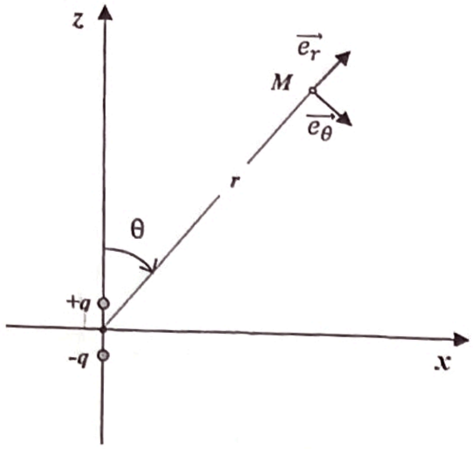
| | | |
|---|---|---|
| المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط<br>قسم الفيزياء-رياضيات<br>السنة الأولى PEM ; PES | الكهرباء الساكنة و المغناطيسية<br>السلسلة 2<br>ثنائي القطب الكهربائي و التوزيعات الشحنية | اكتوبر 2022 |




**التمرين الأول** :نعتبر في المستوي xOz ثنائي قطب عزمه $\vec{p} = q.\vec{d}$ موازي للمحور Oz

1) أعطي عبارتي الكمون الكهربائي والحقل الكهربائي عند النقطة $M(r,\theta)$ .
2) ما هي معادلة سطح تساوي الكمون $V(r,\theta)=V_0$.

نخضع الآن ثنائي قطب لحقل كهربائي ثابت $\vec{E}_0$ موازي هو أيضا للمحور Oz. نعتبر أن كمون هذا الحقل معدوم عند O.

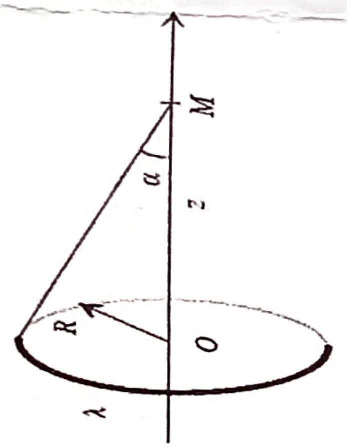
3) أعطي عبارة الكمون الكهربائي $V(r,\theta)$ و الحقل الكهربائي $\vec{E}(r,\theta)$ للجملة ( $\vec{p}$ و $\vec{E}_0$ ) عند نقطة $M(r,\theta)$ بعيدة عن ثنائي القطب.
4) صف سطح تساوي الكمون V=0.
5) برهن أن الحقل على سطح تساوي الكمون V=0 الكروي يكون مساويا لـ $E_0\cos\theta$ مع تحديد اتجاهه.

نقوم الآن بتدوير ثنائي القطب ب 35°

6) مثل وضع الشحنات و القوى و المزدوجة المطبقة عليها.
7) أحسب الطاقة الكامنة المكتسبة لثنائي القطب و عزم المزدوجة الخاضع لها؟

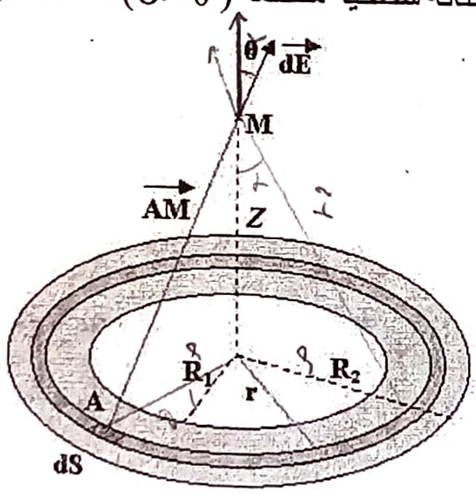
**التمرين الثاني** : أحسب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين في النقطة O عن سلك نصف دائري مركزه O و نصف قطره R مشحون بكثافة خطية منتظمة $\lambda > 0$. استنتج قيمة الحقل في O الناتج عن حلقة دائرية

أحسب الحقل الكهربائي في نقطة M تقع على محور الحلقة ( أنظر الشكل)




**التمرين الثالث** :

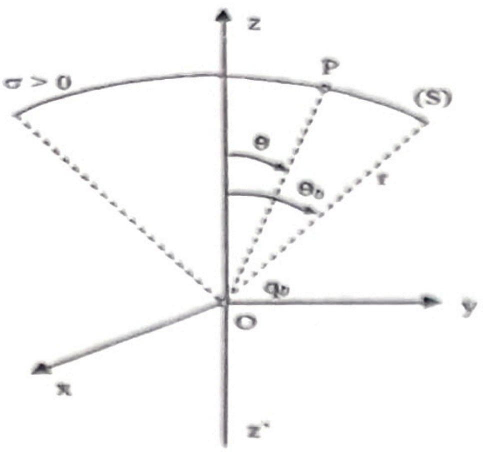
أحسب عند النقطة M الكمون الكهربائي الناتج عن قرص أجوف مشحون بكثافة سطحية منتظمة ( σ> 0 ) نصف قطره الداخلي $R_1$ و نصف قطره الخارجي $R_2$ ( أنظر الشكل)




1) أحسب الشحنة الكلية للقرص
2) باستعمال تناظر الجملة حدد اتجاه الحقل الكهربائي
3) أكتب عبارته بدلالة المسافة Z
4) استنتج عبارة الحقل في حالة مستوي لا منتهي
5) هل يمكن استنتاج كمون المستوي لا منتهي من نتيجة القرص. برر الإجابة اعتمادا على خواص الكمون

التمرينالرابع :

نعتبر سطح ( S ) من كرة مركزها O و نصف قطرها R محصور بالمخروط الذي مركزه O و زاويته $2\theta_0$ ( أنظر الشكل- السطح عبارة عن قبعة).

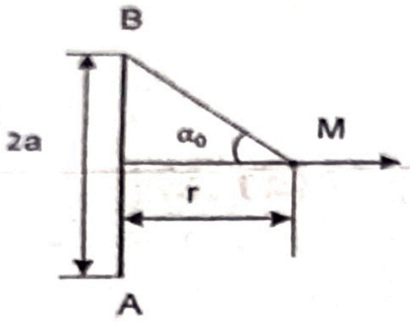



يحمل السطح شحنة موزعة بانتظام وفق كثافة سطحية $\sigma > 0$

1) أحسب الشحنة الكلية Q للسطح
2) أحسب الحقل و الكمون الكهربائيين في O
3) أحسب القوة الكهربائية التي تخضع لها شحنة نقطية $q_0$ في النقطة O

التمرينالخامس :

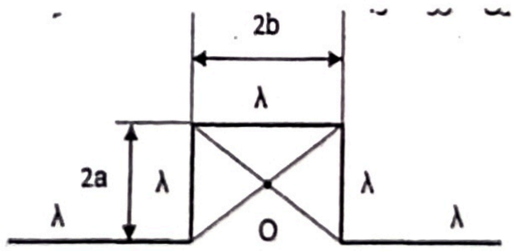
1) أحسب الحقل الكهربائي الناتج عن القطعة المستقيمة $AB = 2a$ المشحونة بكثافة خطية منتظمة $\lambda > 0$ عند نقطة M تقع على محورها على مسافة r . استنتج الحقل الكهربائي الناتج عن سلك لا منتهي.

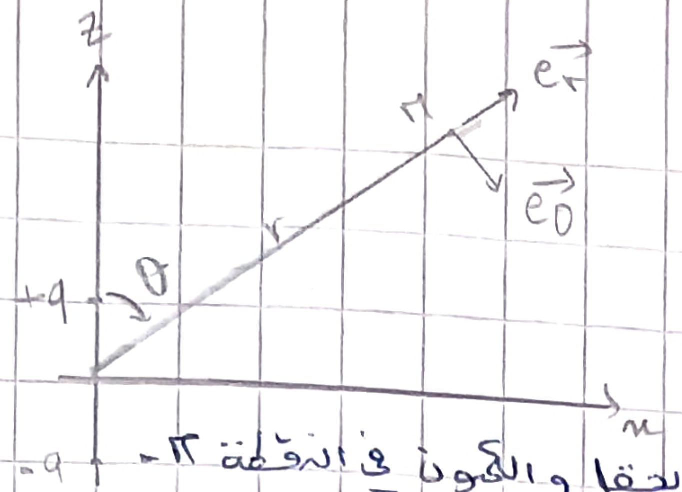



2) إذا كان الحقل الناتج عن قطعة مستقيمة في نقطة من محورها هو:

$$E\,(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{\sin\alpha}{r}\cdot U_r$$

استنتج الحقل الناتج في النقطة O في الشكل التالي:






## حل ت 01 س 03

$$\vec{P} = q\vec{d}$$

1- أكتب عبارتي الحقل والكمون في النقطة M:

$$V_T(M) = V_1 + V_2 = \frac{Kq}{r_1} - \frac{Kq}{r_2} = Kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= Kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

نعلم أن:

$$r_2 - r_1 = AB\cos\theta$$

$$r_1 r_2 = r^2$$

$$V_T(M) = \frac{Kq}{r^2} AB\cos\theta \quad \text{---- ①}$$

لدينا أن: $p = qd$

بالتعويض نجد:

$$V_T(M) = Kp\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

الحقل: نعلم أن:

$$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$$

$$\vec{E}(M) = \frac{2Kp\cos\theta}{r^3}\vec{e_r} + \frac{Kp\sin\theta}{r^3}\vec{e_\theta}$$

معادلة سطح تساوي الكمون:

$$V(M) = V_0$$

$$V(M) = V_0 = \frac{Kp\cos\theta}{r^2} = V_0$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{Kp\cos\theta}{V_0}$$

لدينا:

$$r_0 = \frac{Kp}{V_0}$$

بالتعويض نجد:

$$r^2 = r_0\cos\theta.$$

$r = \sqrt{K_0 \cos\theta}$

العبارة الجديدة للكمون :

$V_1$ = الكمون الناتج عن ثنائي القطب :

$V(M) = V_1(M) + V_2(M)$

$V_1 = V(M) = \dfrac{KP\cos\theta}{r^2}$

$V_2(M)$ : الكمون الناتج عن $\vec{E_0}$

$\vec{E_0} \begin{cases} E_{0r} = E_0 \cos\theta \\ E_{0\theta} = -E_0 \sin\theta . \end{cases}$

$\begin{cases} E_0\cos\theta = -\dfrac{\partial V_2}{\partial r} \\ -E_0 \sin\theta = -\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial V_2}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial V_2 = -E_0 \cos\theta dr \\ \partial V_2 = rE_0 \sin\theta d\theta . \end{cases}$

$\partial V_2 = -E_0 \cos\theta dr \xrightarrow{\text{بالتكامل}} V_2 = -E_0 \cos\theta\, r + cte .$

$\partial V_2 = rE_0 \sin\theta d\theta \xrightarrow{\text{بالتكامل}} V_2 = -E_0 \cos\theta\, r + cte .$

باعتبار الكمون معدوم عند $O$ لذا $cte = 0$ .

$V_2(M) = -E_0 r\cos\theta .$

$V'(M) = \dfrac{KP\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta .$

سطح تساوي الكمون $V = E_0$

$V'(M) = 0 \Rightarrow \dfrac{KP\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta = 0 .$

سطح تساوي الكمون هو المحور $OX$ :

$\begin{cases} \cos\theta = 0 \;;\; \theta = \dfrac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{KP}{r^2} = E_0 r \Rightarrow r^3 = \dfrac{KP}{E_0} \end{cases}$

سطح تساوي الكمون هي دائرة التي نصف قطرها:

$$r = \sqrt[3]{\frac{KP}{\varepsilon_0}}$$

الحقل الكلي في M:

$$\vec{E}_T = \vec{E}(M) + \varepsilon_0 \vec{R}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2KP\cos\theta}{r^3}\vec{e_r} + \frac{KP\sin\theta}{r^3}\vec{e_\theta} + \varepsilon_0 \cos\theta\, \vec{e_r} - \varepsilon_0 \sin\theta\, \vec{e_\theta}$$

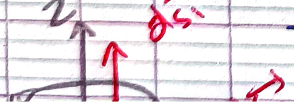
$$\vec{E} = \frac{2KP}{r^3}\left(\cos\theta\, \vec{e_r} + \sin\theta\, \vec{e_\theta}\right) + \left(\frac{KP}{r^3} - \varepsilon_0\right)\sin\theta\, \vec{e_\theta}$$

قانون غوص

التدفق

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

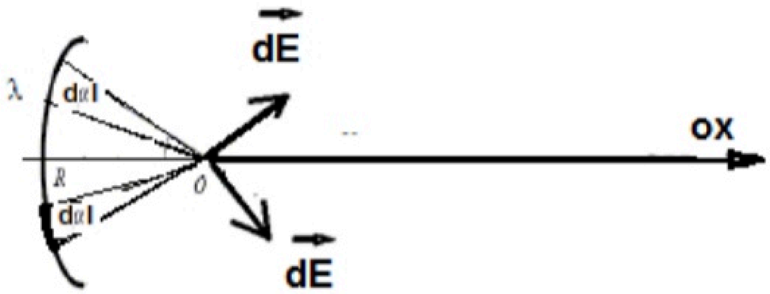
سماحية الفراغ.




قانون غوص

# تصحيح التمرين الثاني

**الحقل الناتج عن نصف حلقة عند النقطة O**




**1) من القوس=> $dl = Rd\alpha$**

**من التوزيع الخطي للشحنة : $dq = \lambda dl$**

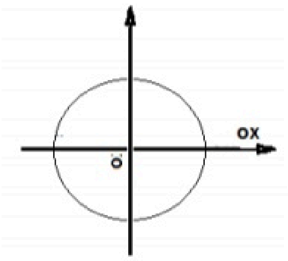
**بالتناظر كل الحقل محمول على (XO)**

$$\mathrm{dEx} = \mathrm{dE}\cos\alpha = \frac{K\,dq}{R^2}\cos\alpha = \frac{K\,\lambda}{R^2}dl\ \cos\alpha = \frac{K\,\lambda}{R^2}Rd\alpha\ \cos\alpha$$

$$\mathrm{dEx} = \frac{K\,\lambda}{R}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$=> \quad \mathrm{Ex} = \frac{K\,\lambda}{R}[\sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{K\,\lambda}{R}[2] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

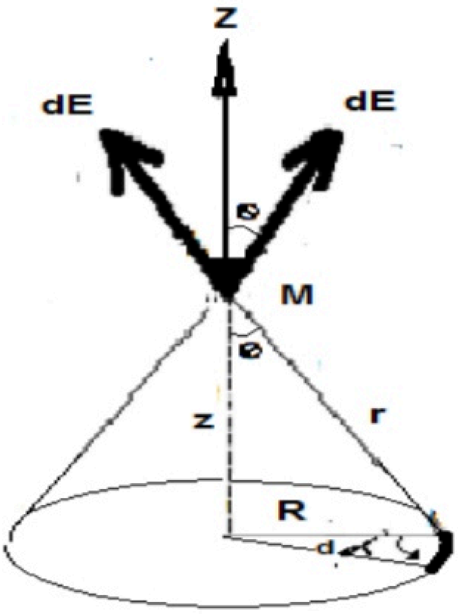
$$=> \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{i}}$$




- **استنتاج الحقل في النقطة O الناتج عن الحلقة:**

$$\boxed{\vec{E_T} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{i} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\vec{i} = \vec{0}}$$

- **حساب الحقل في نقطة M تقع على محور الحلقة:**
- **بالتناظر الحقل الكلي يكون محمول على ZO : أي**




$$\vec{E} = Ez.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{dE} = \frac{K\,dq}{r^2}\overrightarrow{Ur}$$

$$\Rightarrow \quad dEz = \frac{K\,dq}{r^2}\cos\theta$$

$$dq = \lambda dl \Rightarrow dq = \lambda R d\alpha$$

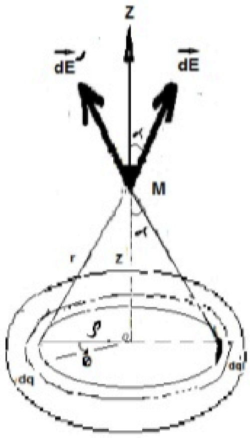
$$r^2 = Z^2 + R^2$$

$$\cos\theta = \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}$$

$$\Rightarrow dEz = \frac{K\,\lambda R d\alpha}{R^2+Z^2}.\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow Ez = \frac{RZ}{(R^2+Z^2)^{3/2}}\frac{\lambda}{4.\pi\varepsilon_0}.\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{RZ}{(R^2+Z^2)^{3/2}}}$$

## حل التمرين الثالث:




- حساب الكمون الكهربائي الناتج عن القرص في نقطة M تقع على محور ه

$$dV = K\frac{dq}{r}$$

$$r^2 = \rho^2 + Z^2$$

و لدينا أيضا:

$$dq = \delta.dS = \delta.\rho.d\rho.d\theta$$

يصبح:

$$dV = K\delta\frac{\rho.d\rho.d\theta}{\sqrt{\rho^2+Z^2}}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2}+c$$

و لدينا:

$$V_{(M)} = \int_0^{2\pi}\int_{R1}^{R2} dV = K\delta\int_{R1}^{R2}\frac{\rho.d\rho}{\sqrt{\rho^2+Z^2}}\int_0^{2\pi}d\theta$$

ومنه :

$$V_{(M)} = K\delta\left[\!\left[\sqrt{\rho^2+Z^2}\right]\!\right]_{R1}^{R2}.2\pi = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[\!\left[\sqrt{R2^2+Z^2}-\sqrt{R1^2+Z^2}\right]\!\right]$$

$$\boxed{V_{(M)} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[\!\left[\sqrt{R2^2+Z^2}-\sqrt{R1^2+Z^2}\right]\!\right]}$$

- حساب الشحنة الكلية:

$$dq = \delta.dS$$

$$Q = \int_{R1}^{R2} dq = \delta\int_{R1}^{R2}\rho d\rho.\int_0^{2\pi}d\theta = \delta.2\pi.\left[\!\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]\!\right]_{R1}^{R2}$$

$$\boxed{Q = \delta.\pi.\left[\!\left[R2^2-R1^2\right]\!\right]}$$

- القرص الأجوف له محور تناظر هو (ZO) لذلك فإن الحقل الكهربائي في نقطة M تقع على (ZO) يكون محمولا عليه و بما أن δ موجبة يكون: $\overrightarrow{E_{(M)}} = E.\vec{k}$

عبارة الحقل:

$$E_M = Ez$$

$$\overrightarrow{dE} = \frac{K\,dq}{r^2}\overrightarrow{Ur} \quad \Rightarrow \quad dE_M = dEz = \frac{K\,dq}{r^2}\cos\alpha$$

$$dq = \delta\,\rho.d\rho.d\theta \quad , \quad r^2 = (\rho^2+Z^2) \quad , \quad \cos\alpha = \frac{Z}{r}$$

$$\Rightarrow dE_M = \frac{K\,\delta\;\rho.d\rho.d\theta}{(\rho2+Z2)}\cdot\frac{Z}{(\rho^2+Z^2)^{1/2}} = \frac{KZ\;\delta\;\rho.d\rho.d\theta}{(\rho^2+Z^2)^{3/2}}$$

لدينا و :

$$\int\frac{xdx}{(x^2\pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2\pm a^2)^{1/2}}+c$$

$$\Rightarrow E_{(M)} = K\delta Z\int_{R1}^{R2}\frac{\rho.d\rho}{(\rho^2+Z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\theta = K\delta Z.2\pi\left[\!\left[-\frac{1}{(\rho^2+Z^2)^{1/2}}\right]\!\right]_{R1}^{R2}$$

$$\boxed{E_{(M)} = \frac{\delta Z}{2\varepsilon_0}\left[\!\left[\frac{1}{(R1^2+Z^2)^{1/2}}-\frac{1}{(R2^2+Z^2)^{1/2}}\right]\!\right]}$$

- **استنتاج عبارة الحقل في حالة مستوي لا متناهي: R1 =>0 ; R2 => ∞**

**و منه:**

$$\boxed{\mathbf{E}_{(\text{مستوي})} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}}$$

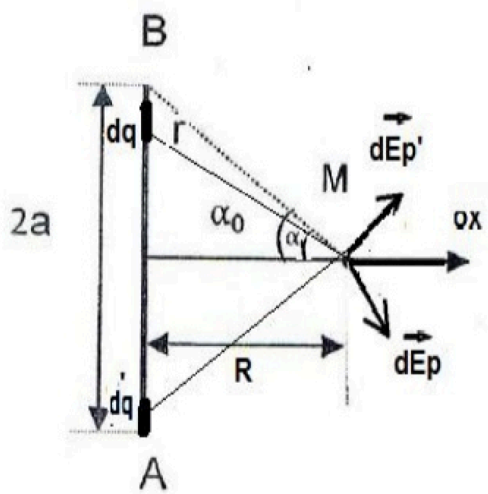
- **لا يمكن استنتاج كمون المستوي اللامتناهي من حالة القرص, عندما يتعلق الأمر بالكمون, لأن في حالة القرص لا توجد شحنات في (∞) في حين في حالة المستوي المنتهي توجد شحنات مما يطرح مشكلة الثابت (ثابت التكامل في عبارة الكمون c≠0) . لكن يمكن استنتاج الكمون من عبارة الحقل باستعمال العلاقة** $\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}\mathbf{V}}$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{dV}{dz}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{dV} = -\mathbf{Edz} = -\frac{\delta}{2\varepsilon_0}.dz$$

$$\boxed{V_{(M)} = -\frac{\delta}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0}z + Cte}$$

## حل التمرين الخامس:




**بفعل التناظر فإن الحقل الكهربائي يكون له مركبة وحيدة على (OX)**

$$\vec{E} = Ex.\vec{i}$$

**نقسم السلك إلى عناصر متناهية في الصغر ld تحمل كل منها شحنة عنصرية** $dq = \lambda dl$

**الحقل الكهربائي العنصري $\overrightarrow{dEp}$ الناتج عن هذه الشحنة العنصرية:**

$$\overrightarrow{dEp} = dEx\vec{i} + dEy.\vec{j}$$

$$= dEp\cos\alpha.\vec{i} - dEp\sin\alpha.\vec{j}$$

$$dEp = \frac{K\,dq}{r^2} \Rightarrow dEp = \frac{K\,\lambda dl}{r^2}$$

- بفعل التناظر الحقل الكهربائي يكون له مركبة وحيدة على (OX)

**نضع** $a = l$

$$dEx = dEp\cos\alpha = \frac{K\,\lambda dl}{r^2}\cos\alpha \quad \dots\dots\dots(1)$$

**لدينا من الشكل :** $l = R.\tan\alpha$

$$\Rightarrow \frac{dl}{d\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha^2} \Rightarrow dl = \frac{R}{\cos\alpha^2}d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

**نعوض في (1):**

$$dEx = \frac{K\lambda\frac{R}{\cos\alpha^2}d\alpha}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2}\cos\alpha = \frac{K\lambda}{R}\cos\alpha.d\alpha = \frac{\lambda}{4.\pi\varepsilon_0 R}\cos\alpha.d\alpha$$

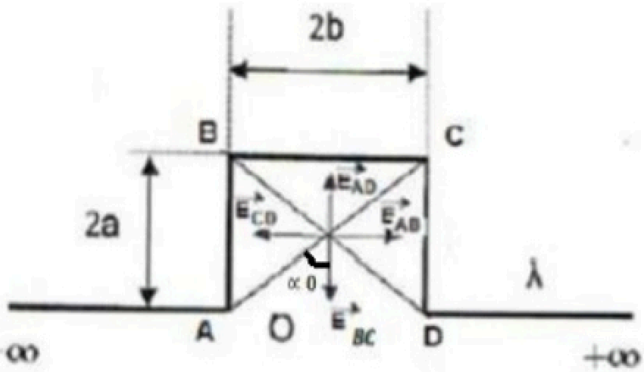
**نكامل المعادلة السابقة على كامل القطعة:**

$$Ex = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{\lambda}{4.\pi\varepsilon_0 R}\cos\alpha.d\alpha = \frac{\lambda}{4.\pi\varepsilon_0 R}[\![\sin\alpha]\!]_{-\alpha_0}^{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4.\pi\varepsilon_0 R}[\![\sin\alpha]\!]_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2.\pi\varepsilon_0 R}.\sin\alpha_0.\vec{i}}$$

**في حالة سلك لا منتهي:** $\alpha_0 = \pi/2$ <= $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2.\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.\vec{i}}$




**كل قطعة مستقيم تنشأ حقلا في النقطة0**

**لدينا هندسيا:** $\overrightarrow{E_{-\infty A}}+\overrightarrow{E_{D+\infty}}=\overrightarrow{E_{-\infty\infty}}-\overrightarrow{E_{AD}}$

$$\overrightarrow{E_{(0)}}=\overrightarrow{E_{-\infty A}}+\overrightarrow{E_{D+\infty}}+\overrightarrow{E_{BC}}+\overrightarrow{E_{AB}}+\overrightarrow{E_{CD}}$$

**نلاحظ من الشكل أن:** $\overrightarrow{E_{AB}}+\overrightarrow{E_{CD}}=\vec{0}$ ; $\overrightarrow{E_{AD}}=-\overrightarrow{E_{BC}}$

$$\overrightarrow{E_{(0)}}=\overrightarrow{E_{-\infty\infty}}-\overrightarrow{E_{AD}}+\overrightarrow{E_{BC}}=\overrightarrow{E_{-\infty\infty}}+2.\overrightarrow{E_{BC}}$$

$$\overrightarrow{E_{(0)}}=\frac{\lambda}{2.\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{a}.\vec{i}+\frac{2.\lambda}{2.\pi\varepsilon_0}.\frac{\sin\propto 0}{a}.\vec{i} \qquad ; \ (\sin\propto 0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_{(0)}}=\frac{\lambda}{2.\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{a}.[1+\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}].\vec{i}}$$