السلسلة رقم 03 : البنى الجبرية

التمرين 01: لتكن $\top$ عملية داخلية في $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^*$ معرفة كمايلي $(x_1,y_1)\top(x_2,y_2)=(x_1+2x_2,\frac{y_1y_2}{2})$

- أدرس خاصيتي التبديل والتجميع للقانون $\top$.
- أثبت أنه يوجد عنصر حيادي في $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^*$ للقانون $\top$ و أن لكل عنصر من $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^*$ نظيرا بالنسبة إلى العملية $\top$.

التمرين 02 : نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بالشكل :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\top y=ax+by+c \text{ حيث } (a,b,c)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^*$$

عين الأعداد a,b,c بدلالة عدد حقيقي e بحيث تكون $(\mathbb{R},\top)$ زمرة ذات العنصر الحيادي e.

التمرين 03: x,y عددان حقيقيان من المجال $]-1,1[$. من أجل كل ثنائية (x,y) نرفق العدد α المعرف بالشكل : $\alpha=x\top y=\frac{x+y}{1+xy}$

برهن أن القانون $\top$ داخلي على المجال $]-1,1[$، وأن $(]-1,1[,\top)$ زمرة تبديلية.

التمرين 04: برهن أن القانون $\top$ المعرف ب $x\top y=\frac{x+y}{1+xy}$ يضفي على المجال $]-1,1[$ بنية زمرة آبيلية.

التمرين 05: نعرف في $\mathbb{Q}^2$ القانون $\top$ بالشكل :

$$\forall(x_1,y_1)\mathbb{Q}^2,\forall(x_2,y_2)\in\mathbb{Q}^2\ :\ (x_1,y_1)\top(x_2,y_2)=(x_1x_2,x_1y_2+y_2)$$

(a,b) عنصر معطى من $\mathbb{Q}^2$. لنعرف التطبيق $f_{a,b}:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}$ بالشكل: $f_{a,b}(x,y)=(a,b)\top(x,y)$.

1- أدرس خاصيتي التبديل والتجميع للقانون $\top$.

2- أثبت أنه يوجد في $\mathbb{Q}^2$ عنصر حيادي للقانون $\top$.

3- برهن أن التطبيق $f_{a,b}$ هو تطبيق متباين إذا وفقط إذا كان $a\neq 0$.

4- برهن أنه إذا كان $a=-1$ أو $a=1$ فإن $f_{a,b}$ غامر.

التمرين 06: لتكن $(E,\top)$ زمرة و A,B مجموعتين جزئيتين من E. برهن أنه إذا كان A,B زمرتين جزئيتين من E فإن $A\cap B$ هي أيضا زمرة جزئية من E. هل $A\cup B$ زمرة جزئية من E؟

التمرين 07: نعرف في $\mathbb{C}$، قانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف كمايلي $\forall(x,y)\in\mathbb{C}^2\ x\top y=\Re(x)\Re(y)+i(\Re(x)\Im(y)+\Re(y)\Im(x))$.

1- بين أن $\top$ تبديلي، تجميعي ويقبل $e=1$ كعنصر حيادي في $\mathbb{C}$. هل $(\mathbb{C},\top)$ زمرة؟

2- نضع $F=\{x\in\mathbb{C}\ :\ \Re(z)\neq 0\}$، بين أن $(F,\top)$ زمرة آبلية.

3- نضع $G=\{x+ix\ln|x|\ x\in\mathbb{R}^*\}$، بين أن $(G,\top)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,\top)$.

التمرين 08: في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ نعرف قانوني التركيب الداخلي $\top,\perp$ بالشكل :

$$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{Z}^2\ (x_1,y_1)\top(x_2,y_2)=(x_1+x_1,y_1+y_2)\qquad (x_1,y_1)\perp(x_2,y_2)=(x_1x_2,0)$$

برهن أن $(\mathbb{Z}^2,\top,\perp)$ حلقة تبديلية، هل هي واحدية.

التمرين 09: نعرف في مجموعة الأعداد الحقيقية قانوني التركيب الداخلي $\top,\perp$ بالشكل :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\top y=x+y-1\qquad x\perp y=x+y-xy$$

1- برهن أن $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ حقل.

2- أحسب، من أجل كل x : $x \perp 1$.

3- أدرس المعادلات التالية والتي مجهولها x : $\alpha(x) \perp \beta(x) = 1$ حيث $\alpha(x), \beta(x)$ عبارتان متعلقتان ب x.

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $(x \top a) \perp (x \top b) = 1, x^2 \top a^2 = 1$ حيث a, b وسيطان حقيقيان و $x^2 = x \perp x$.

التمرين 10: لتكن E مجموعة و A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من E.

1- برهن أن

$$(\complement_E(B) \cup C) \cap (\complement_E(C) \cup B = (\complement_E(B) \cap \complement_E(C)) \cup (B \cap C).$$

ثم إستنتج أن

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \complement_E(B) \cap \complement_E(C)) \cup (\complement_E(A) \cap B \cap \complement_E(C)) \cup (\complement_E(A) \cap \complement_E(B) \cap C).$$

2- تحقق من أن $(\mathcal{P}(E), \triangle)$ زمرة آبلية.

3- برهن أن من أجل كل A, B, C من $\mathcal{P}(E)$، لدينا

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C).$$

4- برهن أن $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ حلقة تبديلية.

التمرين 11: ليكن f التطبيقمن $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ والمعرف بالشكل : $f(x) = 3x + 2$.

1- عين قانونا $\top$ بحبث يكون f تشا كل ل $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(\mathbb{R}, \top)$. إستنتج بنية $(\mathbb{R}, \top)$. حدد العنصر الحيادي e للقانون $\top$.

2- ليكن g تطبيق من $\mathbb{R}^*$ نحو $\mathbb{R} - \{e\}$ بحيث $g(x) = f(x)$ عين قانونا $\perp$ بحيث يكون f تشا كل من $(\mathbb{R}^*, .)$ نحو $(\mathbb{R} - \{e\}, \perp)$ الرمز . يشير إلى الضرب العادي في $\mathbb{R}$، ماهي بنية $(\mathbb{R} - \{e\}, \perp)$؟

3- هل $\perp$ توزيعي على $\top$؟ إستنتج بنية $(\mathbb{R}, \top, \perp)$.

التمرين 12: ليكن b عددا حقيقيا معطى. نضع :

$$F_b = \{f_a \ : \ f_a \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f_a(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*\}$$

1- عين القيمة b_0 التي تكون من أجلها F_{b_0} زمرةبالنسبة إلى عملية تركيب التوابع.

2- نعرف التطبيق $\varphi \ : \ (\mathbb{R}^*, .) \to (F_{b_0}, \circ)$. بين أن φ تماثل زمر (.هوالضرب العادي في $\mathbb{R}^*$).

3- عين النواة $ker f$. هل φ تشا كل زمر.

التمرين 13: لتكن E زمرة ضربية غير تبديلية. من أجل كل a من E نعرف التطبيق f_a من E نحو E كل x نرفق بها $f_a(x) = axa^{-1}$. أثبت أن : أ- f_a تشا كل ذاتي للزمرة E. ب- $f_a \circ f_b = f_{ab}$. ج- $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.

التمرين 14: لتكن A حلقة واحدية وتامة. نعتبر عنصرا غير معدوم x ونعرف التطبيق f_a المتخذ من E منطلقا و مستقرا ب $f_a(x) = ax$.

1- أثبت أن التطبيق f_a متباين.

2- نفرض أن E منتهية. أ- أثبت أن f_a غامر أيضا. ب- إستنتج أن E حقل.