السلسلة رقم 01 : مدخل إلى المنطق الرياضي

التمرين 01 : أوجد القضايا أو الجمل المفتوحة P و Q بحيث

1- $P \Rightarrow Q$ صحيحة و $Q \Rightarrow P$ صحيحة.

2- $P \Rightarrow Q$ خاطئة و $Q \Rightarrow P$ صحيحة.

3- $P \Rightarrow Q$ خاطئة و $Q \Rightarrow P$ خاطئة.

التمرين 02: لتكن A, B و C ثلاث قضايا. برهن أن القضيتين $A \wedge (B \vee C)$ و $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ متكافئتين.

التمرين 03: ليكن P و Q قضيتين. برهن أن القضيتين $P \Rightarrow Q$ و $P \wedge Q$ متكافئتين.

التمرين 04: نذكر أن العدد الطبيعي p يقسم n ونرمز لها بالرمز $p|n$ إذا وجد عدد طبيعي k بحيث $n = k \times p$.

1- هل $6|n$ هو شرط ضروري من أجل n عدد زوجي ؟

2- هل $6|n$ هو شرط كافي ليكون n عدد زوجي ؟

التمرين 05: لتكن f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
أكتب الجمل المفتوحة التالية بإستعمال المكممات:

1- الدالة f ثابتة.

2- الدالة f متناقصة.

3- الدالة f محدودة.

4- الدالة f لا تنعدم.

5- الدالة f تقبل قيمة حدية كبرى على $\mathbb{R}$.

التمرين 06: ليكن لدينا القضايا التالية :

Q_1^{xy} $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \geq 0.$

Q_2^{xy} $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$

Q_3^{xy} $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$

Q_1^{xy} $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x.$

هل هي قضايا صحيحة ؟ هل هي خاطئة ؟ انفها.

التمرين 07: ليكن $x \in \mathbb{Z}$، برهن أنه إذا كان x^2 عدد فردي فإن x عدد فردي.

التمرين 08: برهن أن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية.

التمرين 09: ليكن $\lambda < 0$، برهن أن

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \max\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \min\{x, y\}.$$

التمرين 10: برهن أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

السلسلة ① :

حل ت 01 :

-1

	P	Q
الحالة ①	$X=1$	$X+1=2$
الحالة ②	$x^2=1$	$X=1$
الحالة ③	$X=1$	$X=2$

حل ت 02 :

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

حل ت 03 :

P	Q	$\overline{Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0

متكافئتان

ط2 =

نفرض أن الأولى صحيحة ونبرهن أن الثانية صحيحة.

ثم نفرض أن الأولى كاذبة ونبرهن أن الثانية كاذبة.

نفرض أن : صحيحة $V(\overline{P \Rightarrow Q})$

$V(\overline{P \Rightarrow Q}) = 1$

$V(P \Rightarrow Q) = 0$

$V(P) = 1 \quad , \quad V(Q) = 0$

$V(\overline{Q}) = 1$

$V(P \wedge \overline{Q}) = 1$

الآن نفرض أن = $V(\overline{P \Rightarrow Q})$ خاطئة ؛

$V(\overline{P \Rightarrow Q}) = 0$

$V(P \Rightarrow Q) = 1$

$V(Q) = 1$

$V(\overline{Q}) = 0$

$V(P \wedge \overline{Q}) = 0$

حل ت 04 :

نفرض أن 6 يقسم n نجد أن ال n ينتمي إلى المجموعة {6;12;18;24;...}

إذن فإن ال n زوجي. $6 \mid n$

أي أن الشرط 1 : هو شرط كافي لتحقق الشرط 2 . والشرط 2 هو شرط

لازم لتحقق الشرط 1 .

بعبارة مبسطة جدا :

الشرط الكافي هو الذي يستلزم الشرط اللازم .

باستعمال الترميز :

الشرط الكافي ⇐ الشرط اللازم

حل ت 05 :

① $\forall x;y \in \mathbb{R} \; ; f(x) = f(y)$

② $\forall x;y \in \mathbb{R} \; ; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

③ $\exists m;n \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;,\; m < f(x) < n$

④ $\forall x \in \mathbb{R} \;\; : f(x) \neq 0$

⑤ $\exists K \in \mathbb{R} \;, \forall x \in \mathbb{R} \;\; : f(x) < f(K)$

حل ت 06 :

ق1 : خاطئة

التبرير : نخذ $y = -1 - x$ نجد أن $x + y = -1 < 0$

نفيها :

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \;\; : x + y < 0$

ق2 : صحيحة .

التبرير : نخذ $y = 1 - x$ نجد أن : $x + y = 1$ وال 1 أكبر من ال 0 .

نفيها : $\exists x \in \mathbb{R} \;.\; \forall y \in \mathbb{R} \;\;\; x + y \leq 0$

ق03 = خاطئة

التبرير: عند $x=-1$ و $y=0$ نجد أن $x+y=-1$

و الـ -1 ليس أكبر من الـ 0 لدينا: $\exists x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R} ; x+y<0$

ق04 = صحيحة.

التبرير: عند $x=1$ و $y=0$ نجد أن $x+y=1$ والـ 1 أكبر من 0.

لدينا: $\forall x\in\mathbb{R} ; \forall y\in\mathbb{R} ; x+y<0$

حل ت 07:

نبرهن أن n عدد فردي $\Rightarrow$ n^2 عدد فردي

باستعمال البرهان العكسي النقيض.

نبرهن أن: n^2 زوجي $\Rightarrow$ n زوجي

لدينا:

$n=2K \Rightarrow n^2=4K^2=2(2K^2)=2P$

ومنه n^2 عدد زوجي

حل ت 09:

$Max(ax;ay)=a\,Min(x;y)$

نستعمل البرهان بفصل الحالات.

ح① = نفرض أن $x\leq y$ نجد:

$Max(ax;ay)=ax$

$a\,Max(x;y)=ax$

ح② = نفرض أن $x\geq y$ نجد:

$Max(ax;ay)=ay$

$a\,Min(x;y)=ay$

ومنه

تمرين 08 = برهن أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة غير منتهية

البرهان الأول = نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية أي $P = \{2;3;5;...;P_n\}$

ثم نعتبر العدد M التالي:

$$M = 2\times3\times5\times ... \times P_n + 1$$

من جهة نلاحظ أن عناصر P كلها لا تقسم M ومن جهة أخرى لدينا =

أن النظرية الأساسية في الحساب تقول أن M يقبل على الأقل قاسما أوليا q ينتمي إلى P .

وهذا تناقض .

إذن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة غير منتهية .

البرهان الثاني =

كلما نأخذ مجموعة منتهية من الأعداد الأولية سنجد عددا أوليا لا ينتمي لها .

$\{2;3\} \rightarrow 2\times3+1=7 \rightarrow 7$

$\{2;3;7\} \rightarrow 2\times3\times7+43 \rightarrow 43$

$\{2;3;7;43\} \rightarrow 2\times3\times7\times43=1807 \rightarrow 13$

$\{2;3;7;13;43\}$ ----

البرهان الثالث = (برهان كولدباخ) .

الفكرة ① =

نفرض أنه لدينا الأعداد التالية = $4, 15, 49, 143$

نلاحظ أن هذه الأعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى

أي أن كل واحد منها يقبل قاسما أوليا غير موجود في البقية

كما يلي :

4	15	49	143
2	5	7	13

نستفيد من هاته الفكرة أننا نوجد متتالية عددية طبيعية حيث

تكون حدودها،

- متزايدة تماما (أي غير منتهية)
- أولية فيما بينها مثنى مثنى

ت 10 :

نبرهن أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

نتحقق أن هذه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$ أي نبرهن $(2(1)-1)=(1)^2$

لدينا :

$$(2(1)-1)=1$$

$$n^2=1$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن هذه الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ ولكي نبرهن $1+3+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

لدينا :

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$$

$$1+3+\cdots+(2n+1)=n^2+2n+1$$

$$1+3+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$$

Our meeting wasn't
a coincidence, it
was a mercy from
God to my heart

Ka Mina ... ♡

Amina