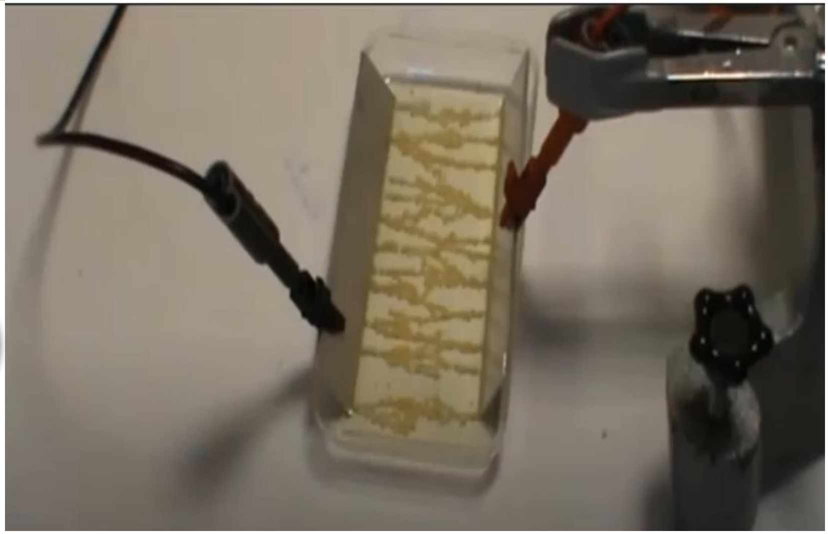
المدرسة العليا للأساتذة الأغواط ENSL

F.BABAG

La Machine de Wimshurst

الكهرباء الساكنة
I/(ELECTROSTATIQUE)



3) الحقل والكمون الكهربائيين
4) الطاقة الكهروستاتكية

الدكتورة باباغيو ف

مقياس: الكهرباء1 - ف122 - السنة أولى علوم دقيقة

مقارنة بين القوة الكهربائية و قوة التجاذب الكتلي.

يفصل بين إلكترون و بروتون ذرة الهيدروجين مسافة $5.3 \times 10^{-11}\text{m}$. أوجد مقدار القوة الكهربائية و قوة التجاذب الكتلي بين الإلكترون و البروتون، حيث:

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}\,; \qquad m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$$

من قانون كولوم نجد:

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} = \left(9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{(1.60 \times 10^{-19}C)^2}{(5.3 \times 10^{-11}m)^2} = 0.82 \times 10^{-7}N$$

وباستعمال قانون نيوتن للجذب نجد ان:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \left(6.7 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{\text{kg}^2}\right)\frac{(9.11 \times 10^{-31}kg)(1.67 \times 10^{-27}kg)}{(5.3 \times 10^{-11}m)^2}$$
$$= 3.62 \times 10^{-47}N$$

النسبة بين القوتين: $\frac{F_e}{F_g} = 2.26 \times 10^{39}$

إن قوة؛ التجاذب الكتلي و أيضا قوة الثقالية مهملة أمام القوة الكهربائية.

1-3) الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية

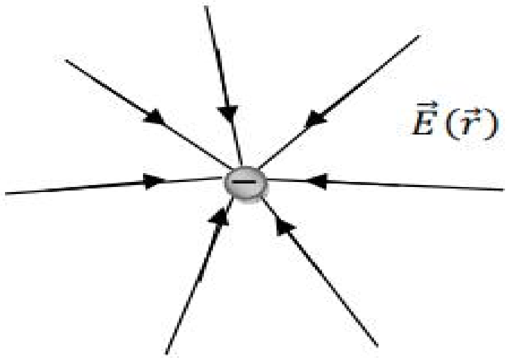
إن القوة الكهربائية، حسب قانون كولوم، الناتجة عن الشحنة النقطية q و التي تؤثر على شحنة نقطية أخرى q' تبعد عنها مسافة r هي:

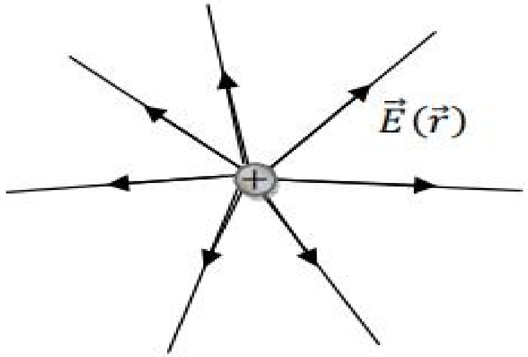
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r} = q'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = q'\vec{E}$$

نلاحظ أن القوة الكهربائية $\vec{F}$ تتعلق بمقدار شعاعي $\vec{E}$، يتعلق بدوره بـ q فقط يدعى الحقل الكهربائي(*champ électrique*)، و هو يميز حيزا من الفضاء المحيط بالشحنة q، و يعتبر الأداة التي تنقل تأثير q إلى أي موضع من الفضاء، سواء كانت به شحنة أو لا، فان وجدت في الموضع شحنة تولد عندها قوة كولوم. دور الشحنة q' هو تحسس الحقل الناتج عن q عندها دون ان يكون لها دور في إنشائه. و منه فالحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q عند النقطة M التي تبعد عنها مسافة r يعطى:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \qquad (2)$$

- ✓ إذا كانت $q > 0$ فإن للحقل الكهربائي $\vec{E}$ نفس اتجاه $\vec{r}$.
- ✓ إذا كانت $q < 0$ فإن للحقل الكهربائي $\vec{E}$ عكس اتجاه $\vec{r}$.
- ✓ يتجه الحقل الكهربائي نحو الشحنات السالبة و يصدر عن الشحنات الموجبة.





- ✓ وحدة الحقل الكهربائي في النظام الدولي SI هي NC^{-1} (سنرى فيما بعد أنه يمكن استعمال وحدة أخرى هي Vm^{-1}).
- ✓ يؤدي الحقل الكهربائي دورا مماثلا للذي يؤديه حقل الجاذبية الأرضية الذي ينقل أثر الأرض (الجذب) إلى الأجسام ليولد عندها قوة الثقل: $\vec{p} = m\vec{g}(\vec{r})$.

2-3) الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية

نعرف الكمون الكهربائي (*potentiel électrique*) الناتج عن شحنة نقطية q عند النقطة M التي تبعد عنها مسافة r بـ:

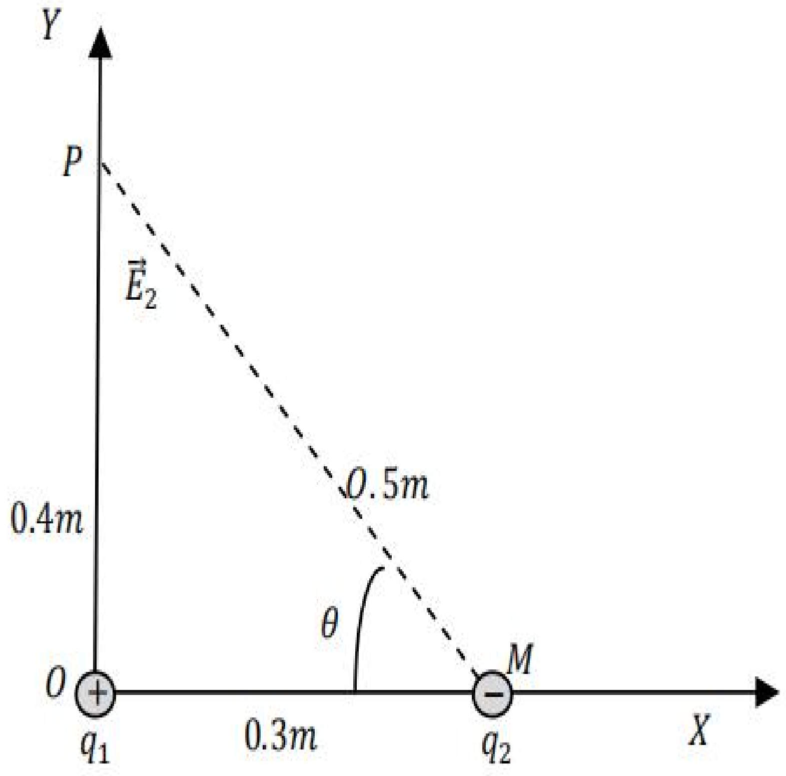
$$V(M) = k\frac{q}{r} + c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + c \qquad (3)$$

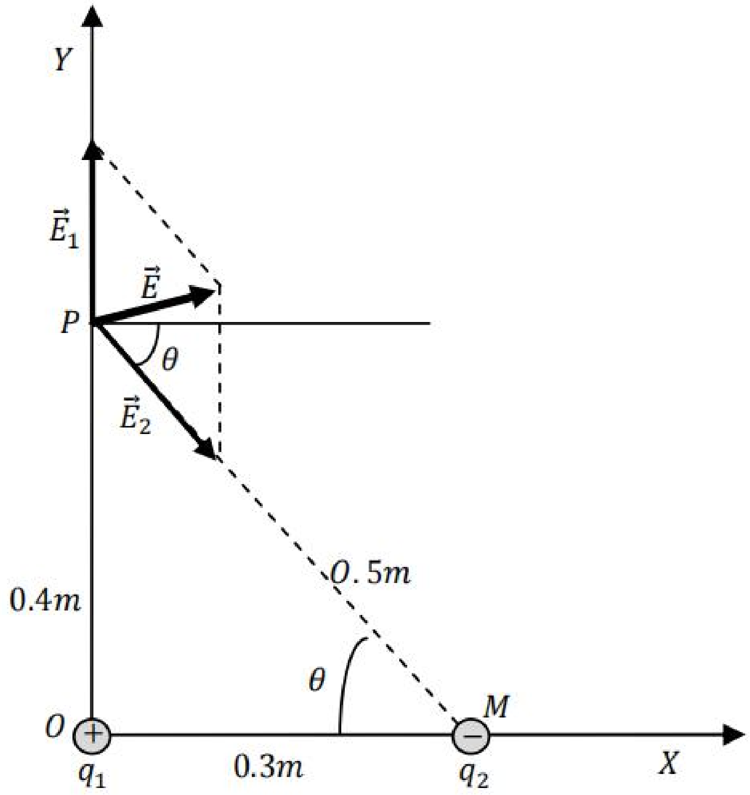
يحدد الثابت c وفقا لمرجع الكمون. فمثلا يكون $c = 0$ عندما $V(\infty) = 0$.

مثال 3: الحقل و الكمون الكهربائيان الناتجان عن شحنتين.

في المعلم OXY، وضعت الشحنة $q_1 = 7\mu C$ عند النقطة $(0,0)$، و وضعت الشحنة $q_2 = -5\mu C$ عند النقطة M ذات الإحداثيات $(0.3,0)m$، أنظر الشكل.

أوجد الحقل و الكمون الكهربائيين في النقطة P ذات الإحداثيات $(0,0.4)$m.





الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنتين في الموضع P:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$$

في المعلم OXY لدينا:

$$\vec{E}_1(P) = E_1\vec{j}$$

$$\vec{E}_2(P) = E_2 \cos\theta\,\vec{i} - E_2 \sin\theta\,\vec{j}$$

حيث:

$$\cos\theta = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{|\overrightarrow{OP}|^2} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(7\times10^{-6}C)}{(0.4m)^2} = 3.9\times10^5\,N/C$$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{|\overrightarrow{MP}|^2} = (9\times10^9)\frac{(5\times10^{-6})}{(0.5)^2} = 1.8\times10^5\,N/C$$

$$\vec{E}_1(P) = 3.9\times10^5\vec{j}$$

$$\vec{E}_2(P) = 1.8\times10^5\left(\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}\right) = 1.08\times10^5\vec{i} - 1.44\times10^5\vec{j}$$

$$\vec{E}(P) = 1.08\times10^5\vec{i} + 2.46\times10^5\vec{j}$$

الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنتين في الموضع P:

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P)$$

حيث:

$$V_1(P) = k\frac{q_1}{|\overrightarrow{0P}|} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(7\times10^{-6}C)}{0.4m} = 1.58\times10^5V$$

$$V_2(P) = k\frac{q_2}{|\overrightarrow{MP}|} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(-5\times10^{-6}C)}{0.5m} = -0.9\times10^5V$$

$$V(P) = 1.58\times10^5 - 0.9\times10^5 = 0.68\times10^5V$$

3-3) العلاقة بين الحقل والكمون الكهربائيين

لنحسب تجوال (circulation) الشعاع $\vec{E}$ عبر عنصر الطول $d\vec{r}$:

$$\vec{E}.d\vec{r} = k\frac{q}{r^3}(\vec{r}.d\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}dr \qquad (4)$$

بمفاضلة المعادلة (3) بالنسبة للمتغير r:

$$\frac{dV}{dr} = -k\frac{q}{r^2} \Rightarrow dV = -k\frac{q}{r^2}dr \qquad (5)$$

بمقارنة العلاقتين (4) و (5) نجد العلاقة:

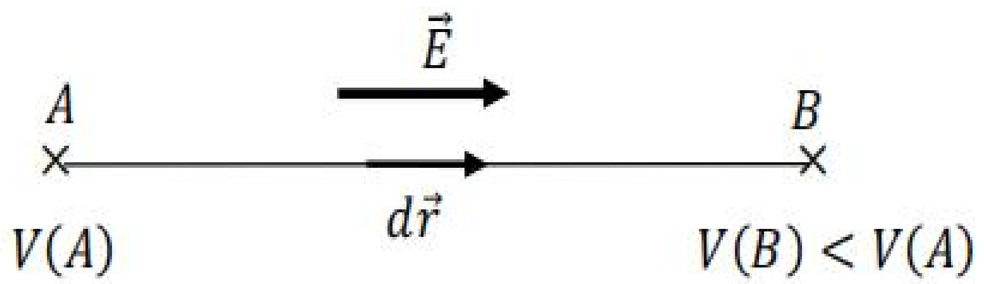
$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \qquad (6)$$

تجوال الحقل الكهروستاتيكي على مسار من النقطة A إلى النقطة B:

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

ملاحظات:

- ✓ هذا التجوال محفوظ لا يتعلق بالمسار المتبع.
- ✓ تجوال الحقل الكهروستاتيكي عبر مسار مغلق معدوم.
- ✓ من أجل $0 < \vec{E}.d\vec{r}$ لدينا $V(A) > V(B)$، يعني أن اتجاه خطوط الحقل في اتجاه تناقص الكمون.



باستعمال الإحداثيات الديكارتية في المعادلة (6) نجد:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

بالمقارنة بين المعادلتين السابقتين نجد:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad (7)$$

وحدة الكمون في النظام الدولي SI هي: $J.C^{-1}$ أو باختصار الفولط (V). أشرنا سابقا أنه يمكن تعويض وحدة الحقل بـ: Vm^{-1} .

العلاقة بين الحقل و الكمون

$$\vec{E}.\overrightarrow{dr} = -dV \rightarrow dV = -\overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dr}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\vec{\nabla}V$$

حيث: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

حساب الحقل و الكمون

لدينا عدة طرق لحساب الحقل و الكمون:

1- الحساب المباشر بالاعتماد على العلاقات السابقة.

2- استنتاج أحدهما من الأخر.

3- الطريقة البيانية.

4) الطاقة الكهروستاتكية

4 - الطاقة الكهروستاتيكية

الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية لشحنة نقطية

الطاقة الكامنة الكهربائية أو الكهروستاتيكية لشحنة نقطية واحدة موضوعة داخل حقل كهربائي خارجي (ناتج عن مجموعة من الشحنات) تساوي العمل المبذول لجلب هذه الشحنة من مالانهاية إلى موضعها النهائي.

لكي تتحرك الشحنة q من A إلى B داخل حقل كهربائي E ، العمل المبذول أو عمل القوة الكهربائية هو:

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) = q.V$$

لكي تتحرك الشحنة q من ∞ حيث الكمون $V(\infty)=0$ إلى موضعها في النقطة M داخل حقل كهربائي E ، العمل المبذول أو عمل القوة الكهربائية هو:

$$W_{\infty\to M} = \int_{\infty}^{M} -q\vec{E}.\overrightarrow{dr} = q\int_{\infty}^{M} -\vec{E}.\overrightarrow{dr} = q\int_{\infty}^{M} dV = q\big(V(M) - V(\infty)\big) = qV(M)$$

إذن الشحنة الكهربائية التي تتحرك من مالانهاية إلى موضعها في النقطة M تملك طاقة كامنة كهربائية تكتب من الشكل:

$$E_p(M) = qV(M)$$

الطاقة الداخلية لمجموعة من الشحنات النقطية

لتكن n شحنة نقطية q_1 ، ....، q_n موضوعة في النقاط A_1 ، ....، A_n في الفضاء.

كل شحنة يؤثر عليها الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنات الأخرى. في البداية كل الشحنات متباعدة عن بعضها البعض في المالانهاية.

تعرف الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية بالعمل اللازم انجازه لتجميع هذه الشحنات وذلك بجلب كل شحنة من المالانهاية .

نفرض ان الشحنات في حالة سكون وعندما تكون على ابعاد لانهائية من بعضها البعض الاخر يمكن حساب الطاقة لمجموعة مكونة من شحنتين q_2, q_1 . ان نقل الشحنة q_1 من اللانهاية ووضعها في مكان لايتطلب انجار عمل .

$W_1 = 0$

ولكن نقل الشحنة q_2 من اللانهاية ووضعها على بعد r من q_1 يتطلب انجار عمل قدره

$W_2 = q_2 V_1$

حيث ان V_1 يمثل الكمون الكهربائي للشحنة q_1 على بعد r قدره

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

$$W = W_1 + W_2 = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

وهو نفسة الطاقة الكامنة بالنسبة لشحنة نقطية

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

بنفس الطريقة يمكننا حساب الطاقة الكامنة لمجموعة تتكون من ثلاث شحنات

$$W_1 = 0$$
$$W_2 = q_2 V_1$$
$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

المجموع الجبري للكميات الثلاثة

$$E_P = W_1 + W_2 + W_3$$

$$E_P = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right]$$

بصفة عامة الطاقة الداخلية لجملة من الشحنات:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_{j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i V_i$$

إضافة $\frac{1}{2}$ لأن التأثير بين الشحنات q_i و q_j يكون مكتوبا مرتين.

مثال

نضع أربع شحنات كهربائية q متماثلة على رؤوس مربع ضلعه a كما هو موضح في الشكل.

1- أكتب عبارة الكمون الكهربائي الناتج في النقطة O .

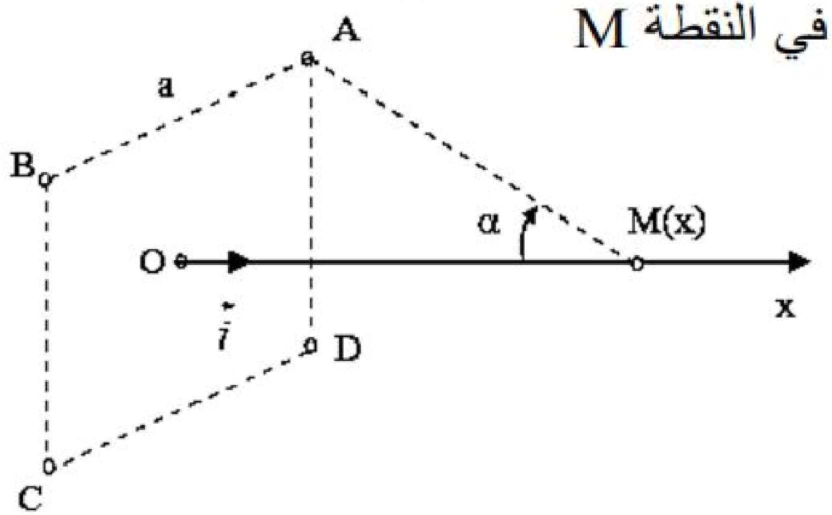
2- أكتب عبارة الكمون الكهربائي الناتج في النقطة M على المحور Ox حيث OM=x

3- استنتج عبارة الحقل الكهربائي الناتج في النقطة M .

4- نضع شحنة q– في النقطة M اكتب عبارة القوة الكهربائية المطبقة على هذه الشحنة.

5- استنتج بطريقتين مختلفتين عبارة الطاقة الكامنة لهذه الشحنة الموضوعة في النقطة M

6- اكتب عبارة الطاقة الداخلية للشحنات الأربعة الموجبة.



شكرا على المتابعة