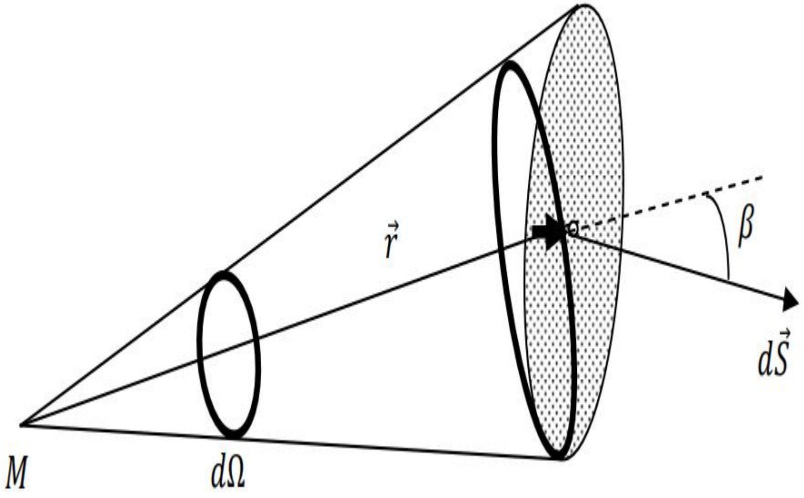
المدرسة العليا للأساتذة الأغواط ENSL

La Machine de Wimshurst

الكهرباء الساكنة
I/(ELECTROSTATIQUE)



8) نظرية غوص

الدكتورة باباغيو ف

مقياس: الكهرباء1 - ف122 - السنة أولى علوم دقيقة

8) نظرية غوص

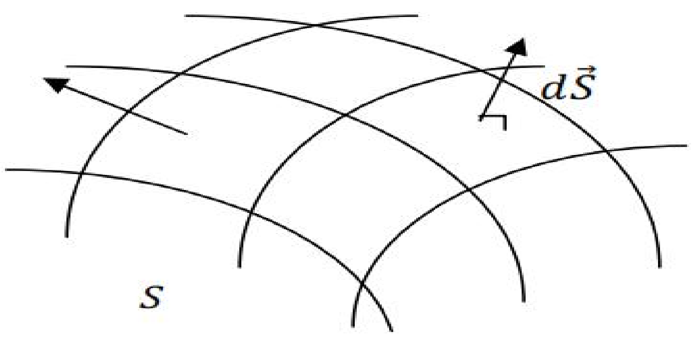
نستطيع حساب الحقل الكهربائي باستعمال قانون كولوم لكن هذه الطريقة تكون صعبة في حالات معينة.

هناك طريقة أخرى أبسط في هذه الحالات تعود إلى *JFK.Gauss* و هو عالم رياضيات مشهور و فلكي ألماني من القرن 19.

نظرية غوص هي علاقة بين التدفق و الحقل الكهربائي.

8) نظرية غوص

1.8 – تدفق الحقل الكهربائي



شعاع السطح (vecteur surface): ليكن dS عنصر السطح من السطح الكلي S. نسمي شعاع السطح العنصري $d\vec{S}$ الشعاع الذي طويلته تساوي مساحة هذا العنصر dS و شعاع توجيهه عمودي على المساحة dS، يؤخذ نحو الخارج (تقعر السطح).

تدفق الحقل الكهربائي الساكن من خلال سطح S (Flux du champ électrostatique à travers une surface):

ليكن S سطحًا حقيقيًا أو تخيليًا، نسمي التدفق العنصري للحقل الكهربائي $\vec{E}$ من خلال السطح العنصري $d\vec{S}$، المقدار السلمي $d\phi$ حيث:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}$$

ويعطَى التدفق الكلي عبر كامل السطح S:

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{s}$$

8) نظرية غوص

نظرية غوص (*Théorème de Gauss*):

هي علاقة تربط بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و الشحنة التي يضمها هذا السطح، و تنص على: تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق S، يساوي المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح $\sum Q_{int}$ مقسوما على السماحية في الفراغ ε_0.

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

يدعى السطح S بسطح غوص.

أو نكتب:

$$\varphi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

8) نظرية غوص

ملاحظات:

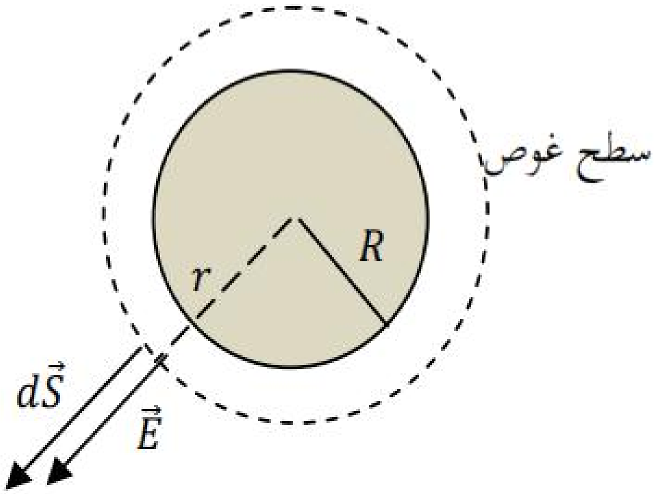
تستعمل نظرية غوص في حساب شدة الحقل إذا اتسم توزيع الشحنات بالتماثل الكافي (التناظر). الاختيار الجيد لسطح غوص يكفل إنجاز التكامل على هذا السطح بسهولة. و ينبغي لهذا السطح أن يحقق الشروط التالية:

- ✓ سطح وهمي مغلق يشمل النقطة المراد حساب الحقل عندها.
- ✓ سطح يجعل الجداء السلمي $\vec{E}.d\vec{S}$ معلوما في أي نقطه منه، وبصفة خاصة يجعل الشعاع $\vec{E}$ مماسيا أو عموديا عليه.
- ✓ سطح يجعل شدة الحقل ثابتةً على امتداده.
- ✓ إذا لم توجد شحنات داخل سطح غوص أو المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح يساوي الصفر، فإن تدفق الحقل الكهربائي معدومٌ.

8) نظرية غوص

مثال 1: دراسة الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع كروي للشحنات (توزيع سطحي، توزيع حجمي) بطريقة غوص.

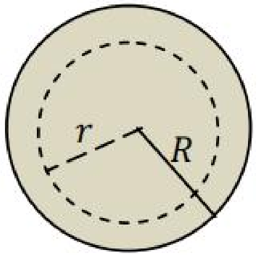
لنعتبر كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة سطحية σ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء قطريا، يعتمد فقط على r مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرة نصف قطرها r و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:



$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = E\oint_S dS = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

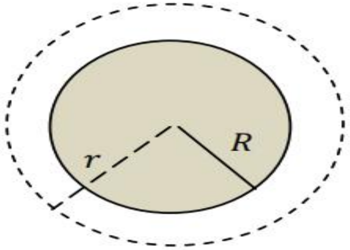
8) نظرية غوص

في حالة: $r < R$ الشحنة داخل سطح غوص معدومة



$$E_1 4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow E_1 = 0$$

في حالة $r > R$



$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Longrightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Longrightarrow V(r) = -\int E\, dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\, dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية:

$$V_2(\infty) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

$$E_1 = 0 \Longrightarrow V_1(r) = C_1$$

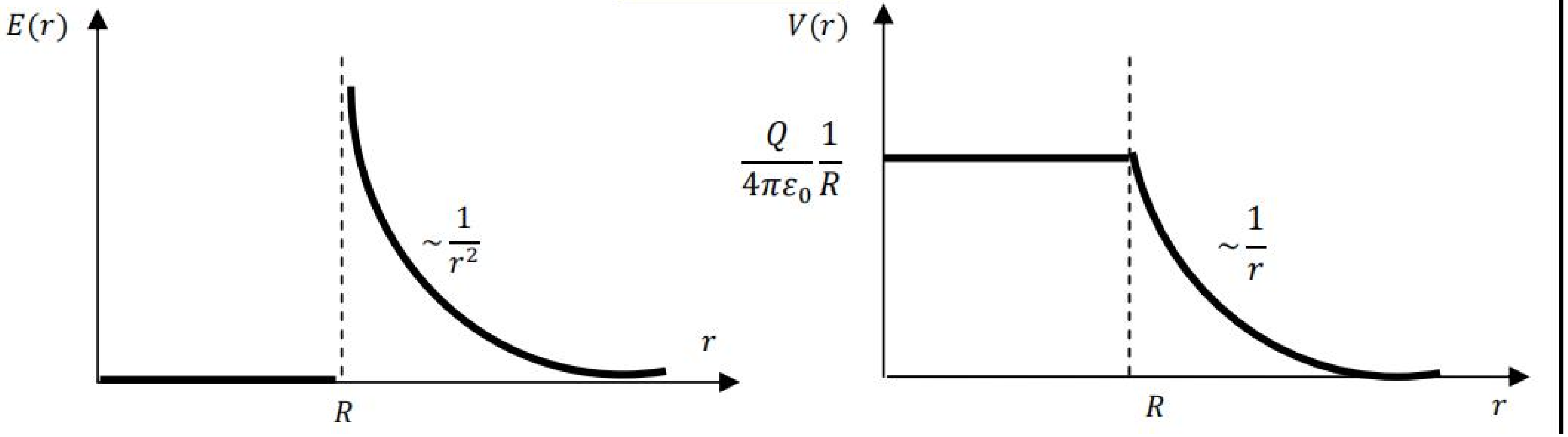
حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Longrightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

8) نظرية غوص

رسم منحنيات $E(r)$ و $V(r)$ بدلالة r:

$$\boxed{\sigma = cte}$$



8) نظرية غوص

لنعتبر الآن كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة حجمية ρ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء أيضا قطريا يعتمد فقط على r، مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرةً نصف قطرها r، و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

$$\phi = \oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E\oint_s ds = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

في حالة: $r < R$

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

في حالة $r > R$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

8) نظرية غوص

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\, dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\, dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية:

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

$$V_1(r) = -\int E_1\, dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

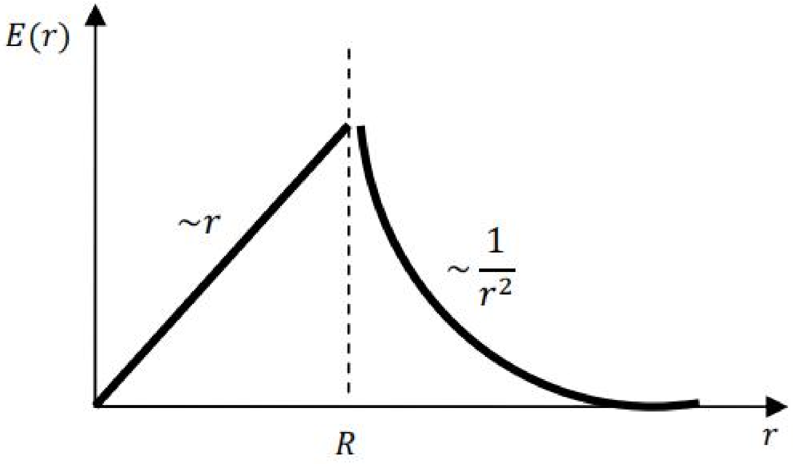
حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

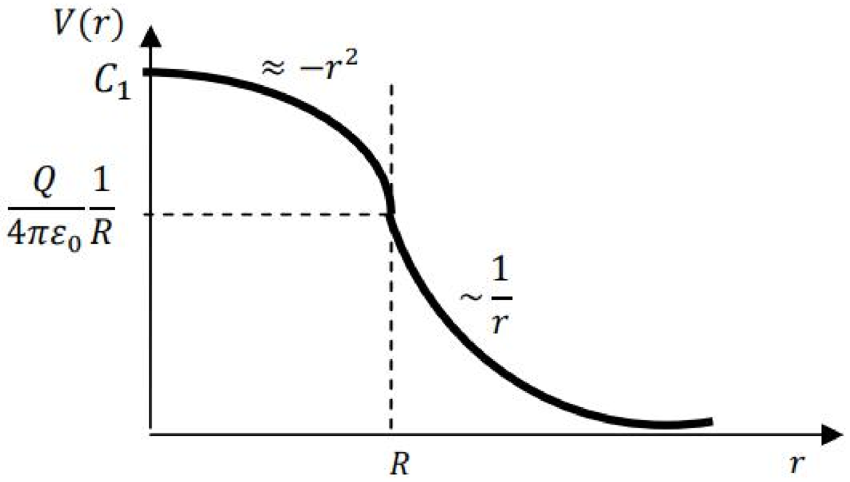
$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2$$

8) نظرية غوص

رسم منحنيات $E(r)$ و $V(r)$ بدلالة r:

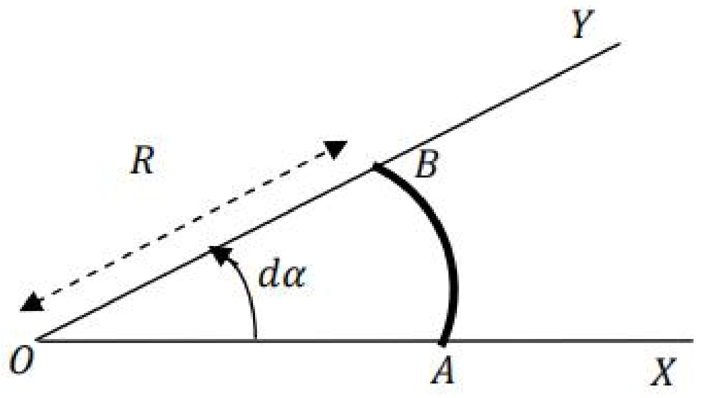
$$\boxed{\rho = cte}$$





البرهان على نظرية غوص

الزاوية المجسمة (*angle solide*): ليكن نصفا المستقيمين OX و OY، يحصران الزاوية $d\alpha$ الممثلة بالقوس $\widehat{AB}$ في الشكل الأول. تعرف زاوية المستوى $d\alpha$ بالعلاقة المعروفة التالية:

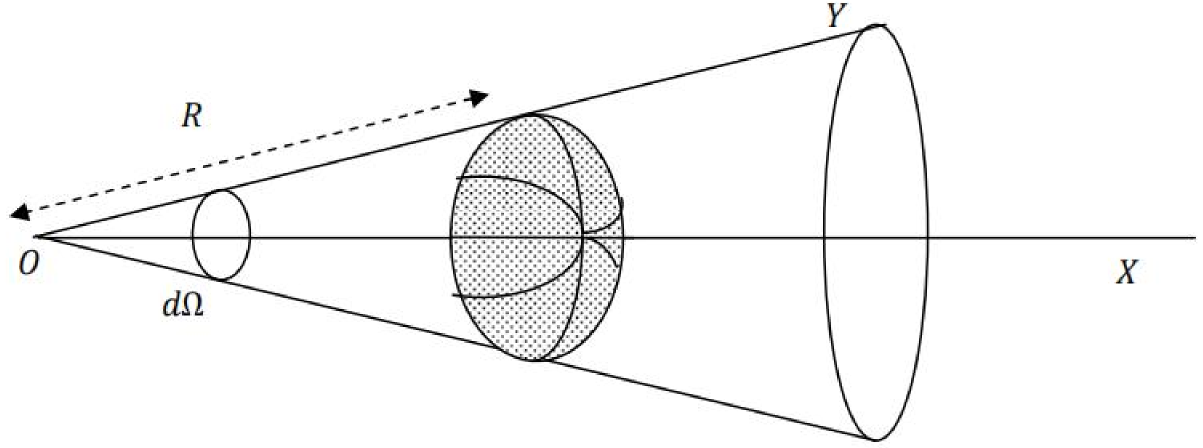


$$d\alpha = \frac{\widehat{AB}}{R}$$

زاوية المستوي بدون بعد و وحدتها في النظام الدولي هي الراديان (*radian*).

دوران المحور OY حول المحور يعطي شكل مخروط دوراني (*cône de révolution*)، ويتحول القوس $\widehat{AB}$ إلى قبة كروية مركزها O ونصف قطرها R.

دوران المحور OY حول المحور يعطي شكل مخروط دوراني (*cône de révolution*)، ويتحول القوس $\widehat{AB}$ إلى قبة كروية مركزها O ونصف قطرها R.

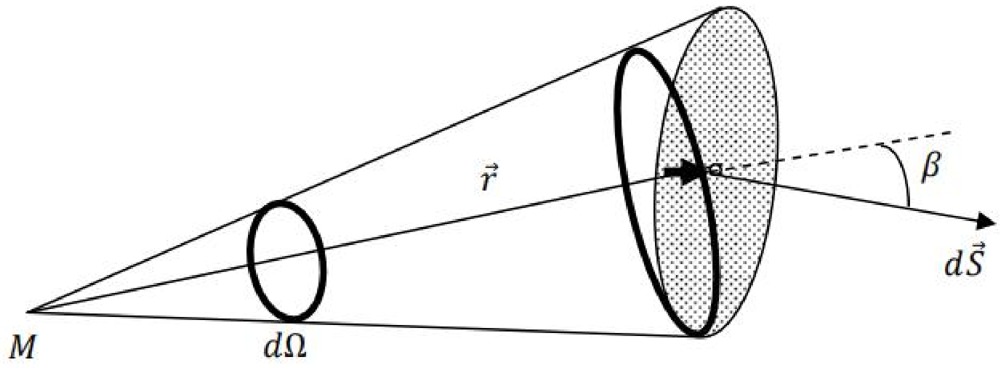


بالطريقة نفسها سوف نعرف الزاوية المجسمة، و هي الزاوية التي نرى من النقطة O القرص الذي يمثل مسقط القبة الكروية على المستوي العمودي على OX (الزاوية التي تمتد تحت عنصر سطح القبة)، و تعطى بالعلاقة التالية:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

الزاوية المجسمة $d\Omega$ بدون بعد ايضا و وحدتها في النظام الدولي هي الستيراديان (*stéradian*)، و dS سطح القبة الكروية.

نعمم العلاقة السابقة، الزاوية المجسمة التي من أجلها نرى السطح dS من النقطة M:



$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS \cos\beta}{r^2}$$

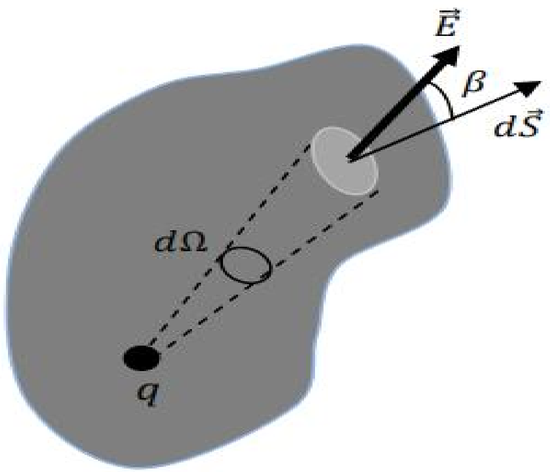
الزاوية المجسمة التي من أجلها نرى كل الفضاء المحيط بالمركز تساوي:

$$\Omega = \int_{\text{كل الفضاء}} d\Omega = 4\pi \ (\text{sr})$$

$$\Omega : 0 \rightarrow 4\pi$$

البرهان على نظرية غوص:

لتكن شحنة نقطية محاطة بواسطة سطح مغلق كيفي S، فإن التدفق الكهربائي الكلي للشحنة q خلال هذا السطح يُعطَى:



$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint E dS \cos\beta$$

حيث β الزاوية المحصورة بين شعاع عنصر المساحة و الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة على مسافة r (المسافة من الشحنة إلى عنصر المساحة dS). بما أن طويلة الحقل الكهربائي تساوي:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

فتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$\phi = \oint E dS \cos\beta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{dS\cos\beta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Omega : 0 \rightarrow 4\pi$$

أو نكتب:

$$\varphi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}.4\pi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Omega : 0 \rightarrow 4\pi$$

مثال

نعتبر اسطوانة مجوفة (S) نصف قطرها (R) لا متناهية الطول مشحونة بكثافة سطحية $\sigma>0$ موزعة بانتظام على سطح الاسطوانة(شكل.1). لتكن M نقطة من الفضاء .

1) بين اتجاه و حامل شعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$.

2) a) اختر سطح غوس المناسب في هذه الحالة و برر اختيارك.

b)أكتب عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ عند النقطة M من الفضاء في الحالتين: ($r > R$ و $r < R$).

3) a) ارسم تغيرات E(r) بدلالة r(حيث E(r) هو طويلة شعاع الحقل محمولة على الشعاع$\vec{u}_r$) .

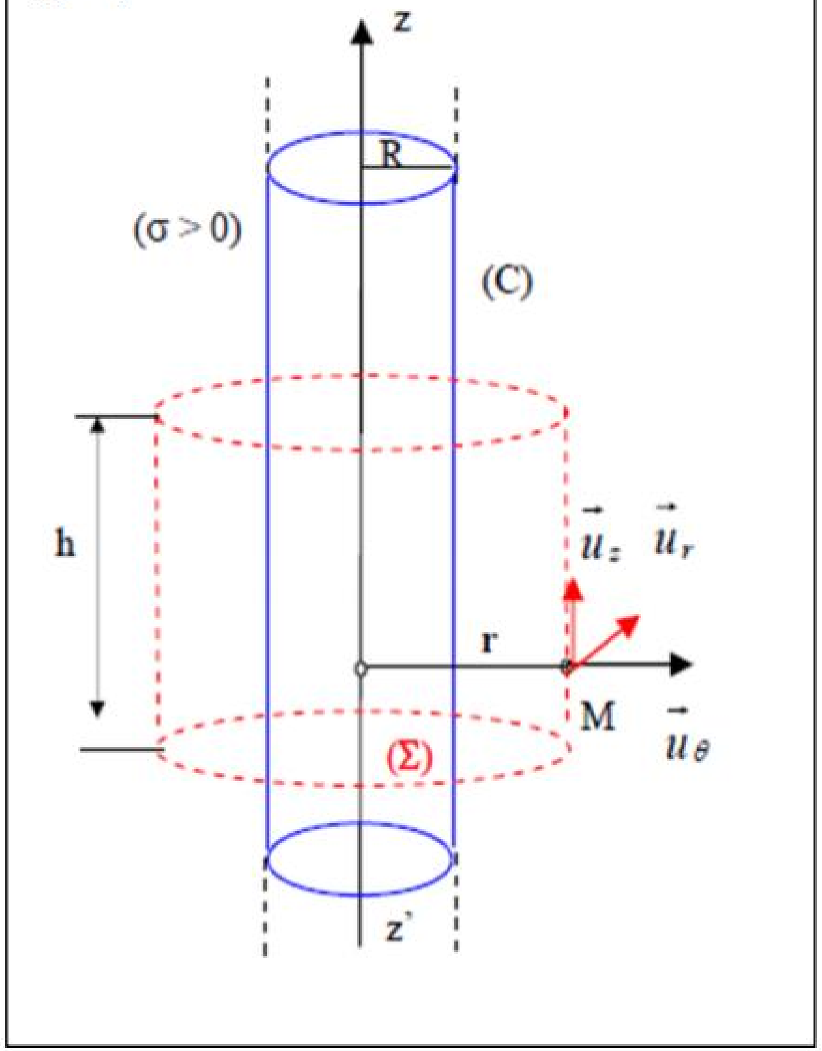
b) هل الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ مستمر على كامل سطح الاسطوانة.

4) اذا أخذنا كمرجع الكمون $V(r=R)=V_0$ أكتب عبارة الكمون V(r) في اي نقطة M من الفضاء.

5) a) ارسم تغيراتٍ V(r) بدلالة r .

b) تحقق أن الكمون V(M) مستمر على كامل سطح الاسطوانة.

شكل1.



الحل

1) اتجاه و حامل شعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$.

$\sigma>0$ = $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

الحقل الكهربائي موازي للشعاع $\vec{u_r}$ و عمودي على السطح اللانهائي للأسطوانة.

2) a) سطح غوس المناسب في هذه الحالة هو أسطوانة طولها h

ومحورها هو محور الأسطوانة (S) و نصف قطرها

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

b) عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ عند النقطة M:

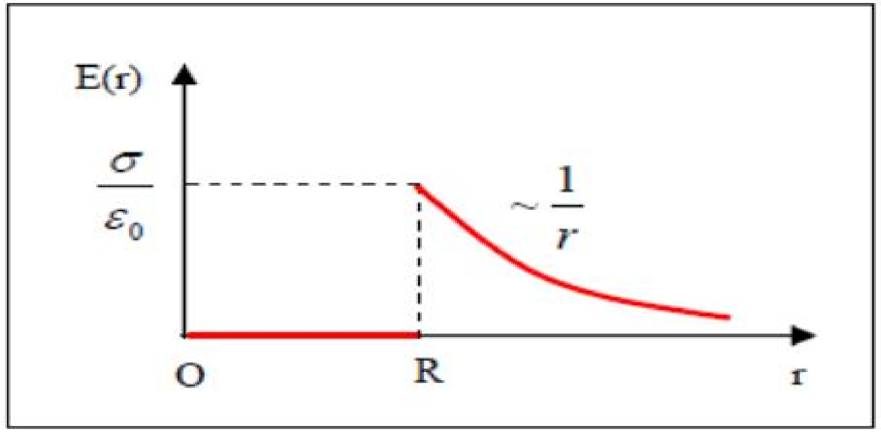
b) $d\Phi = E(r)\vec{u}_r.rd\ell$

$\Phi = \int \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\Phi = 2\pi rhE(r)$

* $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$ $\quad Q_{int}(r < R) = 0$
* $\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$ $\quad Q_{int}(r > R) = 2\pi Rh\sigma$

3) a) رسم تغيرات E(r) بدلالة r:



b) الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ غير مستمر على كامل سطح الاسطوانة.

4) عبارة الكمون V(r) في اي نقطة M من الفضاء:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

$$V = -\int E(r)dr$$

$$* \; V(r \le R) = cste = V_0$$

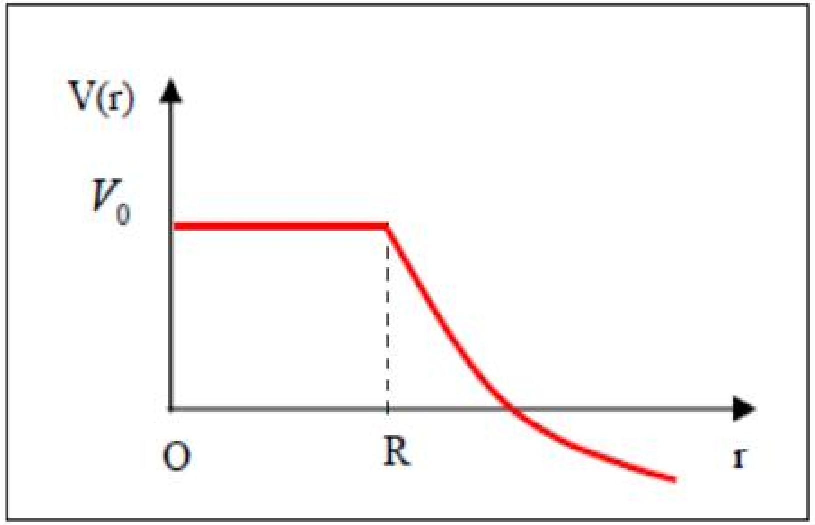
$$V(r \ge R) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \text{Ln } r + B$$

$$V_0 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Ln \; R + B$$

$$B = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} Ln \; R$$

$$V(r \ge R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} L \quad \frac{R}{r} + V_0$$

5) a) رسم تغيرات V(r) بدلالة r .



b)

$$V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = V_0$$

الكمون V(M) مستمر على كامل سطح الاسطوانة.

ملاحظة هامة: يجب على الطلبة مراجعة حساب التكامل

شكرا على المتابعة