المتتاليات العددية

التمرين 1

باستعمال تعريف نهاية متتالية، بين أن المتتالية ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n+1}$ متقاربة نحو 0.

التمرين 2

أدرس تقارب المتتاليات العددية التالية:

$$1) \quad u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}.$$

$$2) \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

$$3) \quad w_n = \frac{n^2}{4n^3+1} + \frac{n^2}{4n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{4n^3+n}.$$

التمرين 3

بين أن المتتالية ذات الحد العام

$$u_n = \frac{1+2!+\cdots+n!}{n!}.$$

متقاربة.

التمرين 4

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين معرفتين من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2}. \\ v_{n+1} &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}. \end{cases}$$

بحيث: $0 < v_0 < u_0$.

1) بين أن: $0 < v_n < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$.

2) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما وأن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

3) استنتج تقارب المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) اثبت أن للمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نفس النهاية.

5) تحقق أن: $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$.

ثم استنتج أن المتتالية $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة.

استنتج قيمة نهاية المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين 5

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \sqrt{2u_n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $0 \le u_n \le 3$.

2) أثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة.

3) أستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وعين نهايتها.

التمرين 6

لنعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n+1}{2u_n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة تماما.
2) أثبت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (u_{n+1}-u_n)(u_n-u_{n-1}) \geq 0.$$

3) برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
4) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ في حالة تقاربها أحسب نهايتها.

التمرين 7

لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي:

$$\begin{cases} 0 < u_0 < 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+(-1)^n u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

هل هذه المتتالية متقاربة ؟

التمرين 8

أدرس تجاور المتتاليتين التاليتين:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

التمرين 9

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين بحيث:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n, v_n \in [0,1] \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1 \end{cases}$$

برهن أن: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

التمرين 10

باستعمال المتتاليات الكوشية برهن أن المتتالية ذات الحد العام $u_n = (-1)^n$ متباعدة.

التمرين 11

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بـ: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$.
1) بين أن: $\forall n \geq 2, \quad n^n \geq 2^n$.
2) أدرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين 12

لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 &= 2 \\ u_{n+1} &= \sqrt{2-u_n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1) تأكد أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ معرفة جيدا.
2) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

حل التمرين 1 :

تبيين أن المتتالية ذات الحد العام $U_n = \frac{1}{n+1}$ متقاربة نحو 0.

$$|U_n - 0| = \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \ : n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - 0| < \varepsilon$$

ومنه (U_n) متقاربة نحو 0.

حل التمرين 05 =

1-

$$\lim U_n = \lim \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \lim \frac{n\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)}$$

$$\lim \frac{2+\overbrace{\frac{(-1)^n}{n}}^{\text{صفر}}}{5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \frac{2}{5}$$

ومنه هي متقاربة

2-

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

$$= 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n} > \sqrt{n}$$

$\lim \sqrt{n} = +\infty$

ومنه حسب طريقة المقارنة

$\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$ ومنه (V_n)

متباعدة

ومنه (V_n) متباعدة و $\lim V_n = +\infty$

$$3 = W_n = \frac{n^2}{4n^3+1} + \frac{n^2}{4n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{4n^3+n}$$

$$W_n \geqslant \frac{n^2}{4n^3+n} + \frac{n^2}{4n^3+n} + \frac{n^2}{4n^3+n} + \dots + \frac{n^2}{4n^3+n} = \frac{n n^2}{4n^3+n}$$

$$W_n \geqslant \frac{n^3}{4n^3+n} \quad \dots\dots (1)$$

$$W_n \leqslant \frac{n^2}{4n^3+1} + \frac{n^2}{4n^3+1} + \dots + \frac{n^2}{4n^3+1} = \frac{n \cdot n^2}{4n^3+1}$$

$$W_n \leqslant \frac{n^3}{4n^3+1} \quad \text{——} (2)$$

$$\frac{n^3}{4n^3+n} \leqslant W_n \leqslant \frac{n^3}{4n^3+1} \quad \dots (2), (1) \text{ من}$$

$$\lim \cancel{\frac{n^3}{4n^3+n}} \, {}^{1/4} \leqslant \lim W_n \leqslant \lim \cancel{\frac{n^3}{4n^3+1}} \, {}^{1/4}$$

$$\lim W_n = \frac{1}{4} \qquad \text{ومنه}$$

حل التمرين ③ :

تبيين أن المتتالية ذات الحد العام $U_n = \frac{1+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$

متقاربة.

لدينا :

$$U_n = \frac{1+2!+3!+\cdots+n!}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{2!}{n!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1+2!+\cdots+(n+1)!}{(n+1)!} - \frac{1+2!+\cdots+n!}{n!}$$

$$= \frac{1+2!+\cdots+n!+(n+1)! - \left[(1+2!+\cdots+n!)(n+1)\right]}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)! - n(1+2!+\cdots+n!)}{(n+1)!} = \frac{n! - n(1+2!+\cdots+(n-1)!)}{(n+1)!}$$

$$= -\frac{(1+2!+\cdots+(n-2)!)}{(n+1)!} < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة تماما ومنه محدودة من الأسفل بـ 0

وهي ذات حدود موجبة فهي متقاربة

حل التمرين 04 :

① - بيان أنّ :

$\forall n \in \mathbb{N} \; ; 0 < v_n < U_n$

باستعمال البرهان بالتراجع :

من أجل $n=0$ لدينا : $0 < v_0 < U_0$

- الفرضية: نفرض $0<v_n<u_n$ محققة.

- البرهان: نبرهن صحتها عند $n+1$ أي:

$0<v_{n+1}<u_{n+1}$

لدينا:

$$u_n>0 \Rightarrow u_n+v_n>0 \Rightarrow \frac{u_n+v_n}{2}>0 \Rightarrow u_{n+1}>\frac{v_n}{2} \Rightarrow u_{n+1}>0$$

$$v_n>0 \Rightarrow 2u_nv_n>0 \Rightarrow \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}>0 \Rightarrow v_{n+1}>0$$

- ومنه يكفي برهان أن:

$u_{n+1}-v_{n+1}>0$: $u_{n+1}>v_{n+1}$

$$\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}=\frac{(u_n+v_n)(u_n+v_n)-2(2u_nv_n)}{2(u_n+v_n)}=\frac{(u_n+v_n)^2-2(2u_nv_n)}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{u_n^2+v_n^2+\cancel{2u_nv_n}-\cancel{4}u_nv_n}{2(u_n+v_n)}=\frac{u_n^2+v_n^2-2u_nv_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}>0$$

ومنه فإن $0<u_n<v_n$ محققة وهذا هو المطلوب.

2) تبيين أن $(u_n)_{n\in N}$ متناقصة تماما و $(v_n)_{n\in N}$ متزايدة تماما.

- تبيين أن $(u_n)_{n\in N}$ متناقصة تماما يكفي إثبات أن

$u_{n+1}-u_n<0$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{v_n+u_n}{2}-u_n=\frac{v_n+u_n-2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}<0 \Rightarrow u_{n+1}-u_n<0$$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

← تبيين أن $(v_n)_{new}$ متزايدة تماما

يكفي إثبات أن $v_{n+1}-v_n>0$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-v_n=\frac{2u_nv_n-v_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n}=\frac{2u_nv_n-u_nv_n-v_n^2}{u_n+v_n}$$

$$=\frac{u_nv_n-v_n^2}{u_n+v_n}=\frac{v_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n}>0$$

$$v_{n+1}-v_n>0$$

ومنه (v_n) متزايدة تماما.

3- استنتج تقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n)

← المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومنه فهي محدودة من الأسفل ومنه فهي متقاربة كون $u_n>0$ محدودة ب 0.

← المتتالية (v_n) متزايدة تماما ومنه فهي محدودة من الأعلى ومنه فهي متقاربة.

4): إثبات أن (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية

(u_n) متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ / $\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell$ / $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

$\Rightarrow u_n, v_n$ متجاورتان

← نستعمل البرهان بالخلف:

نفرض أن القضية خاطئة وأن نقيضها صحيح.

⇐ أي أن (u_n) و (v_n) ليس لهما نفس النهاية

نضع: $\lim u_n=\ell$ و $\lim v_n=\ell'$ بحيث $\ell\neq\ell'$

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\Rightarrow \ell=\frac{\ell+\ell'}{2}\Rightarrow 2\ell=\ell+\ell'\Rightarrow 2\ell-\ell=\ell'\Rightarrow\boxed{\ell=\ell'}$$

$$v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\Rightarrow \ell'=\frac{2\ell\ell'}{\ell+\ell'}\Rightarrow \ell'(\ell+\ell')=2\ell\ell'\Rightarrow \ell\ell'+\ell'^2=2\ell\ell'$$

$$\Rightarrow \ell'^2=\ell\ell'$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell'=\ell}$$

وهذا ينافي فرضية $\ell \neq \ell'$ ومنه فإن (V_n) و (U_n) لهما

نفس النهاية ℓ.

$\lim U_n = \lim V_n = \ell$

5) التحقق أن: $U_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

لدينا: ونعلم $U_{n+1}\cdot V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \cdot \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} = U_nV_n$

استنتاج أن المتتالية $(V_nU_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة. نضع $W_n = U_nV_n$

لتكن متتالية ثابتة يجب أن يكون:

$W_{n+1} = W_n = \dots = W_0 \Rightarrow U_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n = \dots = U_0V_0$

ومما سبق: $U_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n$

فإن المتتالية (W_n) متتالية ثابتة.

استنتاج قيمة نهاية (V_n) و (U_n):

$U_n > 0 \Rightarrow U_n \cdot V_n > 0$

$W_{n+1} = W_n = \dots = W_0 \Rightarrow U_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n = \dots = U_0V_0$

$U_n > V_n > 0$

$\lim U_n \geq \lim V_n \geq 0$

بحيث $\lim V_n = \lim U_n = 0$

ومنه قيمة نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n) هي 0

حل ت 5 :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

① بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$0 \leq U_n \leq 3$$

باستعمال البرهان بالتراجع :

Ⅰ نبرهن على صحتها من أجل $n=0$ أي $0 \leq U_0 \leq 3$

لدينا : $U_0 = 0$

$$0 \leq 0 \leq 3$$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

Ⅱ نفرض أن $0 \leq U_n \leq 3$ محققة و نبرهن من أجل $n+1$ أي نبرهن $0 \leq U_{n+1} \leq 3$.

لدينا : $0 \leq U_n \leq 3$

$$0 \leq 2U_n \leq 6$$

$$0 \leq 2U_n + 3 \leq 9$$

$$0 \leq \sqrt{2U_n+3} \leq 3$$

$$0 \leq U_{n+1} \leq 3$$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه $0 \le U_n \le 3$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2- إثبات أن (U_n) رتيبة

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{2U_n+3}-U_n=\frac{(\sqrt{2U_n+3})^2-U_n^2}{\sqrt{2U_n+3}+U_n}$$

$$=\frac{2U_n+3-U_n^2}{\sqrt{2U_n+3}+U_n}$$

لدينا : $(\sqrt{2U_n+3}+U_n)>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-U_n^2+2U_n+3$.

U_n	0		3
$U_{n+1}-U_n$		$+$	

ومنه (U_n) متزايدة تماما (رتيبة).

3- استنتاج أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

لدينا $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

- تعيين نهايتها :

$$0 \le U_n \le 3$$

$$\Rightarrow \lim 0 \le \lim U_n \le \lim 3$$

$$0 \le \lim U_n \le 3$$

وبما أن (U_n) متزايدة فإن $\lim U_n = 3$

حل ت 06 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{2U_n + 3} \end{cases} , \forall n \in \mathbb{N}$$

① - تبيين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة تماما .

أي $0 < U_n$.

⇐ باستعمال البرهان بالتراجع :

(I) نبرهن على صحتها من أجل $n=0$ أي : $0 < U_0$

لدينا :

$U_0 = 1$

$0 < 1$

ومنه محققة من أجل $n=0$.

(II) نفرض $0 < U_n$ ونبرهن $0 < U_{n+1}$

لدينا :

$0 < U_n$

$1 < U_n + 1$.

ولدينا : $U_n > 0 \Leftarrow 2U_n > 0$ $2U_n + 3 > 0$

وبما أن كلا من البسط والمقام موجب فإن

$\dfrac{U_n + 1}{2U_n + 3} > 0$.

$U_{n+1} > 0$.

ومنه الخاصية $0 < U_n$ محققة من أجل $\forall n \in \mathbb{N}^*$

13

25

12

② إثبات أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (U_{n+1}-U_n)(U_n-U_{n-1}) \geq 0$$

لدينا :

$$U_{n+1}-U_n = \frac{U_n+1}{2U_n+3} - \frac{U_{n-1}+1}{2U_{n-1}+3} = \frac{(U_n+1)(2U_{n-1}+3)-(U_{n-1}+1)(2U_n+3)}{(2U_n+3)(2U_{n-1}+3)}$$

$$= \frac{\cancel{2U_nU_{n-1}}+3U_n+2U_{n-1}+\cancel{3}-(\cancel{2U_nU_{n-1}}+3U_{n-1}+2U_n+\cancel{3})}{(2U_n+3)(2U_{n-1}+3)}$$

$$= \frac{U_n-U_{n-1}}{(2U_n+3)(2U_{n-1}+3)}$$

$$U_{n+1}-U_n = \frac{U_n-U_{n-1}}{(2U_n+3)(2U_{n-1}+3)}$$

$$(U_{n+1}-U_n)(U_n-U_{n-1}) = \frac{(U_n-U_{n-1})^2}{(2U_n+3)(2U_{n-1}+3)} \geq 0$$

$$\Rightarrow (U_{n+1}-U_n)(U_n-U_{n-1}) \geq 0$$

③ البرهان أن (U_n) متتالية متناقصة ،

نستعمل الدالة المرفقة.

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+3} \quad [0;+\infty[$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)-2(x+1)}{(2x+3)^2} = \frac{\cancel{2x}+3-\cancel{2x}-2}{(2x+3)^2} = \frac{1}{(2x+3)^2} > 0$$

ومنه $f(x)$ متزايدة ومنه (U_n) رتيبة

حيث $U_0 = 1 > U_1 = \frac{2}{5}$

ومنه (U_n) متناقصة.

4- نعم (U_n) متقاربة لأن (U_n) مستقيمة ومحدودة من الأسفل بـ 0 ومنه فهي متقاربة.

← حساب نهايتها:

$$\lim U_{n+1} = \lim U_n = \ell$$

ومنه $\ell = \frac{\ell+1}{2\ell+3} \Rightarrow \ell(2\ell+3) = \ell+1$

$$2\ell^2 + 3\ell - \ell - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \ell_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \ell = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ مرفوض (حدود U_n موجبة)

ومنه $\lim U_n = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

حل ت 07:

$$\begin{cases} 0 < U_0 < 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نفرض أنها متقاربة نحو ℓ. بحيث $\ell > 0$ ومنه:

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim U_n = \lim U_{2n} = \lim U_{2n+1} = \ell$$

$$\begin{cases} U_{2n} = \sqrt{2 + U_n} \\ U_{2n+1} = \sqrt{2 + (-U_{2n})} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell = \sqrt{2+\ell} \\ \ell = \sqrt{2-\ell} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2+\ell} = \sqrt{2-\ell} \Rightarrow \ell = 0$$

وهذا تناقض ومنه (U_n) ليست متقاربة.

حل ت 08 =

لدينا =

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$U_n - V_n = \cancel{U_n} - \cancel{U_n} - \frac{1}{n!} = -\frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to \infty} -\frac{1}{n!} = 0$$

دراسة اتجاه تغير :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

ومنه (U_n) متزايدة تماما :

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n!} = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

حيث $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

وعليه (U_n) متناقصة

إذن المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان :

حل ت 09 :

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ U_n, V_n \in [0;1] \\ \lim\limits_{n\to\infty} U_n \lim\limits_{n\to\infty} V_n = 1 \end{cases}$$

إثبات أن $\lim U_n = 1 = \lim V_n$

لدينا :

$\forall n\in\mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 1$

كما أن $V_n \in [0;1]$ فإن لدينا :

$0 \leq U_n V_n \leq V_n \leq 1$

كما أن $\lim U_n V_n = 1$ فإن :

$1 \leq \lim V_n \leq 1$

ومنه حسب نظرية الحصر

$\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 1$

ولدينا : $0 \leq V_n \leq 1$

$0 \leq V_n U_n \leq U_n \leq 1$

ومنه $\lim U_n V_n \leq \lim U_n \leq 1$

$1 \leq \lim U_n \leq 1$

ومنه $\lim U_n = 1$

حل ت 10 :

إثبات أن $U_n=(-1)^n$

يكفي إثبات أن : (U_n) ليست كوشية معناه :

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\exists m,n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq N \wedge m \geq N \wedge |U_m - U_n| > \varepsilon$

نأخذ
$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \\ m=2N \quad \text{و} \quad n=2N+1 \end{cases}$$

نجد :

$$|U_m-U_n| = 1+1 = 2 > \varepsilon$$

ومنه (U_n) متباعدة.

حل ت 12 :

$$U_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{n^n}$$

1- تبيين أن $n^n \geq 2^n$ ، $\forall n \geq 2$

I) نبرهن من أجل $n=2$ 1.5

$2^2=4$

$2^2=4$

ومنه محققة من أجل $2^2 \geq 2^2$ ، $n\in\mathbb{N}$ ، $n\geq 2$

II) نفرض أن $n^n \geq 2^n$ صحيحة ونبرهن $(n+1)^{n+1} \geq 2^{n+1}$

لدينا $\forall n \geq 2$

$$n^n \geq 2^n \Rightarrow n^n\cdot n \geq 2^n \cdot n$$

$$\Rightarrow n^{n+1} \geq 2^n\cdot n \geq 2^n \cdot 2$$

$$\Rightarrow n^{n+1} \geq 2^{n+1}$$ وهو

$\forall n \geq 2$ - (2b)

$\ln n \geq \ln 2 \Rightarrow n\ln n \geq n\ln 2$

$\Rightarrow \ln n^n \geq \ln 2^n$

$\Rightarrow e^{\ln n^n} \geq e^{\ln 2^n}$

$\Rightarrow n^n \geq 2^n$ وهو م

(2) - دراسة تقارب $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}$

$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$

أ- ندرس رتابة (U_n) :

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^* : U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$

$= \frac{1}{(k+1)^{n+1}} > 0$

ومنه $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

ب- ندرس محدودية (U_n) من الأعلى:

$\forall k \geq 2 : k^k \geq 2^k \Rightarrow \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow U_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} < 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow U_n < \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$\Rightarrow U_n < 2$

ومنه (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2 وبما أنها متزايدة تماما فهي متقاربة نحو حدها الأعلى ونهايتها $\ell \leq 2$.

حل ت 12 :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{2-U_n} \end{cases}$$

2/ - تبيين أن (U_n) متقاربة :

① - ندرس رتابة (U_n) :

نضع : $f(x) = \sqrt{2-x}$; $x \in [0;2]$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0$. $\forall x \in]0;2[$

وبالتالي f متناقصة تماما إذن (U_n) ليست رتيبة

ولكن (U_{2n}) و (U_{2n+1}) رتيبتان إحداهما متزايدة

والأخرى متناقصة (متعاكستان في الاتجاه).

② - ندرس تقارب (U_{2n}) و (U_{2n+1}) :

لدينا حسب س① :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq U_{2n} \leq 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_{2n+1} \leq 2 \end{cases}$$

ومنه (U_{2n}) و (U_{2n+1}) محدودتان وبما أنهما رتيبتان

فهما متقاربتان .

③ - هل (U_{2n}) و (U_{2n+1}) لهما نفس النهاية ؟

أو هل تتقاربان نحو نفس النهاية ؟

نفرض أن :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} U_{2n} = \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = \ell' \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} U_{2n+1} = \sqrt{2 - U_{2n}} \\ U_{2n+2} = \sqrt{2 - U_{2n+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} U_{2n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2 - U_{2n}} \\ \lim\limits_{n \to \infty} U_{2n+2} = \lim \sqrt{2 - U_{2n+1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell' = \sqrt{2 - \ell} \\ \ell = \sqrt{2 - \ell'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell'^2 = 2 - \ell \\ \ell^2 = 2 - \ell' \end{cases}$$

$$\ell'^2 - \ell^2 = 2 - \ell - 2 + \ell'$$

$$\ell'^2 - \ell^2 = -\ell + \ell'$$

$$\ell'^2 - \ell^2 = \ell' - \ell$$

$$(\ell' - \ell)(\ell' + \ell) = (\ell' - \ell)$$

$$(\ell' - \ell)(\ell' + \ell) - (\ell' - \ell) = 0$$

$$(\ell' - \ell)(\ell' + \ell - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell' - \ell = 0 \Rightarrow \ell' = \ell \\ \ell' + \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell' + \ell = 1 \Rightarrow \ell' = 1 - \ell \end{cases}$$

$$\ell^2 = 2 - 1 + \ell$$

$$\ell^2 - \ell - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell' = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61$$

ومنه $\ell = \ell'$

وعليه (U_{2n}) و (U_{2n+1}) تتقاربان نحو نفس النهاية ℓ.

.حساب النهاية:

لدينا:

$$\ell = \sqrt{2-\ell'} \qquad / \ \ell = \ell'$$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{2-\ell}$$

$$\Rightarrow \ell^2 = 2-\ell$$

$$\Rightarrow \ell^2+\ell-2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell = -2 & \text{مرفوض} \\ \ell = 1 \end{cases}$$

ومنه: $\lim U_n = 1$

ومنه (U_n) متقاربة نحو 1