$

- إثبات أن f متباين و غامر :

ط(1) : نستعمل تعريف التباين مباشرة ، لأجل ذلك نختار $X=(x,y,z)$ و $X'=(x',y',z')$ من E بحيث :

$$f(X)=f(X')$$

هذا يستلزم لنا مباشرة أن :

$$(y+z,x+z,x+y)=(y'+z',x'+z',x'+y')$$

الآن ، نساوي كل مركبة مع التي تقابلها :

$$y+z=y'+z' \; ; \; x+z=x'+z' \; ; \; x+y=x'+y'$$

لو نجمع المساواة الأولى مع الثانية نتحصل على : $2z'=2z$ ، و منه $z=z'$

بالتعويض في نفس المساويتين نجد مباشرة : $x=x'$ و $y=y'$ ، و منه المطلوب.

ط(2) : نقوم بتعيين Kerf كما يلي :

$Kerf=\{(x,y,z)\in E \; ; \; f((x,y,z))=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in E \; ; \; (y+z,x+z,x+y)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in E \; ; \; y+z=0,x+z=0,x+y=0\}$

$=\{(-y,y,-y)\in E \; ; \; y=-z=x=-y\} =\{(0,0,0)\}$

بما أن $Kerf=\{0_E\}$ فإن f متباين.

بالنسبة للغمر فإننا نستعمل النظرية التالية :

$$dimE=dimKerf+dimImf=dimf$$

هذا من جهة ، و من جهة أخرى لدينا $Imf\subset E$ ، إذن $Imf=E$. من هنا نستنتج أن f غامر.

ط(2)- تستعمل تعريف الغمر مباشرة (نترك شرف تطبيقها للطالب الخلوق ..

تعيين عبارة التطبيق العكسي f^{-1} : نعلم مسبقا أن ،

$$f(e_1)=e_2+e_3 \; ; \; f(e_2)=e_1+e_3 \; ; \; f(e_3)=e_1+e_2$$

الآن نقوم بتركيب f^{-1} من طرفي كل مساواة :

$$f^{-1}(e_2)+f^{-1}(e_3)=e_1$$

$$f^{-1}(e_1)+f^{-1}(e_3)=e_2$$

$$f^{-1}(e_1)+f^{-1}(e_2)=e_3$$

بعد حل هذه الجملة نجد أن :

$$f^{-1}(e_i)=1/2(e_1+e_2+e_3)-e_i \; ; \; i=1,2,3$$

أخيرا ، ما دام استطعنا تحديد القيم $f^{-1}(e_i)$ فقد حددنا f (و هذا حسب السؤال الأول من هذا التمرين).

أما $Kerf^{-1}$ فهي تساوي $\{0\}$ هذا لأن f^{-1} تطبيق تقابلي (لكونه تطبيق عكسي لتطبيق تقابلي f).

ت(14).

تعيين Kerf. لدينا :

$Kerf=\{(x,y)\in R^2 \; ; \; f((x,y))=(0,0)\}$

$=\{(x,y)\in R^2 \; ; \; (2x-4y,x-2y)=(0,0)\}$

$=\{(x,y)\in R^2 \; ; \; x-2y=0\}$

$=\{(x,y)\in R^2 \; ; \; x=2y\}$

$=\{(2y,y)\in R^2 \; ; \; y\in R\}=<(2,1)>$

نتيجة : بما أن Kerf تختلف عن الـ$\{0\}$ فإن f ليس متباين.

تعيين بعد Kerf. حسب ما سبق فإن الشعاع $(2,1)$ يولد Kerf ، و لما كان غير معدوم فهو يشكل أساسا لـ Kerf ، إذن بعد Kerf يساوي الـ 1

تعيين الـ Imf. باستعمال التعريف لدينا :

$Imf=\{f((x,y)) \; ; \; (x,y)\in R^2\}$

$=\{(2x-4y,x-2y) \; ; \; (x,y)\in R^2\}$

$=\{(x-2y).(2,1) \; ; \; x,y\in R\}=<(2,1)>$

بنفس السياق السابق ، فبما أن Imf تختلف عن R^2 فإن f ليس غامر. أما فيما يخص بعد Imf فهو يساوي الـ 1 لأن Imf=Kerf

إثبات أن g تقابلي :

إن g متباين هذا لأنه من أجل كل $X=(x,y)$ و $Y=(z,t)$ من R^2 بحيث : $g(X)=g(Y)$

يكون لدينا :

$$(3x-4y,x-y)=(3z-4t,z-t)$$

و هذا يستلزم أن :

$$3x-4y=3z-4t \; ; \; x-y=z-t$$

بتبسيط العبارتين أكثر نجد :

$$3(x-z)-4(y-t)=0 \; ; \; (x-z)-(y-t)=0 \quad (*)$$

بالتعويض الثانية في الأولى نجد :

$$3(x-z)-3(y-t)-(y-t)=0 \Longrightarrow -(y-t)=0$$
$$\Longrightarrow y=t$$

بالعودة إلى (*) نتحصل على $x-z=0$ و منه $x=z$

أما بالنسبة للغمر فلدينا :

$$g((4y-x,3y-x))$$
$$=(3(4y-x)-4(3y-x) \;;(4y-x)-(3y-x))$$
$$=(4x-3x,4y-3y)=(x,y)$$

و هذا من أجل كل (x,y) من مجموعة الوصول R^2. إذن من أجل كل صورة (x,y) توجد سابقة من الشكل $X=(4y-x,3y-x)$ تحقق : $g(X)=(x,y)$

استنتاج بعدي Kerg و Img

بما أن g تقابلي فهو متباين (إذن $Kerg=\{0\}$ و منه بعدها يساوي الـ0) و هو كذلك غامر (إذن $Img=R^2$ و منه بعدها يساوي 2).

ت(15).

لدينا f التطبيق التالي :

$$F : R^2 \dashrightarrow R^3 \; ; (x,y) \dashrightarrow (x+y,-x,-y)$$

التحقق من أن f هو تطبيق خطي : من أجل كل (x,y) ، (z,t) من R^2 ، و من أجل كل a من R لدينا :

$$F((x,y)+(z,t))=f((x+z,y+t))$$
$$=(x+z+y+t,-(x+z),-(y+t))$$
$$=(x+y+z+t,-x-z,-y-t)$$
$$=(x+y,-x,-y)+(z+t,-z,-t)$$
$$=f((x,y))+f((z,t))$$
$$F(a.(x,y))=f((ax,ay))=(ax+ay,-ax,-ay)$$
$$=a.(x+y,-x,-y)=a.f((x,y))$$

حساب مصفوفة f بالنسبة للأساسين القانونيين:

باستعمال "قاعدة مباشرة" [1] فإن المصفوفة المعنية – و التي نرمز لها بـM- تعطى بالشكل التالي :

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

التحقق من أن الأسرة :

$$\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$$

تشكل أساسا لـ R^3. بما أن عدد عناصر هذه الأسرة يساوي 3 (و هو ذاته بعد الفضاء R^3) فإنه للتحقق من أنها أساس يكفي أن نتحقق من الاستقلال الخطي لها فقط. إذن ، لتكن a_1,a_2,a_3 ثلاث أعداد حقيقية تحقق :

$$a_1.(1,1,1)+a_2.(0,1,1)+a_3.(0,0,1)=(0,0,0)$$

هذا يعني أن :

$$(a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3)=(0,0,0)$$

بمقابلة مركبة مع مركبة نستنتج مباشرة و بكل بساطة أن $a_i=0$ مع $i=1,2,3$

بالنسبة للأسرة $\{(1,1),(0,1)\}$ في R^2 نستعمل نفس الفكرة السابقة.

حساب المصفوفة M' الموافقة لـ f بالنسبة للأساسين السابقين :

$$M' = B_F^{-1} f(B_E)$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\big(f(1,1),f(0,1)\big)$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\\0&-1\end{pmatrix}$$

ت(16).

قبل البدء في حل هذا التمرين سنعطي القاعدة العامة التي تمكننا من كتابة عبارة التطبيق الخطي انطلاقا من المصفوفة المعطاة و الأساسين المرافقين ، و هي التالية :

---

[1] نذكر أنه إذا كان لدينا f تطبيق خطي ينطلق من E نحو F المزودان –على الترتيب- بالأساسين B_E و B_F فإن المصفوفة A المرافقة لـ f بالنسبة للأساسين السابقين تعطى بالشكل التالي : $A=B^{-1}{}_F f(B_E)$

مع B_F هي المصفوفة المتشكلة من أشعة الأساس B_F موضوعة على شكل أعمدة ، و $f(B_E)$ صور أشعة الأساس B_E موضوعة هي أيضا على شكل أعمدة (و B_F^{-1} مقلوب المصفوفة B_F).

$$F(X)=B_FAB_E^{-1}X^t$$

بحيث :

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

A هي التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للأساسين B_E و B_F.

X^t هو الشعاع X مكتوب على شكل عمود.

الآن سنعود إلى حل التمرين :

تعيين التطبيق الموافق لـ A في الحالتين التاليتين:

ح(1) : بالنسبة للأساسين القانونيين :

من أجل كل $X=(x,y,z,t)$ من R^4 لدينا :

$$f_1(X)$$

$$=\begin{pmatrix} x-t+z \\ t+z \end{pmatrix}$$

ح(1) : بالنسبة للأساسين

$B_E=\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$

$B_F=\{(1,1),(0,1)\}$

من أجل كل $X=(x,y,z,t)$ من R^4 لدينا :

$$f_2(X)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x-t-y+2z \\ x-2y+2z \end{pmatrix}$$

المهم القضية لا تخرج عن إطار الحسابات!!

أحسب المصفوفة المرافقة للتطبيق f_1+f_2 بالنسبة لـ :

- الأساسين القانونيين.
- الأساسين B_E و B_F

هنا تستطيع أيها الماهر أن تستعمل طريقتين :

ط(1)- هي أن تقوم بحساب العبارة :

$$f((x,y,z,t))=(f_1+f_2)(x,y,z,t)$$

ثم تطبيق عليها العلاقة $A=B^{-1}_Ff(B_E)$ كما في السؤال الأخير من التمرين 15

ط(2)- أن مصفوفة f_1 في الأساسين القانونيين موجودة و هي A ذاتها ، إذن ما علينا إلا تعيين A' و هي التمثيل المصفوفي لـ f_2 ثم نقوم بجمعها مع A لنتحصل على التمثيل المصفوفي لـ f_1+f_2 في الأساس القانوني .

و الأمر سيان حالة (الأساسين B_E و B_F) ، إذ أن مصفوفة f_2 في الأساسين B_E و B_F موجودة و هي A ذاتها ، إذن ما علينا إلا تعيين A'' و هي التمثيل المصفوفي لـ f_1 ثم نقوم بجمعها مع A لنتحصل على التمثيل المصفوفي لـ f_1+f_2 في الأساسين B_E و B_F .

ملاحظة جد هامة !!

ماذا لو جاء السؤال على $f_1 \circ f_2$ (عملية التركيب بين التطبيقات) بدل عملية الجمع كما في السؤال السابق ؟

هنا نستطيع – كما في السابق - أن تستعمل طريقتين :

ط(1)- هي أن تقوم بحساب العبارة :

$$f((x,y,z,t))=(f_1 \circ f_2)(x,y,z,t)$$

ثم تطبيق عليها العلاقة $A=B^{-1}_Ff(B_E)$ كما في السؤال الأخير من التمرين 15

ط(2)- المصفوفة المطلوبة (بالنسبة للأساسين القانونيين) ما هي إلا المصفوفة A'A (حذار الترتيب مهم في ضرب المصفوفات)

(و بالنسبة للأساسين B_E و B_F) فالمصفوفة المطلوبة هنا هي AA''. مع A هي التمثيل المصفوفي لـ f_1 في الأساسين القانونيين (و هي ذاتها التمثيل المصفوفي لـ f_2 في الأساسين B_E و B_F). A' هي التمثيل المصفوفي لـ f_2 في الأساسين القانونيين. A'' هي التمثيل المصفوفي لـ f_1 في الأساسين B_E و B_F .

ت(17)-

نفس أفكار التمرين 16

ت(18).

نقصد برتبة تطبيق خطي f هي بعد Imf و هو نفسه أكبر عدد من الأشعة (المستقلة خطيا) – سواء أخذنا الأسطر أو الأعمدة – من التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة لأي أساسين.

بالعودة إلى المصفوفة A من التمرين 16 سنختار الأسطر ، نلاحظ أن فيها سطرين فقط و هما

مستقلان خطيا بالعين المجردة فقط (إذا لا يمكن أبد أن نكتب السطر الأول كسلمية مضروبة في السطر الثاني). إذن الرتبة هنا تساوي 2

ماذا نستنتج ؟ بما أن الرتبة تساوي 2 و هي ذاتها بعد مجموعة الوصول و هي R^2 فإن التطبيق الخطي المرافق لـ A هنا هو تطبيق غامر.

ت(19).

بما أن بعد E يساوي 3 و هو نفسه عدد عناصر الأسرة A' فإنه لتبيين أن A' تشكل أساسا لـ E (يكفي) أن نبرهن أنها مستقلة خطيا ، لأجل هذا نختار ثلاث سلميات b_i مع $i=1,2,3$ تحقق :

$$b_1.a'_1+b_2a'_2+b_3a'_3=0$$

إذن :

$$b_1.(a_2+a_3)+b_2.(a_1+a_3)+b_3.(a_1+a_2)=0$$

بعد التبسيط نجد أن :

$$(b_2+b_3).a_1+(b_1+b_3).a_2+(b_1+b_2).a_3=0$$

بما أن الأسرة $\{a_i\}$ مستقلة خطيا (لأنها أساس لـ E) فهذا يستلزم أن :

$$b_2+b_3=0 \ ; \ b_1+b_3=0 \ ; \ b_1+b_2=0$$

بحل هذه الجملة البسيطة نتحصل مباشرة على :

$$b_i=0 \ ; \ i=1,2,3$$

نقصد بمصفوفة الانتقال من الأساس A إلى الأساس A' المصفوفة التي نرمز لها بـ $P_{A\to A'}$ و المعرفة على النحو التالي :

$$A'=A.P_{A\to A'} \quad (*)$$

مع $A=(a_1,a_2,a_3)$ و $A'=(a'_1,a'_2,a'_3)$ ،

أما $P_{A\to A'}$ فهي مصفوفة مربعة ذات 3 أسطر و 3 أعمدة. لاحظ عزيزي ! أنه من العبارة (*) يمكن القول أن :

$$P_{A\to A'}=A^{-1}A' \quad (**)$$

مع A^{-1} هو مقلوب المصفوفة A المتشكلة من الأشعة a_i موضوعة بشكل أعمدة.

الآن سنطبق العلاقة (**) في هذا التمرين باعتبار أن الأساس A هو الأساس القانوني لـ E ، كما يلي

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} ; A'=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

بالعودة إلى (**) نجد أن $P_{A\to A'}$ هي نفسها المصفوفة A'

العكس ، تعيين $P_{A'\to A}$:

بالرجوع دوما إلى (**) نجد أن $P_{A'\to A}$ ما هي إلا مقلوب المصفوفة A' و هي :

$$\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

قاعدة المركبات في الأساس الجديد : إذا كان لديك عنصرا X مكتوبا في أساس A و تريد أن تكتبه في أساس جديد A' فما عليك أيها الصغير ! إلا أن تستعمل القاعدة الحلوة التالية :

$$X_{A'}=P_{A'\to A}.X$$

مع $X_{A'}$ هي المركبات الجديدة لـ X (و هنا تظهر فائدة مصفوفة الانتقال).

لنجربها إذن في هذا التمرين :

$$X_{A'}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

و منه المطلوب ..

أما التمرينين 20 و 21 فسأترك حلهما على عاتق الطالب المثابر لأني أراهما طويلين ، مكررين و مملين !!

Toufik.hh.17@gmail.com