الفصل 01: مدخل إلى المنطق الرياضي

الهدف من هذا الفصل هو تحديد قواعد معينة التي سنعتمد عليها في البراهين و الاستنباط.

1. القضايا و الجمل المفتوحة:

تعريف: نسمي قضية كل جملة يمكننا الحكم عليها بالصحة "V" أو الخطأ "F"، لكن ليس الإثنان معاً.

للتعبير عن القضايا نرمز إليها بالرموز P, Q, R, ... إلخ.

أمثلة:

1- "الأغواط هي عاصمة الجزائر" قضية خاطئة.

2- القضية "14 مضاعف للعدد 4" خاطئة و "7 يقسم 3" قضية خاطئة.

3- "محرز لاعب كرة قدم" قضية صحيحة.

الجمل التي نصادفها في أغلب الأحيان تكون أكثر عمومية على سبيل المثال "العدد x يقبل القسمة على 3" لا يمكننا القول أنها صحيحة أو خاطئة لأن صحتها أو خطأها تعتمد على قيمة العدد x و بالتالي الجملة "العدد x يقسم العدد 3" ليست قضية، نقول عنها جملة مفتوحة.

يعرف الجملة $\forall x \in E, P(x)$ صحيحة من أجل كل x من E يحقق $P(x)$.

الحكم "يوجد" نرمز له بالرمز $\exists$، يعرف الجملة $\exists x \in E, P(x)$ صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق $P(x)$.

أمثلة:

1. الجملة $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ صحيحة لأن مربع أي عدد حقيقي موجب.
2. الجملة $\exists x \in \mathbb{N} : x - 2 > 0$ صحيحة لأنه يكفي أخذ x أي عدد طبيعي أكبر تماما من 2.
3. الجملة $\forall n \in \mathbb{N} : (n-3)n \geq 0$ خاطئة لأن غير محققة مثلا من أجل العدد الطبيعي 1.

نفي الحكم الكلي والجزئي

قاعدة:

$$\overline{\exists x \in E : P(x)} \equiv \forall x \in E : \overline{P(x)}$$

$$\overline{\forall x \in E : P(x)} \equiv \exists x \in E : \overline{P(x)}$$

مثال

نفي الجملة الأولى في المثال السابق هو $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.

البرهان:

- نبرهن أن "$P \Rightarrow Q$" و "$\bar{P} \vee Q$" متكافئتين منطقيا

نرسم جدول الحقيقة لكل من $P \Rightarrow Q$ و $\bar{P} \vee Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

من العمود الأخير لكل من جدول نستنتج أن

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\bar{P} \vee Q)$$

- إثبات الخاصية 2

من الخاصية السابقة لدينا

$$\overline{P \Rightarrow Q} \equiv \overline{\bar{P} \vee Q}$$

$$\equiv P \wedge \bar{Q}$$ خاصية مورغان

الخاصية 3 و 4 تترك للطالب

المكممات

"المكمم الكلي و الجزئي"

تعريف: لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة معرفة على E.

- المكمم "مهما يكن" و "من أجل كل" نرمز له بالرمز $\forall$.

- القضية $P \Rightarrow Q$ تسمى بالاستلزام نحو P، Q، وتقرأ P يستلزم Q، وهي خاطئة في حالة واحدة وهي P صاطئة و Q خاطئة.

- القضية $P \Leftrightarrow Q$ تسمى بالتكافؤ نحو P، Q، وتقرأ P يكافئ Q، وهي صحيحة إذا كان P و Q لديهما نفس قيمة الحقيقة.

جدولي الحقيقة للاستلزام والتكافؤ

P	Q	$P \Rightarrow Q$	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

الأسئلة أمثلة:

- "محرز ليس لاعب كرة قدم"، هذه القضية هي نفي القضية "محرز لاعب كرة قدم"

- "$2>5$ و $3=2$" هو وصل القضيتين "$2>5$"، "$3=2$" وهي خاطئة

- ~~[illegible]~~ "كل عدد زوجي هو عدد أولي" هذه القضية استلزام القضيتين عدد زوجي، عدد أولي

- إذا وفقط إذا كان x عدد فردي فإن x يقبل القسمة على 3.

خواص الروابط المنطقية

نقول عن قضيتين f و g مبلتين مفتوحتين f أنهما متكافئتين

تعريف: لتكن E مجموعة، نسمي جملة مفتوحة كل جملة تحتوي على أحرف تسمى بالمتغيرات بحيث عندما نعوض كل من هذه المتغيرات بعناصر من E نحصل على قضية. نرمز لكل الجملة المفتوحة التي تتعلق بالمتغير x بالرمز P(x).

أمثلة:

1- P(w) جملة مفتوحة معرفة كما يلي: "w ولاية جزائرية"

P(الأغواط) صحيحة

P(لندن) خاطئة

2- P(x,y) جملة مفتوحة معرفة كما يلي: "x = 3 + y" (x, y أعداد حقيقية)

P(2, -1) صحيحة

P(3, 14) خاطئة

2- الروابط المنطقية:

تسمح الروابط المنطقية بإنشاء قضايا منطقية جديدة انطلاقا من قضايا منطقية P, Q, R, ... التي يمكننا تحديد قيمة حقيقتها انطلاقا من قيم الحقيقة للقضايا الأولية P, Q, R, ...

نفي قضية (أو الجملة المفتوحة)

تعريف: نفي القضية P هي القضية التي نرمز لها بالرمز $\overline{P}$ وهي خاطئة إذا كانت P صحيحة وصحيحة إذا كانت P خاطئة

منطقيا إذا كان لهما نفس جدول الحقيقة.

خواص:

لتكن P ، Q ، R ثلاث جمل مفتوحة

1- لدينا التكافؤ المنطقي التالي ، يسمى بقانون مورغان

$$\overline{(P \vee Q)} \equiv (\overline{P} \wedge \overline{Q})$$

$$\overline{(P \wedge Q)} \equiv (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

2- ولدينا أيضا التكافؤ المنطقي التالي

$$(P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

$$(P \wedge (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

الوصل توزيعي على الفصل و الفصل توزيعي على الوصل.

البرهان: تبرهن الخواص السابقة باستعمال جدول الحقيقة

خواص:

لتكن P ، Q جملتين مفتوحتين ، لدينا التكافؤات المنطقية التالية:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{P} \vee Q)$$

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \equiv (P \vee \overline{Q})$$

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

يمكننا أن نلخص قيم الحقيقة لـ $\overline{P}$ في جدول يسمى بـ جدول الحقيقة

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

يمكننا أن نرمز إلى صحيح بالرمز V أو 1

" " إلى خاطئ بـ F أو 0

الوصل و الفصل

تعريف: لتكن P و Q قضيتين أو جملتين مفتوحتين

- القضية "$P \wedge Q$" تسمى بالوصل وتقرأ P و Q و هي صحيحة إذا كان P و Q صحيحتين معا

- القضية "$P \vee Q$" تسمى بالفصل و تقرأ P أو Q وهي خاطئة في حالة واحدة وهي P و Q خاطئتين معًا

جدولي الحقيقة لرابطي الفصل و الوصل

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

الاستلزام و التكافؤ

تعريف: لتكن P و Q قضيتين أو جملتين مفتوحتين