التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي

السلسلة رقم 04 — السنة الجامعية : 2022 - 2023

التمرين 1

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا ولنفرض أن التابع $f\circ f$ متزايد و $f\circ f\circ f$ تابعا متناقصا تماما.
بين أن التابع f متناقص تماما.

التمرين 2

1) بين أنه من أجل كل ثنائية $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

2) ليكن f و g تابعين مستمرين على $D\subset\mathbb{R}$، وليكن $\max(f,g)$ التابع المعرف كما يلي

$$\begin{aligned}\max(f,g):D &\to \mathbb{R}\\ x &\to \max(f(x),g(x))\end{aligned}$$

$h\left(\frac{x}{2^n}\right)-h\left(\frac{x}{2}\right)$

بين أن هذا التابع مستمر على D.

التمرين 3

ليكن $f:[a,b]\to[a,b]$ تابع مستمر بحيث $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$.

1) بين أنه يوجد $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=x_0$.
2) بين أن المعادلة $\cos x=x$ تقبل حلا محصورا بين 0 و 1.
3) أعط مثالا عن تابع مستمر $f:]0,1[\to]0,1[$ لا يقبل نقطة صامدة.

$(f(a)-a)(f(b)-b)$

التمرين 4

ليكن $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا مستمرا بحيث:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad h(x)=h\left(\frac{x}{2}\right)$$

) بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R}:\quad h(x)=h\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

بين أن التابع h ثابت.

$a<f(a)<b$

$a<f(b)<b$

مرين 5

نه من اجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$ لدينا:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

ن 6

$\to$ $f:[0,1]$ تابعا مستمرا، وليكن p و q عددين حقيقيين بحيث $p,q>0$.
يوجد $x_0\in[0,1]$ يحقق

$$pf(0)+qf(1)=(p+q)f(x_0).$$

التمرين 7

لنعتبر التابعين f, g المعرفين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1-e^{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}, & x>0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x}+1, & x\le 0 \\ 2+x\ln x, & x>0 \end{cases}$$

1) أثبت أن التابعين f و g مستمرين عند النقطة 0.
2) أدرس قابلية التابعين f و g للاشتقاق وعين مشتقهما.

التمرين 8

ليكن a و x_0 عددين حقيقيين موجبين تماما. ولنعرف

$$f: \begin{cases}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \begin{cases} a\sqrt{x}, & x<x_0 \\ x^2+1, & x\ge x_0 \end{cases} \end{cases}$$

عين قيم العددين a و x_0 حتى يكون التابع f قابلا للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين 9

لنعتبر التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x^2), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

1) تحقق من أن التابع f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$. وعين مشتقه f'.
2) هل التابع f من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$.
3) هل التابع f قابل للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

التمرين 10

ليكن b, a و c ثلاثة أعداد حقيقية.
أثبت أن المعادلة

$$4ax^3+3bx^2+2cx = a+b+c$$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[0,1]$.

التمرين 11

ليكن $a, b\in\mathbb{R}^+$ بحيث $a<b$.
1) أثبت أن

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

2) استنتج أن $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25} < \arctan\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$.

التمرين 12

ليكن التابع:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x)=x^2\sin\tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

1) برهن أن التابع f يقبل التمديد بالاستمرار عند النقطة $x_0=0$ وأعطي عبارة التمديد ولنرمز له بـ g.
2) برهن أن g يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكن g' غير مستمر عند الصفر.

= حل السلسلة 04 =

التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي =

التمرين 01 =

باستعمال البرهان بالخلف نفرض أن

f تابع متزايد من أجل $x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$\Rightarrow f^2[f(x_1)] \leq f^2(f(x_2))$

$\Rightarrow f^3(x_1) \leq f^3(x_2)$

ومنه $f\circ f\circ f = f^3$ متزايد.

وهذا تناقض مع المعطيات.

ومنه f تابع متناقص تماما.

التمرين 02 =

تبيان أن $\max(a;b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

باستعمال البرهان بفصل الحالات

$= a > b$

$a > b \Rightarrow \max(a;b) = a$ و $|a-b| = a-b$

$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b)$

$= \frac{1}{2}2a = a$. ①

$= a \leq b$

$a \leq b \Rightarrow \max(a;b) = b$ و $|a-b| = b-a$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+b-a)$

$\frac{1}{2}2b = b$ . . ②

من ① و ② نجد =

$\max(a;b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

/2

$f(x)\in\mathbb{R}$ و $g(x)\in\mathbb{R}$

$\max(f(x);g(x)) = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$

لما f و g مستمرين على D فإن

$\frac{1}{2}[f+g+|f-g|]$ مستمر

نفرض أن =

$x_0 \in D$

$\max(f(x_0);g(x_0)) = f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} \max[f(x);g(x)]$

$= \lim \frac{f(x)+g(x)+(f(x)-g(x))}{2}$

$= \lim \frac{f(x_0)+g(x_0)+f(x_0)-g(x_0)}{2}$

$= f(x_0) = \max(f(x_0);g(x_0))$

ومنه $\max(f;g)$ مستمر على D

التمرين 03 =

$\forall x \in [a;b] \qquad a \leq f(x) \leq b$

إثبات أن =

$\exists x_0 \in [a;b] \quad f(x_0) = x_0$

نضع $g(x) = f(x) - x$

f تابع مستمر على $[a;b]$.

$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$

الحالة ① = إذا كان $(f(b)=b \vee f(a)=a)$

$b = x_0 \vee a = x_0$ من $[a;b]$

الحالة 2:

إذا كان

$(f(a) \neq a \quad \wedge \quad f(b) \neq b)$

أي: $g(b) = f(b) - b < 0$

$g(a) = f(a) - a > 0$

$g(a) \cdot g(b) < 0$

من ① و ② يوجد:

$\exists x_0 \in [a;b] : f(x_0) = x_0$

/2.

يوضح $f(x) = \cos x$

f مستمرة على IR فهو مستمر على $[0;1]$.

$\cos [0;\frac{\pi}{2}] = [0;1]$

ولدينا:

$[0;1] \in [0;\frac{\pi}{2}]$

$f([0;1]) \subset f([0;\frac{\pi}{2}]) = [0;1]$

$g(x) = \cos x - x$

$g(1) < 0 \quad ; \quad g(0) = 1$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة:

$g(1) \times g(0) < 0$

$\exists x_0 \in [0;1] \quad g(x) = 0$

$\cos x_0 - x_0 = 0$

$\Rightarrow \cos x_0 = x_0$

إذن يوجد x_0 حل للمعادلة $\cos x = x$

/3. إعطاء مثال عن تابع مستمر

$f]0;1[\to]0;1[$ لا يقبل نقطة ثابتة

أي المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا.

التمرين 04:

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right)$

① تبيين أنا:

$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall x \in \mathbb{R} : h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)$

من أجل $n=1$.

$h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right)$ محققة من المعطيات

نفرض صحتها من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

$h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = h\left(\frac{x}{2^n \cdot 2}\right) = h\left(\frac{x}{2^n} \times \frac{1}{2}\right)$

$= h\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2}\right) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)$

② إثبات أن h ثابت:

لدينا: $h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$= \dots\dots = h\left(\lim \frac{x}{2^n}\right) = h(0)$

إذن h ثابت

2b:

$U_{n+1} - U_n = 0$

$U_n = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad ; U_{n+1} = h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$U_{n+1} - U_n = h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - h\left(\frac{x}{2^n}\right)$

لدينا:

$h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h(x)$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = h(x) - h(x) = 0$

التمرين 05:

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ نبين أن:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على المجال:

$x>0$ مع $[x;x+1]$

$$f(x+1)-f(x)=f'(c)$$

$$\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{\ln(x+1)-\ln(x)}$$

$$x<c<x+1$$

$$x<\frac{1}{\ln(x+1)-\ln(x)}<x+1$$

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x+1)-\ln(x)}<(x+1)\ln\left(\frac{1+1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<1<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

التمرين 06:

$f:[0;1]\to R$ تابع مستمر على $[0;1]$ بحيث $P.q>0$

$$P.f(0)+q.f(1)=(P+q).f(x_0)$$

نعتبر التابع g بحيث:

$$g(x)=Pf(0)+qf(1)-(P+q)f(x)$$

$$\Rightarrow g(0)=Pf(0)+qf(1)-(P+q)f(0)$$

$$=f(0)(P-P-q)+qf(1)$$

$$=f(0)(-q)+qf(1)$$

$$=q(f(1)-f(0)) \quad —— ①$$

$$g(1)=Pf(0)+qf(1)-(P+q)f(1)$$

$$g(1)=Pf(0)+f(1)(q-P-q)$$

$$g(1)=Pf(0)+f(1)(-P)$$

$$g(1)=P(f(0)-f(1))$$

$$g(1)=-P(f(1)-f(0)) \quad —— ②$$

$$g(0)\times g(1)=-Pq(f(1)-f(0))\leq 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل $x_0\in[0;1]$ بحيث:

$$g(x_0)=0$$

هذا يعني:

$$Pf(0)+qf(1)=(P+q)f(x_0)$$

تمرين 07:

① - إثبات أن f مستمرة عند 0:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-e^x)=0$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+1}=0$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=f(0)=0$$

ومنه f تابع مستمر عنده.

② - إثبات أن g تابع مستمر:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=2 \quad , \quad g(0)=2$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}(2+\cancel{x\ln x})=2$$

التمرين 08:

حتى يكون f قابل للاشتقاق على $]0;+\infty[$

يجب أن يكون مستمر وقابل للاشتقاق عند x_0:

لـ f مستمر عند x_0 يعني:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+1 = a\sqrt{x_0} \quad ---- ①$$

لـ f قابل للاشتقاق عند x_0 يعني:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} \quad — ②$$

من ① و ② ينتج:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a = \frac{4}{\sqrt[4]{27}} \end{cases}$$

التمرين 09:

إثبات أن f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا f معرف ومستمر عند كل قيم من $\mathbb{R}^*$.

- دراسة استمرار وقابلية الاشتقاق عنده:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{x^2\ln x^2 - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \ln x^2 = 0 = f'(0)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim x\ln x^2 = 0$$

ومنه التابع f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = g(0) = 2$$

⇐ ومنه g تابع مستمر.

2/ - دراسة قابلية الاشتقاق على:

$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ لأنها

مشكلة من دالتين قابلتين للاشتقاق الأولى

على $]-\infty;0[$ والثانية على $]0;+\infty[$.

دراسة قابلية الاشتقاق عنده.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$$

ومنه g غير قابلة للاشتقاق عنده.

وبالتالي هي قابلة للاشتقاق فقط على $\mathbb{R}^*$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$$g(x) \begin{cases} -e^x & : x<0 \\ 1+\ln x & : x>0 \end{cases}$$

دراسة قابلية الاشتقاق عنده.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{e^x - 1}{x(e^x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

ولدينا: $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$\lim \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

عبارة $f'(x)$ =

$$f'(x)=\begin{cases} 2x(1+\ln x^2) ; & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

2/- دراسة استمرارية f' على IR.

الدالة f' عبارة عن ضرب ومركب دوال مستمرة على IR^* إذن هي مستمرة على IR^*.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x(1+\ln x^2)$$

$$= \lim_{x\to 0}(2x+2x\ln x^2)$$

$$\lim f'(x) = \lim 2x\ln x^2$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} 4x\ln x = 0 = f'(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} 4x\ln(-x) = \lim(-4)(-x)\ln(-x) = 0 = f'(0) \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f(0)$$

إذن f' مستمرة على IR.

ومنه f من الصنف C^1.

3/- هل f قابل للاشتقاق مرتين.

حتى يكون f قابل للاشتقاق مرتين على IR إذا كان قابل للاشتقاق عنده.

• دراسة قابلية الاشتقاق عنده.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(1+\ln x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2(1+\ln(x^2)) = -\infty$$

غ قابلة للإشتقاق مرتين.

التمرين 10:

إثبات أن المعادلة:

$$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c \quad \text{...} \ (I)$$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$

نعتبر:

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$$

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x=0$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow f(1)=f(0)$$

إذن حسب نظرية رول يوجد:

$$[0;1] \supset \ ]0;1[\ \exists \alpha$$

$$f'(\alpha)=0$$

ومنه α حل للمعادلة (I).

التمرين 11:

تذكير:

إذا كان f مستمر ورتيب على I

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1}

ولدينا $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

ولدينا:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)}$$

$$f(x)=\tan x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\arctan x$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

إثبات أن :

$$\frac{b-a}{b^2+1} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{a^2+1}$$

نعتبر التابع

تابع $a \longrightarrow \arctan b$

مستمر وقابل للاشتقاق باستعمال

التزايدات المنتهية

$\exists c \in]a;b[$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c^2+1}$$

$$\arctan - \arctan a = \frac{1}{c^2+1}(b-a)$$

$$c \in]a;b[\Rightarrow a < c < b$$

$$a^2+1 < c^2+1 < b^2+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2+1} < \frac{1}{c^2+1} < \frac{1}{a^2+1}$$

$$\frac{b-a}{b^2+1} < \frac{b-a}{c^2+1} < \frac{b-a}{a^2+1}$$

$$\frac{b-a}{b^2+1} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{a^2+1}$$

2- استنتاج أن :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

نأخذ: $a = 1$ و $b = \frac{4}{3}$

$\arctan a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \tan \frac{\pi}{4}$

$a = 1$

$\arctan \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$

ومنه

$$\frac{b-a}{1+b^2} = \frac{3}{25} < \arctan \frac{4}{3} - \arctan 1 < \frac{1}{6} = \frac{b-a}{1+a^2}$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

حل التمرين 1 :

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

① البرهان أن f يقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

حتى يقبل التابع f تمديدا بالاستمرار عند 0 يجب أن يتحقق

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

لدينا
$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

ومنه
$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

بما أن
$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

فإن حسب مبرهنة الحصر نجد:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

وعليه f يقبل تمديد بالاستمرار عند 0 .

وتمديده هو:

$$g(x) \begin{cases} f(x) \; ; & x \neq 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \end{cases}$$

أي

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \; ; & x \neq 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \end{cases}$$

② - لدينا g قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنه جداء تابعين قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

- لندرس قابلية اشتقاق g عند 0 :

g يقبل الاشتقاق عند 0 إذا كان :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$$

لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$

إذن g يقبل الاشتقاق عند 0 وعليه g قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

عبارة المشتقة :

$$\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & ; x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- نبين أن g' غير مستمر عند 0 :

نأخذ $x_n = \frac{1}{2\pi n}$

لدينا $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$

$$g'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -\cos(2n\pi) = -1 \neq g'(0)$$

<u>حل التمرين</u> :

① لنبين أن المعادلة $x^5 = x^2 + 2$ تقبل حلا في $]0;2[$

لنعتبر التابع :

$$f :]0;2[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^5 - x^2 - 2$$

f مستمر (كثير حدود) ،

$f(0) = -2$

$f(2) = 26$ $\Rightarrow g(0) \times f(2) = -52 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة : $f(x) = 0$ تقبل حلا $x_0 \in]0;2[$