خواص المستقيم العددي

السلسلة رقم 02
السنة الجامعية : 2022 -2023

التمرين 1

ليكن A جزءا محدودا وغير خال من $]0,+\infty[$.

1) أثبت أن المجموعة $B=\{x\in\mathbb{R};\quad \frac{1}{x}\in A\}$ ليست بالضرورة محدودة.

2) بين أنه اذا كان $\inf A>0$ فان B محدودة.

قارن في هذه الحالة بين $\sup B$ و $\frac{1}{\inf A}$ ، ثم بين $\inf B$ و $\frac{1}{\sup A}$

التمرين 2

لتكن E مجموعة محدودة وغير خالية من $\mathbb{R}$. بين ما يلي:

$$\sup(-E)=-\inf(E).$$
$$\inf(-E)=-\sup(E).$$

التمرين 3

عين في حالة وجودها : الحواد العليا، الحواد الدنيا، الحد الأعلى، الحد الأدنى، القيمة العظمى، القيمة الصغرى للمجموعات التالية:

$$A=\{3x^2+7x-4;\quad x\in\mathbb{R}\}.\quad B=\{x\in\mathbb{R};\quad x^5<-2\}.$$
$$C=\{\frac{1}{n}+(-1)^n;\quad n\in\mathbb{N}^*\}.\quad D=]0,1[\cap\mathbb{Q}.$$

التمرين 4

لتكن المجموعة D المعرفة كما يلي:

$$D=\{\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1};\quad n\in\mathbb{N}\}.$$

1) بين أن المجموعة D محدودة.

2) عين مع التبرير كلا من $\sup D$ و $\inf D$.

3) هل $\max D$ و $\min D$ موجودان ؟

التمرين 5

ليكن a,b,c و d أعداد حقيقية موجبة. برهن مايلي:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$
$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

التمرين 6

ليكن x و y عددين حقيقيين. أثبت الخواص التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad 0 \le E(nx) - nE(x) \le n-1. \tag{1}$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}: \quad E(x+p) = E(x) + p. \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x). \tag{3}$$

$$E\left(x+\frac{1}{2}\right) + E(x+1) + E\left(2x+\frac{1}{2}\right) = E(4x+1). \tag{4}$$

$$E(x) + E(y) \le E(x+y). \tag{5}$$

التمرين 7

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، بسط المجاميع والجداءات التالية:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l. \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}. \quad , \quad \prod_{k=1}^{n} 2k. = 2\times4\times6\times \dots 2n$$

$$= \big(\underbrace{2\times2\times2 \dots 2}_{\text{مرة } n}\big)(1\times2\times3 \dots n) = 2^n n!$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}.$$

السلسلة 1 =

حل تمرين 1 =

1. $\emptyset \neq A \subset]0;+\infty[$

$\forall x \in A \qquad \inf A \leq x \leq \sup A$

أخذ مثال معاكس = في هذه الحالة $A =]0;2]$

$B = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \frac{1}{x} \in]0;2]\} = [\frac{1}{2};+\infty[$

2. تبيين إذا كان $\inf > 0$ فإن B محدودة

لدينا = $0 < \inf A \leq x \leq \sup A$

$\frac{1}{\sup A} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A}$

ومنه B محدودة ~~Sinf~~

3. $\sup B \leq \frac{1}{\inf A}$

$\inf B \geq \frac{1}{\sup A}$

حل ت 2 =

$-E = \{-x \; ; \; x \in E\}$

E محدودة

$\forall x \in E \qquad \inf E \leq x \leq \sup E$

ومنه $-\sup E \leq -x \leq -\inf E$

$$\begin{cases} \sup(-E) \leq -\inf E \\ \inf(-E) \leq -\sup(E) \end{cases}$$

ومن جهة أخرى:

$$\inf(-E) \leq -x \leq \sup(-E)$$

$$-\sup(-E) \leq x \leq -\inf(-E)$$

$$\begin{cases} -\sup(-E) \leq \inf(E) \\ \sup E \leq -\inf(-E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sup(-E) \geq -\inf(E) \\ \inf(-E) \geq -\sup E \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} \sup(-E) = -\inf E \\ \inf(-E) = -\sup E \end{cases}$$

حل ت 03:

$A = \{ f(x) = 3x^2 + 7x - 4 \ / x \in \mathbb{R} \}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\frac{7}{6}) = -\frac{97}{12}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\min A = \inf A = -\frac{97}{12} \in A$

الحواد الدنيا: $\left]-\infty ; -\frac{97}{12}\right[$

$B = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x^5 < -2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x < -\sqrt[5]{2}\}$

$=]-\infty ; -\sqrt[5]{2}[$

$\sup B = -\sqrt[5]{2} \notin B$

$\max B$ ، $\inf B$ ، $\min B$ غير موجودة ،

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in B \quad -\sqrt[5]{2} - \varepsilon < x < -\sqrt[5]{2}$

$\underset{-\sqrt[5]{2} - \frac{\varepsilon}{2}}{\shortparallel}$

$C = \{\frac{1}{n} + (-1)^n \ ; n \in \mathbb{N}^*\}$

المجموعة C غير خالية لأن $0 \in C$

$C = \underbrace{\{\frac{1}{2k} + 1 \ ; k \in \mathbb{N}^*\}}_{C_1} \cup \underbrace{\{\frac{1}{2k+1} - 1 \ ; k \in \mathbb{N}\}}_{C_2}$

$\forall x \in C_1 \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \qquad \forall x \in C_2 \quad -1 \leq x \leq 0$

$\sup C = \max(\frac{3}{2}; 0) = \frac{3}{2} \Rightarrow \max C = \frac{3}{2}$

$\inf C = -1 \notin C \Rightarrow$ غير موجود $\min C$

$m_C =]-\infty ; -1]$ مجموعة الحدود الدنيا

$M_C = [\frac{3}{2} ; +\infty[$ مجموعة الحدود العليا

$D =]0;1[\cap \mathbb{Q} \subseteq]0;1[$

باستعمال كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ نجد:

$\inf D = 0 \notin D$ و $\sup D = 1 \notin D$

$\max D$

$\min D$ غير موجودين

تمرين 04:

$D = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} ; n \in \mathbb{N} \right\}$

لتكن f الدالة المرفقة للمجموعة D.

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2x+1}$

$f'(x) = \frac{(2x+1) - 2x}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$

ومنه:

الدالة f متزايدة تماماً

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	1

2) تعيين $\sup D$ و $\inf D$ مع التبرير

لدينا :

نتأكد : $\inf D = \min D = \frac{1}{2}$

$\forall > 0 \quad \exists\, y = \frac{1}{2} \in A \,, \quad \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$

$\sup D = 1 \notin D$

ومنه $\max D$ غير موجود .

$$\frac{n}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow n < \varepsilon\,(2n+1)$$

$$\Rightarrow n < 2n\,\varepsilon + \varepsilon$$

$$\Rightarrow n\,(1 - 2\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n\,(2\varepsilon - 1) > -\varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n > \frac{-\varepsilon}{2\varepsilon - 1} \\ n < \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon - 1} \\ n_0 \cancel{\;} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\sup D = 1 \notin D \quad \left(\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, y_0 = \frac{1}{2} + \frac{n_0}{2n_0+1} \in D$

$$\Leftrightarrow n_0 > \frac{1 - 2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

حل التمرين 05 =

$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

① - باستعمال البرهان بالخلف نفرض أن =

$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; \sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

ومنه $(a+c)(b+d) < (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2$

$\cancel{ab} + ad + cb + \cancel{cd} < \cancel{ab} + \cancel{cd} + 2\sqrt{ab}\sqrt{cd}$

$ad + cb - 2\sqrt{ab}\sqrt{cd} < 0$

$(\sqrt{ab} - \sqrt{cd})^2 < 0$

وهذا تناقض ومنه ① صحيحة

② -

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{(a+b)^2(a+b)}{4}$$

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \frac{(a^2+b^2+2ab)(a+b)}{4}$$

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3+2a^2b+2ab^2}{4}$$

$$\frac{2a^3+2b^3-a^3-a^2b-ab^2-\cancel{b^3}+2a^2b-2ab^2}{4}$$

$$\frac{a^3-b^3-3a^2b-3ab^2}{4}$$

حل تمرين 06 :

تذكير :

• $E(x)$ الجزء الصحيح لـ x $\iff$ $E(x) \leq x < E(x)+1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

•• دالة الجزء الصحيح متزايدة $x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$

توضيح ②

$$x \leq y \Rightarrow \quad E(x) \leq x \leq y < E(y)+1$$
$$\Rightarrow E(x) < E(y)+1$$
$$\Rightarrow E(x) \leq E(y)$$

حل التمرين 06 :

① - $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

لدينا :

$$E(x) \leq x < E(x)+1$$
$$nE(x) \leq nx < nE(x)+n$$
$$nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n$$
$$0 \leq E(nx) - nE(x) < n$$
$$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$$

② - $E(x+P) = E(x)+P$

لدينا :

$$E(x) \leq x < E(x)+1$$
$$E(x)+P \leq x+P < E(x)+1+P$$
$$E(x)+P \leq E(x+P) < E(x)+1+P$$
$$E(x)+P \leq E(x+P) \leq E(x)+P$$

ومنه :

$$E(x)+P = E(x+P)$$

3- $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

لدينا :

$$E(x) \leq x < E(x)+1$$

$$nE(x) \leq nx < nE(x)+n$$

$$\Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$$

ومنه :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x+\frac{1}{2}) + E(x+1) + E(2x+\frac{1}{2}) = E(4x+1)$ (4)

$$E(x) \leq x < E(x)+1$$

$$0 \leq x - E(x) < 1$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists x_0 \in [0;1[\quad x = x_0 + E(x) = x_0 + P$

نضع : $E(x) + P$ نجد :

(4) $\Leftrightarrow E(x_0+P+\frac{1}{2}) + E(x_0+P+1) + E(2x_0+2P+\frac{1}{2}) = E(4x_0+4P+1)$

$\Leftrightarrow E(x_0+\frac{1}{2}) + E(x_0) + E(2x_0+\frac{1}{2}) = E(4x_0)$ ---- VII

لإثبات (4) يكفي إثبات VII

لدينا : $0 \leq x_0 < 1$

باستعمال البرهان بفصل الحالات :

C_1 : من أجل $x_0 \in [0; \frac{1}{4}[$

• $0+0+0 = 0$ محققة.

C_2 : من أجل $x_0 \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}[$:

• $0+0+1 = 1$ محققة.

C_3 : من أجل $x_0 \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[$:

• $1+0+1 = 2$ محققة ؛

46 = من أجل $x \in [\frac{3}{4};1[$

محققة $1+0+2=3$

ومنه 4 صحيحة.

5 -

لدينا :

$$\begin{cases} E(x) \leq x \\ E(y) \leq y \end{cases}$$

$$E(x)+E(y)=x+y$$

$$E(x)+E(y)=E(x+y)$$

ومنه العلاقة 5 صحيحة.

حل ت 07 =

1 - $$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n}{2}(n+1)$$

2 - $$\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{l=0}^{n} l = \cancel{\sum_{k=1}^{n} k} + n+1 - \cancel{\sum_{l=1}^{n} l} = n+1$$

$$= n+1$$

3 - $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\cdots-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\prod_{K=1}^{n} 2K=(2\times1)(2\times2)(2\times3)(2\times4)\cdots(2\times n)$$

$$=2^n(1\times2\times3\cdots\times n)$$

$$=2^n\cdot n!$$

$$\prod_{K=1}^{n}\frac{K}{K+1}$$

$$\prod_{K=1}^{n}\frac{K}{K+1}=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$