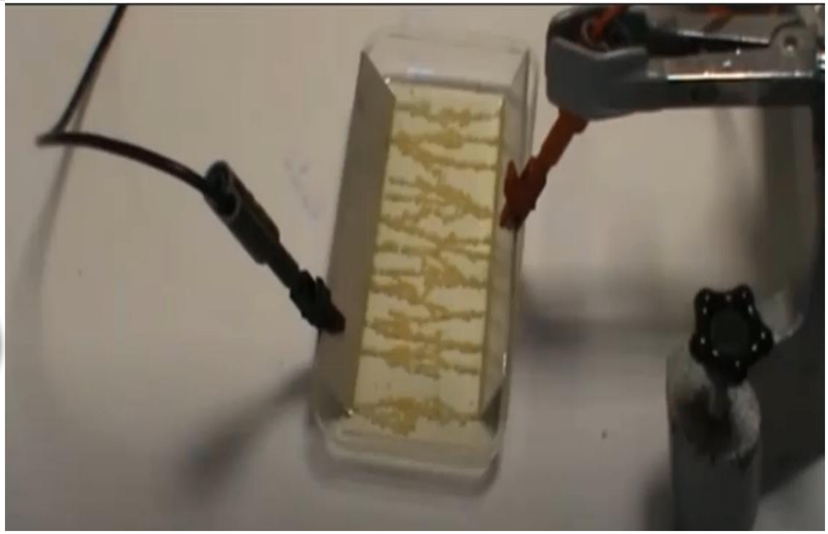
المدرسة العليا للأساتذة الأغواط ENSL



La Machine de Wimshurst

الكهرباء الساكنة
I/(ELECTROSTATIQUE)

5) الحقل و الكمون لتوزيع كهربائي منتظم

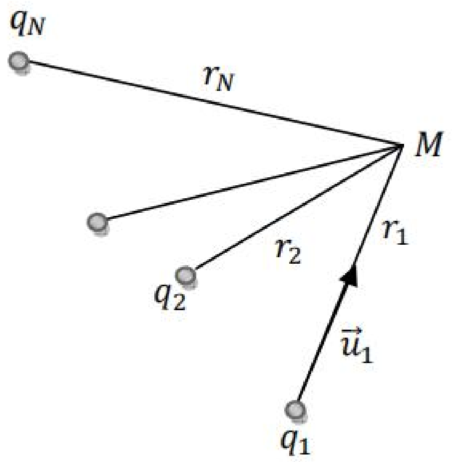
الدكتورة باباغيو ف

مقياس: الكهرباء1 - ف122 - السنة أولى علوم دقيقة

5) الحقل و الكمون لتوزيع كهربائي منتظم

حالة التوزيع المتقطع للشحنات (*distribution discrète de charges*): ليكن لدينا N شحنة نقطية q_1، q_2، ...، q_N و المطلوب حساب الحقل و الكمون الناتجين عن هذه الشحنات في النقطة M.

حسب قانون التراكب:

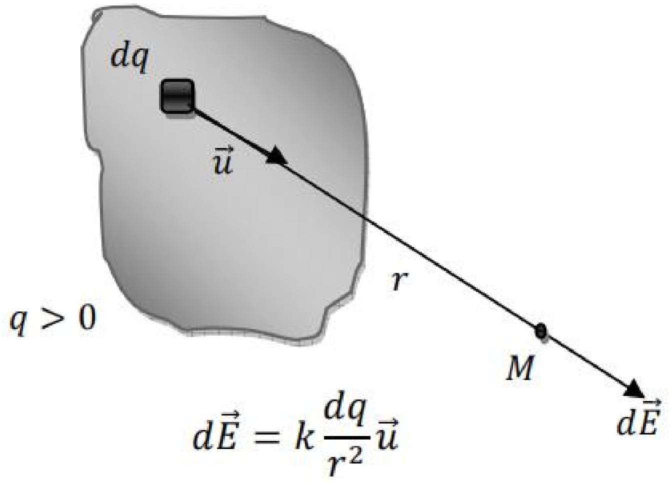


$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\,(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i\,(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

حالة التوزيع المستمر للشحنات (*distribution continue de charges*): في هذه الحالة نجزىء الشحنة q الموزعة على كافة الجسم إلى عناصر تفاضلية dq ثم نجمع (نكامل) تأثيرها فنحصل:



$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad (9)$$

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad (10)$$

يمكن للشحنة في الجسم أن تتوزع في ثلاثة أشكال:

التوزيع الخطي: نعرف الكثافة الخطية λ (*densité linéique*)، وحدتها في النظام الدولي Cm^{-1}، و تمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة الطول dl، أي:

$$dq = \lambda dl$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

حيث L الطول الكلي للجسم.

في حالة الكثافة الخطية المنتظمة :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{L} = \text{ثابت}$$

التوزيع السطحي: نعرف الكثافة السطحية σ (*densité surfacique*)، وحدتها في النظام الدولي Cm^{-2} ، وتمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة السطح dS، أي :

$$dq = \sigma dS$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

حيث S السطح الكلي للجسم.

في حالة الكثافة السطحية المنتظمة :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S} = \text{ثابت}$$

التوزيع الحجمي: نعرف الكثافة الحجمية ρ (*densité volumique*)، وحدتها في النظام الدولي Cm^{-3} ، وتمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة الحجم dv ، أي:

$$dq = \rho dv$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho dv}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho dv}{r}$$

حيث v الحجم الكلي للجسم.

في حالة الكثافة الحجمية المنتظمة :

$$\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{q}{v} = \text{ثابت}$$

مثال 4: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن سلك لانهائي الطول.

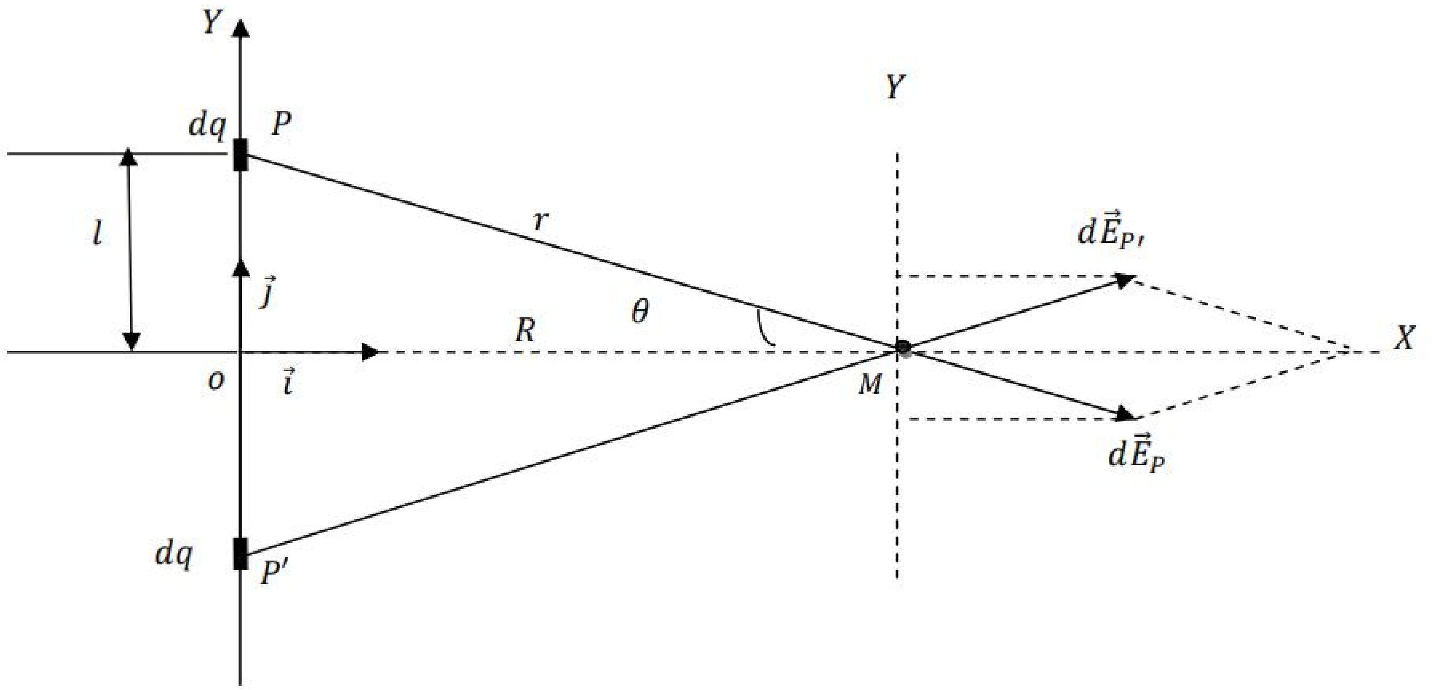
الشحنة موزعة بكثافة طولية منتظمة λ على طول سلك لانهائي الطول. المطلوب حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن هذا التوزيع في نقطة M من الفضاء تبعد مسافة R عن السلك.

دائما قبل الخوض في الحسابات نناقش موضوع طبيعة التوزيع الشحني هل يتسم بالتناظر أو لا، حيث يسمح لنا تناظر الشحنة باختصار الحسابات.

في هذا المثال و بفعل التناظر فإن الحقل الكهربائي سيكون له مركبة وحيدة على المحور $0X$:

$$\vec{E} = E_x \vec{\imath}$$

نقسم السلك إلى عناصر متناهية في الصغر dl، تحمل كل منها شحنة عنصرية : $dq = \lambda dl$



و الحقل الكهربائي العنصري $d\vec{E}_P$ الناتج عن هذه الشحنة العنصرية واقع على الحامل PM كما هو موضح في الشكل، فنجد أن لديه مركبتين:

$$d\vec{E}_P = dE_x\vec{\imath} + dE_y\vec{\jmath} = dE_P \cos\theta\, \vec{\imath} - dE_P \sin\theta\, \vec{\jmath}$$

حيث:

$$dE_P = k\frac{\lambda dl}{r^2}$$

كما ذكرنا سابقا، فإنه بفعل التناظر يكون الحقل الكلي الناتج على السلك له مركبة وحيدة على المحور OX لذلك لا داعي لحساب تكامل مسقط الحقل الكهربائي العنصري على المحور OY. يبقى فقط حساب تكامل المسقط على المحور OX:

$$dE_x = dE_P\cos\theta = k\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\theta \qquad (1')$$

لنكامل هذه المعادلة على كامل السلك حتى نحصل على الحقل الكلي في النقطة M، لذلك من الضروري اختيار المتغير جيدا. لدينا عده امكانيات للمتغيرات: l أو θ، و أسهل حالة هي اختيار θ كمتغير.

من الشكل لدينا:

$$l = R\tan\theta \Rightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{R}{\cos^2\theta} \Rightarrow dl = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$$

نعوض هذه المعطيات في المعادلة $(1')$ فنحصل على:

$$dE_x = k\frac{\lambda\frac{R}{\cos^2\theta}d\theta}{\left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta = k\frac{\lambda}{R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta$$

نكامل المعادلة السابقة على كامل السلك، أي من $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إلى $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{i}$$

بالنسبة إلى حساب الكمون بالطريقة المباشرة فإن كل عنصر من الشحنة dq يعطي كمونًا عنصريًا dV عند النقطة M:

$$dV(M) = k\frac{dq}{r} = k\frac{\lambda dl}{r}$$

لحساب التكامل يجب الاختيار الجيد للمتغير الذي سيجرى عليه التكامل، فقد نحصل باختيارنا على تكاملات صعبة الحل. في هذا الجزء من التمرين سنختار dl عنصر تفاضل، وعلى الطالب أن يجرب الحساب باختيار عنصر التفاضل $d\theta$، و سيجد أنه من الصعب حساب التكامل:

$$dV(M) = k\frac{\lambda dl}{\sqrt{l^2 + R^2}} \quad ; \quad r = \sqrt{l^2 + R^2}$$

لحساب الكمون الكلي الناتج عن السلك يجب أن نكامل على كامل السلك أي من $-\infty$ إلى $+\infty$، و هذا صعب. لذلك بما أن التكامل السابق دالة زوجية نقسم التكامل إلى قسمين، و نكامل من 0 إلى a، ثم نحسب النتيجة عندما تؤول a إلى المالانهاية:

$$V(M) = 2k\lambda \int_0^a \frac{dl}{\sqrt{l^2 + R^2}} = 2k\lambda \ln\left|l + \sqrt{l^2 + R^2}\right|\Big|_0^a$$

$$= 2k\lambda \left[\ln\left|a + \sqrt{a^2 + R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

نستعمل العلاقة $q = \lambda l$ و نحسب النهاية عندما $a \to \infty$:

$$\lim_{a\to\infty} 2k\lambda \left[\ln\left|a + \sqrt{a^2 + R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right]$$

$$= \lim_{a\to\infty} 2k\frac{q}{a} \left[\ln\left|a + \sqrt{a^2 + R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right] = -2k\lambda \ln \mathrm{R}$$

$$V(M) = -2k\lambda \ln \mathrm{R} + C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$$

حيث C ثابت.

نستطيع أن نصل إلى العلاقة السابقة بطريقة الاستنتاج باستعمال العلاقة (5) في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{\imath}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath}$$

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Rightarrow dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx$$

$$\int dV = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + C$$

و عندما $x = R$:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$$

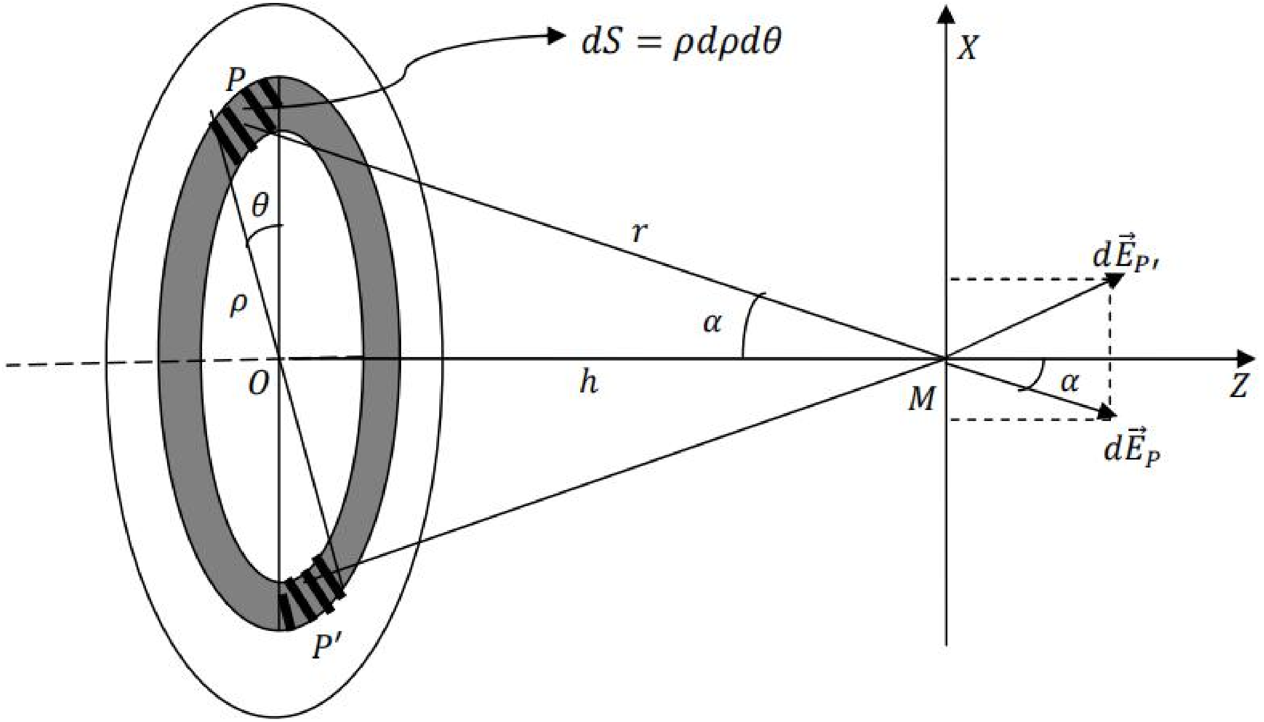
مثال : حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن قرص.

قرص نصف قطره R مشحون بكثافة سطحية $(\sigma > 0)$ منتظمة و مساحته $S = \pi R^2$.

المطلوب: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن هذا التوزيع في نقطة M من محور القرص OZ.

نقسم القرص إلى سطوح تفاضلية سطحية dS تحتوي على شحنة تفاضلية dq، حيث:

$$dq = \sigma dS = \sigma \rho d\rho d\theta$$

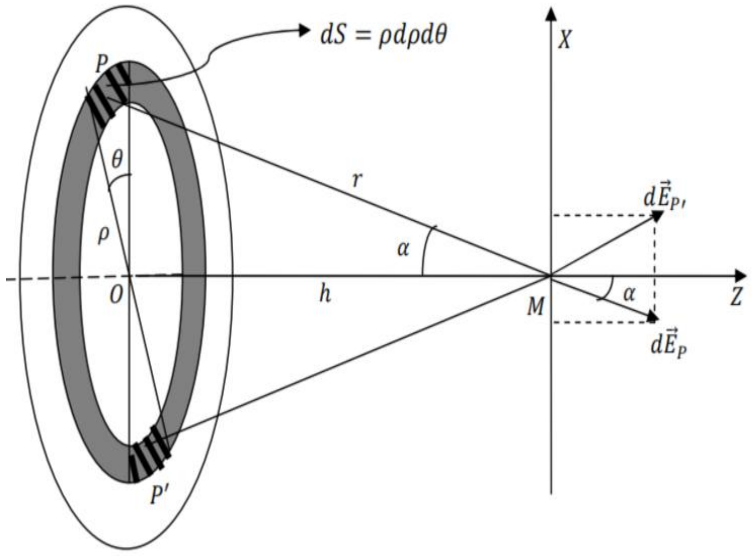


مركبات الحقل العنصري:

$$d\vec{E}_P = -dE_x\vec{i} + dE_z\vec{k} = -dE_P \sin\alpha\,\vec{i} + dE_P \cos\alpha\,\vec{k}$$

$$dE_P = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r^2}$$

بطريقة التمرين السابق نفسها، نلاحظ أن هناك تناظرًا للشحنة، يمكن استغلاله، حيث نجد أن الحقل الكهربائي الكلي له مركبة وحيدة على المحور OZ، فلا داعي لحساب مسقط الحقل على المحاور المتعامدة مع OZ:



$$dE_z = dE_P \cos\alpha = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r^2}\cos\alpha$$

لدينا: θ تتغير من 0 إلى 2π، و ρ من 0 إلى R، و من الشكل نجد:

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}\ ; \qquad r^2 = \rho^2 + h^2$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + h^2)}\ \frac{h}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

نكامل:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{1/2}} + c$$

$$E_z = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}\right)_0^R$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)\vec{k} \qquad (11)$$

بالنسبة إلى حساب الكمون في النقطة M:

$$dV = k\frac{dq}{r} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}$$

نكامل:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}\int_0^{2\pi} d\theta + C$$

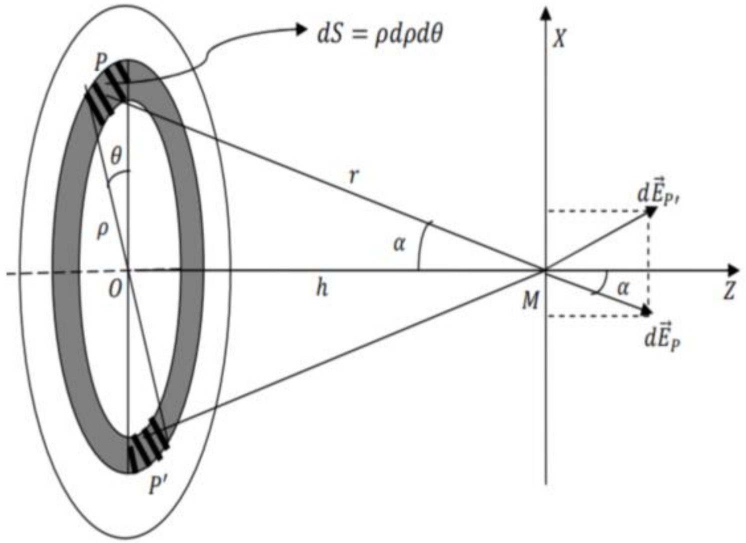
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c$$

حيث C ثابت:

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{h^2 + R^2} - h\right) + C \qquad (12)$$

نستطيع أن نصل إلى العلاقة السابقة بطريقة الاستنتاج باستعمال العلاقة (5) في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)\vec{k}$$



$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\vec{k}$$

بمقارنة طرفي المعادلة السابقة:

$$-\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$dV = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)dz \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right) + C$$

عندما $z = h$:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{h^2 + R^2} - h\right) + C$$

شكرا على المتابعة