بابا حامد
بن حبيب

الجبر I

تذكير بالدروس و تمارين محلولة

(ع . د . ر 300)

ترجمة: محمد حازي

ديوان المطبوعات الجامعية

الفصل . I .

مفاهيم تمهيديّة في الجبر

I . مفاهيم في المنطق :

إن الحدس، في الرّياضيّات، هو الذي يعطي الفهم. ويسمح المنطق بإعطاء شكل للحدس و مراقبته (بعض النّتائج الحدسيّة خاطئ !) بغية إنشاء كائنات ريّاضيّة جديدة على المدى اللامنتهي، وكذا سياقة البراهين.

ويمكن لنظرية المجموعات أن نصاغ في قالب اصطلاحي يقال عنه مقعّد الإستنباط.

وبطريقة صوريّة، يكون مبدأ إنشاءٍ مُقعّدٍ و بديهيّ لهذه النّظريّة على النّحو التّالي :

يُعطى عدد صغير من الإشارات المنطقيّة والقواعد التّي تسمح بكتابة حشود نميّز منها نوعين : الحدود (مثال: المجموعة)، و العلاقات الممثّلة للإدعاءات التّي يمكننا القيام بها على الكائنات قصد التّعبير عن خصائصها. ثمّ تُعطى قواعد المنطق الشّكلي التي تسمح بإنشاء علاقات جديدة، الخ...

سوف نسلّم بأنّ كلّ علاقة صحيحة أو خاطئة.

ومن أجل الصّحة الريّاضيّة نتبنّى بعض المسلّمات، أي بعض العلاقات المعتبرة صحيحة افتراضاً، ثمّ يسمح برهان بالاستنتاج منها، منطقيّاً، لعلاقات صحيحة أخرى، تسمّى مبرهنات (أو قضايا، توطئات، نتائج، الخ...)

1- علاقتان أوّليتان:

أ- الإنتماء:

" a عنصر من E " أو " a ينتمي إلى E " يرمز لها بـ: $a \in E$.

ب- المساواة:

إذا كان a و b يعيّنان نفس الشّيء، نقول بأنّ a و b متساويان ونـ[كتب] $a=b$.

2- قواعد المنطق الشّكلي. جداول التّقييم:

لتكن p و q علاقتين معطاتين.

أ- النّفي:

نفي p علاقة تفيد عكس العلاقة p. نرمز لها بِـ: لا p أو $\neg p$.

مثالان:

لا $(a \in E)$ تكتب: $a \notin E$ ؛ لا $(a=b)$ تُكتب: $a \neq b$

ب- الفصل:

فصل p و q علاقة جديدة يرمز لها بِـ: p أو q ، $p \vee q$.

مثالان:

وهران مدينة جزائريّة **أو** $1+3=6$. (E_1)

وهران عاصمة الجزائر **أو** $1+3=6$. (E_2)

جـ) الوصل:

وصل p و q علاقة يرمز لها بِـ: p و q ، $p \wedge q$.

و هي العلاقة: لا((لا p) أو (لا q))

أمثلة:

الأرض كوكب والقطّ تديّي. (E_3)

القطّ يعرف الكتابة والقطّ ثديّي. (E_4)

القطّ يعرف الكتابة والثّلج أخضر. (E_5)

د- الإستلزام:

تسمّى العلاقة ((لا P) أو q) إستلزام q بواسطة P؛

يُرمز لها ب: $q \Leftarrow P$.

أمثلة:

القطّ يعرف الكتابة ⇐ الثّلج أخضر. (E_6)

$x \in \phi$ ⇐ $x \in E$. (E_7)

القطّ ثديّ ⇐ الثلج أخضر. (E_8)

هـ) التكافؤ:

تكون علاقتان P و q متكافئتين إذا كانت $(q \Rightarrow P)$ و $(P \Rightarrow q)$ صحيحتين في آن واحد؛ ونرمز: $q \Leftrightarrow P$.

مثالان:

القطّ يعرف الكتابة ⇔ الثّلج أخضر. (E_9)

وهران مدينة جزائرية ⇔ $1+3=6$. (E_{10})

إذا أرفقنا بكلّ علاقة معطاة قيمة نرمز لها بـ: V أو بـ: F تبعًا لكون العلاقة المعطاة صحيحة أو خاطئة على الترتيب، فإنّنا نحصل على جداول التّقييم التّاليّة:

P	لا P
V	F
F	V

P	q	P أو q	P و q	$q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow q$	$q \Leftrightarrow P$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

نلاحظ أنّه إذا كانت p خاطئة، فإنّ $(p \Rightarrow q)$ صحيحة مهما تكن قيمة q؛ وتكون p و q متكافئتين إذا كانت لهما قيمة واحدة ذاتها.
ومن جهة أخرى، تكون الدّعاوي (E_1)، (E_3)، (E_6)، (E_7)، (E_9) صحيحة، في حين أنّ الدّعاوي (E_2)، (E_4)، (E_5)، (E_8)، (E_{10}) ليست كذلك.

3- قضايا بيّنة:

مهما تكن قيم العلاقات p، q و r، فإنّ العلاقات المواليّة تكون دوما صحيحة:

1. (لا p) أو p.
2. لا(لا p) $\Leftrightarrow$ p.
3. لا (p أو q) $\Leftrightarrow$ ((لا p) و (لا q)).
4. لا(p و q) $\Leftrightarrow$ ((لا p) أو (لا q)).
5. (p و (q أو r)) $\Leftrightarrow$ ((p و q) أو (p و r)).
6. (p أو (q و r)) $\Leftrightarrow$ ((p أو q) و (p أو r)).
7. ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ (لا $q \Rightarrow$ لا p)

تسمّى العلاقة (لا $q \Rightarrow$ لا p) العكس النّقيض للعلاقة $(p \Rightarrow q)$

8. (لا$(p \Rightarrow q)$) $\Leftrightarrow$ (p و (لا q)).
9. (($p \Rightarrow q$) و ($q \Rightarrow r$)) $\Rightarrow$ $(p \Rightarrow r)$.

4- المكمّمات:

نرمز بـ: $P(x)$ لعلاقة أُدرج فيها شيء x ليس له مدلول معيّن.
مثال: $P(x)$ تعني العلاقة " x عدد طبيعي "
العلاقة $P(5)$ صحيحة، ولكن $P(1/2)$ خاطئة.

أ- المكمّم الوجودي:

يرمز للعلاقة "يوجد x بحيث $P(x)$" بـ: $\exists x, P(x)$

للبرهان على أنّ العلاقة " $\exists x, P(x)$ " صحيحة ، يكفي أن نجد ، على الأقل ، شيئا x_0 ، بحيث تكون $P(x_0)$ صحيحة.

ب - المكمّم الكوني:

" لا يوجد مثلث قائم الزاوية لا يملك زاوية قائمة "

تعني أنّ :

" جميع المثلثات القائمة الزاوية يتمتع بزاوية قائمة "

نكتب : $\forall x, P(x)$ ، للدّلالة على العلاقة (لا (لا $P(x)$, $\exists x$))

نقرأ العلاقة " $\forall x, P(x)$ " : "مهما يكن x ، $P(x)$" أو "من أجل كلّ x ، لدينا $P(x)$"

خصائص :

1. لا ($\exists x, P(x)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x$, لا $P(x)$).
2. لا ($\forall x, P(x)$) $\Leftrightarrow$ ($\exists x$, لا $P(x)$).
3. (($\exists x, P(x)$) أو ($\exists x, q(x)$)) $\Leftrightarrow$ ($\exists x$, ($P(x)$ أو ($q(x)$)))
4. (($\forall x, P(x)$) و ($\forall x, q(x)$)) $\Leftrightarrow$ ($\forall x$, ($P(x)$ و ($q(x)$)))
5. (($\exists x, P(x)$) و ($\exists x, q(x)$)) $\Rightarrow$ ($\exists x$, ($P(x)$ و ($q(x)$)))
6. (($\forall x, P(x)$) أو ($\forall x, q(x)$)) $\Rightarrow$ ($\forall x$, ($P(x)$ أو ($q(x)$)))

ليس لدينا تكافؤ في 5. و 6. (أعتبرْ في مجموعة الأعداد الحقيقية العلاقتين :

$P(x) : x \geq 2$ ؛ و $q(x) : x < 2$)

ملاحظات:

إذا كانت " $\exists x \in E, P(x)$ " تعني : " $\exists x, (x \in E$ و $P(x))$ " ؛

وكانت " $\forall x \in E, P(x)$ " تعني : " $\forall x, (x \in E \Rightarrow P(x))$ "

فعندئذ يكون لدينا :

(($\forall x \in E, P(x)$) لا) $\Leftrightarrow$ ($\exists x \in E$, لا $P(x)$)

(($\exists x \in E, P(x)$) لا) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in E$, لا $P(x)$)

ملاحظة هامّة:

إنّ العلاقتين " $\forall x \;,\; \exists y \;,\; P(x,y)$ " و " $\exists y \;,\; \forall x \;,\; P(x,y)$ "
مختلفتان. ففي الأولى، يتعلّق y بـ x في حين أنّ y لا يتعلّق بـ x.

II. العمليّات على المجموعات:

1. الإحتواء:

لتكن E و F مجموعتين معطاتين. نقول عن F أنّها محتواة في E إذا كان كلّ عنصر من F عنصرا في E. نكتب: $F \subset E$.

أ) $$F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \;,\; (x \in F \Rightarrow x \in E))$$

نقول بأنّ F مجموعة جزئية لـ E، أو بأنّ F جزء من E.

ب) $$E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ و } F \subset E$$
$$(\forall x \;,\; (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

2. فرق مجموعتين:

هو مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى F، ويرمز له بـ: $E - F$.

$$E - F = \{ x \,/\, x \in E \text{ و } x \notin F \}$$

إذا كانت F محتواة في E، نقول عندئذ إنّ $E - F$ "يمثّل متمّمة F في E" ويرمز لها بـ: $C_E F$.

المجموعة الخالية هي المجموعة الوحيدة، المرموز لها بـ ϕ، و المعرّفة بـ: $E - E$، حيث E مجموعة كيفية.

$$\phi = \{ x \,/\, x \in E \text{ و } x \notin E \}$$

3. مجموعة الأجزاء لمجموعة:

لتكن E مجموعة معطاة، نرمز بـ: $\mathcal{P}(E)$ لمجموعة أجزاء E.

$$\mathcal{P}(E) = \{ X \,/\, X \subset E \}$$

نقول بأنّ X جزء من E، أو مجموعة جزئية لـ E، أو عنصر من $\mathcal{P}(E)$

ملاحظة:

إنّ المجموعة الخالية و E عنصران من $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\} \; ; \; \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))=\{\phi,\{\phi\}\}$$

4- اتّحاد وتقاطع مجموعتين:

أ- اتّحاد مجموعتين E و F هي مجموعة العناصر التّي تنتمي إمّا إلى E وإمّا إلى F.

$$E\cup F=\{x \,/\, x\in E \text{ أو } x\in F\}$$

ب- تقاطع مجموعتين E و F مجموعة عناصرها تنتمي إلى E و إلى F.

$$E\cap F=\{x \,/\, x\in E \text{ و } x\in F\}$$

إذا كان: $E\cap F=\phi$ ، نقول عندئذ بأنّ المجموعتين E و F غير متقاطعتين.

بعض الخاصيّات:

لتكن E و F و G ثلاث مجموعات كيفيّة، نثبت بأنّ:

1. $E\cap F=F\cap E$ و $E\cup F=F\cup E$
2. $(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)$ و $(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$
3. $(E\cap F)\cup G=(E\cup G)\cap(F\cup G)$ و $(E\cup F)\cap G=(E\cap G)\cup(F\cap G)$
4. $E-(F\cap G)=(E-F)\cup(E-G)$ و $E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G)$
5. $E\cap\phi=\phi$ و $E\cup\phi=E$
6. إذا $F\subset E$ و $G\subset E$ ، فإنّ: $\left(G\subset F \Leftrightarrow C_E F\subset C_E G\right)$

5 جداء مجموعتين الدّيكارتي:

أ) الأزواج: (أو الثنائيات)

إذا كان x و y شيئين معطيين ، فيوجد شيء (x,y) يسمّى زوجًا، ويحقّق الشّرط التّالي:

$$\forall x' \text{ و } y' \ , \ (x,y)=(x',y') \Leftrightarrow x=x' \text{ و } y=y'$$

ب)- الجداء الدّيكارتي :

تسمّى مجموعة الأزواج (x,y) بحيث $x\in E$ و $y\in F$ الجداء الدّيكارتي من E في F، ونرمز له بـ: $E\times F$.

تسمّى مجموعة الأزواج (x,x) بحيث $x\in E$ قطر $E\times E$، ويرمز لـ $E\times E$ بـ: E^2.

ملاحظة :

لا ينبغي الخلط بين الثّنائي (x,y) و الزّوج $\{x,y\}$.

تعميم :

نسمّي جداء ديكارتيا لـ n مجموعة E_1، E_2، ...، E_n المجموعة الّتي نرمز لها بـ: $E_1\times E_2\times\dots\times E_n$، والمشكّلة من العناصر $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث : $x_1\in E_1$، $x_2\in E_2$، ...، $x_n\in E_n$.

III. التّطبيقات أو التّوابع :

1- تعاريف :

لتكن E و F مجموعتين و Γ جزءا من $E\times F$.

نضع : $f=(E,F,\Gamma)$.

نقول إنّ f تابع معرّف في E وقيمه في F، أو تطبيق من E في F إذا كان من أجل كلّ عنصر x من E، يوجد عنصر وحيد y من F بحيث $(x,y)\in\Gamma$.

نرمز بـ: $y=f(x)$ لصورة x وفقا f و :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

E : هي مجموعة البدء أو المنطلق لـ f.

F : هي مجموعة الوصول أو المستقرّ لـ f.

Γ : هو بيان f.

يتساوى تطبيقان إذا تساوت مجموعتا بدئهما ومجموعتا وصولهما وتساوى بياناهما.

2 - إقتصار وتمديد تطبيق:

لتكن E و F و G و H مجموعات معطاة، وليكن: $f : E \longrightarrow F$

و $g : G \longrightarrow H$ ، تطبيقين.

نقول عن f أنّه إقتصار لـ g ، أو عن g إنّه تمديد لـ f إذا:

$$E \subset G \ , \ F \subset H \ \text{ و } \ \forall x \in E \ , \ f(x) = g(x)$$

لنعتبر، على سبيل المثال، التطبيق المطابق لـ E المرموز له بـ: id_E أو I_E.

$$I_E : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto I_E(x) = x$$

ليكن E' جزء من E، وليكن التباين القانوني: $i : E' \longrightarrow E$

$$x \longmapsto i(x) = x$$

عندئذ يكون i مقصورا (أو اقتصارا) لـ I_E على E'.

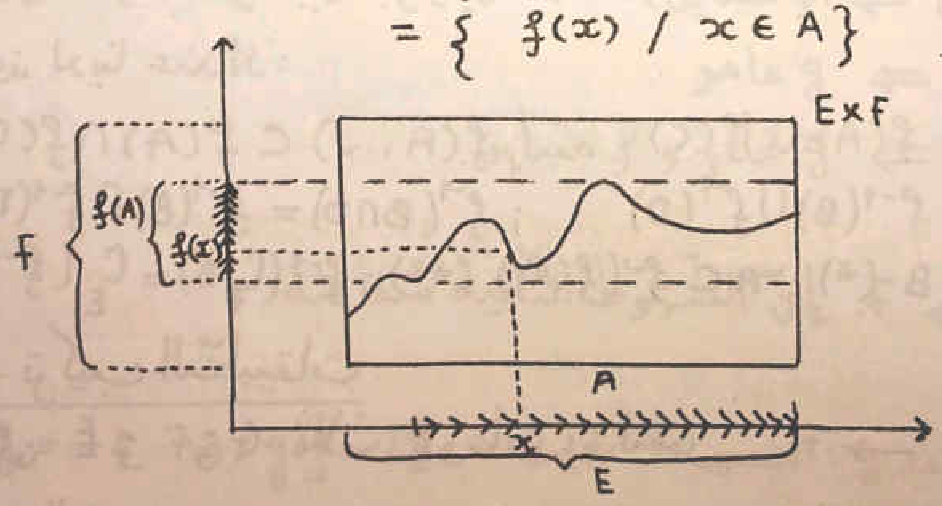
3 - الصّورة المباشرة والصّورة المعاكسة:

ليكن f تطبيقا: $f : E \longrightarrow F$

أ) الصّورة المباشرة:

ليكن A جزء من E. نرمز بـ: $f(A)$ لمجموعة صور عناصر A وفق f.

$$f(A) = \{ \ y \in F \ / \ \exists \ x \in A \ , \ y = f(x) \}$$
$$= \{ \ f(x) \ / \ x \in A \} \quad , \ f(A) \subset F$$

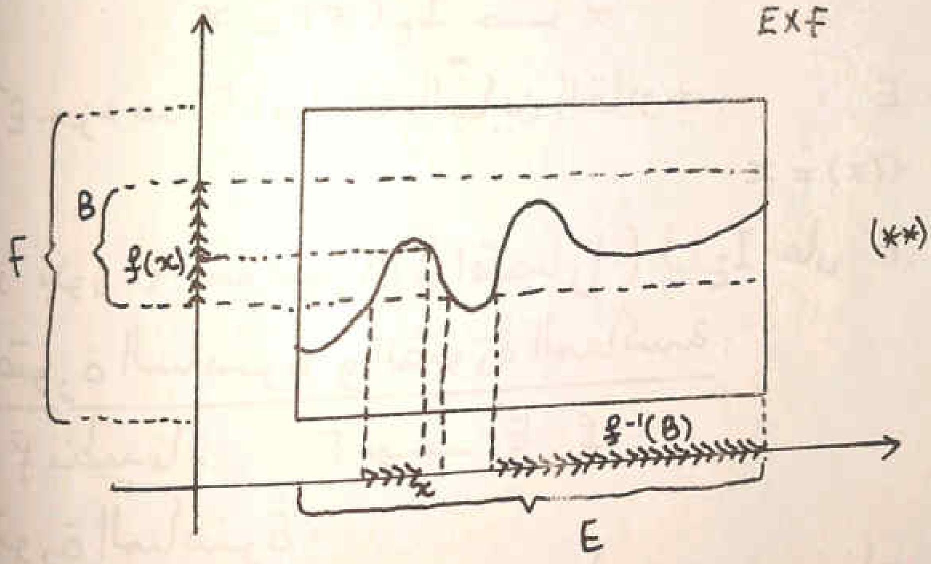


(*)

ب) الصّورة العكسيّة:

ليكن B جزءا من F . نرمز بـ $f^{-1}(B)$ لمجموعة عناصر E الّتي تنتمي صورها وفق f إلى B .

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \}$$
$$= \{ x \in E / \exists y \in B ; y = f(x) \} . \quad f^{-1}(B) \subset E$$



ج) بعض الدّساتير:

لتكن A و C مجموعتين جزئيتين من E ، وليكن B و D جزئين من F.
يكون لدينا عندئذ:

$$f(A \cup C) = f(A) \cup f(C) \quad ; f(A \cap C) \subset f(A) \cap f(C)$$
$$f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D) \quad ; f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$$
$$f(f^{-1}(B)) \subset B \ (*) \ ; A \subset f^{-1}(f(A)) \ (**) \ ; f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E (f^{-1}(B))$$

4 - تركيب التّطبيقات:

لتكن E و F و G ثلاث مجموعات، و ليكن $f: E \longrightarrow F$ و G ...
تطبيقين:

بسمّى التّطبيق : $g\circ f : E \longrightarrow G$ المعرّف بـ: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$
من أجل كلّ x من E، التّابع المركّب لـ f و g.

5- التّطبيقات المتباينة، الغامرة، المتقابلة.

ليكن f تطبيقا من E في F.

أ) يكون f متباينا إذا وفقط إذا كانت لعنصرين مختلفين من E
صورتان مختلفتان وفق f.

f متباين $\Leftrightarrow \left[\forall (x,x')\in E^2,\ x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')\right]$

$\Leftrightarrow \left[\forall (x,x')\in E^2,\ f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'\right]$

ب) يكون f غامرا إذا وفقط إذا كان كلّ عنصر y من F صورة وفقا f
لعنصر x من E على الأقلّ.

f غامر $\Leftrightarrow \left[\forall y\in F\ ,\ \exists\ x\in E\ ,\ y=f(x)\right]$

$\Leftrightarrow f(E)=F.$

ج) يقال عن f إنّه تقابليّ إذا كان متباينا وغامرا في آن واحد.
ولدينا أيضا:

f تقابلي $\Leftrightarrow \left[\forall y\in F\ ,\ \exists!\ x\in E,\ y=f(x)\right]$

قضيّة 1 :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ و $g : F \longrightarrow G$. عندئذ يكون لدينا:

1). $g\circ f$ متباين $\Leftarrow$ f متباين.

2). $g\circ f$ غامر $\Leftarrow$ g غامر.

3). $g\circ f$ تقابلي $\Leftarrow$ g غامر و f متباين.

مبرهنة 1 :

ليكن $f : E \longrightarrow F$. إنّ الشّروط التّالية متكافئة:

1). f تقابليّ

2). يوجد تطبيق $g : F \longrightarrow E$ بحيث : $g\circ f = I_E$ و $f\circ g = I_F$

إذا تحقق هذان الشرطان، يكون g وحيدا وتقابليا. يسمى g التطبيق العكسي لـ f ويرمز له بـ f^{-1}.
(أنظر التمرين 6.1 ص)

قضية 2:

ليكن $f: E \longrightarrow F$ و $g: F \longrightarrow G$.

1). f و g متباينان $\Leftarrow$ $g \circ f$ متباين.

2). f و g غامران $\Leftarrow$ $g \circ f$ غامر.

3). f و g تقابليان $\Leftarrow$ $g \circ f$ تقابلي. وعلاوة على ذلك: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

ملاحظة:

إن بياني تطبيق f وعكسه f^{-1} متناظران بالنسبة للمنصف الأول.

IV - العلاقة الثنائية في مجموعة:

تعرف علاقة ثنائية في مجموعة E بإعطاء الثلاثي (E, E, Γ)، حيث Γ جزء من $E \times E$. نكتب $x \mathcal{R} x$ أو $(x, y) \in \Gamma$ للتعبير عن كون x في علاقة مع y وفق $\mathcal{R}$.

أ علاقة التكافؤ:

أ) يقال عن علاقة ثنائية في مجموعة E، ومرموز لها بـ: $\mathcal{R}$، إنها علاقة تكافؤ إذا كانت:

- انعكاسية: $\forall x \in E \ , x \mathcal{R} x$
- تناظرية: $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- متعدية: $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ و } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

ب) صف تكافؤ عنصر x من E تبعا لعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ هو مجموعة العناصر y من E التي تكون في العلاقة $\mathcal{R}$ مع x. نرمز له بـ: C_x أو $\overline{x}$ أو $\dot{x}$. $C_x \subset E$

$$C_x = \{ y \in E \ / \ y \mathcal{R} x \}$$

ج) تسمّى مجموعة صفوف التكافؤ لعناصر E مجموعة ا... (القسمة) لِـ E بواسطة $\mathcal{R}$: يرمز لها بـ : $E/\mathcal{R}$.

$$E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E) \quad . \quad E/\mathcal{R} = \{C_x / x \in E\}$$

يبيّن أنّ :

$$\forall x, y \in E, C_x = C_y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \quad . \quad \forall x \in E, x \in C_x$$

$$E = \bigcup_{x \in E} C_x \quad . \quad \forall x, y \in E, C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cap C_y = \phi$$

تسمح لنا النتيجتان الأخيرتان بالقول إنّ مجموعة صفوف التكافؤ تشكّل تجزئة لِـ E.

2- علاقة الترتيب :

أ) نقول عن علاقة ثنائية S في E إنّها علاقة ترتيب إذا كانت :

انعكاسيّة : $\forall x \in E, xSx$

ضد-تناظريّة : $\forall (x, y) \in E^2, (xSy \text{ و } ySx) \Rightarrow x = y$

متعديّة : $\forall (x, y, z) \in E^3, (xSy \text{ و } ySz) \Rightarrow xSz$

يُرمز لعلاقة الترتيب، في غالب الأحيان، بـ : $\leqslant$.

ب) يقال عن علاقة ترتيب $\leqslant$ في مجموعة E إنّها علاقة ترتيب كلّي إذا كان أيّ عنصرين من E قابلين للمقارنة. بمعنى :

مهما يكن x من E و مهما يكن y من E، فإنّ لدينا إمّا $x \leqslant y$ أو $y \leqslant x$.

يقال عن علاقة ترتيب إنّها علاقة ترتيب جزئي إذا لم تكن علاقة ترتيب كلّي.

ج) الحواد العليا — الحواد الدّنيا (السّفلى)

لتكن E مجموعة مرتبّة بـ : $\leqslant$ و A جزءا من E.

$a \in E$ حادّ أعلى لِـ A إذا وفقط إذا : $a \in E$ و : $\forall x \in A, x \leqslant a$

نقول عن A إنّه محدود من الأعلى إذا كان متمتّعا بحادّ أعلى.

$a \in E$ حادّ أدنى لِـ A إذا وفقط إذا : $a \in E$ و : $\forall x \in A, a \leqslant x$

نقول عن A إنّه محدود من الأدنى إذا كان متمتّعا بحادّ أدنى.

نقول عن A إنّه محدود إذا كان محدودا من الأعلى ومحدودا من الأدنى في آن واحد.

د) العنصر الأكبر - العنصر الأصغر.

لتكن E مجموعة مرتّبة بـ: $\preccurlyeq$ وليكن A جزءا من E.

يكون $a\in E$ أكبر عنصر لـ A إذا وفقط إذا: $a\in A$ و: $\forall x\in A, x\preccurlyeq a$

يكون $a\in E$ أصغر عنصر لـ A إذا وفقط إذا: $a\in A$ و: $\forall x\in A, a\preccurlyeq x$

الوحدانية:

إذا كان العنصر الأكبر (الأصغر على الترتيب) لجزء A من مجموعة مرتّبة موجودا، فهو وحيد.

نرمز له بـ: $\max A$ ($\min A$ على الترتيب).

هـ) الحدّ الأعلى. الحدّ الأدنى:

ليكن A جزءا من مجموعة E مرتّبة بـ: $\preccurlyeq$.

$a\in E$ حدّ أعلى لـ A إذا وفقط إذا كان a أصغر الحواد العليا لـ A.

$a\in E$ حدّ أدنى لـ A إذا وفقط إذا كان a أكبر الحواد الدّنيا لـ A.

في حالة وجود الحدّ الأعلى لـ A (الأدنى على الترتيب)، يكون هذا وحيدا. نرمز له بـ: "$\sup A$" ("$\inf A$" على الترتيب).

ملاحظة هامة:

إذا كان a العنصر الأكبر لـ A، فيكون a، عندئذ، الحدّ الأعلى لـ A

إذا كان a العنصر الأصغر لـ A، فيكون a، عندئذ، الحدّ الأدنى لـ A

وعكس ذلك غير صحيح في العموم.

و) لتكن E مجموعة و $(F,\preccurlyeq)$ مجموعة مرتّبة و A جزءا من E.

ليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيقا. نضع:

$$\sup f(A) = \sup_{x\in A} f(x)\ ;$$

$$\inf f(A) = \inf_{x\in A} f(x)$$

V. مدخل إلى $\mathbb{N}$ - المجموعات المنتهية - التحليل التوفيقي.

1 - مدخل إلى $\mathbb{N}$.

أ) إنّ مجموعة الأعداد الطبيعيّة: $\mathbb{N}=\{0,1,2,...,n,...\}$ مجموعة مرتّبة كليًّا بواسطة علاقة الترتيب "الإعتيادي" $\preceq$. تتمتّع المجموعة $\mathbb{N}$ بأصغر عنصر 0. نرمز بـ: $\mathbb{N}^*$ لمجموعة الأعداد الصّحيحة الموجبة تماما.

نفترض كون جميع الخصائص المتعلقة بـ: $\mathbb{N}$ معروفة. لنذكّر بـ:

الخاصيّة الأساسيّة لـ $\mathbb{N}$:

يقبل كلّ جزء غير خال من $\mathbb{N}$ أصغر عنصر (من أجل علاقة الترتيب $\preceq$) نقول عن $\mathbb{N}$ إنّها مرتّبة جيّدا.

يقبل كلّ جزء غير خال من $\mathbb{N}$ و محدودٍ أكبر عنصر.

ب) الإستدلال بالتّدرّج:

i) مبرهنة التّدرّج:

لتكن $p(n)$ علاقة متعلّقة بالعدد الطّبيعي n؛ تكون $p(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد صحيح n إذا و فقط إذا تحقّق الشّرطان:

1) $p(0)$ صحيحة.

2) من أجل كلّ n، تكون العلاقة: $\left(p(n) \Rightarrow p(n+1)\right)$ صحيحة.

ii) ملاحظات:

- لكي نثبت أنّ $p(n)$ صحيحة مهما يكن $n_0 \leq n$، حيث $n_0 \in \mathbb{N}$، يلزم و يكفي أن نثبت أنّ $p(n_0)$ صحيحة و أنّه من أجل $n_0 \leq n$، تكون العلاقة $\left(p(n) \Rightarrow p(n+1)\right)$ صحيحة.

- تكون العلاقة $p(n)$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$ إذا وفقط إذا تحقّق ما يلي:

1) $p(0)$ صحيحة.

2) من أجل كل n، تكون العلاقة: $\left(\left(p(0) \text{ و } p(1) \text{ و } ... \text{ و } p(n)\right) \Rightarrow p(n+1)\right)$ صحيحة.

2. المجموعات المنتهية - المجموعات المتساوية القوّة (القدرة) - المجموعات القابلة للعدّ.

أ) المجموعات المنتهية:

تعريف:

تكون مجموعة E منتهّية إذا كانت خاليّة، أو إذا وُجد تقابل من E على المجال $[1,n]$ من $\mathbb{N}$. تكون المجموعة حينئذ ذات n عنصر و نكتب: $\text{Card}\,E = n$.

$\text{card}(\phi)=0$

قضيّة 1: إذا كانت مجموعة E منتهية، يكون عندئذ كلّ تطبيق متباين من E في E غامرا.

يمكن أن نثبت بأنّ $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهيّة؛ نقول بأنّها غير منتهية أو لا منتهية.

قضيّة 2: لتكن E و F مجموعتين منتهيّتين، عندئذ تكون:

1) $E\cup F$ و $E\cap F$ منتهيّتين و:

$$\text{Card}(E\cup F) = \text{card}(E)+\text{card}(F)-\text{card}(E\cap F)$$

2) $E\times F$ منتهية و:

$$\text{Card}(E\times F) = \text{card}(E).\text{card}(F)$$

ب) المجموعات المتساوية القوّة:

نقول عن مجموعتين أنّهما متساويتا القوّة إذا وجد تقابل من إحداهما على الأخرى.

ج) المجموعات القابلة للعدّ:

يقال عن مجموعة E أنّها قابلة للعدّ إذا وجد تقابل من E على $\mathbb{N}$

قضيّة:

جداء مجموعتين قابلتين للعدّ قابل للعدّ.

3 - التّحليل التّوفيقي :

أ) العدد n عاملي :

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نعني بـ n عاملي العدد $n!$ المعرّف بـ :

$$0! = 1 \; ; \; \text{و} \; n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

من أجل كلّ عدد طبيعي غير منعدم.

ب) التّرتيبات :

تعريف: لتكن E مجموعة ذات n عنصرا، وليكن p عددا صحيحا ، $1 \leq p \leq n$. نُسمّي ترتيبة لهذه العناصر n المأخوذة بدون تكرار على شكل زمر ذات p عنصرا ، كلّ جزء من E له p عنصرا متمايزا و مرتّبا وفق ترتيب معيّن.

يساوي عددُ التّرتيبات في الحالة السّابقة وصفها :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \ldots (n-p+1)$$

ج) التّبديلات :

تعريف :

نسمّي تبديلة لمجموعة E ذات n عنصرا ، كلّ جزء لـ E ذي n عنصرا مرتّبا وفق ترتيب معيّن.

إذن ، إذا كان $p = n$ ، تصبح التّرتيبة عندئذ تبديلة.

يساوي عدد تبديلات مجموعة E ذات n عنصرًا :

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = n(n-1) \ldots 2.1.$$

د) التّوفيقات :

تعريف : لتكن E مجموعة ذات n عنصرا وليكن p عددا صحيحا ، $n \geq p$.

نسمي توفيقة لهذه الـ n عنصرا المأخوذة بدون تكرار " p بـ p " كلّ جزء من E له p عنصرا متمايزا.

يساوي عدد التّوفيقات في الحالة الّتي جاء وصفها منذ حين :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

يمكن أن نبيّن بأنّ :

1) $C_n^{n-p} = C_n^p$ من أجل : $p \leq n$.

2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ من أجل : $1 \leq p \leq n-1$

هـ) دستور ثنائي الحدّ :

ليكن a و b عددين حقيقيّين ، و n عددا طبيعيا

لدينا عندئذ :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

تنبيه :

إنّ الدّستور أعلاه يبقى صحيحا أيضا في حلقة تبديلية كيفيّة $(A,+,\cdot)$.

المنطق في خدمة العقل السّليم

تمرين I.1

مثل خبّاز وإسكافيّ وبقّال قرية صغيرة أمام المحكمة بتهمة التّهرب من الضّريبة. وقد أدّوا اليمين بالكيفيّة التّاليّة:

الخبّاز : «البقّال مذنب والإسكافي بريء.»

الإسكافي : «أنا بريء ولكن أحد الآخرين على الأقلّ مذنبا»

البقّال: «إذا كان الخبّاز مذنبا ، يكون الإسكافي مذنبا أيضا»

و نرمز :

b : "الخبّاز بريء" ، c : "الإسكافي بريء"

e : "البقّال بريء" .

أ) عبّر عن تصريحات المتّهمين الثّلاثة بواسطة b، c، e والرّموز المنطقيّة.
ب) هات جداول التّقييم للعلاقات الثّلاثة المحصّل عليها.
ج) إنّ تصريح أحد المتّهمين نتيجة" لتصريح متهم آخر. فما هو التّصريح المقصود ؟
د) إذا افترضنا أنّهم أبريّاء جميعا، فمن منهم أدلى بتصريح كاذب؟
هـ) اذا افترضنا صحّة تصريح كلّ واحد منهم ، فمن هو البريء ومن هو المذنب ؟
و) من البريء ومن المذنب إذا كان إثنان من الثّلاثة قد قالا الحقيقة في حين أنّ الثالث قد كذب ؟
ز) إذا افترضنا أنّ الأبرياء قالوا الحقيقة وأنّ المذبين كذبوا، فمن البريء ومن المذنب ؟
ي) ما هي الإمكانيّات (الاحتمالات) المتوفرّة لدينا إذا قال الأبريّاء الحقيقة ؟
ك) هل يمكن للأبرياء أن يكذبوا ويقول المذنبون الحقيقة ؟

تمرين 2.I :

أ) هل الدّعاوي التّالية صحيحة؟

(1) $1-1=0$ أو $\frac{1}{2}\in \mathbb{N}$

(2) $x\in E \Longleftarrow x\in \phi$.

ب) أكتب نفي القضيّتين هاتين وكذا عكس النّقيض لـ (2). أكتب (1) على شكل استلزام.
ج) أستنتج من (2) علاقة بين المجموعة الخالية والمجموعة E.

أ) يتضح من جدولي تقييم الدعويين أن هاتين الأخيرتين صحيحتين.

ب) نفي (1) هو:

$$1-1 \neq 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

أما بالنسبة لنفي (2)، فنكتب، أولا، الدعوى المعطاة على الشكل المكافئ:

$$x \notin \phi \quad \text{أو} \quad x \in E$$

ثم يأتي نفي هذه العلاقة الأخيرة:

$$x \in \phi \quad \text{و} \quad x \notin E$$

عكس نقيض العلاقة (2) هو:

$$x \notin E \Rightarrow x \notin \phi$$

و تكون (1) على شكل استلزام على النحو التالي:

$$\left(1-1 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{N}\right) \Leftrightarrow \left(1-1 = 0 \text{ (أو) } \frac{1}{2} \in \mathbb{N}\right)$$

جـ) بما أن الدعوى (2) صحيحة دوما، تكون لدينا: $\phi \subset E$.

تمرين 3.I.

لتكن A و B و C و D اجزاء لمجموعة واحدة E. أثبت أن:

(1) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset C_E B$. (2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$

(3) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. (4) $A \subset B$ (و) $C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$

هل تكون العلاقتان العكسيتان لـ (3) و (4) صحيحتين ؟

(1) نثبت، بادئ ذي بدء، أن $A \cap B = \phi \Rightarrow A \subset C_E B$

ليكن x عنصرا كيفيا من A. لنفرض أن $x \notin C_E B$ أي $x \in C_E C_E B = B$

عندئذ يكون $x \in A$ و $x \in B$ ومنه: $x \in A \cap B$؛ ولكن $A \cap B = \phi$

ومنه التناقض المطلوب.

ليكن، الآن، $A \subset C_E B$. لنفترض أن: $A \cap B \neq \phi$

يوجد، إذن، عنصر x ينتمي إلى A وإلى B. بما أنّ $A \subset C_E B$، فإنّه ينبغي على هذا العنصر x أن ينتمي إلى $C_E B$، وهذا مناقض لكون $x \in B$.

بالنّسبة لِـ (4) استخدم تعريف الإحتواء.

ومن أجل القضيّة (3)، نعتبر عنصرا X من $\mathcal{P}(A)$، فيكون X عندئذ مجموعة جزئيّة من A، وما دامت A محتواة في B، فتكون المجموعة X جزءا من B ومنه X عنصر من $\mathcal{P}(B)$.

عكس العلاقة (3) صحيح ويبرهن بنفس الطّريقة الّتي عولج بها الإستلزام السّابق، في حين أنّ عكس العلاقة (4) خاطئ كما يوضح ذلك المثال المضاد التّالي:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad ، \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$C = \{1, 2, 6, 8\} \qquad D = \{1, 2, 4, 6, 9\}$$
$$A \cap C = \{1, 2\} \qquad B \cap D = \{1, 2, 4\}$$

تبرهن القضيّة (2) بنفس الطّريقة الّتي برهنت بها القضيّة (1)

....

تمرين 4.I :

ليكن $E = [0,1]$ و $F = [0,2]$ مجالين من $\mathbb{R}$.

أ) أرسم $E \times F$ و $E \times E$.

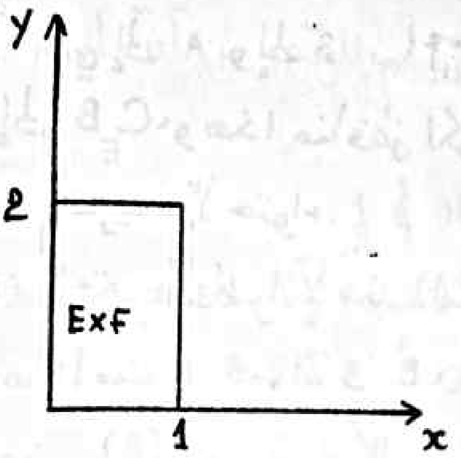
ب) لنعتبر التّطبيق $U : E \to F$ المعرّف بـ: $U(x) = 2 - x$، والتّطبيق $V : F \longrightarrow E$ المعرّف بـ: $V(x) = (x-1)^2$.

ميّز بوضوح التّطبيقين VoU و UoV. هل لدينا المساواتان: $VoU = UoV$ و $VoU = V$ ؟

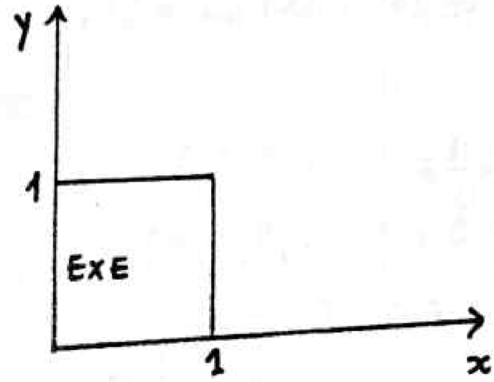
ج) عيّن $U^{-1}(\{0\})$ و $V^{-1}(]0, \frac{1}{2}[)$

د) أثبت أنّ VoU تقابلي وهات بدقّة $(VoU)^{-1}$

(أ



$$E\times F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1 \ \text{و} \ 0 \le y \le 2 \}$$



$$E\times E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1 \ \text{و} \ 0 \le y \le 1 \}$$

(ب

$V\circ U : E \longrightarrow E$ و $(V\circ U)(x) = (x-1)^2$

$U\circ V : F \longrightarrow F$ و $(U\circ V)(x) = -x^2+2x+1$

لدينا $U\circ V \neq V\circ U$ و يكون بذلك تركيب تطبيقين غير تبديلي.

وعليه: $(V\circ U)(x) = V(x) \ \forall x \in [0,1]$ إلاّ أنّ مجموعتي بدئهما مختلفة. $V\circ U \neq V$.

(جـ

$$U^{-1}(\{0\}) = \{ x \in [0,1] \ / \ U(x) = 2-x \in \{0\} \} = \phi$$

نستنتج أنّ التطبيق U غير غامر.

$$V^{-1}(]0,\tfrac{1}{2}[) = \{ x \in [0,2] \ / \ V(x) = (x-1)^2 \in]0,\tfrac{1}{2}[\}$$
$$=]1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1[\ \cup \ ]1, 1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}[$$

د) لنثبت أنّ VoU متباين. ليكن، من أجل هذا، x_1 و x_2 عنصرين من E بحيث:

$$(x_1-1)^2=(x_2-1)^2$$

نحصل على: $(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)=0$

ومنه: $x_1-x_2=0$ أو $x_1+x_2=2$. إذا كان: $x_1-x_2=0$

يكون التطبيق VoU عندئذ، متباينا. وإذا كان: $x_1+x_2=2$

وما دام x_1 و x_2 عنصرين من $[0,1]$، يكون لدينا: $x_1=x_2=1$

وعليه يكون VoU متباينا.

وقصد إثبات أنّ VoU غامر، نعتبر عنصرا y كيفيا في E. نقوم بالبحث عن عنصر x من E بحيث:

$$y=(VoU)(x)=(x-1)^2$$

نحصل على $x=1\pm\sqrt{y}$ وبما أنّ x عنصر من $[0,1]$، يأتي:

$$x=1-\sqrt{y}$$

ويكون لدينا هكذا:

$$(VoU)^{-1}:E\longrightarrow E$$
$$x\longmapsto (VoU)^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$$

------- -------- -------

تمرين 5.I.

ليكن f تطبيقا من E في F. وليكن A و B جزئيين من E و C و D جزئيين من F.

أ) أثبت أنّ:
$$f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$$
و
$$f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$$

ب) أثبت أنّ:
$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$
و
$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$$

ج) أثبت مستخدما مثالا مضادًا بأنّه يمكن الحصول على:

$$f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$$

د) أثبت أنّه إذا كان f متباينا، فيكون عندئذ:

$$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$$

أ) ننتهج طريقة الإحتواء المزدوج للبرهان على أنّ:

$$f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$$

ليكن x عنصرا كيفيًا من $f^{-1}(C\cap D)$. عندئذ يكون $f(x)$ عنصرا من $C\cap D$،
أي أنّ $f(x)$ ينتمي إلى C و إلى D، إذن x ينتمي إلى $f^{-1}(C)$ و $f^{-1}(D)$، وبالتّالي x ينتمي إلى $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

ليكن، الآن، x عنصرا كيفيًا من $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$. عندئذ ينتمي x إلى $f^{-1}(C)$ و $f^{-1}(D)$، أي أنّ $f(x)$ ينتمي إلى C و إلى D؛ ومنه $f(x)$ ينتمي إلى $C\cap D$، إذن ينتمي x إلى $f^{-1}(C\cap D)$.

نلاحظ أنّه كان بإمكاننا ننتهج طريقة استعمال التكافؤ والإثبات:

$$\forall x \in f^{-1}(C\cap D) \Leftrightarrow x\in f^{-1}(C) \text{ وَ } x\in f^{-1}(D)$$

نستعمل الطريقة ذاتها من أجل الاتحاد.

ب) ننتهج أيضا طريقة الإحتواء المزدوج لإثبات أنّ:

$$f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$$

1) إذا كان y عنصرا كيفيًا من $f(A\cup B)$، فيوجد عنصر x ينتمي إلى A أو B بحيث: $y=f(x)$؛ ومنه ينتمي y إلى $f(A)$ أو $f(B)$، بمعنى أنّ y عنصر من $f(A)\cup f(B)$.

2) ومن جهة أخرى، إذا كان y عنصرا كيفيًا من $f(A)\cup f(B)$، ومنه يوجد x_1 من A بحيث $y=f(x_1)$ أو يوجد عنصر x_2 من B بحيث $y=f(x_2)$
أي أنّ: x ينتمي إلى $A\cup B$ بحيث: ($x=x_1$ أو $x=x_2$)
$y\in f(A\cup B)$

و بالطّريقة ذاتها نثبت أنّ : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

باستبدال (أوّ) بـ (وّ) في (1).

ج) ليكن التّطبيق $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّف بـ : $f(x)=x^2$

لنأخذ $A=[-3,2]$ و $B=[0,4]$ ، لدينا : $f(A)\cap f(B)=[0,9]$

و $f(A\cap B)=[0,4]$.

د) يكفي أن نثبت أنّه إذا كان f متباينا ، يأتي حينئذ أنّ : $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$. ليكن y عنصرا من $f(A)\cap f(B)$ ؛ يكون عندئذ y منتميا إلى $f(A)$ و إلى $f(B)$ ؛ إذن يوجد x منتم إلى A بحيث $y=f(x)$ ويوجد x' منتم إلى B بحيث : $y=f(x')$ (x و x' يختلفان مبدئيا) ؛ وعليه ، فإنّ : $f(x)=f(x')$ ، وما دام f متباينا. نحصل على $x=x'$. وهكذا ، يوجد x ينتمي إلى $A\cap B$ بحيث : $y=f(x)$ ، بمعنى أنّ y ينتمي إلى $f(A\cap B)$.

....

تمرين I.6 :

لتكن التّطبيقات $f:E\to F$ ، $g:F\to G$ و $h:G\to H$

أثبت أنّ :

أ) f و g تقابلان $\Leftarrow$ $g\circ f$ تقابليّ و $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

ب) $g\circ f$ متباين $\Leftarrow$ f متباين.

ج) $g\circ f$ غامر $\Leftarrow$ g غامر.

د) $g\circ f$ و $h\circ g$ تقابليّان $\Leftarrow$ f و g و h تقابليّة.

أ) استخدم تعريف تطبيق تقابليّ.

-1 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$. وبالفعل ، ليكن $u=g\circ f$ ولنفترض أنّ النّتيجة غير معطاة. فينبغي ، إذن ، البحث عن u^{-1} بحيث :

$$u \circ u^{-1} = Id_G \quad ①$$
و
$$u^{-1} \circ u = Id_E \quad ②$$

لدينا :
$$Id_G = (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = g \circ \left(f \circ (g \circ f)^{-1}\right)$$

ومنه :
$$g^{-1} = f \circ (g \circ f)^{-1}$$

وبالتّالي :
$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

نتأكّد بسهولة من أنّ : ② $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_E$

لنشر إلى أنّه كان بإمكاننا التأكّد من أنّ : $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_G$

و② ثمّ الختم طبقا للنظرية مادامت النتيجة معطاة.

ب) ليكن x_1 و x_2 عنصرين من E بحيث $f(x_1) = f(x_2)$. فمادام g تطبيقا، تمكننا الكتابة :
$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$
بمعنى أنّ :
$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$
وبما أنّ التّطبيق $g \circ f$ متباين، نستنتج أنّ : $x_1 = x_2$.

ج) ليكن z عنصرا كيفيّا منتميا إلى G؛ فبما أنّ $g \circ f$ غامر، يوجد إذن x من E بحيث:
$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$
ولكن $f(x) \in F$، إذن، فمهما كان z عنصرا من G يوجد $y = f(x) \in F$ بحيث : $z = g(y)$.

د) استخدم أ) و ب) للبرهان على أنّ g تقابلي؛ ثمّ نضع بعد ذلك :
$$\varphi = g \circ f \quad \text{و} \quad \psi = h \circ g$$
ومنه :
$$f = g^{-1} \circ \varphi \quad \text{و} \quad h = g^{-1} \circ \psi$$
ويصبح إذن، h و f تقابليين (لأنّ g^{-1} و φ و ψ تقابليّة)

تمرين 1.7

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرّفا بـ: $f(x)=x^3-3x+2$

ولتكن S العلاقة في $\mathbb{R}$ المعرّفة بـ:

$$xSy \Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

أ) أثبت أنّ S علاقة تكافؤ.

ب) ناقش، حسب قيمة m، عدد العناصر المحتواة في صف العنصر m.

أ) إنّ العلاقة S بين عناصر من $\mathbb{R}$

$$xSy \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x^3-3x+2=y^3-3y+2$$

إنعكاسيّة:

ليكن $x\in\mathbb{R}$، فلدينا: $f(x)=f(x)$ بمعنى: xSx.

تناظريّة:

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث xSy. عندئذ يكون:

$f(x)=f(y)$ أو $f(y)=f(x)$، أي أنّ: ySx.

متعديّة:

لتكن x و y و z أعدادا حقيقيّة بحيث: xSy و ySz

أي أنّ: $f(x)=f(y)$ و $f(y)=f(z)$، وعليه فإنّ: $f(x)=f(z)$

ومنه: xSz.

وما دامت العلاقة S إنعكاسيّة وتناظريّة ومتعديّة، فهي، إذن، علاقة تكافؤ.

ب) يمكن أن نرفق بكلّ عدد حقيقي m صفّ التكافؤ C_m الذي يتمثّل في المجموعة:

$$C_m=\{x\in\mathbb{R}\ /\ xSm\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^3-3x+2=m^3-3m+2\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=m \text{ أو } x^2+mx+m^2-3=0\}$$

نحصل على:

$$C_2 = \{2, -1\} \ , \ C_{-2} = \{-2, 1\}$$

هاتان المجموعتان تحتويان على عنصرين.

إذا كان: $-2 < m < 2$ ، يأتي عندئذ:

$$C_m = \left\{ m, \frac{-m + (12 - 3m^2)^{1/2}}{2}, \frac{-m - (12 - 3m^2)^{1/2}}{2} \right)$$

وتحتوي كلها على 3 عناصر.

أمّا إذا كان: $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ ، فإننا

نحصل على: $C_m = \{m\}$ وهي مجموعة تحوي عنصرا واحدا.

لنشر إلى أنّه ليس من الضّروري البحث عن جذور المعادلة $x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$ ، مادام لم يُطلب منّا سوى عدد العناصر المحتواة في C_m.

تمرين 1.8:

ليكن P المستوي الإقليدي و O عنصرا من P. نرمز بـ $d(M,N)$ للمسافة الفاصلة بين عنصرين M و N من P.

أ) أثبت أنّ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرّفة في P بـ:

$$M \mathcal{R} N \Leftrightarrow d(O,M) = d(O,N)$$

علاقة تكافؤ.

ب) أوجد صف تكافؤ عنصر M من P. أستنتج مجموعة النّسبة لـ P على $\mathcal{R}$

أ) مادامت المساواة علاقة تكافؤ ، فنتحقّق بسهولة من أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في P.

ب) إنّ صفّ التّكافؤ لعنصر M من P هو:

$$C_M = \{ N \in P / \ d(0,M) = d(0,N) \}$$

فهو الدّائرة ذات المركز 0 و نصف القطر OM.

و تكون مجموعة النّسبة لـ P على R مساوية:

$$P/R = \{ C_M \ / M \in P \}$$

فهي مجموعة جميع الدّوائر المركّزة في 0 (أنصاف القطر متغيّرة)

تمرين 9. I:

لنعتبر المجموعة $\mathbb{Z}$ و $a \in \mathbb{Z}$. إذا كان $n \in \mathbb{Z}$ و $n' \in \mathbb{Z}$، فنقول إنّ n و n' متوافقان بترديد (أو قياس) a، و نكتب: $n \equiv n' \pmod a$ إذا كان $n - n'$ مضاعفا لـ a.

أثبت أنّ: $n \equiv n' \pmod a$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$. أوجد صف تكافؤ عنصر n من $\mathbb{Z}$.

حالة خاصّة: من أجل $a = 2$، أبحث عن مجموعة النّسبة لـ $\mathbb{Z}$ على هذه العلاقة.

إذا كان n و n' و $k \in \mathbb{Z}$ بحيث: $n - n' = ka$، يكون لدينا: $n' - n = (-k)a$ مع $(-k) \in \mathbb{Z}$، و عليه، فالعلاقة تناظريّة.

إذا كان $n \in \mathbb{Z}$، عندئذ يكون لدينا: $n - n = 0.a$، إذن فالعلاقة إنعكاسيّة.

إذا كانت العناصر n و n' و n'' و k و k' من $\mathbb{Z}$ بحيث:

$n - n' = ka$ و $n' - n'' = k'a$، يكون لدينا:

$$n - n'' = (n - n') + (n' - n'') = (k + k')a$$

وعليه، فالعلاقة متعديّة.

صف التكافؤ لعدد صحيح n هو :

$$\{\ldots, n-2a, n-a, n, n+a, n+2a, \ldots\}$$

لنضع $a=2$ وليكن $n \in \mathbb{Z}$:

$$C_n = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m = n+2k \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\ldots, n-4, n-2, n, n+2, n+4, \ldots\}$$
$$C_0 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m = 2k \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

وهي مجموعة الأعداد الزوجيّة في $\mathbb{Z}$.

$$C_1 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m = 2k+1 \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

وهي مجموعة الأعداد الفرديّة في $\mathbb{Z}$.

نلاحظ أنّ:

$$C_0 \cap C_1 = \emptyset \quad \text{و} \quad C_0 \cup C_1 = \mathbb{Z}$$
$$C_{2n+1} = C_1 \ , \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad C_{2n} = C_0 \ , \forall n \in \mathbb{Z}$$

مجموعة النسبة هي:

$$\mathbb{Z}/\equiv \ = \{C_0, C_1\}$$

إنّها حقل معروف. يرمز له، في غالب الأحيان، ب $\mathbb{Z}/(2)$ أو $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
ويسمّى حقل الأعداد الصحيحة بترديد 2.

تمرين 10. I :

لتكن العلاقة المعرّفة ب : $(x,y)\, S\, (x',y') \Leftrightarrow x \leq x'$ و $y \leq y'$
في $\mathbb{R}^2$.

أ) أثبت أنّ الأمر يتعلّق هنا بعلاقة ترتيب.

ب) بيّن الحواد العليا والدّنيا وكذا الحدّ الأعلى و الأدنى للجزء $\{(1,2),(3,1)\}$ هل التّرتيب كلّي؟

ج) هل يملك الجزء A أكبر عنصر؟ أصغر عنصر؟

أ) إنّ العلاقة الثّنائيّة S بين عناصر $\mathbb{R}^2$ والمعرّفة بـ :

$$(x,y)\, S\, (x',y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ و } y \leq y'$$

<u>انعكاسيّة :</u>

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، لدينا $x \leq x$ و $y \leq y$ أي أنّ

$$(x,y)\, S\, (x,y)$$

<u>متعديّة :</u>

لتكن (x,y) وَ (x',y') وَ (x'',y'') عناصر من $\mathbb{R}^2$

بحيث : $(x,y)\, S\, (x',y')$ أي أنّ : $x \leq x'$ وَ $y \leq y'$

وَ $(x',y')\, S\, (x'',y'')$ أي أنّ $x' \leq x''$ وَ $y' \leq y''$

عندئذ يكون لدينا : $x \leq x''$ وَ $y \leq y''$ ومنه :

$$(x,y)\, S\, (x'',y'')$$

<u>ضدتناظريّة :</u>

ليكن (x,y) و (x',y') عنصرين من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$(x,y)\, S\, (x',y')$ أي أنّ : $x \leq x'$ وَ $y \leq y'$.

وَ $(x',y')\, S\, (x,y)$ أي أنّ : $x' \leq x$ وَ $y' \leq y$:

يأتي عندئذ :

$x = x'$ و $y = y'$ أي أنّ : $(x,y) = (x',y')$

إذن S علاقة ترتيب على $\mathbb{R}^2$.

إنّ العلاقة S ، في $\mathbb{R}^2$ ، <u>علاقة ترتيب جزئي</u> ، لأنّ العنصرين $(2,4)$ و $(3,1)$ - على سبيل المثال - غير قابلين للمقارنة وفق العلاقة S .

ب) لتكن المجموعة الجزئيّة $A = \{(1,2), (3,1)\}$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ <u>حاد أدنى</u> لـ A $\Longleftrightarrow$ $\forall (a,b) \in A \;;\; (x,y)\, S\, (a,b)$

ومن ذلك تأتي مجموعة الحواد الدّنيا لـ A مساوية :

$$\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ x\leq 1 \quad \text{و} \quad y\leq 1\}$$

والحد الأدنى لـ A هو : $\inf A = (1,1)$.

يكون عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ حادا أعلى $\Leftrightarrow$ مهما يكن $(a,b)\in A$ فإنّ : $(a,b) \, S \, (x,y)$ ؛ وعليه تكون مجموعة الحواد العليا لـ A مساوية :

$$\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ x\geqslant 3 \ \text{و} \ y\geqslant 2\}$$

والحدّ الأعلى لـ A هو : $\sup A = (3,2)$

ج) ليس لـ A لا أكبر عنصر و لا أصغر عنصر؛ إذ لو كان العنصر الأكبر (العنصر الأصغر على الترّتيب) موجودا ، لكان منتميا إلى A ، و مساويا الحد الأعلى (الحد الأدنى على الترّتيب) لـ A ؛ و لكن $\sup A = (3,2) \notin A$ (و $\inf A = (1,1) \notin A$)

تمرين I . 11 :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء E . أثبت أنّ علاقة الإحتواء بين عناصر $\mathcal{P}(E)$ علاقة ترتيب . هل الترّتيب كليّ ؟ إذا كان A جزءا غير خال من $\mathcal{P}(E)$ ، فوضح حدّه الأعلى و حدّه الأدني .

نتأكد من أنّ $\mathcal{P}(E)$ مرتبة (جزئيا) بواسطة الإحتواء ، وعلاوة على ذلك ، إذا كان A جزءا غير خال من $\mathcal{P}(E)$ ، فإنّ :

$$\inf A = \bigcap_{X\subset A} X \quad \text{و} \quad \sup A = \bigcup_{X\subset A} X$$

تمرين I . 12 :

لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرّفة على $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ بـ :

$$(x,y)\ \mathcal{R}\ (x',y') \Leftrightarrow x+y' = x'+y$$

أ) أثبت أنّ $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ. عيّن صفّ $(0,0)$.

ب) أثبت أنّه يوجد في كلّ صفّ $C_{(x,y)} \neq C_{0,0}$ عنصرٌ وحيد من الشّكل $(m,0)$ أو $(0,n)$، وأنّه من جهة أخرى، لا يمكن أن يتواجد عنصر $(m,0)$ وعنصر $(0,n)$ في آن واحد، (m و n عددان طبيعيّان غير منعدمين).

لتكن E مجموعة صفوف التّكافؤ وفق العلاقة $\mathcal{R}$. نعتبر على E العلاقة S التالية:

$$C_{(x,y)}\ S\ C_{(x',y')} \Leftrightarrow a+b' \leq a'+b$$

$$\forall\ (a,b) \in C_{(x,y)} \quad , \quad \forall\ (a',b') \in C_{(x',y')}$$

ج) أثبت أنّ S علاقة ترتيب على E. هل هي علاقة ترتيب كلّي؟

د) عيّن جميع الصّفوف $C_{(x,y)}$ بحيث: $C_{(x,y)}\ S\ C_{(0,0)}$ وَ جميع الصّفوف $C_{(x',y')}$ بحيث: $C_{(0,0)}\ S\ C_{(x',y')}$.

هـ) أثبت وجود تقابل من المجموعة E على المجموعة $\mathbb{Z}$.

أ) $C_{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ /\ x=y\} = \{(x,x)\ ,\ x \in \mathbb{N}\}$

ب) إذا $(x,y) \notin C_{(0,0)}$، فنعلم أنّه إمّا $x>y$ وإمّا $x<y$.

لنعتبر الحالة الأولى:

إذا كان $x>y$، فيوجد عندئذ عدد طبيعي غير منعدم m وحيد تحقّق: $m+y=x$، ويتعلّق الأمر بالعنصر: $m = x-y$.

وهكذا:

$$m+y=x \Leftrightarrow (m,0) \in C_{(x,y)}$$

ومن جهة أخرى، $(0,n) \notin C_{(x,y)}$، وإلاّ كان لدينا: $n+x=y$

و y مع $x > y$ و $n \in \mathbb{N}^*$.

وبالطّريقة ذاتها، نبيّن أنّه إذا كان $x < y$، فيوجد عندئذ عنصر وحيد من الشّكل $(0, n)$ في $C_{(x,y)}$، ولا توجد عناصر من الشّكل $(m, 0)$.

ج) يمكن التّحقق من أنّ S علاقة ترتيب على E؛ وعلاوة على ذلك، فإنّ التّرتيب كلّي. وبالفعل، ليكن $C_{(x,y)}$ و $C_{(x',y')}$ صفّين ولنأخذ $(a,b) \in C_{(x,y)}$ و $(a',b') \in C_{(x',y')}$. فلدينا إمّا: $a+b' \geq a'+b$ وإمّا: $a'+b \geq a+b'$، بمعنى: إمّا $C_{(x,y)} \, S \, C_{(x',y')}$ وإمّا: $C_{(x',y')} \, S \, C_{(x,y)}$.

د) ليكن $C_{(x,y)}$ بحيث: $C_{(x,y)} \, S \, C_{(0,0)}$. يكون لدينا

$$\forall (a,b) \in C_{(x,y)} \quad \text{و} \quad \forall (a',b') \in C_{(0,0)} : a+b' \leq a'+b$$

وحسب P) $a' = b'$ ومنه:

$$C_{(x,y)} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;/\; a \leq b\}$$

وبالمثل، إذا كان: $C_{(0,0)} \, S \, C_{(x',y')}$، يأتي حينئذ:

$$C(x', y') = \{(a',b') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;/\; b' \leq a'\}$$

هـ) يعرّف التّطبيق، $f: E \longrightarrow \mathbb{Z}$ المعرّف بـ: $f(C_{(x,y)}) = y-x$ من أجل كلّ x و y من $\mathbb{N}$، تقابلا من E على $\mathbb{Z}$.

ملاحظة:

يسمح لنا التّقابل f بمطابقة مجموعة صفوف التّكافؤ E على $\mathbb{Z}$.

------- ------- -------

تمرين I . 13 :

لتكن S العلاقة المعرّفة في $\mathbb{C}$ بـ: $z S z' \Leftrightarrow z - z' \in \mathbb{R}_+$

تأكّد من أنّ $\mathbb{C}$ مرتّبة جزئيا بواسطة العلاقة S.

هل يقبل الجزء $A = \{1+2i, 2+i\}$ من $\mathbb{C}$ حادّا أعلى ؟ حدّا أعلى ؟

يمكن التأكّد من أنّ الجزء A من $\mathbb{C}$ لا يقبل حوادا عليا وبالتالي ليس له حدّ أعلى.

--------- --------- ---------

تمرين I . 14 :

باستخدام البرهان بالتدرّج، أثبت أنّ:

أ) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p \cdot p! = (n+1)! - 1$

ب) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

جـ) $f(n) \geq n$ من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}$ ؛ حيث f تطبيق من $\mathbb{N}$ في $\mathbb{N}$، متزايد تماما.

د) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ، من أجل $n > 1$ ،

أ) لنتأكّد من أنّ الصّيغة صحيحة من أجل $n=1$.

إذا كان: $n=1$ ، فإنّه لدينا بالفعل: $1 \cdot 1! = 2! - 1$

لنفترض، الآن، أنّ الصّيغة صحيحة إلى غاية المرتبة n ولنثبت أنّها تبقى كذلك من أجل الرّتبة $n+1$. لدينا:

$$\sum_{p=1}^{n+1} p \cdot p! = \sum_{p=1}^{n} p \cdot p! + (n+1)(n+1)!$$

وطبقا لفرضيّة التدرّج يأتي:

$$\sum_{p=1}^{n} p\cdot p! + (n+1)(n+1)! =$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$$
$$1+2+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

ب) استخدم الصّيغة :

التي يمكننا إثباتها أيضا بالتّدرّج.

جـ) استخدم تعريف تطبيق متزايد تماما.

د) استخدم : $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n=1,2,\dots)$

تمرين I.15 :

أثبت أنّ المجموعة $\mathbb{Z}$ قابلة للعدّ.

يتعلّق الأمر هنا بإيجاد تقابل من $\mathbb{N}$ على $\mathbb{Z}$. ليكن :

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ معرّفا ب:

$f(2n) = n$ و $f(2n+1) = -(n+1)$ من أجل كلّ n ∋

ويمكن التّأكد من أنّ f تقابلي.

تمرين I.16 :

لتكن E مجموعة لها n عنصرا $(1<n)$ و a عنصرا من E.

أ) ليكن p عددا صحيحا، $p<n$. عيّن عددَ أجزاء E ذات p عنصرا وتحتوي على a و عددَ أجزاء E ذات p عنصرا التي لا تحتوي على a.

أستنتج العلاقة : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

ب) أحسب $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$.

أوجد هكذا، ومن جديد، عدد أجزاء مجموعة لها n عنصرا.

أ) ليكن b عدد الأجزاء B من E، التي لها p عنصرا و تحتوي على a.

وليكن c عدد الأجزاء C من E ، ذات p عنصرًا والتي لا تحتوي على a.
مادام عدد أجزاء المجموعة E ، ذات p عنصرا هو C_n^p ، فنستنتج
أنّ : $C_n^p = b+c$. ولكن إعطاء B يرجع إلى إعطاء مجموعة من (p-1)
عنصرا في $E-\{a\}$ (ونضيف من بعد ذلك العنصر a).
إذن : $b = C_{n-1}^{p-1}$. وعلاوة على ما سبق ، يرجع إعطاء c إلى إعطاء
جزء ذي p عنصرا في $E-\{a\}$ ، إذن : $c = C_{n-1}^{p}$.

ملاحظة :

يمكن تبيان العلاقة : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$. لحساب
مباشر باستخدام :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

ب) لحساب جميع المجموعات الجزئيّة لـ E (بما فيها E و ϕ)، وعلما بأنّ C_n^p
هو عدد الأجزاء ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا ، يكون عدد
جميع أجزاء E (أو عدد عناصر $\mathcal{P}(E)$) مساويا :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

ويساوي هذا المجموع القيمة $(1+x)^n$ من أجل $x=1$ ، والمعطاة بواسطة
دستور ثنائي الحدّ ، أي ، 2^n .

تمرين 17.I ،

نتصوّر في المستوي n نقطة غير موجودة على إستقامة واحدة
ثلاث ثلاث والتي نصلها مثنى مثنى.
أ) ما هو العدد N للمستقيمات المحصّل عليه بهذه الكيفيّة ؟
ب) ما هو ، في الحالة العامّة ، عدد نقاط التّقاطع m لهذه المستقيمات ؟

ج) ماهو العدد p للمثلّثات المشكّلة بهذه المستقيمات؟

أ) هناك C_n^2 طريقة لاختيار نقطتين من بين الـ n نقطة.
ولكن، اختيارنا لنقطتين يعود إلى رسم مستقيم من من المستقيم المطلوبة. فلدينا إذن:

$$N = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

ب) هناك C_N^2 طريقة لاختيار مستقيمين من بين الـ N مستقيما.
ويقابل كلّ اختيار لمستقيمين إمّا نقطة مختلفة عن رأس (وهناك $(m-n)$ نقطة في كلّ الحالات) وإمّا رأس. نلاحظ إذن أنّ كل رأس محسوب عددة المرّات الموجودة في امكانية اختيار مستقيمين من بين الـ $(n-1)$ مستقيما التي تحمله، أي: C_{n-2}^2 مرّة. ولدينا إذن:

$$C_N^2 = (m-n) + n\, C_{n-1}^2$$

ومنه:

$$m = n + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

ج) هناك C_N^3 كيفيّة لاختيار ثلاثة مستقيمات من بين الـ N مستقيما. كلّ اختيار لثلاثة مستقيمات يقابله إمّا أحد المثلّثات المطلوبة، وإمّا رأس إذا كانت المستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة. نلاحظ، عندئذ، أنّ كلّ رأس محسوب عدد المرّات الموجود في اختيار 3 مستقيمات من بين الـ $(n-1)$ التي تحمله، أي C_{n-1}^3 مرّة. يكون لدينا إذن:

$$C_N^3 = p + n\, C_{n-1}^3$$

ومنه :

$$p = \frac{n(n-1)(n-2)(n^3-13n+20)}{48}$$

تمرين I.18 :

برهن الصّيغة التّاليّة :

$$C_{n-2}^{p} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_{n}^{p} \quad (n>2\ ,\ p \leq n-2)$$

أ) بواسطة حساب مباشر.

ب) بواسطة استدلال توفيقي.

أ) استخدم : $C_k^1 = \frac{k!}{1!\,(k-1)!}$

ب) أعتبر المجموعة E ذات n عنصرا ومن أجل a و b كيفيين من E ميّز أجزاء E ذات p عنصرا المحتوية أو غير المحتويّة لِـ a أو لـ b.

الفصل II .

الفضاءات الشعاعيّة

I. الفضاء الشعاعي على حقل تبديلي K:

1. تعريف:

ليكن K حقلا تبديليا ، $(K, +, ., 0_K, 1_K)$.

لتكن E مجموعة معطاة. نسمّي إنّ $(E, +, *)$ فضاء شعاعي على الحقل K (أو إنّه K- فضاء شعاعي) إذا كانت:

أ) E مزوّدة بقانون تركيب داخلي + تجعل منها زمرة آبلية.

ب) E مزودة بقانون تركيب خارجي * ،

$$K \times E \longrightarrow E$$
$$(\mu, v) \longmapsto \mu * v$$

- تحقّق من أجل كلّ μ و μ_1 و μ_2 في K ومن أجل كل v و v_1 و v_2 في E :

(1) $\mu * (v_1 + v_2) = \mu * v_1 + \mu * v_2$

(2) $(\mu_1 + \mu_2) * v = \mu_1 * v + \mu_2 * v$

(3) $(\mu_1 \cdot \mu_2) * v = \mu_1 * (\mu_2 * v)$

(4) $1_K * v = v$ ، حيث 1_K يرمز للعنصر الوا[حد] لـ K.

تسمّى عناصر E الأشعّة ، وعناصر K السلّميّات.

ملاحظة: نرمز للعملية * بـ"." وسوف نتكلم عن الـ K- فضاء شعاعي $(E, +, .)$

2 - قواعد الحساب:

إنّ الخصائص المواليّة نتائج فوريّة للتعريف :

$$\lambda\cdot(v_1-v_2) = \lambda\cdot v_1 * \lambda\cdot v_2$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)\cdot v = \lambda_1\cdot v - \lambda_2\cdot v$$
$$\lambda\cdot 0_E = 0_E \text{ (و) } 0_K\cdot v = 0_E$$
$$(-\lambda)\cdot v = \lambda\cdot(-v) = -(\lambda\cdot v)$$
$$\lambda\cdot v = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_K \text{ أو } v = 0_E$$

3_ أمثلة :

(1) مجموعة الأشعة الطليقة المزودة بمجموع شعاعين طليقين و
بجداء سلمي حقيقي في شعاع طليق، فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

(2) لنعتبر، في K^n ، عنصرين $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و
$y=(y_1,\ldots,y_n)$ ، ولنعرّف قانونين + و . ب :
$$x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$
$$\lambda\cdot x=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)\quad;\quad \lambda\in K.$$
عندئذ يكون الثلاثي $(K^n,+,\cdot)$ فضاء شعاعيا على K ؛ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

(3) إنّ المجموعة المرموز لها ب $\mathcal{F}(X,E)$ والمشكّلة من التطبيقات
المعرّفة في مجموعة غير خالية X و ذات قيم في K- فضاء شعاعي،
والمزوّدة بالجمع و بالقانون الخارجي المعرّف بـ :
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
من أجل كلّ $x \in X$، E فضاءٌ شعاعي على K.

لنلاحظ أنّه عندما نضع $X=\mathbb{N}$ = مجموعة الأعداد الطبيعيّة، لايكون هذا
الفضاء الشعاعي سوى مجموعة المتتاليات لعناصر من $\mathbb{R}$ مع $E=\mathbb{R}=K$

(4) إنّ $\mathbb{R}^2$ المزوّد بالجمع والقانون الخارجي * المعرّف ب:
$$\lambda*(x,y)=(\lambda x,0)$$
ليس $\mathbb{R}$-فضاء شعاعيّا لأنّ: $1*(x,y)=(1\cdot x,0)=(x,0)\neq(x,y)$
إذا $y\neq 0$.

II. الفضاءات الشعاعيّة الجزئيّة:

1 - تعريف:

ليكن $(E, +, .)$ K-فضاء شعاعيًّا. نقول عن جزء F من E إنّه فضاء شعاعي جزئي لـ E إذا:

(1) $F \neq \phi$.

(2) F مستقرّ بالنسبة للقانون $+$: $\forall u \in F$ و $\forall v \in F$, $u+v \in F$.

(3) F مستقرّ بالنسبة للقانون $\cdot$: $\forall u \in F$ و $\forall \alpha \in K$, $\alpha u \in F$.

وذلك مكافئ أيضا لـ:

(1) $F \neq \phi$.

(2) $\forall u, v \in F$ و $\forall a, b \in K$, $au + bv \in F$.

ملاحظة هامّة:

يكون جزء F من K-فضاء شعاعي فضاء شعاعيًّا جزئيًّا من E إذا كان F مستقرًّا من أجل قانوني E، وإذا كان F، بعد تزويده بالقانونين المستنتجين، فضاء شعاعيًّا.

2 - أمثلة:

(1) $\{0_E\}$ و E فضاءان شعاعيّان جزئيّان من E.

(2) $E \supset A \neq \phi$ و $A \not\ni 0_E$ $\Leftarrow$ A ليس فضاء شعاعيًّا جزئيًّا من E.

(3) الفضاء $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

إنّ المجموعات:

$\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ المشكّلة من التّوابع الحقيقيّة الزّوجيّة و

$\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ " " الفرديّة و

$\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ " " المستمرّة و

$\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ " " القابلة للاشتقاق،

فضاءاتٌ شعاعيّة جزئيّة من E

مبرهنة 1 :

تقاطع جماعة غير خالية لفضاءات شعاعيّة جزئيّة، فضاء شعاعيّ جزئيّ.

III . الفضاء الجزئي المولّد بواسطة جزء :

ينتج من المبرهنة 1 ، أنّ عائلة الفضاءات الجزئية (غير الخالية) التّي تحتوي جزءا A لـ K - فضاء شعاعي E ، تملك أصغر عنصر (بمفهوم الإحتواء).

1 - تعريف 1 :

ليكن A جزءا كيفيّا لِـ K - فضاء شعاعي E
الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة A هو أصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي A.
وهو أيضا، تقاطع جميع الفضاءات الشّعاعيّة الجزئيّة الحاوية A.
نرمز له بـ : $S(A)$.

مثالان :

$$S(\phi) = \{0\}$$

A فضاء شعاعي جزئي $\Rightarrow$ $S(A) = A$.

2 - تعريف 2 :

ليكن A جزءا غير خال لـ K - فضاء شعاعي E.
يكون العنصر u من E عبارة خطية لعناصر من A إذا كان من الشّكل :

$$u = \sum_{i \in I} a_i u_i \quad , \quad I \text{ منتهيّة} , \quad u_i \in A , \quad a_i \in K , \quad \forall i \in I$$

تسمّى السّلميّاتُ a_i معاملاتِ العبارة الخطيّة.

مثال: $u = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p$

ملاحظة :

يمكن أن يكون لجزء A مالانهاية من العناصر، لكن عبارة خطية تضمّ دوما، في المجموع عددا منتهيا من عناصر الجزء A.

نرمز لمجموعة العبارات الخطية من عناصر A ب: $C(A)$.

المبرهنة 2 :

ليكن A جزءا غير خال لـ K-فضاء شعاعي E.

(1) $C(A)$ فضاء شعاعي جزئي من E.

(2) $S(A) = C(A)$. الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بواسطة A هو مجموعة العبارات الخطية لعناصره A.

أمثلة :

(1) في $\mathbb{R}$، $S(\{1\}) = \mathbb{R}\cdot 1 = \mathbb{R}$ ، $S(\{0\}) = \{0\}$

(2) في $\mathbb{R}^2$، إذا كان: $A = \{e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1)\}$

عندئذ يكون : $S(A) = \mathbb{R}^2$. وإذا كان : $A = \{e_1 = (1,0)\}$

عندئذ يكون : $S(A) = \mathbb{R} \times \{0\}$

IV الإستقلال الخطي - الأسس.

1- تعاريف :

ليكن E K-فضاء شعاعيا.

(P) تكون جماعة الأشعة $(u_1, \dots, u_n)$ من E جماعة مستقلة إذا كانت كل عبارة خطية منعدمة لأشعة الجماعة متمتعة بمعاملات منعدمة. أي :

من أجل $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$، $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n$

ونقول أيضا إن الأشعة $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقلة خطيا.

ب) نقول عن عائلة الأشعّة $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ من E إنّها مقيّدة إذا لم تكن مستقلّة ؛ وبعبارة أخرى ، إذا وجدت سلّميّات c_i غير منعدمة كلّها معا بحيث : $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0$.

ج) يقال عن عائلة الأشعّة $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ من E إنّها مولّدة لـ E، إذا كان الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة الجزء $u_1, \dots, u_n$ مساويا E. بمعنى :

$$\forall u \in E, \ \exists c_i \in K \ / \ u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

د) نسمّي أساسا لـ E ، كلّ جماعة لأشعّة $(u_1, \dots, u_n)$ من E تكون مستقلّة ومولّدة لـ E في آن واحد.

لنشر إلى أنّه يقال عن أشعّة جماعة مقيّدة (مرتبطة) إنّها مقيّدة أو مرتبطة خطيّا.

2 - خصائص :

كلّ جماعة جزئيّة من جماعة مستقلّة ، جماعةٌ مستقلّةٌ.

كل جماعة تحوي جماعة مولّدة مولّدةٌ.

تكون جماعة مبسّطة إلى عنصر x مستقلّة إذا وفقط إذا لم يكن x منعدما

3 - أمثلة :

(1) ليكن $\vartheta \in E$ ، عندئذ يكون $(\vartheta, 0)$ مقيّدا

(2) الجزء $\{1, \sqrt{2}\}$ من الـ Q - فضاء شعاعي E مستقلّ.

(3) تشكّل جماعة الأشعّة e_1, e_2, e_3 المعرّفة بـ: $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ و $e_3 = (0,0,1)$ ، أساسًا لـ $\mathbb{R}^3$. يسمّى هذا الأساس ، الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

و بيّن أيضا أنّ الأشعّة : $u_1 = e_1$ ، $u_2 = e_1 + 2e_2$ و $u_3 = e_3$ تشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

(4) الجزء المبسّط إلى $\{1_K\}$ أساس لـ K.

(5) العائلة (f_1, f_2) لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$، المعرّفة بـ: $f_1(x) = \sin(x+a)$

و $f_2(x) = \sin(x+b)$ من أجل كلّ x حقيقي، مع a و b عددين حقيقيّين

مثبتين بحيث: $a \neq b + k\pi$، $k \in \mathbb{Z}$، عائلة مستقلّة.

4 - مبرهنة 1:

ليكن E فضاء شعاعيا على K.

تكون عائلة الأشعّة $(u_1, \dots, u_n)$ من E مقيّدة إذا وفقط إذا كان أحدُ الأشعّة عبارةً خطيّة للأشعّة الأخرى.

مبرهنة 2: تمييز أساس.

تكون الجماعة $(u_1, \dots, u_n)$ من أشعّة K - فضاء شعاعي أساسا لـ E إذا وفقط إذا أمكنت كتابة كلّ شعاع u من E بكيفيّة وحيدة، على شكل عبارة خطيّة لـ $u_1, \dots, u_n$.

5 - أحداثيات شعاع وفق أساس.

ليكن $B = (u_1, \dots, u_n)$ أساسا لـ E و u شعاعا من E.

تسمّى السلّميّات الوحيدة $c_1, \dots, c_n$ المحقّقة لـ: $c_1u_1 + \dots + c_nu_n$:

أحداثيات u وفق الأساس B.

V - نظريّة البعد في فضاء شعاعي ذي بعد منته.

1 - تعريف:

نقول عن K - فضاء شعاعي E إنّه ذو بعد منته إذا كان يقبل جماعة مولّدة منتهية.

أمثلة:

(1) الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$ ذو بعد منته، فهو مولّد بواسطة الأشعّة: $e_1 = (1,0)$ و $e_2 = (0,1)$

(2) $\mathbb{R}^3$ مولّد بواسطة الأشعّة u_1 و u_2 و u_3 الواردة في المثال (3) السابق.

(3) الفضاء الشّعاعي K^n على K ذو بعد منته.

لنرمز بِ: e_i للعنصر $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_i = 1$ و $\varepsilon_j = 0$ من أجل كلّ j مختلف عن i. تكون العائلة المنتهية $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ مولّدة لِ K^n.

2 - قضيّة 1:

لتكن $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ جماعة مستقلّة و $(u_1, \dots, u_n)$ جماعة مولّدة لِ K-فضاء شعاعي E. عندئذ يكون $p \leq n$ و، مع احتمال في تغيير في أدلّة عناصر الجماعة المولّدة، تكون الجماعة:

$(v_1, \dots, v_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ مولّدة لِ E.

3 - مبرهنة الأساس غير التّام.

ليكن E فضاء شعاعيّا على K غير مبسّط إلى وحيد العنصر $\{0\}$، ذا بعد منته، و G جماعة مولّدة لِ E، و L جماعة مستقلّة محتواة في G. عندئذ، يوجد أساس منته B لِ E تكون مجموعة عناصره محتوية لِ L و محتواة في G.

و تجاوزا في الكتابة، نضع : $L \subset B \subset G$.

يمكننا أن نثبت بأنّه إذا كان E ذا بعد n، نتمّم L بِ: $n-p$ عنصرا من G للحصول على أساس لِ E.

و نبرهن من بعد ذلك المبرهنة التّالية:

مبرهنة البعد:

يتمتّع كلّ فضاء E غير مبسط إلى الصّفر، و ذي بعد منته، أساسا منتهيا. لأساسين لِ E نفس العدد (المنتهي) من العناصر

4 - البعد:

أ) تعريف: ليكن E فضاء شعاعيا ذا بعد منته على حقل K.

إذا لم يكن E مبسّطا إلى وحيد العنصر $\{0\}$، فنسمّي بعد E على K

عدد أشعّة اساسٍ لِـ E.

يرمز لهذا العدد بـ: $\dim_K E$ (أو بـ $\dim E$ إذا لم يكن هناك إلتباس)

إصطلاح:

$$\dim\{0\} = 0$$

أمثلة:

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ ؛ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ ؛ $\dim_K K^n = n$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ ؛ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

يسمّى فضاء شعاعي جزئي E ذو البعد 1 (2 على التّرتيب) مستقيما شعاعيّا (مستويا شعاعيّا على التّرتيب)

VI - الخصائص المتعلّقة بالبعد:

1- تمييز أساس في البعد المنتهي:

مبرهنة:

ليكن E K-فضاء شعاعيا ذا بعد n ؛ يكون لدينا عندئذ:

(1) كلّ جماعة مستقلّة من n شعاعا أساس لِـ E.

(2) كلّ جماعة مولّدة من n شعاعا أساس لِـ E.

فعلى سبيل المثال، تكون كلّ جماعة من أربعة أشعّة مستقلّة في $\mathbb{R}^4$ أساسا لـ $\mathbb{R}^4$؛ وكلّ جماعة من أربعة أشعة مولّدة أساس لِـ $\mathbb{R}^4$.

2- مبرهنة:

ليكن E_1 و E_2 فضائين شعاعيين جزئيين لِـ K — فضاء شعاعي واحد ذاته E، ($E \neq \{0\}$) ذي بعد منته.

(1) إذا كان $E_1 \subset E_2$ ، فإنّ: $\dim_K E_1 \leqslant \dim_K E_2$

(2) وإذا كان $E_1 \subset E_2$ ، $\dim_K E_1 = \dim_K E_2$ فإنّ: $E_1 = E_2$

VII. مجموع الفضاءات الشّعاعيّة الجزئيّة:

1- تعريف:

ليكن E_1 و E_2 فضائين شعاعيين جزئيين من فضاء واحد E.
يكون مجموع E_1 و E_2، المرموز له بـ E_1+E_2 ، معرّفا بـ:

$$E_1 + E_2 = \{ u \in E \,/\, \exists\, u_1 \in E_1 \text{ و } \exists\, u_2 \in E_2 \,,\, u = u_1 + u_2 \}$$

يمكن أن نبيّن بأنّ E_1+E_2 فضاء شعاعي جزئي لـ E يحوي $E_1 \cup E_2$. إنّه، في الحقيقة، الفضاء الجزئي المولّد بواسطة $E_1 \cup E_2$.

ملاحظة:

عموما، لا يكون إتّحاد فضاءات شعاعيّة جزئيّة فضاء شعاعيّا جزئيّا (وليس الحال كذلك بالنّسبة للتّقاطع).

اعتبر، مثلا، في الفضاء الشّعاعي $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$، الفضائين الجزئيين E_1 و E_2 المولّدين بواسطة: $e_1 = (1,0)$ و $e_2 = (0,1)$ على التّرتيب.

إنّ الشّعاع e_1+e_2 لا ينتمي إلى $E_1 \cup E_2$ وهو ما يسمح لنا بالختم بأنّ $E_1 \cup E_2$ ليس فضاء شعاعيا جزئيا لـ $\mathbb{R}^2$.

أمثلة:

(1) الفضاء الشّعاعي $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$ هو مجموع E_1 و E_2، حيث E_1 هو الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بـ: $e_1 = (1,0)$ و E_2 هو الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بـ: $e_2 = (0,1)$

(2) يمكن تبيان بأنّ الفضاء الشّعاعي $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ على $\mathbb{R}$ تحقّق:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) + \mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

(3) إذا كان F فضاء شعاعيّا جزئيّا لفضاء شعاعي E على K، فإنّ:

$$F+F = F$$

المجاميع المباشرة:

1 تعريف: ليكن E_1 و E_2 فضائين شعاعيّين جزئيّين لفضاء شعاعي E على K
نقول عن المجموع E_1+E_2 أنّه مباشر، إذا كان كلّ عنصر u من E_1+E_2 يكتب بكيفيّة وحيدة على الشّكل u_1+u_2، حيث $u_1 \in E_1$ و $u_2 \in E_2$.

ونرمز لهذا المجموع المباشر ب : $E_1 \oplus E_2$.

لنشر إلى أنّ المجموع $F = F + F$ ، الوارد في المثال (3) ، ليس مباشرا ما لم يكن F مبسّطا إلى العنصر الحيادي : وحيد العنصر $\{0\}$.

2 - الخاصيّة المميزة :

لكي يكون مجموع E_1 و E_2 مباشرا ($E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$

يلزم ويكفي أن يتحقّق الشّرط التّالي : $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

3 - أمثلة :

في الأمثلة الّتي سبق ذكرها ، لدينا :

$$\mathbb{R}^2 = S(\{(1,0)\}) \oplus S(\{(0,1)\})$$

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

4 - المجموع المباشر لـ n فضاء جزئيّا :

ليكن E_1 و E_2 و ... و E_n ، n فضاء شعاعيا جزئيا من الـ K - فضاء الشعاعي E .

فلكي يكون المجموع $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ مباشرا ، يلزم و يكفي أن يكون ، من أجل كلّ دليل i :

$$E_i \cap \left(\underset{j \neq i}{+} E_j \right) = \{0\}$$

III - الفضاءات الجزئيّة المكمّلة :

1 - تعريف :

ليكن E K - فضاء شعاعيّا و E_1 و E_2 فضائين جزئيين من E .

نقول عن E_1 و E_2 أنّهما متكاملان إذا : $E = E_1 \oplus E_2$

في الأمثلة السّابقة ، يكون $S(\{e_1\})$ و $S(\{e_2\})$ متكاملين في $\mathbb{R}^2$ وكذلك $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ متكاملان في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

و من جهة أخرى، يكتب كلّ عدد عقدي z من الفضاء الشّعاعي $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$، بكيفيّة وحيدة على الشّكل: $z = x.1 + y.i$ حيث x و y عددان حقيقيّان. إذن يكون الفضاءان الجزئيان المولّدان بواسطة العددين العقديين 1 و i متكاملين في $\mathbb{C}$.

2 - وجود مكمّل.

مبرهنة:

ليكن E K-فضاء شعاعيا ذا بعد منته يساوي n.

1) يقبل كلّ فضاء شعاعي جزئي E_1 من E فضاء شعاعيا جزئيا مكمّلا E_2 على الأقلّ

2) إذا كان E_1 ذا بعد p، عندئذ يكون E_2 ذا بعد $n-p$.

3 - بعد مجموع فضاءات شعاعيّة جزئيّة:

نثبت النّتيجة التّالية:

مبرهنة: ليكن E_1 و E_2 فضائين شعاعيين جزئيّين لـ K-فضاء شعاعي E، بعداهما منتهيان.

(1

$$\dim_K (E_1 \oplus E_2) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2$$

$$\dim_K (E_1 + E_2) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2 - \dim_K (E_1 \cap E_2)$$

VIII - مرتبة جملة أشعّة:

ليكن E فضاء شعاعيّا. نسمّي مرتبة جملة $L=(u_1,\dots,u_n)$ من n شعاعا من E، بعد الفضاء الشّعاعي الجزئي من E، المولّد بواسطة $(u_1, \dots, u_n)$.

و هي أيضا، العدد الأكبر من الأشعّة المستقلّة خطيّا التي يمكن استخراجها من L

تمرين 1 . II

ليكن E فضاء شعاعيا على K، و λ و μ عنصرين من K.
وليكن x و y عنصرين من E

أ) أثبت أنّ: $\lambda(x-y) = \lambda x - \lambda y$. أستنتج أنّ: $\lambda . 0_E = 0_E$

ب) أثبت أنّ: $(\lambda-\mu)x = \lambda x - \mu x$. استنتج أنّ: $0 . x = 0_E$

جـ) أثبت أنّ: $(-\lambda)(-x) = \lambda x$.

أ) من أجل x و y من E و λ من K لدينا:

$$\lambda(x-y) + \lambda y = \lambda((x-y)+y) \quad \text{، حسب المسلّمة ①.}$$
$$= \lambda(x+(-y+y)) \quad \text{، حسب كون + تجميعيا.}$$
$$= \lambda(x+0_E) = \lambda x$$

ويأتي، بإضافة العنصر $-(\lambda y)$ (العنصر النّظير لـ λy) إلى العبارتين الأولى والأخيرة من المساواة، أنّ:

$$\lambda(x-y) = \lambda x - \lambda y$$

وإذا أخذنا في هذه المساواة $x=y$ ، نحصل، بالتأكيد، على:

$$\lambda . 0_E = 0_E .$$

ب) من أجل λ و μ من K و x من E يكون لدينا:

$$(\lambda-\mu)x + \mu x = ((\lambda-\mu)+\mu)x = \lambda x$$

وهكذا، وبإضافة العنصر $-(\mu x)$ ، تأتي المساواة:

$$(\lambda-\mu)x = \lambda x - \mu x$$

والآن وبأخذ: $\mu = \lambda$ ، نحصل على:

$$0 . x = 0_E$$

جـ) نأخذ في أ): $x = 0_E$ وفي ب): $\lambda = 0$. لدينا من جهة:

$$\lambda(-y) = \lambda(0_E - y) = \lambda . 0_E - \lambda y = -\lambda y$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$(-\mu)x = (0-\mu)x = 0.x - \mu x = -\mu x$$

إذن:

$$(-\lambda)(-x) = -(-\lambda)x = \lambda x$$

تمرين 2. II:

ليكن E K-فضاء شعاعيا، و X مجموعة غير خالية و $\mathcal{F}(X,E)$ مجموعة التطبيقات من X في E . نعرّف، من أجل f و g من $\mathcal{F}(X,E)$ ومن أجل λ من K، التطبيقين:

$$f+g : X \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto f(x)+g(x)$$

و

$$\lambda.f : X \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto \lambda f(x)$$

أ) أثبت أنّ المجموعة $\mathcal{F}(X,E)$ المزوّدة بالقانونين + و . :

$$+ : (f,g) \longrightarrow f+g$$

و

$$. : (\lambda,f) \longrightarrow \lambda f$$

K- فضاء شعاعي.

ب) أثبت أنّ مجموعة التوابع الزوجية (الفردية على التوالي) فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

ج) أثبت مجموعة التوابع المحدودة فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

د) ليكن $[a,b]$ مجالا كيفيا من $\mathbb{R}$. نعتبر في $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ المجموعة الجزئية $L(a,b)$ المعرفة كمايلي:

$$f\in L(a,b) \Leftrightarrow \{\exists K_f \geq 0 \;;\; x,x'\in[a,b],\ |f(x)-f(x')| \leq K_f |x-x'|\}$$

K_f ثابت لا يتعلّق إلاّ بـ: f . أثبت أنّ $L(a,b)$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$. نفترض $b>a$

هـ) أثبت أنّ المجموعتين التّاليتين ليستا فضائين شعاعيين جزئيين [من] $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$i)\quad A = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$

$ii)\quad B = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(7) = 2 + f(1) \}$

م) يتعلّق الأمر هنا بإثبات أنّ المجموعة $F(X,E)$ المزوّدة بقانونين معطيين: + و . ، تتحقّق فيهما مسلّمات الفضاء الشّعاعي .
لنشر إلى أنّ القانون + داخلي وأنّ القانون . خارجي.

1- + تبديلي:

ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{F}(X,E)$. لإثبات أنّ $f+g = g+f$
يكفي إثبات أنّ :

$(f+g)(x) = (g+f)(x)$ من أجل كلّ عنصر x من X

(مادام لهما نفس مجموعة الإنطلاق والوصول E)
لدينا:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

طبقا لتعريف القانون + في $\mathcal{F}(X,E)$

وبما أنّ E فضاء شعاعي ، فإنّ + تبديلي في E ومادام $f(x)$ و $g(x)$ عنصرين من E ، نستطيع أن نكتب:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

ولكن ،حسب تعريف القانون + في $F(X,E)$ ، يكون لدينا:

$$g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

ومنه:

$$(f+g)(x) = (g+f)(x) \quad \forall x \in E$$

2 - + تجميعي:

لتكن f و g و h عناصر من $\mathcal{F}(X,E)$. لدينا:

$$((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x) \qquad \forall x \in X.$$

وبالفعل، ليكن $x \in X$،

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

حسب تعريف القانون + في $\mathcal{F}(X,E)$.

ولكن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ عناصر من E و E فضاء شعاعي،

عندئذ نكتب:

$$(f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + ((g(x)+h(x))$$

لأنّ القانون + تجميعي في E.

و بالاستعمال، من جديد، لتعريف القانون + في $\mathcal{F}(X,E)$، يكون لدينا:

$$f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$

وهكذا تأتي المساواة المطلوبة:

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

3 - وجود العنصر الحيادي للقانون + في $\mathcal{F}(X,E)$:

ليكن n التّطبيق المعرّف ب:

$$n : X \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto 0_E$$

حيث 0_E هو العنصر الحيادي لـ $(E,+)$.

لدينا: $n \in \mathcal{F}(X,E)$، ومن أجل كلّ f من $\mathcal{F}(X,E)$ يمكننا أن نكتب:

$$(n+f)(x) = (f+n)(x) = f(x)+n(x) = f(x)+0_E = f(x) \ \forall x \in$$

أي أنّ:

$$n+f = f+n = f$$

إذن n هو العنصر الحيّادي لـ $\mathcal{F}(X,E)$. يسمّى n التّطبيق المنعدم

4 - وجود عنصر نظير لعنصر f من $\mathcal{F}(X,E)$.

ليكن f عنصرا من $\mathcal{F}(X,E)$. نرمز بـ: h للتّطبيق المعرّف من X في E بـ:

$$h(x) = -f(x) \quad \forall x \in X$$

لدينا:

$$(h+f)(x) = (f+h)(x) = f(x)+h(x) = f(x)-f(x) = 0_E = n(x) \quad \forall x \in X$$

أي أنّ:

$$h+f = f+h = n$$

وهكذا يكون h العنصر النّظير لـ f. يُرمز لـ h في غالب الأحيان بـ: $(-f)$

① ليكن $\lambda \in K$ وليكن f و g من $\mathcal{F}(X,E)$. لدينا عندئذ:

$$(\lambda(f+g))(x) = \lambda((f+g)(x)) = \lambda(f(x)+g(x)) \quad \forall x \in X$$

وبما أنّ $f(x)$ و $g(x)$ $\in E$ وأنّ هذا الأخير فضاء شعاعي، يأتي عندئذ:

$$\lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) \quad \forall x \in X$$

وطبقا لتعريف القانون .، يكون لدينا،

$$\lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) \quad \forall x \in X$$

وبالتّالي، يأتي باستعمال تعريف القانون +:

$$(\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x) \quad \forall x \in X$$

إذن:

$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g.$$

② ليكن λ و $\mu \in K$ و $f \in \mathcal{F}(X,E)$. لدينا، عندئذ وتعريفا:

$$((\lambda+\mu) f)(x) = (\lambda+\mu) f(x) \quad \forall x \in X$$

ومادام E فضاء شعاعيّا يكون لدينا:

$$(\lambda+\mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

ولدينا من بعد ذلك بالتّعريف:

$$\lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x) \quad \forall x \in X$$

إذن:

$$(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$$

③ ليكن λ و μ من K وليكن f من $\mathcal{F}(X,E)$. لدينا تعريفا:

$$((\lambda\mu) f)(x) = (\lambda\mu) f(x) \quad \forall x \in X .$$

وبما أنّ E فضاء شعاعي على K ، يمكن أن نكتب:

$$(\lambda\mu) f(x) = \lambda (\mu f(x))$$

وبالتّعريف لدينا:

$$\lambda(\mu f(x)) = \lambda ((\mu f)(x)) = (\lambda(\mu f))(x) \quad \forall x \in X$$

أي أنّ:

$$(\lambda\mu) f = \lambda (\mu f)$$

④ ليكن f من $\mathcal{F}(X,E)$. من أجل السّلمي 1 (عنصر الوحدة لـ K)

لدينا تعريفا:

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

لأنّ E -K- فضاء شعاعي . و منه:

$$1 \cdot f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}(X,E)$$

ب) لنلاحظ بأنّ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حسب (أ).
لنرمز بـ P لمجموعة التّوابع الزّوجيّة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$. لدينا:
$P \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $P \neq \phi$ لأنّ التّطبيق المعدوم زوجي . وزيادة على ذلك، وإذا كان f و g من P ، يكون لدينا من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

أي أنّ ؛ $f+g \in P$

إذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ و $f \in P$ ، عندئذ يكون لدينا من أجل كلّ x من

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$$

بمعنى :

$$\lambda f \in P$$

وهكذا تحقّق المجموعة P للتّوابع الزّوجيّة خصائص فضاء شعاعي جزئي.

وبطريقة مماثلة ، نبيّن أنّ مجموعة التّوابع الفرديّة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ هي أيضا ، فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ج) لتكن B مجموعة التّوابع المحدودة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$. لدينا:

$$f \in B \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+ \ / \ |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

نتحقّق من أنّ B ، فعلا ، فضاء شعاعي جزئي لِ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

د)

$$L(a,b) = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ | \ \exists K_f \geqslant 0 \ ; \ |f(x) - f(x')| \leq K_f |x-x'| \quad \forall x, x' \in [a,b] \}$$

لدينا ، بالتّأكيد :

$$L(a,b) \subset \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$$

وزيادة على ذلك ، إذا كان n التّطبيق المعدوم المعرّف بـ :

$$n(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

فإنّ :

$$|n(x) - n(x')| = 0 \leq |x-x'| \quad \forall x, x' \in [a,b]$$

إذن : $n \in L(a,b) \neq \phi$

(من أجل التّطبيق n ، لدينا : $K_n = 1$ ، مثلا)

ليكن ، الآن ، f و g من $L(a,b)$ و λ و μ من $\mathbb{R}$.

نقوم بإثبات أنّ :

$$h = \lambda f + \mu g \in L(a,b)$$

من أجل ذلك، وبما أنّ f و g ينتميان إلى $L(a,b)$ ، فيوجد عددان حقيقيّان موجبان k_f و k_g بحيث :

$$|f(x) - f(x')| \leq k_f\,|x - x'| \quad \forall x, x' \in [a,b]$$

و

$$|g(x) - g(x')| \leq k_g\,|x - x'| \quad \forall x, x' \in [a,b]$$

وبالتّالي :

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x')| &= |(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x')| \\ &= |\lambda(f(x) - f(x')) + \mu(g(x) - g(x'))| \\ &\leq (|\lambda| k_f + |\mu| k_g)\,|x - x'|, \quad \forall x, x' \in [a,b] \end{aligned}$$

إذن، يوجد $0 \leq k_h$ ، $k_h = |\lambda| k_f + |\mu| k_g$ ، بحيث :

$$|h(x) - h(x')| \leq k_h\,|x - x'| \quad \forall x, x' \in [a,b]$$

أي أنّ :

$$h = \lambda f + \mu g \in L(a,b).$$

ملاحظة :

توابع $L(a,b)$ مستمرّة لزوماً ، في كلّ نقطة من المجال $[a,b]$ ، بل ومستمرّة بانتظام على $[a,b]$. وزيادة على ذلك ، إذا كان : $k_f = 1$ تكون، عندئذ ، المتتالية (U_n) المعرّفة بـ :

$$u_0 = r \quad , r \in [a,b]$$

$$u_n = f(u_{n-1}) \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

متقاربة نحو ℓ ، وتحقّقُ ℓ المعادلة : $f(\ell) = \ell$. (إرجع إلى المطبوعة : التحليل ، القسم الأوّل ، التّمرينين III.13 و III.12).

هـ) ا)

$$A = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \}$$

من أجل الإثبات بأنّ A ليست فضاء شعاعيًا جزئيًا من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$، يكـ

الإثبات بأنّ إحدى خصائص فضاء شعاعي جزئي غير محقّقة.

ليكن، إذن، $f \in A$ و $\lambda \in \mathbb{R}^*_-$. لدينا:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن، إذا كان: $f \neq 0_{\mathcal{F}}$، مثلاً، f معرّف على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2+1$

عندئذ: $\lambda f \notin A$، $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*_-$، وعليه، فإنّ A ليست فضاء شعا

جزئيًا.

ii) $B = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(7) = 2 + f(1) \}$

نلاحظ بأنّ التّطبيق المنعدم، n، ليس عنصرا من B. وبالفعل:

$$n(7) = 0 \neq 2 + n(1) = 2 + 0 = 2.$$

وهكذا، فإنّ B ليست فضاء شعاعيًا جزئيًا من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

تمرين 3.II:

تحقّق ممّا إذا كانت المجموعات الموالية فضاءات شعاعيّة جزئيّة من الـ-$\mathbb{R}$- فضاء شعاعي $\mathbb{R}^3$.

أ) $= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = a \ , \ a \in \mathbb{R} \}.$

ب) $= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \geq 0 \}.$

ج) $= \{ (x,y,1) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}.$

د) $= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}.$

هـ) $= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 2y$ و $z = 0 \}.$

أ) نميّز حالتين: $a=0$ و $a \neq 0$.

الحالة الأولى: $a=0$: لدينا:

$A \subset \mathbb{R}^3$ و $A \neq \emptyset$ لأنّ $(0,0,0)$ تنتمي إلى A.

لتكن، الآن، $X=(x,y,z)$ و $Y=(x',y',z')$ عنصرين من A.
عندئذ يأتي:

$$X+Y=(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$

و $(x+x')+(y+y')+(z+z')=(x+y+z)+(x'+y'+z')=0$

إذن:

$$X+Y\in A.$$

ومن جهة أخرى، إذا كان $X=(x,y,z)\in A$ و كان λ منتميا إلى $\mathbb{R}$ فإنّ:

$$\lambda X=\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$

و $\lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda(x+y+z)=0$

إذن: $\lambda x\in A$.

وهكذا تكون المجموعة A فضاء شعاعيّا جزئيا من $\mathbb{R}^3$.

<u>الحالة الثّانية: $a\neq 0$.</u>

نلاحظ في هذه الحالة أنّ:

$$0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin A$$

ولكنّنا نعلم أنّ على كلّ فضاء شعاعي جزئي أن يحوي دوما العنصر الحيادي للفضاء الشّعاعي، وعليه نختم بأنّ A ليست فضاء شعاعيّا جزئيّا.

ب)

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x\geqslant 0\}$$

لدينا: $B\subset\mathbb{R}^3$

و $B\neq\phi$ لأنّ $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$ -مثلا- ينتمي إلى B.

ليكن $X=(4,0,-1)$. فإنّ: $X\in B$. وليكن $\lambda=-1\in\mathbb{R}$

لدينا: $\lambda X=-X=(-4,0,+1)\notin B$

إذ أنّ مركبته الأولى تساوي : $-4 < 0$.
إذن، B ليست فضاءً شعاعيّاً جزئيّاً.

ج)

$$C = \{ (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

C ليست فضاءً شعاعيّاً جزئيّاً لـ $\mathbb{R}^3$ لأنّ العنصر الحيّادي $($
لاينتمي إلى C.

د)

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

D ليست فضاءً شعاعيّاً جزئيّاً لـ $\mathbb{R}^3$.
وبالفعل ، ليكن : $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in D$ و $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$.
يكون لدينا :

$$\lambda X = (1, 1, 1) \notin D$$

هـ)

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 2y \ \text{و} \ z = 0 \}$$

يمكن أن نتحقّق من أنّ E فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين 4. II :

نعتبر المجموعة A المشكّلة من التّوابع من $\mathbb{Z}$ في $\mathbb{R}$.
من أجل كلّ f من A وكلّ عدد طبيعي n ، نضع :

$$U_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} | f(p) |$$

ونشير بـ E إلى المجموعة الجزئيّة من A والمشكّلة من التوابع f من $\mathbb{Z}$ في $\mathbb{R}$ بحيث تكون المتتالية $(U_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ محـ

أ) تحقّق من أنّ E $\mathbb{R}$- فضاء شعاعي من أجل العمليّتين التّاليتين :

$$(f, g) \longrightarrow f + g$$

و

$$(\lambda, f) \longrightarrow \lambda f$$

ب) أثبت أنّه من أجل كلّ $f \in E$ ، تكون المتتالية $(U_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

ج) لتكن B المجموعة الجزئيّة من E والمشكّلة من التّوابع f لحيث:

$$\forall p < 0 \qquad f(p) = 0$$

أثبت أنّ B فضاء شعاعي جزئي لـ E.

P) لنشر إلى أنّ + قانون تركيب داخلي.

لنثبت أنّ E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

الطّريقة الأولى:

بما أنّ $E \subset A$ و A فضاء شعاعي ($A = \mathcal{F}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ ، إرجع إلى التّمرين 2. II) ، يكفي أن نثبت بأنّ E فضاء شعاعي جزئي لـ A . ومن بعد ذلك، وما دام القانونان المعرّفان على E مستنتجين من القانونين المعرّفين على A ، فإنّ E تكون فضاء شعاعيًا على $\mathbb{R}$.

E فضاء شعاعي جزئي لـ A:

E مجموعة جزئيّة من A. وعلاوة على ذلك، إذا كان 0_E هو العنصر الحيادي لـ A ، عندئذ يكون لدينا:

$$U_n(0_A) = \sum_{p=-n}^{n} 0_A(p) = 0$$

وتكون المتتالية، $(U_n(0_A))$، منعدمة.

وبالتّالي فهي محدودة. ويكون 0_A منتميًا إلى E . إذن: $E \neq \phi$

ليكن، الآن، f و g عنصرين كيفيّين من E، و λ_1 و λ_2 عددين حقيقيّين. لدينا:

$$U_n(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \sum_{p=-n}^{n} |(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(p)|$$

$$\leq |\lambda_1| \sum_{p=-n}^{n} |f(p)| + |\lambda_2| \sum_{p=-n}^{n} |g(p)|$$

ولكن f و $g \in E$ و المتتاليتان $(U_n(f))$ و $(U_n(g))$

إذن يوجد عددان $M_1 \in \mathbb{R}$ و $M_2 \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\sum_{p=-n}^{n} |f(p)| \leq M_1 \quad \text{و} \quad \sum_{p=-n}^{n} |g(p)| \leq M_2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

إذن :

$$U_n(\lambda_1 f + \lambda_2 g) \leq |\lambda_1| M_1 + |\lambda_2| M_2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وتكون المتتالية $(U_n(\lambda_1 f + \lambda_2 g))$ محدودة ، ومنه يكون المجموع $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ منتميًا إلى E.

و تكون المجموعة E بذلك فضاء شعاعيًا جزئيًا من A.

<u>الطريقة الثانية :</u>

نتحقق مباشرة من جميع مسلّمات فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ (أنظر التمرين $(P) . \text{II} . 2$).

ب) من أجل كلّ تابع f من E ، تكون المتتاليّة $(U_n(f))$ محققة لـ

$$U_{n+1}(f) = \sum_{p=-n-1}^{n+1} |f(p)| \geqslant \sum_{p=-n}^{n} |f(p)| = U_n(f) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أنّ المتتاليّة $(U_n(f))$ متزايدة . ومن جهة أخرى ، المتتالية $(U_n(f))$ محدودة من الأعلى ، وبالتّالي فهي متقاربة.

ج) B مجموعة جزئية غير خاليّة لـ E (لأنّ $0_E \in B$) . ونتأكّد من بعد ذلك من خصائص فضاء شعاعيّ جزئيّ.

<u>تمرين II . 5 :</u>

من أجل أيّة قيمة لـ k ، يكون الشّعاع $X = (1, -2, k)$ من $\mathbb{R}^3$

عبارة خطيّة للشّعاعين : $a = (1,1,1)$ و $b = (1,2,3)$ ؟

يكون الشّعاع X عبارة خطيّة للشّعاعين a و b، إذا وجد سلّميان x و y بحيث :

$$X = xa + yb$$

لدينا إذن :

$$(1,-2,k) = x(1,1,1) + y(1,2,3)$$
$$= (x+y,\ x+2y,\ x+3y)$$

و نحصل على الجملة التّاليّة :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = -2 \\ x + 3y = k \end{cases}$$

ونجد : $k = -5$

تمرين 6. II :

أثبت أنّ الأشعّة : $a = (1,1,1)$ ، $b = (1,2,3)$ و $c = (2,-1,1)$ تولّد $\mathbb{R}^3$.

يتعيّن علينا أن نثبت بأنّ كلّ شعاع (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ يكتب على شكل عبارة خطيّة لِ a و b و c ، أي أنّه توجد سلّميات حقيقية α_1 و α_2 و α_3 بحيث :

$$(x,y,z) = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$$

بكتابة العبارات الموافقة للأشعّة a و b و c و بجمع الأشعّة الثّلاثة ، نحصل على :

$(x,y,z) = (\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3\ ,\ \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3\ ,\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)$

ومنه تأتي الجملة:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = x \\ \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3 = y \\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 = z \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = x \\ -\alpha_2+3\alpha_3 = x-y \\ -2\alpha_2+\alpha_3 = x-z \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = x \\ -\alpha_2+3\alpha_3 = x-y \\ -5\alpha_3 = -x+2y-z. \end{cases}$$

نجد:

$$\alpha_2 = \frac{1}{5}(-2x-y+3z)\ ،\quad \alpha_3 = \frac{1}{5}(x-2y+z)$$

$$\alpha_1 = x+y-z.$$

ملاحظة:

مادام بعد $\mathbb{R}^3$ مساويا 3 ، فإنّ الأشعة a و b و c تشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين II.7 :

أثبت أنّ التوابع f و g و h المعرّفة بـ:

$f = Id_{\mathbb{R}}\ ,\ g(x) = \sin x\ ,\ h(x) = \cos x$

مستقلّة خطيا في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

لتكن السلّميات α_1 و α_2 و α_3 بحيث:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 g + \alpha_3 h = 0$$

حيث 0 هو العنصر الحيادي (التابع المعدوم) لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

ومن المساواة السّابقة يأتي:

$$\alpha_1 f(x) + \alpha_2\, g(x) + \alpha_3\, h(x) = 0(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

أي أنّ:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

وبالخصوص، من أجل: $x=0$، $\frac{\pi}{2}$، π، يكون لدينا على التّرتيب:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot \pi + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

ومنه: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

وهكذا:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 g + \alpha_3 h = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

إذن، تكون التّوابع المعطاة مستقلّة خطيّاً في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

تمرين II.8:

لتكن: $a = (0,1,-1)$ و $b = (-1,0,1)$ و $c = (1,-1,0)$

أشعّة من $\mathbb{R}^3$.

أ) أثبت أنّ هذه الأشعّة مستقلّة خطيّاً مثنى مثنى.

ب) هل الجماعة (a,b,c) مستقلّة؟ ما هو بعد الفضاء الشّعاعي الجزئي الّذي تولّده هذه الجماعة؟

أ) لنبرهن أنّ a و b مستقلّان خطيّاً. لنفترض أنّ:

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$$

حيث α_1 و α_2 سلّميان حقيقيّان. عندئذ، يكون لدينا:

$$\alpha_1 (0,1,-1) + \alpha_2 (-1,0,1) = (0,0,0)$$

و منه:

$$\begin{cases} -\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

إذن: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

و هكذا:

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

و عليه، فإنّ الشّعاعين a و b مستقلان خطيا.

و نبيّن بطريقة مماثلة بأنّ الأشعة a و b من جهة و a و c ...

أخرى، مستقلّة خطيّا.

ب) لنفترض أنّ:

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0$$

حيث α_1 و α_2 و α_3 سلّميات حقيقيّة. عندئذ يكون لدينا:

$$\alpha_1(0,1,-1) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(1,-1,0) = (0,0,0)$$

نحصل على الجملة التّاليّة:

و منه:

$$\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

و يتّضح من ذلك أنّ للجملة مالانهاية من الحلول $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$، و توجد، إذن، سلّميات α_1 و α_2 و α_3، غير منعدمة كلّها معا، بحيث:

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0.$$

إذن، فالأشعّة a و b و c مرتبطة خطيّا، و عليه، فإنّ الجماعة (a,b,c) غير مستقلّة.

ملاحظة:

كان بإمكاننا أن نلاحظ، على الفور، بأنّه توجد سلّميات غير منعدمة كلّها معاً، $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ بحيث:

$$a + b + c = 0$$

ليكن S الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة (a,b,c).

لدينا، عندئذ:

$$S = \{ v \in \mathbb{R}^3 / \ v = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c \ ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ v \in \mathbb{R}^3 / \ v = \alpha_1 (-b-c) + \alpha_2 b + \alpha_3 c ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ v \in \mathbb{R}^3 / \ v = (-\alpha_1 + \alpha_2) b + (-\alpha_1 + \alpha_3) c \ ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

إذن، يكون الشّعاعان b و c مولّدين لـ S، وبما أنّ هذين الشّعاعين مستقلّان خطيّاً؛ فهما يشكّلان، إذن، أساساً لـ S. يساوي بعدُ S 2.

ملاحظة:

الشّعاعان a و b يعطيان أساساً آخر لـ S، ويعطي الشّعاعان a و c أساساً ثالثاً لـ S.

تمرين 9. II:

ليكن E الفضاء الشّعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ والمولّد بواسطة الأشعّة:

$$a = (2,1,3,1) \ ، \ b = (1,2,0,1) \ ، \ c = (-1,1,-3,0)$$

عيّن أساساً لـ E وكذا بُعد E.

لدينا:

$$E = \{ v \in E^4 / \ v = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c \ ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

إذا كانت الأشعة a و b و c مستقلة خطيا ، وما دامت الجماعة (a,b,c) مولدة لـ E ، فهذه الأشعة تشكل أساسا لـ E ويكون بعد E مساويا 3.

لنلاحظ أن :

$$b = a + c$$

إن الأشعة a و b و c مرتبطة خطيا ؛ ولا يمكنها إذن أن تشكل أساسا لـ E ، وعليه فإن : $\dim E < 3$. وبالتالي :

$$E = \{ v \in E^4 / v = \alpha_1 a + \alpha_2 (a+c) + \alpha_3 c \,;\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ v \in E^4 / v = (\alpha_1 + \alpha_2) a + (\alpha_2 + \alpha_3) c \,;\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

ويتضح من هذا أن a و c يولدان E.

ولنبحث، من جهة أخرى، α_1 و α_2 بحيث :

$$\alpha_1 a + \alpha_2 c = 0$$

أي أن :

$$\alpha_1 (2,1,3,1) + \alpha_2 (-1,1,-3,0) = (0,0,0,0)$$

نحصل على الجملة :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

ومنه :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

إذن ، الشعاعان a و c مستقلان خطيا . فهما يشكلان ، إذن ، أساسا لـ E ؛ وعليه فإن : $\dim E = 2$

تمرين 10. II :

ليكن E فضاء شعاعيّا على K.

ليكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$، n شعاعا من E، غير منعدمة كلّها معا.

لتكن $y_1, \ldots, y_{n+1}$، $(n+1)$ عبارة خطيّة للأشعّة $x_1, \ldots, x_n$.

أثبت أنّ $y_1, \ldots, y_{n+1}$ مستقلّة خطيّا.

لنلاحظ، في البداية، أنّه إذا كانت الأشعّة $x_1, \ldots, x_n$ منعدمة تكون، عندئذ، $y_1, \ldots, y_{n+1}$ منعدمة، وبالتّالي فهي مرتبطة خطيّا.

إذا لم تكن الأشعّة $x_1, \ldots, x_n$ منعدمة كلّها معا، نستعين بالإستدلال بالتّناقض. لنفترض أنّ $y_1, \ldots, y_{n+1}$ مستقلّة خطيا. وليكن S الفضاء الشّعاعي الجزئي من E والمولّد بواسطة الأشعّة $x_1, \ldots, x_n$. لدينا عندئذ:

$$S = \left\{ v \in E \mid v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ ; \alpha_i \in K \right\}$$

الحالة الأولى:

$x_1, \ldots, x_n$ مستقلّة خطيّا. عندئذ، تشكّل هذه الأشعّة أساسا لـ S ما دمت هذه الأشعة مولّدة لها، إذن:

$$\dim S = n$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$y_j \in S \qquad j = 1, \ldots, n+1$$

لأنّ $y_1, \ldots, y_{n+1}$ عبارات خطية لـ $x_1, \ldots, x_n$ وبما أنّنا افترضنا $y_1, \ldots, y_{n+1}$ مستقلّة خطيّا، ينتج أنّ $y_1, \ldots, y_n$ مستقلّة خطيّا وبما أنّه لدينا، زيادة على ما سبق، $\dim S = n$، فإنّ $y_1, \ldots, y_n$ تشكّل أساسا لـ S.

إذن، توجد عناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ من K بحيث:

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$$

وهكذا، يكون y_{n+1} عبارة خطيّة لـ $y_1, \dots, y_n$. وهذا مناقض لافتراضنا $y_1, \dots, y_{n+1}$ مستقلّة خطيّا. إذن $y_1, \dots, y_{n+1}$ مرتبطة خطيّا.

الحالة الثّانية: $x_1, \dots, x_n$ مرتبطة خطيّا.

قم بافتراض $x_1, \dots, x_p$ ، $n > p \geq 1$ ، مستقلّة خطيّا وانتهج من بعد ذلك برهانا مماثلا للّذي سبق.

تمرين II . 11 :

ليكن E فضاء شعاعيّا على $\mathbb{R}$ ؛ و a و b و c ثلاثة أشعّة لـ E. لنعتبر:

$u = b+c$ ، $v = a+c$ ، $w = a+b$

أ) أثبت أنّ الأشعّة a, b, c و الأشعّة u, v, w تولّد فضاء شعاعيّا واحدا.

ب) أثبت أنّه تكون الأشعّة u, v, w مستقلّة خطيّا إذا وفقط إذا كانت الأشعّة a, b, c كذلك.

ليكن S الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة a, b, c و T الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة u, v, w. يكون لدينا عندئذ:

$$S = \{ y \in E \;/\; y = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c \;;\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$

و

$$T = \{ x \in E \;/\; x = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w \;;\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

ليكن x عنصرا كيفيّا من T. نكتب عندئذ:

$$x = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$$
$$= \lambda_1 (b+c) + \lambda_2 (a+c) + \lambda_3 (a+b)$$
$$= (\lambda_2 + \lambda_3) a + (\lambda_1 + \lambda_3) b + (\lambda_1 + \lambda_2) c$$

ونرى، هكذا، بأنّ x يكتب على شكل عبارة خطيّة للأشعّة a، b و c.

إذن، x عنصر من S. ومنه $\underline{T \subset S}$ (1)

ليكن، الآن، y عنصراً كيفياً من S.

$$y = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$$

وبما أنّ:

$$u = b + c \quad , \quad v = a + c \quad , \quad w = a + b$$

فإنّنا نحصل، حينئذٍ، على:

$$a = \frac{1}{2}(-u + v + w)$$
$$b = \frac{1}{2}(u - v + w)$$
$$c = \frac{1}{2}(u + v - w)$$

ومنه:

$$y = \frac{\alpha_1}{2}(-u + v + w) + \frac{\alpha_2}{2}(u - v + w) + \frac{\alpha_3}{2}(u + v - w)$$

$$= \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) u + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) v + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) w$$

وعليه، فإنّ y عبارة خطيّة للأشعّة u، v و w. إذن y عنصر من T؛

وبالتالي: $\underline{S \subset T}$ (2)

ومن الإحتوائيين (1) و (2) ينتج المساواة: $S = T$

ب) لنفترض أنّ الأشعّة a، b و c مستقلّة خطيّاً. ولتكن λ_1، λ_2 و λ_3 أعداداً حقيقيّة بحيث:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

عندئذ :

$$\lambda_1(b+c) + \lambda_2(a+c) + \lambda_3(a+b) = 0$$

إذن :

$$(\lambda_2+\lambda_3)a + (\lambda_1+\lambda_3)b + (\lambda_1+\lambda_2)c = 0$$

و بما أنّ الأشعّة a، b و c مستقلّة خطيًا ، يكون لدينا :

$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

و هكذا، تكون الأشعّة u، v و w مستقلّة خطيًا.

قم ببرهان مماثل للإثبات أنّه إذا كانت الأشعّة u، v و w مستقلّة خطيًا ، تكون عندئذ الأشعّة a، b و c مستقلّة خطيا أيضا .

تمرين 12. II :

أثبت أنّ الأشعّة :

$a = (1,1,2,1)$ ؛ $b = (1,-1,0,1)$

$c = (0,0,-1,1)$ ؛ $d = (1,2,2,0)$

تشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^4$. أوجد أحداثيّات الشّعاع $u = (1,1,1,1)$ بالنّسبة لهذا الأساس.

بما أنّ $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ ، فإنّه يكفي البرهان بأنّ هذه الأشعّة تشكّل جماعة مستقلّة أو جماعة مولّدة حتى لكي تشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^4$. لنثبت أنّ a، b و c تشكّل جماعة مولّدة (يمكننا ذلك من استنتاج أحداثيّات الشّعاع u). ليكن ، إذن ، $v = (x, y, z, w)$

عنصرا كيفيا من $\mathbb{R}^4$. علينا أن نجد سلّميات α_1 ، α_2 ، α_3 و α_4 بحيث:

$$X = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d$$

أي :

$$(x,y,z,w) = \alpha_1(1,1,2,1) + \alpha_2(1,-1,0,1) + \alpha_3(0,0,-1,1) + \alpha_4(1,2,2,0).$$

نحصل على الجملة:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 + \alpha_4 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 0.\alpha_3 + 2\alpha_4 = y \\ 2\alpha_1 + 0.\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = z \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 0.\alpha_4 = w \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 + \alpha_4 = x \\ 2\alpha_2 - \alpha_4 = x - y \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = z - 2x \\ \alpha_3 - \alpha_4 = w - x \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 + \alpha_4 = x \\ 2\alpha_2 - \alpha_4 = x - y \\ -\alpha_3 - \alpha_4 = -x - y + z \\ \alpha_3 - \alpha_4 = w - x \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 + \alpha_4 = x \\ 2\alpha_2 - \alpha_4 = x - y \\ -\alpha_3 - \alpha_4 = -x - y + z \\ -2\alpha_4 = -2x - y + z + w \end{cases}$$

ومنه:

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(2x + y - z - w), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(y - z + w)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}(4x - y - z - w), \quad \alpha_1 = \frac{1}{4}(-4x - y + 3z + 3w)$$

تساوي أحداثيات الشّعاع $u = (1, 1, 1, 1)$ وفق الأساس (a, b, c, d) مايلي:

بمعنى أنّ:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d.$$

تمرين 13. II:

ليكن a وb عددين حقيقيّين مثبّتين.

وليكن E الفضاء الشعاعي على $\mathbb{R}$ المشكّل من متتاليّات الأعداد الحقيقية، وF جزءا من E مشكّلا من المتتاليّات التي تحقق العلاقة

$$u_{n+1} = a u_n + b u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

أ) أثبت أنّ F فضاء شعاعي جزئي لِـ E.

ب) لتكن $U = (u_n)_{n \geq 0}$ و $V = (v_n)_{n \geq 0}$ متتاليتين من F لحيث $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $v_0 = 0$, $v_1 = 1$

أثبت أنّ كلّ متتالية $W = (W_n)_{n \geq 0}$ من F تكتب على الشّكل: $W = W_0 U + W_1 V$

ج) أثبت أنّ U و V مستقلّتان خطيّا. أستنتج أنّ (U, V) أساس لِـ F.

أ) لدينا:

$F \subset E$ و $F \neq \phi$

لأنّ: $O_E \in F$ (العنصر الحيادي O_E لِـ E، هو المتتالية المستقرة التي تكون حدودها منعدمة جميعها).

ليكن، الآن، $U = (u_n)_n$ و $V = (v_n)_n$ عنصرين كيفيين من F. إذا رمزنا بـ: W لمجموع هاتين المتتاليتين، تمكننا الكتابة

$$W = (W_n)_n = (U_n)_n + (V_n)_n = (U_n + V_n)_n$$

و

$$W_n = U_n + V_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

وبما أنّ $U, V \in F$ ، نكتب عندئذ :

$$U_{n+1} = aU_n + bU_{n-1} \quad \text{و} \quad V_{n+1} = aV_n + bV_{n-1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

إذن :

$$W_{n+1} = U_{n+1} + V_{n+1} = a(U_n + V_n) + b(U_{n-1} + V_{n-1})$$
$$= aW_n + bW_{n-1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

وهكذا تكون المتالية $U+V$ منتمية إلى F.

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و $U \in F$. نعتبر المتتالية :

$$W = (W_n)_n = \lambda U = \lambda (U_n)_n = (\lambda U_n)_n$$

أي أنّ :

$$W_n = \lambda U_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

لدينا :

$$W_{n+1} = \lambda U_{n+1} = \lambda (aU_n + bU_{n-1})$$
$$= a(\lambda U_n) + b(\lambda U_{n-1}) = aW_n + bW_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

إذن $\lambda U \in F$.

وهكذا يكون F فضاء شعاعيا جزئيا لـ E.

ب) ليكن $W = (W_n)_n \in F$. يرجع أثبات أنّ $W = W_0 U + W_1 V$ إلى إثبات ،

$$W_n = W_0 U_n + W_1 V_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

لنستدلّ بالتّدرّج على n. إذا كان : $n = 0$ ، فإنّ :

$$W_0 = W_0 \cdot 1 + W_1 \cdot 0 = W_0 U_0 + W_1 V_0$$

وتكون المساواة صحيحة. لنفترض أنّ المساواة صحيحة إلى غاية

الرتبة n و لنثبت أنها تبقى كذلك من أجل الرتبة $(n+1)$. لدينا:

$$W_{n+1} = a W_n + b W_{n-1}$$

لأن $(W_n)_n \in F$. و حسب فرضية التدرج ، يكون لدينا:

$W_n = W_0 U_n + W_1 V_n$ و $W_{n-1} = W_0 U_{n-1} + W_1 V_{n-1}$

إذن:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= a\left(W_0 U_n + W_1 V_n\right) + b\left(W_0 U_{n-1} + W_1 V_{n-1}\right) \\ &= W_0\left(a U_n + b U_{n-1}\right) + W_1\left(a V_n + b V_{n-1}\right) \\ &= W_0 U_{n+1} + W_1 V_{n+1} \end{aligned}$$

و هكذا ، فإن المساواة صحيحة مهما يكن n في $\mathbb{N}$.

جـ) ليكن λ_1 و λ_2 سلميين حقيقيين بحيث:

$$\lambda_1 U + \lambda_2 V = 0$$

أي أن:

$$\lambda_1 U_n + \lambda_2 V_n = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

وبالخصوص ، نحصل ، من أجل $n=0$ و $n=1$ ، على الجملة:

$$\begin{cases} \lambda_1 U_0 + \lambda_2 V_0 = 0 \\ \lambda_1 U_1 + \lambda_2 V_1 = 0 \end{cases}$$

وبتعويض U_0 ، U_1 ، V_0 و V_1 بقيمها ، نجد:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

وهكذا ، يكون الشعاعان U و V مستقلين خطيا.

من السؤال (ب) نستنتج أن الجماعة (U,V) مولدة لـ F .

وبما أن هذه الجماعة مستقلة أيضا ، فهي تشكل ، إذن ، F أساسا

تمرين II 14 :

ليكن k عددا صحيحا موجبا ، و a_1 ، ... ، a_k

معطاة. ليكن E الفضاء الشعاعي على $\mathbb{R}$ المكوّن من المتتاليات لأعداد حقيقيّة و F الجزء من E، المكوّن من المتتاليات $(U_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق:

$$U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \dots + a_k U_{n-k}, \forall n \geq k$$

أ) أثبت أنّ F فضاء شعاعي جزئي من E.

ب) أوجد أساسا لـ F.

أ) قم ببرهان مماثل لذلك الوارد في التمرين II.13.

ملاحظة: إذا كان: $k=2$، نجد مجموعة المتتاليات المعرّفة في التمرين II.13.

ب) تكون متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ من F معيّنة جيّدا، إذا أُعطيت العناصر k الأولى U_0، U_1، ...، U_{k-1} لهذه المتتالية. (وباستخدام العلاقة التي ينبغي أن تحققها المتتاليّة $(U_n)_n$، من بعد ذلك، نحصل على الحدود الأخرى للمتتاليّة). نعرّف عندئذ k متتالية:

$$\{U^{(0)}\}, \{U^{(1)}\}, \dots, \{U^{(k-1)}\}$$

وبالكيفيّة التّالية:

$U_n^{(p)} = 0$، إذا $n<k$ و $n \neq p$ ، $p = 0, 1, \dots, k-1$

$U_p^{(p)} = 1$ ، $p = 0, 1, \dots, k-1$

ملاحظة: إذا كان $k = 2$، فإننا نجد المتتاليتين U و V المعرّفتين في التمرين II.13.

وبكيفيّة مماثلة لتلك التي سلكناها في التمرين II.13، نثبت أنّ هذه المتتاليّات تشكّل جزءا مستقلاّ لـ F، إذن فهي أساس لـ F. يساوي بعد F k.

تمرين $II.15$:

لتكن E مجموعة التوابع f من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ والمعرّفة بـ:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

حيث : $n \in \mathbb{N}^*$ و $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ، $i = 1, \dots, n$ ؛ $j = 1, \dots, n$.

أ) أثبت أنّ E فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

ب) ليكن m $(0 \leq m \leq n)$ عددا صحيحا و E_m مجموعة التوابع المعرّفة بـ:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

أثبت، باستخدام التدرّج على m ، أنّه إذا كان عنصر f من E_m مساويا التابع المعدوم ، تكون المعاملات a_i و b_i ، عندئذ، منعدمة.

جـ) استنتج بعد E .

أ) لدينا: $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $E \neq \emptyset$

لأنّ التابع المعدوم (العنصر الحيادي لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) ينتمي إلى E (في هذه الحالة، تكون المعاملات a_i و b_i منعدمة).

ليكن ، من جهة أخرى، f و g عنصرين كيفيّين من E، و λ_1 و λ_2 سلّميّين حقيقيّين. لدينا حينئذ:

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = (\lambda_1 a_0 + \lambda_2 a'_0) + \sum_{k=1}^{n} [(\lambda_1 a_k + \lambda_2 a'_k) \cos kx + (\lambda_1 b_k + \lambda_2 b'_k) \sin kx]$$

حيث a_k ، b_k هي معاملات f و a'_k ، b'_k هي معاملات g . إذن: $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in E$. وهكذا، يكون E فضاء شعاعيّا جزئيّا لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ب) إذا كان: $m=0$ ، يكون لدينا من أجل كل عنصر f من E_0 :

$$f(x) = a_0 \quad , a_0 \in \mathbb{R} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

وإذا كان f مساويا التّابع المنعدم ، عندئذ يكون : $a_0 = 0$ ؛ وعليه تكون الفضيّة المعطاة صحيحة من أجل : $m = 0$. لنفترض الآن ، أنّ الفضيّة صحيحة حتّى المرتبة $(m-1)$ و لنبرهن أنّها صحيحة من أجل المرتبة m . ليكن f عنصرا من E_m ، مساويًا التّابع المنعدم. لدينا:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

لنعتبر:

$$(f'' + m^2 f)(x)$$

لدينا:

$$f''(x) = -\sum_{k=1}^{m} k^2 (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

إذن: $f'' \in E_m$. و بما أنّ E_m فضاء شعاعي جزئي ، يكون لدينا عندئذ

$$(f'' + m^2 f) \in E_m$$

وعلاوة على ذلك ، يكون $(f'' + m^2 f)$ منعدما مادام f منعدما. و لكن :

$$(f'' + m^2 f)(x) = a_0 m^2 + \sum_{k=1}^{m} (m^2 - k^2)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$= a_0 m^2 + \sum_{k=1}^{m-1} (m^2 - k^2)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

إذن :

$$f'' + m^2 f \in E_{m-1}$$

وحسب فرضيّة التّدرّج ، إذا كان عنصر من E_{m-1} مساويا التّابع المعدوم ، عندئذ تكون المعاملات كلّها منعدمة . إذن:

$$f'' + m^2 f = 0 \Rightarrow a_i = b_j = 0 \qquad \begin{matrix} i = 0, \dots, m-1 \\ j = 1, \dots, m-1 \end{matrix}$$

وهكذا:

$$f(x) = a_m \cos mx + b_m \sin mx \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

لأنّ المعاملات الأخرى منعدمة. وبالخصوص، إذا كان: $x=0$، $x=\frac{\pi}{2m}$، نحصل على:

$$a_m = 0 \quad \text{و} \quad b_m = 0$$

إذن، إذا كان $E_m \ni f$ و $f = 0_f$، عندئذ يكون:

$$a_i = b_j = 0 \, , \; i = 0, \dots, m \; ; \; j = 1, \dots, m$$

<u>ملاحظة</u>: لقد أثبتنا، هكذا، أنّ التّوابع المعرّفة بـ:

$x \mapsto 1$ ، $x \mapsto \cos kx$ ، $x \mapsto \sin kx$ ، $k = 1, \dots, m$

مستقلّة خطيا في E_m.

ج) إنّ أساسا لـ E يكون معطى بواسطة التّوابع:

$x \mapsto 1$ ، $x \mapsto \cos kx$ ، $x \mapsto \sin kx$ ، $k = 1, \dots, n$

إذ أنّها مستقلّة خطيا حسب (ب)، وتشكّل جماعة مولّدة لـ E حسب تعريف E. إذن:

$$\dim E = 2n+1$$

<u>تمرين II.16</u>:

ليكن E و F فضائين شعاعيين، و f تطبيقا من E في F حيث:

$\forall x, y \in E ; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ، $f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$

نرمز بـ: H لمجموعة عناصر E الّتي تساوي صورتها وفق f، الصّفر في F

أ) أثبت أنّ H فضاء شعاعي جزئي لـ E. (نسمّي H <u>نواة التّطبيق f</u>)

ب) ليكن K فضاء شعاعيّا جزئيا آخر لـ E، بعده p. أثبت أنّه إذا كان بعد $(H \cap K) = q$، فإنّ: $\dim f(K) = p - q$.

أ) لتكن المجموعة:
$$H = \{ x \in E \ / \ f(x) = 0_F \}$$
لدينا:
$$H \neq \phi \quad و \quad H \subset E$$
وبالفعل،
$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = f(0_E) + 0_F =$$
$$= 0_F + f(0_E)$$
إذن: $f(0_E) = 0_F$

إذْ، في الزّمرة، كلّ عنصر نظامي (قابل للاختزال). ومنه:
$$0_E \in H.$$
ليكن، الآن، λ_1 و λ_2 سلّميين حقيقيّين، و x و y من H. لدينا:
$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y) = \lambda_1 0_F + \lambda_2 0_F = 0_F$$
إذن:
$$\lambda_1 x + \lambda_2 y \in H$$
وهكذا، يكون H فضاء شعاعيّا جزئيّا من E.

ب) لنثبت أنّه إذا كان K فضاء شعاعيّا جزئيّا من E، تكون المجموعة $f(K)$، عندئذ، فضاء شعاعيّا جزئيّا من F. لدينا:
$$f(K) \subset F$$
لأنّ $K \subset E$ و f تطبيق من E في F. وعلاوة على ذلك، فإنّ: $0_E \in K$ مادام K فضاء شعاعيّا جزئيّا من E. إذن: $f(0_E) \in f(K)$

أي أنّ: $0_F \in f(K) \neq \phi$.

ومن جهة أخرى، ليكن λ_1 و λ_2 سلّميين حقيقيّين و y_1 و y_2 عنصرين من $f(K)$. فيوجد، عندئذ، عنصران x_1 و x_2 في K بحيث:
$$f(x_1) = y_1 \quad و \quad f(x_2) = y_2$$

وتبعاً لذلك، يأتي:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

وبما أنّ K فضاء شعاعي جزئي لِـ E، يكون لدينا:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K.$$

ومنه:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(K).$$

ملاحظة:

لكي نثبت أنّ $f(K)$ فضاء شعاعي جزئي لِـ F، استعملنا، أساساً، خاصية التّطبيق f التّالية:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \ ; \ \forall x_1, x_2 \in E, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

إذا كان التّطبيق f لا يحقّق هذه الخاصيّة، لا تكون النّتيجة السّابقة، دوماً، صحيحة.

لنثبت أنّه إذا كان: $\dim K = p$ و $\dim(H \cap K) = q$ عندئذ يكون: $\dim f(K) = p - q$.

لنذكّر بأنّ $H \cap K$ فضاء شعاعي جزئي لِـ E.

الطّريقة الأولى: تتمثّل هذه الطّريقة في البحث عن أساس لِـ $f(K)$.

نشير، أوّلاً، إلى أنّ $q \leq p$، لأنّ: $H \cap K \subset K$.

وبما أنّ $\dim(H \cap K) = q$، فإنّ لكلّ أساس لِـ $H \cap K$ q شعاعاً.

ليكن إذن: $Y_1, \dots, Y_q$ أساساً لِـ $H \cap K$. ولنعتبر، الآن، K كفضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ لأنّ K فضاء شعاعي جزئي لِـ E) و $H \cap K$ كفضاء شعاعي جزئي لِـ K (هذا ممكن $(H \cap K \subset K)$.

عندئذ، تكون الأشعّة $y_1, \dots, y_q$ مستقلّة خطيا في K، و طبقا لمبرهنة الأساس غير التّام، يمكن إتمام الجملة $(y_1, \dots, y_q)$ والحصول على أساس لِ K. لتكن، إذن،

$$y_1, \dots, y_q, y_{q+1}, \dots, y_p$$

أشعّة أساس لِ K. $(\dim K = p \geq q)$

لنعتبر، الآن،

$$f(y_1), \dots, f(y_q), f(y_{q+1}), \dots, f(y_p)$$

تنتمي هذه الأشعّة كلّها إلى: $f(K)$. لدينا:

$$f(y_1) = \dots = f(y_q) = 0$$

(لأنّ: $y_i \in H$ ، $i = 1, \dots, q$) وَ

$$f(y_{q+1}) \neq 0, \dots, f(y_p) \neq 0$$

لأنّنا لو افترضنا، مثلا، $f(y_{q+1}) = 0$، يكون y_{q+1} عنصرا من H وبما أنّ y_{q+1} عنصر من K، فإنّ y_{q+1} ينتمي، في هذه الحالة، إلى $H \cap K$ وبالتّالي تكون الأشعّة $y_1, \dots, y_{q+1}$ مستقلّة خطيا في $H \cap K$، لكن هذا غير ممكن لأنّ: $\dim(H \cap K) = q$.

لنثبت أنّ الأشعّة:

$$f(y_{q+1}), \dots, f(y_q)$$

مستقلّة خطيّا. لنستدلّ على ذلك بالتّناقض؛ ولنفترض، عندئذ، أنّه توجد سلميات λ_i، $i = 1, \dots, p-q$، غير منعدمة كلّها معا، بحيث:

$$\lambda_1 f(y_{q+1}) + \dots + \lambda_{p-q} f(y_p) = 0$$

لدينا:

$$\lambda_1 f(y_{q+1}) + \dots + \lambda_{p-q} f(y_p) = f(\lambda_1 y_{q+1} + \dots + \lambda_{p-q} y_p) = 0$$

إذن:

$$y = \lambda_1 y_{q+1} + \dots + \lambda_{p-q} y_p \in H$$

وبما أنّ : $Y \in K$ ، فإنّ : $Y \in H \cap K$ ، فهو يكتب، إذن، على شكل عبارة خطيّة لأشعة أساس $H \cap K$ ؛ أي أنّه توجد سلّميات وحيدة a_i ، $i = 1, \dots, q$ ، بحيث:

$$Y = a_1 Y_1 + \dots + a_q Y_q$$

لدينا، إذن:

$$a_1 Y_1 + \dots + a_q Y_q - \lambda_1 Y_{q+1} - \dots - \lambda_{p-q} Y_p = 0$$

والمعاملات λ_i ليست كلّها منعدمة ؛ وعليه، فإنّ :

$$Y_1, \dots, Y_q, Y_{q+1}, \dots, Y_p$$

مرتبطة خطيّاً وهذا تناقض مع الفرض.
لنثبت أنّ :

$$f(Y_{q+1}), \dots, f(Y_p)$$

تشكّل جماعة مولّدة لـ $f(K)$. ليكن Y عنصراً كيفيّاً من $f(K)$.
يوجد عندئذ عنصر x من K، بحيث :

$$f(x) = Y$$

وعلاوة على ذلك، يكتب x على شكل عبارة خطية لعناصر أساس لـ K ؛ إذن، توجد سلّميات حقيقيّة b_i ، $i = 1, \dots, p$ ، بحيث:

$$x = b_1 Y_1 + \dots b_q Y_q + b_{q+1} Y_{q+1} + \dots + b_p Y_p$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(b_1 Y_1 + \dots + b_p Y_p) \\ &= b_1 f(Y_1) + \dots + b_q f(Y_q) + b_{q+1} f(Y_{q+1}) + \dots + b_p f(Y_p) \\ &= b_{q+1} f(Y_{q+1}) + \dots + b_p f(Y_p) \end{aligned}$$

لأنّ: $Y_i \in H$ ، $i = 1, \dots, q$.

وهكذا، فإنّ كلّ عنصر Y من $f(K)$ ، يكتب كعبارة خطيّة لـ: $f(Y_{q+1}), \dots, f(Y_p)$ ؛ إذن، هذه الأشعة تشكّل جماعة مولّدة لـ $f(K)$

وبالتّالي ،تشكّل الأشعّة :

$$f(y_{q+1}), \dots, f(y_p)$$

أساسا لِ $f(K)$ ، إذن : :

$$\dim f(K) = p-q$$

<u>الطّريقة الثّانية</u> :

لتكن $x_1, \dots, x_p$ أشعة أساس لـ K. $(\dim K = p)$ و $y_1, \dots, y_q$ أشعّة أساس لِ $H \cap K$ $(\dim H \cap K = q)$.

لنعتبر K كفضاء شعاعي و $H \cap K$ كفضاء شعاعي جزئي لِ K.

ليكن L مكمّل $H \cap K$ في K (إنّه موجود ،إذ أنّ لكلّ فضاء شعاعي جزئي مكملا ، ارجع إلى مبرهنة وجود مكمّل). لدينا:

$$\dim L = p-q$$

ليكن ،إذن :

$$z_1, \dots, z_{p-q}$$

أساسا لِ : L.

<u>ملاحظة</u> : لدينا :

$$\{y_1, \dots, y_q\} \cap \{z_1, \dots, z_{p-q}\} = \phi$$

و

$$\{y_1, \dots, y_q\} \cup \{z_1, \dots, z_{p-q}\}$$

تشكّل أساسا لِ K.

بعد هذا ، بيّن أنّ الأشعّة

$$f(z_1), \dots, f(z_{p-q})$$

تشكّل أساسا لِ $f(K)$. البرهان مماثل للذي سقناه في الطّريقة الأولى. ومنه :

$$\dim f(K) = p-q$$

تمرين II . 17 :

ليكن E فضاء شعاعيّا على K، و F و G فضائين شعاعيين جزئيين لـ E .

أ) أثبت أنّ $F \cup G$ فضاء شعاعي جزئي إذا و فقط إذا كان: G…
أو $G \subset F$.

ب) أثبت أنّ الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة $F \cup G$ هو …

ج) لتكن A متمّمة F . أثبت أنّ A ليست فضاء شعاعيا جزئيا …
أثبت أنّه إذا كان: $x \in F$ و $y \in A$ ، فإنّ: $x+y \in A$. أثب…
إذا كان $F \neq E$ ، عندئذ، يكون الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد ب…
هو E بأكمله.

لنلاحظ أنّه إذا كان:

يكون لدينا: $F \subset G$ أو $G \subset F$

و بما أنّ F و G فضاءان شعاعيان جزئيان لـِ E ، فإنّ $F \cup G = G$ أو $F \cup G = F$ فضاء شعاعي جزئي لـِ E .

و بالعكس، ليكن $F \cup G$ فضاء شعاعيا جزئيا لـِ E . و لنعتبر عنصرا x من F و عنصرا y من G . x و y عنصران من $F \cup G$ ، إذن x+y ينتمي إلى $F \cup G$ (لأنّ $F \cup G$ فضاء شعاعي جزئي لـِ E). و يكون لدينا، تبعا لذلك،

$x+y \in F$ أو $x+y \in G$

و لكن $x \in F$ و $y \in G$ ، إذن $-x \in F$ و $-y \in G$ لأنّ F و G فضاءان شعاعيّان جزئيان لـِ E . إذن:

$$(x+y)-x \in F \quad \text{أو} \quad (x+y)-y \in G$$

أي :

$$y \in F \quad \text{أو} \quad x \in G$$

وهكذا :

$$F \subset G \quad \text{أو} \quad G \subset F$$

ب) ليكن S الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بـ $F \cup G$. لدينا:

$$S = \{ v \in E \ / \ v = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \ , \ x_i \in F \cup G \ \text{و} \ \lambda_i \in K \ \ \forall i \in I \ ، \ I \ \text{منتهية} \}$$

يتعلّق الأمر بإثبات أنّ :

$$S = F + G$$

<u>ملاحظة</u> : نتأكّد، بسهولة، من أنّ $F+G$ فضاء شعاعي جزئي لـ E

i) لنبيّن أنّ :

$$F + G \subset S .$$

ليكن v عنصرا كيفيا من $F+G$. فيوجد عنصر x من F وعنصر y من G بحيث :

$$v = x + y$$

ولكن : $x \in F \subset F \cup G$ و $y \in G \subset F \cup G$. إذن، يكتب العنصر v كعبارة خطيّة لعناصر من $F \cup G$ وعليه v عنصر من S.

ii) لنبيّن أنّ :

$$S \subset F + G$$

مادام S هو الفضاء الشّعاعي المولّد بـ: $F \cup G$ ، وهو أيضا، <u>الفضاء الشّعاعي الجزئي الأصغر الذي يحتوي $F \cup G$</u> . ومن جهة أخرى ، $F+G$ فضاء شعاعي جزئي يحتوي $F \cup G$ (لأنّه لو كان $v \in F \cup G$

لنستنتج: $v \in F$ أو $v \in G$ ومنه: $v = v + 0 \in F+G$ أو $v = 0 + v \in F+G$ ؛ وفي كلتي الحالتين: ($v \in F+G$ أو)

وهكذا وبما أنّ S أصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي $F \cup G$، يكون لدينا

$$S \subset F+G$$

ونختم، حسب i) و ii)، بأنّ: $S = F+G$.

ج) بما أنّ F فضاء شعاعي جزئي لـ E، لدينا: $0_E \in F$، وإذن $0_E \notin A$

ولكن كلّ فضاء شعاعي جزئي يحوي العنصر الحيادي للفضاء الشّعاعي. وعليه، فإنّ A ليس فضاء شعاعيا جزئيا لـ E.

ليكن الآن، $x \in F$ و $y \in A$. لنفترض أنّ: $x+y \notin A$

إذن: $x+y \in F$ وبما أنّه، زيادة على ذلك، $x \in F$، فإنّ: $(-x) \in F$

إذن: $-x + (x+y) \in F$

أي أنّ:

$$y \in F$$

وهذا تناقض مع فرضية: $y \in A$.

ليكن S الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بـ A: علينا أن نثبت أنّه إذا كان $F \neq E$، فإنّ $S = E$.

لدينا $\underline{S \subset E}$ لأنّ S فضاء شعاعي جزئي لـ E. لنثبت أنّ: $\underline{E \subset S}$.

ليكن x عنصرا كيفيّا من E = A∪F؛ x ينتمي إلى A أو إلى F.

$\underline{\text{إذا كان } x \in A}$، فإنّ $x \in S$، إذن: $E \subset S$. إذا كان $\underline{x \text{ ينتمي إلى } F}$، وبما أنّ $E \neq F$، يوجد $\underline{\text{عنصر } y}$ ينتمي إلى E ولا ينتمي إلى F. إذن y ينتمي إلى A. ولكن إذا كان $x \in F$ و $y \in A$، فإنّ: $x+y \in A$، إذن: $x+y \in S$. ولكن $y \in A$، إذن: $y \in S$ و $-y \in S$

إذن: $(x+y)+(-y) \in S$. أي أنّ: $x \in S$

إذن:

$$E \subset S.$$

- - - - - - - - - -

تمرين 18-II-

لتكن E مجموعة التّطبيقات من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$. نشير بـ: E_1 إلى الجزء من E، المشكّل من التّوابع الفرديّة وبـ: E_2 إلى الجزء المشكّل من التّطبيقات الزّوجيّة. ليكن x عددًا حقيقيا معطى. نشير بـ: F_x إلى الجزء من E المؤلف من التّوابع الّتي تنعدم عند x.

أ) أثبت أنّ E_1 و E_2 و F_x فضاءات شعاعيّة جزئيّة لـ: E.

ب) أثبت أنّ: $E = E_1 \oplus E_2$

ج) أثبت أنّه إذا كان a و b عددين حقيقيّين مختلفين، عندئذ يكون: $E = F_a + F_b$، غير أنّ هذا المجموع ليس مباشرا.

د) أوجد مكمّلا لـ F_a.

أ) استخدم تعريف فضاء شعاعي جزئي (أرجع إلى التّمرين II.2)

ب) علينا أن نثبت أنّ:

$$i)\ E = E_1 + E_2$$

$$ii)\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

i) لدينا، دوما، $E_1 + E_2 \subset E$. بقي إثبات: $E \subset E_1 + E_2$.
ليكن f عنصرا إختياريّا من E. نقوم بالبحث عن عنصر f_1 من E_1 وعنصر f_2 من E_2 بحيث:

$$f = f_1 + f_2.$$

أي أنّ:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

ولكن:

$$f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) + f_2(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

لأنّ f_1 فردي و f_2 زوجي.

نحصل على:

$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$, و $f_2(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

من السّهل التّأكّد من أنّ: $f_1 \in E_1$ و $f_2 \in E_2$ وأنّ:

$$f = f_1 + f_2$$

ii) لدينا دائماً:

$$E_1 \cap E_2 \subset \{0_E\}$$

ليكن f عنصرا كيفيّا من $E_1 \cap E_2$. لدينا:

$$f \in E_1 \quad \text{و} \quad f \in E_2$$

أي أنّ:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{و} \quad f(-x) = -f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

ومنه:

$$f(x) = -f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن:

$$f(x) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

وليس هذا سوى تعريف العنصر الحيادي لـ E (إرجع إلى التمرين 2. II). أي أنّ:

$$f = 0_E$$

إذن:

$$f \in \{0_E\}$$

ج) ليكن $x \in \mathbb{R}$.

$$F_x = \{ f \in E \ / \ f(x) = 0 \}$$

لنثبت أنّ:

$$E = F_a + F_b \quad , a \neq b$$

يكفي، من أجل ذلك، أن نثبت أنّ:

$$E \subset F_a + F_b$$

مادام الإحتواء الثاني محققًا دائما.

ليكن f عنصرا كيفيًا من E . ينبغي إيجاد عنصر f_a من F_a وعنصر f_b من F_b بحيث:

$$f = f_a + f_b$$

أي أنّ :

$$f(x) = f_a(x) + f_b(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

لدينا:

$$f(x) = (x-a) f(x) + (b-x) f(x) + (a-b) f(x) + f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a} f(x) + \frac{b-x}{b-a} f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

نأخذ، عندئذ،

$$f_a(x) = \frac{x-a}{b-a} f(x) \quad \text{و} \quad f_b(x) = \frac{b-x}{b-a} f(x)$$

للبرهان على أنّ المجموع $F_a + F_b$ ليس مباشرا ، ينبغي أن نثبت أنّ : $F_a \cap F_b \neq \{0_E\}$ (لأنّ : $E = F_a + F_b$). ليكن ، إذن ، التّطبيق f من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ ، والمعرّف بـ:

$$f(x) = (x-a)(x-b)$$

لدينا : $f \neq 0_E$ و $f \in F_a \cap F_b$.

إذن :

$$F_a \cap F_b \neq \{0_E\}$$

5) لتكن G المجموعة الجزئيّة لـ E ، المعرّفة بـ:

$$G = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = 0 \;,\; x \neq a \}$$

نتحقّق من أنّ G فضاء شعاعي جزئي لـ E وأنّ:

$$\begin{cases} E = G + F_a \\ G \cap F_a = \{0_E\} \end{cases}$$

تمرين 19 . II :

لتكن H المجموعة الجزئيّة لِ $\mathbb{R}^3$ ، والمعرّفة بـ :

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$$

أ) أثبت أنّ H فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathbb{R}^3$.

ب) أوجد بعد H.

جـ) أوجد مكمّلا لِ H في $\mathbb{R}^3$.

أ) نستخدم تعريف فضاء شعاعي جزئي (أنظر التمرين II. 3)

ب) لنعيّن أساسا لِ H . لدينا :

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x=-y-z\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(-y-z,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1) \,/\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

ويكون، هكذا، الفضاء الشعاعي الجزئي H مولّدا بواسطة الأشعة $x_1=(-1,1,0)$ و $x_2=(-1,0,1)$. إذا كان هذان الشعاعان مستقلّين خطيّا ، فهما يشكلان أساسا لِ H . ليكن λ_1 و λ_2 سلّميين حقيقيين بحيث :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

أو :

$$\lambda_1(-1,1,0) + \lambda_2(-1,0,1) = (0,0,0)$$

عندئذ، يأتي :

$$(-\lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2) = (0,0,0)$$

إذن : $\lambda_1=\lambda_2=0$

وبالتالي، فالشعاعان x_1 و x_2 مستقلان خطيا، وبما أنهما يولدان H، فهما يشكلان أساسا لـ H، وعليه يكون : $\underline{\dim H = 2}$

ج) ليكن G مكملا لـ H في $\mathbb{R}^3$؛ أي أن : $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$

بما أن: $\dim H = 2$، إذن : $\dim G = 1$ (طبقا للمبرهنة الخاصة ببعد مجموع فضاءات شعاعية جزئية). نبحث -إذن- عن فضاء شعاعي جزئي G لـ $\mathbb{R}^3$، بعده واحد بحيث :

$$\mathbb{R}^3 = H + G \quad \text{و} \quad H \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

ينبغي على G أن يكون مولدا بشعاع واحد غير منعدم x_3 من $\mathbb{R}^3$.

ومن جهة أخرى : $\mathbb{R}^3 = H+G$؛ فعلى الشعاع x_3 وشعاعي الأساس x_1 و x_2، إذن، أن تولد $\mathbb{R}^3$. وهي بذلك، ستشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$، إذ أن : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. يكفي، إذن، البحث عن شعاع x_3 بحيث تكون الأشعة x_1 و x_2 و x_3 مستقلة خطيا.

إن الشعاع $x_3 = (0,1,0)$ تحقق رغبتنا ويكون G المبحوث عنه مساويا:

$$G = \{ v \in \mathbb{R}^3 \ / \ v = \lambda x_3 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

ويمكن التحقق من أن G مكمل لـ H في $\mathbb{R}^3$.

تمرين II . 20 :

عين أساسا لمجموع وتقاطع الفضاءات الشعاعية الجزئية لـ $\mathbb{R}^4$، المولدة - على الترتيب - بالأشعة :

$$x_1 = (1,2,7,0) \quad ; \quad x_2 = (-1,1,1,1)$$

و

$$y_1 = (2,-1,0,1) \quad ; \quad y_2 = (1,-1,3,7)$$

وعين بعد كل من هذه الفضاءات.

ليكن H_1 و H_2 الفضائين الشعاعيين الجزئيين المولّدين بـ: $(x_1; x_2)$ و $(y_1; y_2)$ على الترتيب. لدينا عندئذ:

$$H_1 = \{ v \in \mathbb{R}^4 / v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$H_2 = \{ v \in \mathbb{R}^4 / u = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 , (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

وتبعا لذلك يأتي:

$$H_1 + H_2 = \{ w \in \mathbb{R}^4 / w = v + u , v \in H_1 \text{ و } u \in H_2 \}$$

$$= \{ w \in \mathbb{R}^4 / w = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 , (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

لنبحث عن أساس لـ $H_1 + H_2$.

$H_1 + H_2$ مولّد بالأشعّة x_1، x_2، y_1 و y_2. لنتأكّد ممّا إذا كانت هذه الأشعّة مستقلّة خطيا.

ليكن λ_1، λ_2، μ_1 و μ_2 سلّميات حقيقيّة بحيث:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = 0$$

نحصل على الجملة التّالية:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 0 + 3\mu_2 = 0 \\ 0 + \lambda_2 + \mu_1 + 7\mu_2 = 0 \end{cases}$$

أو:
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - 5\varphi_1 - 3\varphi_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 0 \\ \lambda_2 + \varphi_1 + 7\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

أو:
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \\ \lambda_2 - \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - 5\varphi_1 - 3\varphi_2 = 0 \\ \lambda_2 + \varphi_1 + 7\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

أو:
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \\ \lambda_2 - \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \\ -2\varphi_1 - 6\varphi_2 = 0 \\ 2\varphi_1 + 6\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه: $\varphi_1 = -3\varphi_2$ ، $\lambda_2 = -4\varphi_2$ و $\lambda_1 = \varphi_2$.

إذن الأشعة x_1 ، x_2 ، y_1 و y_2 مرتبطة خطيا و $\dim(H_1+H_2) < 4$

إذا كان $\varphi_2 = -1$ ، يكون لدينا: $\varphi_1 = 3$ ، $\lambda_2 = 4$ ، $\lambda_1 = -1$ إذن:

$$y_2 = -x_1 + 4x_2 + 3y_1$$

و:
$$H_1 + H_2 = \left\{ w \in \mathbb{R}^4 / \ w = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \varphi_1 y_1 + \varphi_2(-x_1 + 4x_2 + 3y_1) \ \ \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ومنه :

$$H_1+H_2=\{ w\in\mathbb{R}^4 / \ w=(\lambda_1-\lambda_2)x_1+(\lambda_2+4\mu_2)x_2+ + (\lambda_1+3\lambda_2)y_1 \ ; \ \lambda_1,\lambda_2,\mu_1\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{ w\in\mathbb{R}^4 / \ w=ax_1+bx_2+cy_1 \ ; \ a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

وهكذا يكون H_1+H_2 مولّدا بواسطة الأشعّة x_1، x_2، y_1 ، وبالتّالي، إذا كانت هذه الأشعّة مستقلّة خطيّا ، فهي ستشكّل أساسا لِ H_1+H_2

إذن، لتكن ،

$$ax_1+bx_2+cy_1=0$$

مع a، b، $c\in\mathbb{R}$.

نجد ،باستخدام طريقة مماثلة للسّابقة :

$$a=b=c=0$$

و هكذا تكون الأشعّة x_1، x_2، y_1 مستقلّة خطيا ،و بما أنّها تولّد H_1+H_2 ، فهي تشكّل أساسا لِ H_1+H_2 ؛ وعليه يأتي :

$$\dim(H_1+H_2)=3$$

لنعتبر، الآن ، تقاطع H_1 مع H_2 . لدينا :

$$H_1\cap H_2=\{ w\in\mathbb{R}^4 / \ w\in H_1 \text{ و } w\in H_2\}$$

$$=\{ w\in\mathbb{R}^4 / \ w=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2 \text{ و } w=\mu_1y_1+\mu_2y_2 \ ; \ \lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}\}$$

إذن ،يكون عنصر w من $\mathbb{R}^4$ منتميا إلى $H_1\cap H_2$ إذا وفقط إذا وجد سلّميات λ_1 ، λ_2 ، μ_1، μ_2 بحيث :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$$

ومنه نستخلص هذه الجملة:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 2\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 0 - 3\mu_2 = 0 \\ \lambda_2 - \mu_1 - 7\mu_2 = 0 \end{cases}$$

التي تعطي :

$$\mu_1 = -3\mu_2 \quad , \quad \lambda_2 = 4\mu_2 \quad , \quad \lambda_1 = -\mu_2$$

وبالتالي :

$$H_1 \cap H_2 = \{ w \in \mathbb{R}^4 / \ w = -\mu_2 x_1 + 4\mu_2 x_2 = -3\mu_2 y_1 + \mu_2 y_2 \ ; \mu_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ w \in \mathbb{R}^4 / \ w = -\mu_2 (x_1 - 4x_2) = -\mu_2 (3y_1 - y_2) \ ; \mu_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ w \in \mathbb{R}^4 / \ w = -\mu_2 (5,-2,-3,-4) \ , \ \mu_2 \in \mathbb{R} \}$$

وهكذا، يكون $H_1 \cap H_2$ مولدا بواسطة الشعاع $(5,-2,-3,-4)$.
ومادام هذا الشعاع غير منعدم، فهو يشكل أساسا لـ $H_1 \cap H_2$
ويكون $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$.

تمرين II.21 :

أوجد مرتبة جملة الأشعة : $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
من $\mathbb{R}^4$، حيث،
$u_1 = (0,2,1,0)$ ، $u_2 (2,3,1,0)$ ، $u_3 = (4,0,2,1)$
$u_4 = (2,-1,2,1)$.

نلاحظ أنّ :

$$u_4 = u_3 - u_2 + u_1$$

إذن، الأشعّة u_1، u_2، u_3، u_4 مرتبطة خطيّاً، و بـ تكون مرتبة L، ولنكن r، أقل من 4.

يمكن التّحقّق من أنّ الأشعّة u_1، u_2، u_3 مستقلّة خطيا، ونستنتج من ذلك مرتبة L، $r=3$.

نذكّر بأنّ مرتبة جملة أشعّة أقلّ أو تساوي بعد الفضاء الشّعاعي المعتبر.

----

0 0

0

الفصل III.

الأعداد العقديّة

I- حقل الأعداد العقديّة:

1- تعريف:

نسمّي عدد عقديا كلّ ثنائيّة مرتّبة $z=(x,y)$ لعددين حقيقيّين x و y. نمثّله بالرّمز $x+iy$ و نكتب: $z=x+iy$

يسمّى x الجزء الحقيقي لـ z و نرمز له بـ: $\operatorname{Re} z$.

يسمّى y الجزء التخيّلي لـ z و نرمز له بـ: $\operatorname{Im} z$.

إذا كان $y=0$، يكون العدد z حقيقيا؛ وإذا كان $x=0$، يقال عن z إنّه تخيلي محض (أو بحت)

نلاحظ أنّ التخيلي المحض i يكتب: $i=(0,1)$

2- عمليات على الأعداد العقديّة:

ليكن $z=(x,y)$ و $z'=(x',y')$ عددين عقديّين.

إنّ مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$، المزودة بالجمع المعرّف بـ:

$$z+z'=(x+x',\ y+y')$$

والضّرب المعرّف بـ:

$$z\cdot z'=(xx'-yy',\ xy'+x'y)$$

حقل تبديلي. و نكتب:

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y').$$
$$(x+iy)\cdot(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

مقلوب العدد $z \neq 0$ (أو: $(x,y) \neq (0,0)$) هو العدد:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

مربّع العدد التخيّلي البحت i هو: $i^2 = -1$.

يمكن التحقق من أنّ:

$$[z = z'] \Leftrightarrow [Re z = Re z' \text{ و } Im z = Im z']$$

3- مرافق عدد عقدي:

العدد المرافق للعدد العقدي: $z = (x, y) = x + iy$

هو العدد العقدي: $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$

4- طويلة عدد عقدي:

إنّ طويلة عدد عقدي z هي تطبيق من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{R}_+$، معرّف

ب: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. لدينا أيضا: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ حيث: $x = Re z$

و $y = Im z$.

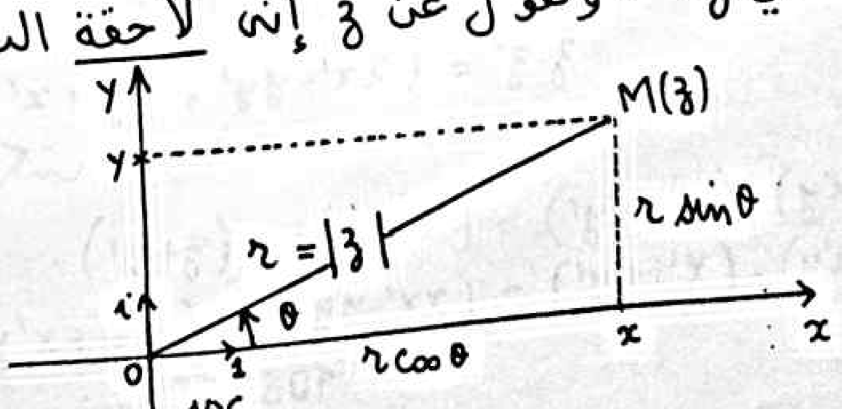
II - تمثيل عدد عقدي.

1- صورة عدد عقدي:

نرفق بالعدد العقدي: $z = (x, y) = x + iy$، النقطة

M التي يمثل x فاصلتها و y ترتيبها. تسمّى النقطة M صورة العدد

العقدي z، ونقول عن z إنّه لاحقة النقطة M.



يسمّى المستوي xoy الّذي يحتوي الصّور M للأعداد العقديّة $z=(x,y)$
المستوي العقدي؛ ox هو المحور الحقيقي و oy هو المحور التّخيّلي.

٢- الشّكل المثلّثي:

يمكن أيضا تعيين صورة العدد العقدي $0 \neq z = x+iy$،
ولتكن M، بالقياس θ للزّاوية (ox, oM) و بالعدد r الذي يقيس طول القطعة المستقيمة OM.

من أجل كلّ عدد عقدي z، توجد ثنائيّة (r,θ) من $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$
حيث: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

(1) من أجل $z \neq 0$، يكون لدينا: $r = |z|$، $\cos\theta = \frac{Re\, z}{|z|}$
$\sin\theta = \frac{Im\, z}{|z|}$.

العدد θ معرّف بتقريب 2π.

(2) من أجل $z=0$، لدينا: $r=0$ و θ كيفي.

يسمّى العدد θ: عمدة z و يرمز له ب: $\arg z$ (و هناك عدد غير منته)
والعدد θ الّذي ينتمي إلى المجال $[0,2\pi[$ يرمز له: $\underline{Arg\, z}$

يمكن أن نبيّن:

إذا كان z و z' عددين عقديّين، $\theta = \arg z$ و $\theta' = \arg z'$، عندئذ:

(1) $z = z'$ إذا و فقط إذا: $|z| = |z'|$ و إذا وجد عدد صحيح k من $\mathbb{Z}$ حيث: $\theta = \theta' + 2k\pi$

(2) $z \cdot z' = |z| \cdot |z'| \left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$

(3) إذا كان $z' \neq 0$: $\frac{z}{z'} = \frac{z}{|z'|}\left(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')\right)$

III. دستور (صيغة) موافر (Moivre):

من أجل كلّ عدد حقيقي θ و من أجل كلّ عدد صحيح n من $\mathbb{Z}$، لدينا:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

IV - حلول المعادلة : $z^n = a$

1- ليكن n عددا طبيعيّا بحيث: $n\neq 0$ و $n\neq 1$ ، وليكن a عددا عقديّا. نضع: $a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta)$

(1) إذا كان $a=0$ ، يكون للمعادلة: $z^n = 0$ حل وحيد : $z=0$

(2) إذا كان $a\neq 0$ ، تملك المعادلة : $z^n = a$ ، بالضبط، n حلاّ متمايزا من الشّكل :

$$z_k = \left(|a|^{\frac{1}{n}}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

حيث k عدد صحيح من $\mathbb{Z}$.

وزيادة على ذلك ، نحصل على جميع الحلول بإعطاء n قيمة متتالية لـ k (نأخذ، في غالب الأحيان، $0\leq k \leq n$)

2 - الجذر النّوني للوحدة :

(1) تكون حلول المعادلة $z^n = 1$ من الشّكل :

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}.$$

(يكفي اعتبار $k=0$، ...، $n-1$).

(2) لدينا $z_k = (z_1)^k$ و $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

V - حلّ معادلة من درجة ثانية في $\mathbb{C}$

لتكن (E) المعادلة $az^2+bz+c=0$ ، مع a، b و c عناصر من $\mathbb{C}$ ، و $a\neq 0$.

نضع $\Delta = b^2 - 4ac = d^2$.

عندئذ، تكون حلول المعادلة (E) على النّحو التّالي :

إذا كان: $d \neq 0$ ؛ $z = \frac{-b \pm d}{2a}$

إذا كان: $d = 0$ ؛ $z = -\frac{b}{2a}$

حالة كون a، b، c حقيقيّة:

$$\Delta \geqslant 0 \quad , \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad , \quad z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

تمرين 1. III .

ضع، على الشّكل المثلّثي، الأعداد العقديّة التّاليّة:

$$z_1 = 1+i \quad , \quad z_2 = \sqrt{3}+i \quad , \quad z_3 = 1+i\sqrt{3}$$

ثمّ أحسب العدد العقدي:

$$\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$$

ليكن:

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$
$$z_3 = r_3 (\cos\theta_3 + i \sin\theta_3)$$

لدينا:

$r_1 = \sqrt{2}$ و $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta_1$

$r_2 = 2$ و $\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta_2 = \frac{1}{2}$

$r_3 = 2$ و $\cos\theta_3 = \frac{1}{2}$ و $\sin\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن:

$$\theta_1 = \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta_2 = \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{6}$$
$$\theta_3 = \operatorname{Arg} z_3 = \frac{\pi}{3}$$

وهكذا :

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

وبالتالي :

$$z_2 \cdot z_3 = 2\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 4.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

و

$$\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}(1-i)$$

تمرين III.2 :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و a و z عنصرين من $\mathbb{C}$. أوجد الشّكل العام لحلول المعادلة :

$$z^n = a$$

تطبيقان :

(أ) أوجد جميع قيم العدد z بحيث : $z^3 = 1$ ووضّح تمثيلاتها في المستوي.

(ب) حلّ المعادلة :

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0$$

نميّز حالتين :

الحالة الأولى : $a=0$. للمعادلة $z^n=0$ حل وحيد : $z=0$.

الحالة الثانية : $a\neq 0$. ليكن z من $\mathbb{C}$ و a من $\mathbb{C}^*$ ، عددين معطيين.

وكتابتهما على الشكل المثلثي تعطي :

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{و} \quad a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

وتكون المعادلة $z^n=a$ مكافئة للمعادلة :

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

وذلك طبقا لصيغة موافر. لدينا إذن :

$$\rho^n=r \quad \text{و} \quad n\varphi=\theta+2k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}.$$

ومنه :

$$\rho=\sqrt[n]{r} \quad \text{و} \quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n} \;,\; k\in\mathbb{Z}.$$

وتكون حلول المعادلة المعطاة معطاة بواسطة الصيغة :

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \;;\; k\in\mathbb{Z}.$$

وتبعا لذلك، وباعتبار $k=0,1,\ldots$ $k=\pm n$ ، $\pm(n+1)$ ، ... ، $\pm(2n-1)$ ... نتحصل على الحلول n الأولى z_0 ، ... ، z_{n-1} المحصل عليها بـ : ... ، $(n-1)$ ، وهكذا ... لأن التابعين الجيب والجيب التمام دوريين. إذا كان $a\neq 0$ ، تقبل المعادلة $z^n=a$ بالضبط n حلا متمايزا من الشكل :

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

$$k=0,1,\ldots,(n-1)$$

ملاحظة : إن الحلول z_0 ، z_1 ، ... ، z_{n-1} موزعة أيضا في المستوي على الدائرة ذات نصف القطر $\sqrt[n]{r}$ والمركزة عند المبدإ

فهي ممثلة إذن برؤوس مضلع منتظم.

تطبيقان:

(أ) طبقا لما سبق، تكون حلول المعادلة : $z^3 = 1$ مساوية:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad ; \; k = 0, 1, 2.$$

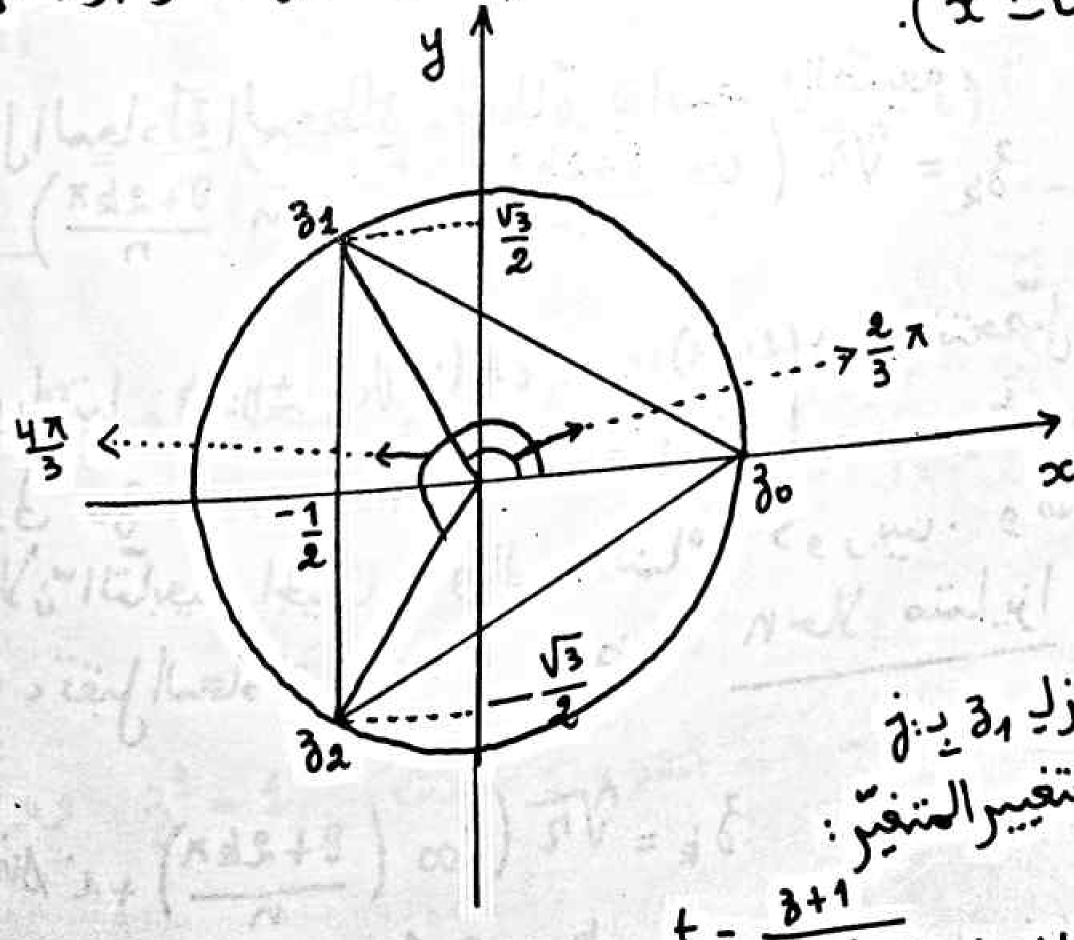
والحلول الثلاثة هي :

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وتمثل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 : دائرة الوحدة. (أحد الرؤوس موجود على محور السينات x).



غالبا ما يرمز لـ z_1 بـ j.

ب) قم بتغيير المتغير :

$$t = \frac{z+1}{z-1}$$

مع الملاحظة أن z مختلف عن 1.

تمرين III.3 :

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}^*$.

أ) أثبت أنّ العلاقة $\bar{z} = \frac{1}{z}$ مكافئة لـ : $|z| = 1$.

ب) ليكن : $t = \frac{z-i}{z+i}$. عيّن مجموعة الأعداد العقديّة z بحيث : $|t| = 1$.

جـ) أستنتج من السّؤال السّابق أنّ المعادلة : $(z-i)^n - (z+i)^n = 0$

$(n \in \mathbb{N}^*)$ ليس لها حلول حقيقيّة . عيّن هذه الحلول.

أ) العلاقة $\bar{z} = \frac{1}{z}$ مكافئة لـ : $z \cdot \bar{z} = 1$

وهذه العلاقة الأخيرة مكافئة لـ : $|z|^2 = 1$

والّتي تعطي أيضا : $|z| = 1$

ب) t معرّف إذا كان : $z \neq -i$

لدينا، حسب أ) :

$$|t| = 1 \Leftrightarrow \bar{t} = \frac{1}{t}$$

إذن علينا أن نعيّن مجموعة الأعداد العقديّة z بحيث :

$$\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z+i}{z-i}$$

لأنّ : $t = \frac{z-i}{z+i}$

(نشير إلى أنّ : $z \neq i \Leftrightarrow 0 \neq t \Leftarrow 1 = |t|$)

و هذا يعطي لنا :

$$2i(z-\bar{z}) = 0$$

و منه :

$$z = \bar{z}$$

والمجموعة المبحوث عنها هي :

$$\{z = x+iy \in \mathbb{C} \,/\, y = 0 \,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

إذن : $z \in \mathbb{R}$.

تكافئ المعادلة: $(z-i)^n-(z+i)^n$ ،

من أجل $z+i \neq 0$، المعادلة:

$$\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n}=1$$

تتمتع حلول هذه المعادلة بطويلة مساوية 1 ،

و هي ، حسب (ب) ، حقيقيّة كلّها.

و بغية تحديد حلول هذه المعادلة ، نرمز بـ: t للنّسبة: $\frac{z-i}{z+i}$

وتكتب المعادلة عندئذ، على الشّكل: $t^n=1$ ؛ وهي تقبل n حلًا:

$$t_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad ; k=0,1,\dots,(n-1)$$

و لكن، لدينا، من أجل $k=0$:

$$t_0=1=\frac{z_0-i}{z_0+i} \Leftrightarrow z_0-i=z_0+i$$

ليس لها أيّ حل.

يكون لدينا إذن:

$$t_k=\frac{z_k-i}{z_k+i} \quad ; k=1,2,\dots,(n-1)$$

و منه:

$$z_k=i\,\frac{t_k+1}{t_k-1} \quad ;k=1,2,\dots,(n-1)$$

وبتعويض t_k ، $k=1،2،\dots،(n-1)$، بقيمته ، نبيّن أنّ الحلول هي:

$$z_k=-\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n} \quad ; k=1,2,\dots,(n-1).$$

تمرين III.4:

نعتبر التّابع: $f: \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$، المعرّف بـ:

$$f(z)=\frac{z}{1+|z|}$$

أثبت أنّ لـ z و $f(z)$ عمدة واحدة.

ب) أثبت أنّ: $|f(z)|<1$، من أجل كلّ عنصر z من $\mathbb{C}$. عيّن $f(\mathbb{C})$.

جـ) أثبت أنّ f متباين.

د) هل f غامر؟

هـ) نعتبر التّوابع f_n ، $n \in \mathbb{N}$، المعرّفة بـ:

$$f_0 = Id \quad , f_1 = f \quad , f_2 = f \circ f , \dots , \ f_n = f \circ f_{n-1}$$

أثبت بواسطة التدرج أنّ f_n متباين وأنّ:

$$f_n(z) = \frac{z}{1+n|z|} \ ; \forall z \in \mathbb{C} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

هل التّابع f_n غامر؟

أ) بما أنّ: $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$ ، إذن:

$$\arg f(z) = \arg\left(\frac{z}{1+|z|}\right) = \arg z$$

لأنّ $1+|z|$ حقيقي.

ب) $$|f(z)| = \frac{|z|}{1+|z|} < 1 \ ; \forall z \in \mathbb{C}$$

لأنّ: $$|z| < 1+|z| \ ; \ \forall z \in \mathbb{C}$$

لتكن:

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z|<1 \}$$

لدينا ممّا سبق، أنّ:

$$f(\mathbb{C}) \subset D \qquad (*)$$

ولكن، من جهة أخرى، t عنصرا من D. لنثبت وجود عنصر z من $\mathbb{C}$ بحيث:

$$t = f(z) = \frac{z}{1+|z|}$$

وطبقا لما جاء في (أ)، يمكننا تعيين عمدة z: $\arg z = \arg t$

وعلاوة على ذلك، لدينا:

$$|t| = \frac{|z|}{1+|z|}$$

إذن:

$$|z| = \frac{|t|}{1-|t|}$$

وهي معرّفة جيّدا مادامت $|t|<1$.

وهكذا، ومن أجل كلّ عنصر t من D يوجد عنصر z من (z معرّف بطويلته وعمدته) بحيث: $f(z) = t$

إذن:

$$D \subset f(\mathbb{C}) \quad . \quad (**)$$

ومن النتيجتين $(*)$ و $(**)$ نستنتج أنّ:

$$f(\mathbb{C}) = D = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1 \}$$

وهو قرص الوحدة المفتوح لـ $\mathbb{R}^2$.

جـ) ليكن z و z' عنصرين من $\mathbb{C}$ بحيث: $f(z) = f(z')$.

لدينا:

$$\arg f(z) = \arg f(z')$$

وحسب (م)، نكتب: $\arg f(z) = \arg z$ و $\arg f(z') = \arg z'$

إذن: $\arg z = \arg z'$

وبالإضافة إلى ذلك، لدينا:

إذن:

$$|f(z)| = |f(z')|$$

وبالقيام بالحساب، نجد: $\frac{|z|}{1+|z|} = \frac{|z'|}{1+|z'|}$.

$$|z| = |z'|$$

وهكذا يكون z و z' عددين عقديين لهما عمدة واحدة وطويلة واحدة، فهما، إذن، متساويان؛ ويكون f بذلك متباينا

$$f(\mathbb{C}) = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \} = D$$

د) f ليس غامرا لأنّ $D \subset \mathbb{C}$ و $D \neq \mathbb{C}$. إذا أخذنا -مثلا- $z = 2$ ($|z| > 1$) ، فلا يوجد عنصر z' من $\mathbb{C}$ بحيث،

$$f(z') = z.$$

هـ) إذا كان $n=0$ ، يكون لدينا : $f_0 = Id$. ولكن التّطبيق المطابق تطبيق متباين . إذن القضيّة صحيحة من أجل $n=0$

لنفترض أنّ القضيّة صحيحة إلى غاية المرتبة n و لنبيّن أنّها صحيحة من أجل المرتبة $(n+1)$. لدينا:

$$f_{n+1} = f \circ f_n$$

التّطبيقان f و f_n متباينان (f متباين حسب السّؤال ج) و f_n متباين طبقا لفرضية التّدرّج) .

وبالتّالي يكون التّطبيق $f \circ f_n$ متباينا (أنظر التّمرين 6. I)

نستخدم ، من بعد ذلك، التّدرّج لإثبات أنّ :

$$f_n(z) = \frac{z}{1+n|z|} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \quad , \forall z \in \mathbb{C}.$$

التّابع f_n ليس غامرًا ، لأنّ التّابع f ليس غامرا. (أنظر التّمرين I.6)

تمرين III .5 :

أ حسب $\cos \frac{\pi}{5}$:

أ) بكتابة $\cos 5a$ بدلالة $\cos a$ ، و ذلك حسب صيغة موافر.

ب) باستخدام المعادلة : $x + 1 = 0$

أ) يكون لدينا، طبقا لصيغة موافر:

$$(\cos a + i \sin a)^5 = \cos 5a + i \sin 5a$$

وزيادة على ذلك، وباستخدام صيغة ثنائي الحدّ لنيوتن، نحصل على:

$$(\cos a + i \sin a)^5 = \cos^5 a - 10\cos^3 a \sin^2 a + 5\cos a \sin^4 a +$$
$$+ i(5\cos^4 a \sin a - 10\cos^2 a \sin^3 a + \sin^5 a)$$

ومنه:

$$\cos 5a = \cos^5 a - 10\cos^3 a \sin^2 a + 5\cos a \sin^4 a$$
$$= 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

لنأخذ: $a = \frac{\pi}{5}$ في هذه المساواة. وبما أنّ: $\cos 5a = \cos \pi = -1$

يكون $\cos\frac{\pi}{5}$، عندئذ، حلاّ للمعادلة:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0$$

نلاحظ أنّ: $x = -1$ حلّ لهذه المعادلة الأخيرة التي تقبل القسمة، إذن، على $x+1$. نجد:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$$
$$= (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$$

وبالتالي، وبما أنّ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ هو الحلّ الموجب للمعادلة

$$4x^2 - 2x - 1 = 0$$

وأنّ: $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ حلّ لها أيضا، يكون لدينا عندئذ:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ب) لتكن المعادلة:

$$z^5 = -1$$

فحلولها هي:

$$z_k = \cos\frac{(1+2k)\pi}{5} + i \sin\frac{(1+2k)\pi}{5} \; ; \; k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

نلاحظ أنّ:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{5} \qquad \bar{z}_0 \qquad z_2 = -1$$

لنعتبر، عندئذ، المعادلة :

$$\frac{z^5+1}{z+1} = z^4 - z^3 - z^2 - z + 1$$
$$= z^2\left(z^2 + 1/z^2 - \left(z+\frac{1}{z}\right)+1\right) = 0$$

حلول هذه المعادلة الأخيرة هي :

$$z_0 , z_1 , z_3 , z_4$$

المعرّفة سابقا.

نعتني بالجزء الحقيقي للحل z_0 .

يُعطي تغيير المتغيّر : $u = z + 1/z$ في المعادلة :

$$z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z+\frac{1}{z}\right)+1 = 0$$

المعادلة :

$$u^2 - u - 1$$

التي تقبل حلين :

$$u_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad و \quad u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

ولكن إذا كان : $z = \cos a + i \sin a$ ، مع $|z| = 1$

(وهو حالنا) فإنّ :

$$u = z + \frac{1}{z} = 2\cos a = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

حلول المعادلة :

$$u^2 - u + 1 = 0$$

هي :

$$u_1 = 2\,\mathrm{Re}\,z_0 = 2\,\mathrm{Re}\,z_4 = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

و

$$u_2 = 2\,\mathrm{Re}\,z = 2\,\mathrm{Re}\,z_3 = 2\cos\frac{3\pi}{5}$$

إذن

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} .$$

تمرين 6. III :
مثّل بيانيًا مجموعة قيم z التي من أجلها :

أ) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$

ب) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$

أ) الطّريقة الأولى: المعادلة المعطاة مكافئة لـ :

$$|z-3| = 2|z+3|$$

في $\mathbb{C}-\{-3\}$.

أو، إذا وضعنا : $z = x+iy$ ، يأتي :

$$|z-3| = \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 2|z+3|$$

نحصل على :

$$x^2+y^2+10x+9=0$$

أو

$$(x+5)^2+y^2 = 16$$

و هي معادلة الدائرة ذات نصف القطر 4 والمركّزة عند النقطة ذات الأحداثيات $(-5,0)$.

الطّريقة الثّانية : لانستخدم الجزئين الحقيقي و التّخيّلي .

ليكن :

$$Z = \frac{1}{2}\left(\frac{z-3}{z+3}\right)$$

لدينا : $|Z| = 1$.

و هذا مكافئ، حسب التّمرين 3. III . (أ) ، لـ :

أو :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3} = 2\,\frac{z+3}{z-3}$$

$$z\bar{z}+5\bar{z}+5z+9=0$$

$$(z+5)(\bar{z}+5) = 16$$

أوْ : وباستخدام الجزء (P) من التّمرين 3. III ثانيّة ، نحصل على:

$$|z+5| = 4$$

وهي معادلة الدّائرة ذات نصف القطر 4 والمركّزة عند النّقطة $(-5,0)$

ب) تكافئ المتراجحة المعطاة مايلي :

$$|z-3| < 2|z+3| \quad , \quad z \in \mathbb{C} - \{-3\}.$$

أو :

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

نحصل على :

$$x^2+y^2+10x+9 > 0$$

أو

$$(x+5)^2 + y^2 > 16$$

مجموعة النّقاط المبحوث عنها مشكّلة من جميع النّقاط الخارجيّة للدّائرة المركزة عند النّقطة $(-5,0)$ وذات نصف القطر 4.

تمرين 7. III

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و x عنصرا من $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

أحسب :

$$S = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\cos px}{\cos^p x}$$

لنعتبر المجموع S' التّالي :

$$S' = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\sin px}{\cos^p x}$$

لدينا :

$$S + iS' = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\cos px + i\sin px}{\cos^p x}$$

وطبقا للصيغة موافر، نكتب:

$$S+iS' = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x} \right)^p$$

نجد متوالية هندسية حدّها الأوّل 1 وأساسها يساوي: $\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x}$.

إذن:

$$S+iS' = \frac{1-\left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x}\right)^n}{1 - \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x}} \quad ; x \neq 0$$

ومنه:

$$S = Re(S+iS') = \frac{\sin nx}{\cos^{n-1}x \sin x} \quad ; \quad x \neq 0$$

وإذا كان: $x=0$ ، نجد: $S=n$

O O

O

الفصل . IV -

م - كثيرات الحدود .

I. عموميّات .

1. تعريف.

ليتكن K حلقة تبديليّة، واحديّة. نسمّي كثير حدود بمجهول واحد، وبمعاملات في K متتالية ($a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$) من عناصر K، ليس لها سوى عدد منته من حدود غير منعدمة.

2. ترميزة:

يرمز لكثير الحدود بمجهول X و بمعاملات في K ب: $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ ، حيث يوجد عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ بحيث $a_k = 0$ من أجل كلّ $n < k$.

لنشر إلى المجهول X لا ينتمي إلى K، $(X = (0,1,0,0,\dots))$

يرمز لمجموعة كثيرات الحدود ذات مجهول واحد X، ومعاملات في K ب: $K[X]$.

3. ليكن $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ و $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ عنصرين من $K[X]$. نضع،

$$P = Q \Leftrightarrow a_k = b_k \;;\; \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$P = 0 \Leftrightarrow a_k = 0 \;;\; \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$P+Q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k \quad (\text{مع}) \quad c_k = a_k + b_k \;,\; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$P.Q = \sum_{k=0}^{\infty} d_k X^k \quad (\text{مع}) \quad d_k = \sum_{i+j=k}^{\infty} a_i b_j \;;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

4- درجة كثير حدود:

نسمّي درجة كثير حدود $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ ، غير منعدم

من $K[X]$ ، العددَ الطّبيعي الأكبر n الّذي يحقّق : $a_n \neq 0$.

نرمز لها بِـ: $n = d^\circ P . \ (n \in \mathbb{N})$

إذا كان P منعدما ، فلا يوجد عدد طبيعي n بحيث : $a_n \neq 0$.

نصطلح ، في هذه الحالة، الكتابة: $d^\circ 0 = -\infty$

5- التّوابع كثيرات الحدود.

ليكن P كثير حدود من $K[X]$ ، $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

نضع ، من أجل كلّ عنصر z من K :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

تسمّى التّطبيق :

$$\tilde{P} : K \longrightarrow K$$
$$z \longmapsto \tilde{P}(z) = P(z)$$

التّابع كثير الحدود المرفق بِـ P.

6- البنى الجبريّة :

(P

نتحقّق من أنّ العمليّتين :

$$+ : K[X] \times K[X] \longrightarrow K[X]$$
$$(P, Q) \longmapsto P + Q$$

$$\cdot : K[X] \times K[X] \longrightarrow K[X]$$
$$(P, Q) \longmapsto P.Q$$

تزوّدان $K[X]$ بنية حلقة تبديليّة واحديّة.

ب) إذا كان K حقلا تبديليا ، فإنّ عملية الجمع المعرّفة أعلاه وعملية ضرب كثير حدود في سلّمي c من K والمعرّفة بِـ:

$$c.\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(c a_k) X^k$$

تزوّد ان $K[X]$ ببنية فضاء شعاعي على K بعده لا منته، قابل للعدّ. $B = \{1, X, \dots, X^n, \dots\}$ أساس لِـ $K[X]$ ، يسمّى أساس $K[X]$ القانوني.

ج) المجموعة الجزئيّة E_n من $K[X]$ والمشكّلة من كثيرات الحدود ذات الدّرجة الأصغر أو تساوي n (بما فيها كثير الحدود المعدوم)، فضاء شعاعي جزئي لِـ $K[X]$ بعده $n+1$.

تسمّى E_n : مجموعة كثيرات الحدود ذات معاملات في K، ودرجة أصغر أو تساوي n. و لِـ E_n أساس مؤلّف من كثيرات الحدود: $1, X, \dots, X^n$.

تعني K في كل ما سيلي، أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

من أجل كلّ كثيري حدود P و Q من $K[X]$ ، نبيّن:

أ) $d^\circ(P+Q) \le \sup(d^\circ P, d^\circ Q)$

ب) $d^\circ(P\cdot Q) = d^\circ P + d^\circ Q$

$K[X]$ حلقة تامّة : ($P\cdot Q = 0 \Rightarrow P=0$ أو $Q=0$)

II. القسمة.

1. القسمة الإقليديّة أو القسمة وفق القوى المتناقصة لِـ X.

مبرهنة - تعريف:

ليكن A و B كثيري حدود من $K[X]$ (K حقل تبديلي)، $(B\neq 0)$. عندئذ يوجد كثيرا حدود وحيدين Q و R بحيث: $A = BQ + R$ و $d^\circ R < d^\circ B$.

إذا كان $R=0$ ، نقول إنّ B يقسم A أو إنّ A يقبل القسمة على B.

يسمّى Q حاصل القسمة و R الباقي في قسمة A الإقليديّة على B

2 - القسمة وفق القوى المتزايدة لـ X :

أ) مبرهنة ؛ تعريف :

ليكن : $A = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n + \dots$

و $B = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n + \dots$

كثيري حدود من $K[X]$ بحيث $b_0 \neq 0$.

عندئذ ، ومن أجل كلّ عدد صحيح h ، يوجد كثيرا حدود Q و R وحيدان بحيث :

$$A = BQ + X^{h+1} R \quad \text{مع :} \quad d^\circ Q \leq h .$$

ب) المبدأ :

للقيام بالقسمة وفق القوى المتزايدة لـ X لكثير حدود A على كثير حدود B ، نتأكّد من أنّ $B(0) \neq 0$ $(b_0 \neq 0)$ ، ثمّ نرتّب هذين كثيري الحدود حسب الترتيب المتزايد لقوى X ونقوم بقسمتنا عاديا.

من أجل $A = BQ + X^{h+1} R$ مع $d^\circ Q \leq h$ ،

نحصل على القسمة وفق القوى المتزايدة لـ X لـ A على B ، من المرتبة h

III - إشتقاق كثيرات الحدود :

1 - ليكن P كثير حدود من $K[X]$ ، معرّفا بـ : $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

يسمّى كثير الحدود P' من $K[X]$ المعرّف بـ $P' = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^3 + \dots + n a_n X^{n-1}$

كثير الحدود المشتقّ لـ P.

2 - نثبت أنّه :

أ) إذا كان P و Q كثيري حدود من $K[X]$ ، عندئذ :

$(P+Q)' = P' + Q'$ و $(PQ)' = P'Q + PQ'$

ب) يكون P كثير حدود ثابت إذا وفقط إذا كان : $P' = 0$.

ج) من أجل كل n غير منعدم ،

$$d^\circ P' = n-1 \quad \Leftrightarrow \quad d^\circ P = n$$

3. المشتق من المرتبة n :

ليكن n عددا طبيعيا و P كثير حدود من $K[X]$. يسمى كثير الحدود $P^{(n)}$ المعرف بـ :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' \quad , \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

كثير الحدود المشتق من المرتبة n لـ P.

يمكن أن نتأكد من أنه إذا كان n عددا طبيعيا ، يكون لدينا عندئذ :

$$d^\circ P < n \quad \Leftrightarrow \quad P^{(n)} = 0$$

IV. جذور كثير حدود.

تعريف 1 :

ليكن P كثير حدود من $K[X]$ و c عنصرا من K. نقول عن c إنه جذر أو صفر لكثير الحدود P إذا كان : $P(c) = 0$.

نثبت أنه يكون c جذرا لـ P إذا وفقط إذا كان P قابلا للقسمة على $X-c$.

تعريف 2 :

نسمي درجة مضاعفة جذر c لكثير حدود P من $K[X]$ ، أكبر عدد صحيح k بحيث يكون P قابلا للقسمة على $(X-c)^k$ (أي تحقق : يوجد كثير حدود Q من $K[X]$ بحيث: $Q(c) \neq 0$ و $P = (X-c)^k Q$)

نثبت أنّ:

إذا كان P كثير حدود من $K[X]$ و c عنصرا من K و k عنصر[illegible] $\mathbb{N}^*$، عندئذ:

i) يكون c جذرا رتبته k لـ P إذا وفقط إذا كان c جذرا لـ P و[illegible]
c جذرا من الرّتبة $(k-1)$ لـ P'.

ii) إذا كانت: $d^\circ P = n$ ، يكون لدينا دستور تايلور:

$$P = P(c) + \frac{X-c}{1!}P'(c) + \dots + \frac{(X-c)^n}{n!}P^{(n)}(c)$$

iii) يكون c جذرا رتبته k لـ P إذا وفقط إذا كان c جذرا لـ P و P' و P'' و ... و $P^{(k-1)}$ ولم يكن جذرا لـ $P^{(k)}$.

V كثيرات حدود $\mathbb{C}[X]$:

1- نبيّن أنّه: إذا كان P كثير حدود غير منعدم من $K[X]$، و $c_1, \dots, c_\ell$ جذورا لـ P، مختلفة مثنى مثنى وذات رتبة $k_1>0, \dots, k_\ell>0$ - على التّرتيب -، عندئذ:

يوجد كثير حدود Q من $K[X]$ بحيث:

$$P=(X-c_1)^{k_1}\cdot(X-c_2)^{k_2}\dots(X-c_\ell)^{k_\ell}Q$$

و $Q(c_i)\neq 0$ من أجل كل $i=1,\dots,\ell$.

وتبعا لهذا يأتي أنّه إذا كان P كثير حدود من $K[X]$، درجته أقل أو تساوي n، يكون لدينا عندئذ:

i) إذا كان $P\neq 0$ ، فإنّ مجموع رتب مضاعفة جذور P أقلّ أو يساوي n.

ii) إذا كان هذا المجموع أكبر تماما من n، عندئذ يكون P منعدما.

2- التفكيك (التحليل) إلى العوامل في $\mathbb{C}[X]$.

أ) نظرية دالمبار (D'ALEMBERT):

كلّ كثير حدود من $C[X]$، ذي درجة أكبر أو تساوي 1 $(n \geq 1)$ يقبل، على الأقلّ، جذرا عقديّا.

وعلاوة على ذلك، كلّ كثير حدود: $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ من $C[X]$، ذي درجة n أكبر أو تساوي 1، يقبل n جذرا متمايزا أو متطابقا. و بصفة أدقّ:

إذا كانت $c_1, \dots, c_\ell$ $(\ell \leq n)$ الجذور العقدية المتمايزة لـ P وذات رتب $k_1, \dots, k_\ell$ على التوالي، عندئذ، يكون:

$k_1 + \dots + k_\ell = n$ و $P = a_n (X - c_1)^{k_1} \dots (X - c_\ell)^{k_\ell}$

ب) ملاحظة:

هذه المبرهنة غير صحيحة في $\mathbb{R}[X]$: فمثلا، ليس لـ: $P = X^2 + 1$ جذور حقيقيّة.

3. كثير الحدود المرافق:

ليكن P كثير حدود من $K[X]$، $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

نضع: $\overline{P} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 X + \dots + \overline{a}_n X^n$

يسمّى $\overline{P}$ كثير الحدود المرافق لـ P. ونحقق بعض الخصائص:

أ) $P \in \mathbb{R}[X] \iff P = \overline{P}$

ب) $\overline{P + Q} = \overline{P} + \overline{Q}$ ؛ $\overline{P . Q} = \overline{P} . \overline{Q}$

ج) $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$ من أجل كلّ z من K.

VI. كثيرات حدود $\mathbb{R}[X]$ عقديّة غير

يمكن لكثير حدود من $\mathbb{R}[X]$ أن يتمتّع بجذور حقيقيّة (كما هو الحال لـ: $P = X^2 + 1$)

نثبت أنّه إذا كان c جذرا عقديا رتبته k لـ P، عندئذ يكون $\overline{c}$، أيضا،

جذرا رتبته k لـ P.

1. التّفكيك إلى العوامل في $C[X]$:

قضيّة:

ليكن $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ كثير حدود من $\mathbb{R}[X]$

درجته $1 \leq n$.

لتكن $x_1, x_2, \dots, x_m$ الجذور الحقيقيّة لـ P، درجة مضاعفتها

على التّوالي - $k_1, k_2, \dots, k_m$. (الجذور متمايزة!)

لتكن $z_1, z_2, \dots, z_\ell$ الجذور العقديّة المتمايزة، غير الحقيقية

و $r_1, \dots, r_\ell$ رتب (درجة) المضاعفة لـ $z_1, \dots, z_\ell$ على التّوالي.

نكتب عندئذ:

$$P = a_n (X - x_1)^{k_1} \dots (X - x_m)^{k_m} (X - z_1)^{r_1} \dots (X - z_\ell)^{r_\ell} (X - \bar{z}_1)^{r_1} \dots (X - \bar{z}_\ell)^{r_\ell}$$

و: $k_1 + \dots + k_m + 2(r_1 + \dots + r_\ell) = n$

2. التّفكيك إلى العوامل في $\mathbb{R}[X]$.

قضيّة:

مع الاحتفاظ بالرّموز الواردة أعلاه، يكون لدينا

$$P = a_n (X - x_1)^{k_1} \dots (X - x_m)^{k_m} (X^2 + p_1 X + q_1)^{r_1} \dots (X^2 + p_\ell X + q_\ell)^{r_\ell}$$

حيث:

$$p_j = -(z_j + \bar{z}_j) \in \mathbb{R}$$

$$\forall j = 1, \dots, \ell$$

$$q_j = z_j \bar{z}_j \in \mathbb{R}$$

$$p_j^2 - 4 q_j < 0$$

ب) الكسور النّاطقة:

I. إنشاء الكسور النّاطقة:

لتكن $A=(K[X],+,\cdot)$ الحلقة التّبديلية الواحديّة التّامة لكثيرات الحدود ذات مجهول واحد و معاملات في K.

إنّ العلاقة T المعرّفة على الجداء الدّيكارتي $A\times A^*$ بـ:

$$(P,Q)\ T\ (R,S) \Leftrightarrow PS=QR$$

علاقة تكافؤ على $A\times A^*$.

نرمز بـ $K(X)$ لمجموعة حاصل القسمة لـ $A\times A^*$ على T ولنشر بـ $[P,Q]$ إلى صف تكافؤ الثّنائية (P,Q).

نتأكّد من أنّ $K(X)$ المزوّدة بالعمليّتين $+$ و $\cdot$ المعرّفتين بـ:

$$[P,Q]+[R,S]=[PS+QR,QS]$$

$$[P,Q]\cdot[R,S]\ \ [PR,QS]$$

حقل تبديلي. نسمّيه حقل النِّسب لـ $K[X]$، أو حقل الكسور النّاطقة ذات معاملات في K.

وزيادة على ذلك، نلاحظ أنّ التّطبيق:

$$i: K[X]\longrightarrow K(X)$$
$$P\longmapsto i(P)=[P,1]$$

تماثل حلقات، متباين. وهو ما يسمح لنا بمطابقة العنصرين: P من $K[X]$ و $[P,1]$ من $K[X]$.

ومن جهة أخرى، وبالإشارة إلى أنّ: $[Q,1]\cdot F=[P,1]$ من أجل كلّ عنصر F من $K(X)$ مع، $F=[P,Q]$، وبكتابة P عوض $[P,1]$ و Q بدل $[Q,1]$، يكون لدينا عندئذ:

$$\underline{Q \cdot F = P}$$

وهو ما يبرّر الكتابة:

$$F = [P, Q] = \frac{P}{Q}$$

وحسب هذه الكتابة، يكون لدينا:

من أجل كل: $P_1, P_2 \in K[X]$ و $Q_1, Q_2 \in (K[X])^*$

$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1Q_2 + Q_1P_2}{Q_1Q_2} \\[2ex] \dfrac{P_1}{Q_1} \cdot \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \end{cases}$$

II - التّفكيك إلى عناصر إلى بسيطة:

ليكن F كسرا ناطقا من $K(X)$.

حيث $F = \frac{A}{B}$ حيث (A, B) منتم إلى $K[X] \times K[X]^*$.

بالقيام بالقسمة الإقليديّة لِـ A على B، نحصل على: $F = \frac{A}{B} = E + \frac{R}{B}$

حيث E و R كثيرا حدود من $K[X]$ بحيث:

$d^\circ R < d^\circ B$ أو $R = 0$.

1 - تعاريف:

أ) يسمّى E الجزء الصّحيح لِـ: F.

ب) يسمّى $\frac{R}{B}$ الكسر الذّاتي (أو الفعلي)، (لأنّ: $d^\circ R < d^\circ B$)

ج) يقال عن F إنّه غير قابل للاختزال إذا لم تكن لكثيري الحدود A و B جذور مشتركة.

2 - ليكن $F = \frac{A}{B}$ كسرا فعليّا غير قابل للاختزال. نعلم أنّه تمكن كتابة B على الشّكل:

$B = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ مع : $a_n \neq 0$

غير أنّه يمكننا أن نفترض في F أنّ a_n يساوي 1 دون المسّ

بشمولية المسألة. بهذه الشّروط نثبت أنّه:

1) إذا كان $K = \mathbb{R}$، فإنّ :

$$B = (X^2 + p_1 X + q_1)^{k_1} \dots (X^2 + p_s X + q_s)^{k_s} (X - c_1)^{r_1} \dots (X - c_\ell)^{r_\ell}$$

حيث $c_1, \dots, c_\ell$ هي جذور B الحقيقيّة و $p_j^2 - 4q_j < 0$ من أجل كل $j = 1, \dots, s$. ومن هنا يأتي التّفكيك إلى عناصر بسيطة من النوع الثاني لـ $\frac{A}{B}$:

$$F = \frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{A_{1i} X + B_{1i}}{(X^2 + p_1 X + q_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{s} \frac{A_{si} X + B_{si}}{(X^2 + p_s X + q_s)^i} + \sum_{i=1}^{r_1} \frac{C_{1i}}{(X - c_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{r_\ell} \frac{C_{\ell i}}{(X - c_\ell)^i}$$

المعاملات حقيقيّة.

ويستخدم هذا التّفكيك في مكاملة الكسور النّاطقة.

2) إذا كان $K = \mathbb{C}$، فإنّ : $B = (X - c_1)^{k_1} \dots (X - c_\ell)^{k_\ell}$

حيث $c_1, \dots, c_\ell$ هي جذور B (الحقيقية أو العقدية) المتمايزة ذات درجات المضاعفة $k_1, \dots, k_\ell$، على التّرتيب. ونحصل بذلك على تفكيك F إلى عوامل بسيطة من النّوع الأوّل :

$$F = \frac{A}{B} = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{D_{i1}}{(X - c_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{k_\ell} \frac{D_{i\ell}}{(X - c_\ell)^i}$$

تنتمي المعاملات إلى $\mathbb{C}$.

يسمّى الجذر c_j القطب ذا الرّتبة k_j لِـ f.

تمرين 1. IV :

نعتبر، في الفضاء الشّعاعي $R[X]$، الفضاء الشّعاعي الجزئي F المولّد بواسطة كثيري الحدود $1+X$ وَ $(1+X)^2$، و الفضاء الشّعاعي الجزئي H المولّد بِـ: $1-X$ وَ $(1-X)^2$ و $X(1-X)$

أ) عيّن بعدي H و F.

ب) عيّن $F\cap H$ وأوجد أساسا B_0 لِـ $F\cap H$.

جـ) عيّن أساسا B_1 لِـ: F و أساسا B_2 لِـ: H و أساسا B لِـ: $F+H$ بحيث: $B_0 \subset B_1$ ، $B_0 \subset B_2$ ، $B_1 \subset B$ وَ $B_2 \subset B$

أ)

لدينا:

$$F = \{ a(1+X) + b(1+X)^2 \ ; \ a, b \in R \}$$

لنتحقّق منْ أنّ الشّعاعين $(1+X)$ و $(1+X)^2$ مستقلّان خطيّاً.

ليكن، إذن، a و b عددين حقيقيّين بحيث:

$$a(1+X) + b(1+X)^2 = 0$$

أي:

$$(a+b) + (a+2b)X + bX^2 = 0$$

نحصل على:

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a+2b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

و منه: $a = b = 0$

إذن، فالشّعاعان $1+X$ و $(1+X)^2$ مُستقلّان خطيّاً. و بما أنّهما

يولّدان F، فهما يشكّلان أساسا لـ F؛ وعليه: $\underline{\dim F = 2}$

ننتهج الطّريقة ذاتها من أجل H. كثيرات الحدود الثلاثة مرتبطة خطيّا. لأنّ:

$$(1-x)^2 = (1-x) - x(1-x)$$

نتأكّد من أنّ $(1-x)$ و $x(1-x)$ مستقلّان خطيّا وأنّ $\dim H = 2$

ب)

ليكن P عنصرا من $F \cap H$. لدينا من جهة:

$$P = a(1+x) + b(1+x)^2 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

إذ أنّ $P \in F$ وأنّ $(1+x)$ ، $(1+x)^2$ أساس لـ F.

ومن جهة أخرى لدينا:

$$P = c(1-x) + d(1-x)x \quad , \quad c, d \in \mathbb{R}$$

إذ أنّ $P \in H$ وأنّ $(1-x)$ و $x(1-x)$ أساس لـ H.

ويأتي، إذن:

$$P \in F \cap H \iff \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \; ;$$
$$a(1+x) + b(1+x)^2 = c(1-x) + dx(1-x)$$

ومنه:

$$\begin{cases} a + b = c \\ a + 2b = -c + d \\ b = -d \end{cases}$$

وبالجمع، نجد: $2a + 4b = 0$ ؛ إذن: $b = -\frac{a}{2}$. وهكذا:

$$P = a(1+x) - \frac{a}{2}(1+x)^2$$
$$= \frac{a}{2}(1-x^2)$$

نستنتج من هذا أنّ:

$$F \cap H = \{ k(1-X^2) \ , \ k \in \mathbb{R} \}$$

وأنّ أساسا B_0 لِـ $F \cap H$ هو كثير الحدود $1-X^2$. ($\dim F \cap H = 1$)

ج)

نقوم بتعيين أساس B_1 لِـ F بحيث : $B_0 \subset B_1$. بما أنّ $\dim F = 2$ ، فإنّ B_1 تحتوي عنصرين . ولكن $B_0 \subset B_1$ ، إذن $1-X^2$ عنصر من B_1 ، وعلينا أن نحدد العنصر الآخر P. نتحقق من أنّ: $P = 1+X$ لائق بوضعيتنا (الشعاعان $1+X$ و $1-X^2$ مستقلان خطيا). إذن :

$$B_1 = \{ 1+X \ , \ 1-X^2 \}$$

وبالطريقة ذاتها، يأتي أنّ:

$$B_2 = \{ 1-X \ , \ 1-X^2 \}$$

أساس لِـ H.

وبعد هذا نحصل على أنّ:

$$\dim(F+H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = 3$$

وأنّ أساسا لِـ $F+H$ ، يحتوي على 3 عناصر. ولكن $B_1 \subset B$ و $B_2 \subset B$ ، وعليه نجد

$$B = \{ 1+X \ , 1-X \ , 1-X^2 \}$$

تمرين IV2:

ليكن K الحقل التبديلي $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. من أجل كلّ كثير حدود غير منعدم P ذي درجة n أكبر أو تساوي 1، من $K[X]$ ، ثم ثبت أنّ الخصائص الثلاثة متكافئة :

① a جذر لِـ P رتبته $k > 0$.

② a جذر لِـ P و جذر لـ P' رتبته $(k-1)$

③ $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$ ، $P^{(k)}(a) \neq 0$ $(k \leq n)$

لنثبت أنّ : ① ⇐ ②

ليكن P كثير حدود غير منعدم لِـ $K[X]$ ،
وليكن a جذرا رتبته k لِـ P. عندئذ ،يوجد كثيرحدود غيرمنعدم Q لِـ $K[X]$ بحيث :

$$P = (X-a)^k Q \quad \text{(و)} \quad Q(a) \neq 0$$

لدينا :

$P(a)=0$: إذن ، a جذر لِـ P. ومن جهة أخرى ، لدينا:

$$P' = (X-a)^{k-1}\left[kQ + (X-a)Q'\right]$$
$$= (X-a)^{k-1} R$$

و $R(a) = kQ(a) \neq 0$

إذن a جذر رتبته $(k-1)$ لكثير الحدود P'.

لنثبت أنّ: ② ⇐ ③ :

بما أنّ a جذر لِـ P وجذر لـ P' ، إذن :

$$P(a) = P'(a) = 0$$

وتبعا لذلك ، وما دام a جذرا رتبته $k-1$ لكثير الحدود P' ، يكون a ، عندئذ ، جذرا رتبته $(k-2)$ لكثير الحدود P'' (لأنّ ① ⇐ ②) ، إذن : $P''(a)=0$.

و بالاستمرار على هذا النّحو ، نجد أنّ a جذر رتبته 2 لكثير الحدود $P^{(k-2)}$ ، وبالتّالي فهو جذر بسيط لكثير الحدود $P^{(k-1)}$ ؛ ومنه :

$$P^{(k-2)}(a) = P^{(k-1)}(a) = 0 ,$$

وزيادة على ذلك ، يوجد كثير حدود G ، بحيث :

$P^{(k-1)} = (X-a)\,G$ و $G(a) \neq 0$.

وباشتقاق المساواة الأخيرة، نحصل على:

$$P^{(k)} = G + (X-a)\,G'$$

ومنه:

$$P^{(k)}(a) = G(a) \neq 0$$

لنثبت أنّ ③ ⟸ ①:

لنكتب صيغة تايلور من أجل كثير الحدود P ذي الدّرجة $n \geq 1$، عند جوار النّقطة a:

$$P = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(X-a) + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1} +$$

$$+ \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k} + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^{n}.$$

وبأخذ الشّروط المعطاة في ③ في الحسبان، نحصل على:

$$P = (X-a)^k \left[\frac{P^{(k)}(a)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^{n-k} \right]$$

$$= (X-a)^k R.$$

و:

$$R(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

وبالتّالي a جذر رتبته k لكثير الحدود P.

تمرين IV.3 :

عيّن المعامل a بحيث يكون لكثير الحدود :

$$P = x^5 - ax^2 - ax + 1$$

جذر يساوي -1 درجة مضاعفته لا تقلّ عن 2.

حسب التمرين IV.2، يكون -1 جذرا رتبته k $2 \leq k \leq 5$ لكثير الحدود P إذا و فقط إذا كانت مشتقات P إلى غاية الرّتبة $(k-1)$ منعدمة عند النّقطة -1 و كانت المشتقة ذات الرّتبة k لا تنعدم عند (-1).

نلاحظ أنّ :

$$P(-1) = 0 \;;\; \forall a \in \mathbb{R}$$

إذن $x = -1$ جذر لكثير الحدود P. وبالتّالي :

$$P' = 5x^4 - 2ax - a$$

و

$$P'(-1) = 5 + a$$

لكي تكون رتبة مضاعفة الجذر $x = -1$، k، أكبر أو تساوي 2، يلزم أن يكون $P'(-1)$ مساويا الصّفر. (و إلاّ يكون $x = -1$ جذرا بسيطا لكثير الحدود المعطى). و منه:

$$P'(-1) = 5 + a = 0 \Rightarrow a = -5$$

و $P = x^5 + 5x^2 + 5x + 1$ $\quad P''(-1) \neq 0$

و $P'' = 20x^3 + 10$:

وزيادة على ذلك، نستنتج أنّه من أجل $a = -5$ يكون $x = -1$ جذرا مضاعفا لكثير الحدود المعطى.

تمرين 4.IV :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و

$$E_{n+1} = \{ P \in \mathbb{C}[X] \ / \ d^\circ P \leq n \}$$

أ) أثبت أنّ E_{n+1} فضاء شعاعي على $\mathbb{C}$. أوجد بعده.

ب) ليكن $(n+1)$ كثير حدود P_i ، $i = 0, 1, \ldots, n$ في E_{n+1} بحيث:

$$d^\circ P_i = i$$

أثبت أنّ كثيرات الحدود P_i ، $i = 0, 1, \ldots, n$ تشكّل أساسا في E_{n+1}.

ج) ليكن B عنصرا من E_{n+1} و

$$F_B = \{ P \in E_{n+1} \ / \ P = BQ \ , \ Q \in E_{n+1} \}$$

أثبت أنّ F_B فضاء شعاعي على $\mathbb{C}$ بعده يساوي $n-k+1$ حيث

$$k = d^\circ B \ , \quad 1 \leq k \leq n$$

د) لتكن المجموعة :

$$G_k = \{ P \in E_{n+1} \ / \ d^\circ P \leq k-1 \}$$

أثبت أنّ :

$$G_k \oplus F_B = E_{n+1}$$

هـ) أثبت، بواسطة مثال محسوس، أنّ إتّحاد فضائين شعاعيين جزئيين ليس، بالضرورة، فضاء شعاعيا جزئيا.

أ) يكفي البرهان بأنّ E_{n+1} فضاء شعاعي جزئي للفضاء الشعاعي $\mathbb{C}[X]$. (أنظر التمرين 4.II). نتأكّد بسهولة من أنّ E_{n+1} فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathbb{C}[X]$ وأنّ كثيرات الحدود $1, X, X^2, \ldots, X^n$ تولّد E_{n+1} وأنّها مستقلة خطيا في E_{n+1}.
إذن : $\dim E_{n+1} = n+1$

ب) يكفي الإثبات أنّ جماعة كثيرات الحدود P_i ، $i = 0, 1, \ldots, n$ جماعة مستقلة في E_{n+1} ، أو أنّها جماعة مولّدة لـ E_{n+1} ، لأنّ $\dim E_{n+1} = n+1$.

لنثبت أنّها مستقلّة خطيا. لتكن ، إذن ، a_0 ، ... ، a_n أعدادا عقدية بحيث :

$$a_0 P_0 + \cdots + a_n P_n = 0$$

إنّ المعامل المهيمن لهذا المجموع وحيد ، وهو معامل العنصر $a_n P_n$ إذن $a_n = 0$. ينتج من ذلك أنّ :

$$a_0 P_0 + \cdots + a_{n-1} P_{n-1} = 0$$

وبالمثل :

$$a_0 = 0 \ ، \ a_1 = 0 \ ، \ \ldots \ ، \ a_{n-2} = 0 \ ، \ a_{n-1} = 0$$

وهكذا ، يكون الـ $(n+1)$ كثير حدود المعطاة مستقلّة خطيا وبما أنّ : $\dim E_{n+1} = n+1$ ، فهي تشكّل ، إذن ، أساسا لـ E_{n+1}.

ج) كما كان الحال في السّؤال P) ، يكفي أن نثبت أنّ F_B فضاء شعاعي جزئي لـ E_{n+1}. العنصر الحيادي لـ E_{n+1} (كثير الحدود المنعدم) ينتمي إلى F_B (لمّا $Q = 0$) ؛ وبالتّالي ، ليكن P و P' عنصرين من F_B وليكن a و b عنصرين من $\mathbb{C}$. لدينا :

$$P = BQ \quad \text{و} \quad P' = BQ' \quad ; Q, Q' \in E_{n+1}$$

إذن :

$$aP + bP' = B(aQ + bQ')$$

وبما أنّ E_{n+1} فضاء شعاعي جزئي ، فإنّ :

$$aQ + bQ' \in E_{n+1}$$

إذن :

$$aP + bP' \in E_{n+1}$$

لنعتبر كثيرات الحدود التّالية ، من E_{n+1} :

$P_0 = B$ ، $P_1 = XB$, ..., $P_{n-k} = X^{n-k}B$

نتحقّق بسهولة من أنّ كثيرات الحدود المعرّفة بالكيفية السّابقة، مستقلّة خطيا.

لنثبت أنّها تشكّل جماعة مولّدة لِ F_B. ليكن P عنصرا غير منعدم لِ E_{n+1}. يكون لدينا عندئذ:

$$P = BQ \quad (\text{و}) \; Q \in E_{n+1}$$

و لدينا:

$$d^\circ Q = d^\circ P - d^\circ B \leq n-k$$

إذن Q عنصر من الفضاء الشّعاعي الجزئي : E_{n-k+1} $(E_{n-k+1} \subset E_{n+1})$ المشكّل من كثيرات الحدود ذات المعاملات في $\mathbb{C}$ والدرجة أصغر أو تساوي $n-k$. نستنتج من (P) أنّ:

$$1, X, \ldots, X^{n-k}$$

أساس لِ : E_{n-k+1} و بالتّالي فإنّ Q يكتبُ على شكل عبارة خطية لهذه العناصر. توجد، إذن، أعداد عقديّة a_0، a_1، ...، a_{n-k} بحيث

$$P = B(a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-k} X^{n-k})$$
$$= a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_{n-k} P_{n-k}$$

إذا كان P منعدما، نأخذ Q منعدما.

تشكّل كثيراتُ الحدود:

$$P_0, P_1, \ldots, P_{n-k}$$ ،

إذن، أساسا لِ F_B و عليه فإنّ : $\dim F_B = n-k+1$

(5 نلاحظ أنّ G_k فضاء شعاعي جزئي لِ E_{n+1}، بعده k.

ليكن P عنصرا كيفيا من E_{n+1}. طبقا لقسمة P الإقليدية على كثير الحدود B، يوجد كثيرا حدود وحيدان Q و R بحيث:

$$P = BQ + R \quad (\text{و}) \; R = 0 \;\text{ أو }\; d^\circ R < d^\circ B = k$$

إذن :
$$E_{n+1} = F_B \oplus G_k$$

هـ) ليكن :
$$F_1 = \{ P \in E_{n+1} / P = (X+1)Q \;,\; Q \in E_{n+1} \}$$

$$F_2 = \{ S \in E_{n+1} / P = XR \;,\; R \in E_{n+1} \}$$

إنّ F_1 و F_2 فضاءان شعاعيّان جزئيّان لِـ E_{n+1} ، ولكن :
$$(X+1) - X = 1 \notin F_1 \cup F_2$$
إذن $F_1 \cup F_2$ ليس فضاء شعاعيّا جزئيا لِـ E_{n+1} (أنظر التمرين II.17)

------ ----- -----

تمرين 5. IV :

ليكن P عنصرا من $\mathbb{R}[X]$ درجته أكبر أو تساوي 2.
أثبت أنّه إذا كانت جميع جذور P حقيقية، فإنّ الأمر كذلك بالنسبة لجذور كثير الحدود المشتق.

لتكن $d^\circ P = n$ $(n \geq 2)$ و $a_1, \dots, a_p$ جميع الجذور المتمايزة مثنى مثنى لِـ P، وذات رتب المضاعفة $k_1, \dots, k_p$ على التوالي؛ مع : $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$.
حسب مبرهنة التزايدات المنتهية، يوجد $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ ، $i = 1, \dots, p-1$ ، بحيث :
$$P(a_{i+1}) - P(a_i) = (a_{i+1} - a_i) P'(b_i)$$
وبما أنّ :
$$P(a_{i+1}) = P(a_i) = 0 \quad ; \; i = 1, \dots, p-1$$

إذن :

$$P'(b_i) = 0 \quad , \; i = 1, \ldots, p-1$$

و هكذا يقبل P'، $(p-1)$ جذرا $\{b_{p-1}, \ldots, b_1\}$ حقيقيا متمايزا مثنى مثنى، و هي ليست جذورا لـ P.

و من جهة أخرى، و طبقا للتمرين 2. IV، فإنّ a_i جذر لكثير الحدود P'، رتبة (درجة) مضاعفته $k-1$. و هكذا، يقبل P'، أيضا،

$$(k_1-1) + (k_2-1) + \cdots + (k_p-1) = n-p$$

جذرا حقيقيّا يتمتع بها P أيضا (أي أنّها جذور لـ P)
و منه يقبل P' (على الاقل)

$$(p-1) + (n-p) = n-1$$

جذرا حقيقيّا. و بما أنّ: $d^oP = n-1$، فإنّ جذور كثير الحدود P' حقيقية جميعها.

تمرين 6. IV.

ليكن P عنصرا من $\mathbb{R}[X]$ درجته n $(1 \leq n)$.
أثبت أنّ يقبل P القسمة على مشتقّه P' إذا و فقط إذا كان P من الشّكل :

$$P = a(x-b)^n \quad \text{حيث} \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ و } b \in \mathbb{R}$$

---

i) ليكن

$$P = a(x-b)^n$$

يكون لدينا عندئذ :

$$P' = an(x-b)^{n-1}$$

إذا :
$$P = \frac{1}{n}(x-b)\,P'$$
بمعنى أنّ كثير الحدود P يقبل القسمة على كثير الحدود P'.

ii) ليكن P كثير الحدود من $R[X]$:
$$P = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n \quad , a_0 \neq 0$$
لنفترض أنّ P قابل للقسمة على كثير الحدود P'. عندئذ يوجد كثير حدود Q بحيث :
$$P = P'Q$$
وبما أنّ :
$$P' = a_0 n X^{n-1} + a_1 (n-1) X^{n-2} + \dots + a_{n-2} 2X + a_{n-1}$$
و $a_0 n \neq 0$ ،
يكون كثير الحدود P' من الدّرجة $(n-1)$ و Q كثير حدود درجته 1.
ليكن :
$$Q = AX + B ; \quad A \neq 0$$
وهكذا يأتي :
$$P = P'(AX+B)$$
المعامل المهيمن لكثير الحدود P هو a_0 ، وبالمطابقة ، نحصل على:
$$a_0 = a_0 n A$$
ومنه : $A = \frac{1}{n}$ (مادام $a_0 \neq 0$)
وبالكيفيّة ذاتها نحصل على:
$$a_1 = a_0 n B + a_1 (n-1) A$$
ومنه :
$$B = \frac{a_1}{a_0 n^2}$$
وعليه :

$$P = P'\left(\frac{x}{n} + \frac{a_1}{a_0 n^2}\right)$$

أوْ :

$$nP = P'\left(x + \frac{a_1}{a_0 n}\right)$$

لنضع، الآن،

$$b = -\frac{a_1}{a_0 n} \quad , \; b \in \mathbb{R}$$

نحصل على :

$$nP = (x-b)\, P' \qquad (*)$$

وباشتقاق هذه المساواة ، نحصل على :

$$(n-1)\, P' = (x-b)\, P''$$

وباشتقاق هذه المساواة الأخيرة ، من جديد ، نجد :

$$(n-2)\, P'' = (x-b)\, P'''$$

و بواسطة هذا المنهج، نحصل بالتعويض في الصيغة (*)، على :

$$P = \frac{(x-b)^n}{n!}\, P^{(n)} = \frac{(x-b)^n}{n!}\, n!\, a_0 = a_0 (x-b)^n$$

نضع عندئذ : $a = a_0$ ؛

وهكذا يصبح كثير الحدود P ذا الشكل :

$$P = a(x-b)^n$$

تمرين 7. IV :

من أجل :

نضع : $P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{C}[x]$

1) أثبت أنّ : $\overline{P} = \overline{a_0} x^n + \overline{a_1} x^{n-1} + \dots + \overline{a_n}$

أ) $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$. ب) $\overline{\overline{P}} = P$. جـ) $\overline{P.Q} = \overline{P}.\overline{Q}$

٢) أثبت أنّه يكون a جذرا رتبته k لِـ P إذا وفقط إذا كان $\bar{a}$ جذرا رتبته k لِـ $\bar{P}$.

---

١) استخدم تعريف $\bar{P}$ و $\bar{Q}$ و خصائص الأعداد العقدية.

٢) أ) ليكن a جذرا رتبته k لِـ P. يوجد، عندئذ، كثير حدود Q بحيث:

$$P = (X-a)^k Q \quad (\text{مع}) \quad Q(a) \neq 0$$

وباستخدام السؤال (١)، نحصل على:

$$\bar{P} = (X-\bar{a})^k \bar{Q}$$

وعلاوة على ذلك، وما دام

$$\bar{Q}(\bar{a}) = \overline{Q(a)}$$

و $Q(a) \neq 0$، فإنّ: $\overline{Q(a)} \neq 0$. إذن:

$$\bar{P} = (X-\bar{a})^k \bar{Q} \quad \text{و} \quad \bar{Q}(\bar{a}) \neq 0$$

أي أنّ $\bar{a}$ جذر، رتبته k، لِـ $\bar{P}$.

ب) ليكن $\bar{a}$ جذرا، رتبته k، لِـ $\bar{P}$. حسبما جاء في (أ)، يكون $\bar{\bar{a}}$ جذرا، رتبته k، لِـ $\bar{\bar{P}}$. ولكن $a = \bar{\bar{a}}$ و $P = \bar{\bar{P}}$، إذن a جذر، رتبته k، لِـ P

تمرين IV . 8 :

أ) ليكن P عنصرا من $R[X]$ بحيث: $P(i) = 0$. أثبت وجود كثير حدود Q من $R[X]$ بحيث: $P = (X^2+1)Q$

ب) حلّل كثير الحدود: $P = X^5 + X^3 - X^2 - 1$ إلى العوامل في $C[X]$ ثم في $R[X]$.

أ) بما أنّ i جذر لِـ P، إذن $\bar{i}$ جذر لِـ $\bar{P}$ وذلك طبقا للتمرين
ومن جهة أخرى، P عنصر من $R[X]$، إذن: $\bar{P}=P$؛ وعليه
يكون $\bar{i}=-i$ جذرا لِكثير الحدود P. وهكذا أصبح لدينا جذران
i و $-i$ لكثير الحدود P. يوجد، إذن، كثير حدود Q بحيث:

$$P=(X-i)(X+i)\,Q=(X^2+1)\,Q.$$

إنّ كثير الحدود Q عنصر من $R[X]$ إذ انّه يساوي حاصل قسمة
عنصر P من $R[X]$ على X^2+1 المنتمي إلى $R[X]$، أيضا.

ب) نتحقّق من أنّ: $P(i)=0$. وبعد ذلك، وطبقا للسؤال (أ)،
يوجد كثير حدود P بحيث:

$$P=(X^2+1)\,Q$$

وذلك، لأنّ P عنصر من $R[X]$.
وبالقيام بالقسمة الإقليدية لِـ P على X^2+1، نجد:

$$P=(X^2+1)(X^3-1)$$

ثم مادام للمعادلة: $X^3-1=0$، في C، الجذور 1 و j و $\bar{j}$
(إرجع إلى التمرين III.2) نحصل على التفكيك إلى العوامل لكثير الحدود P
في $C[X]$:

$$P=(X-i)(X+i)(X-1)(X-j)(X+\bar{j}).$$

ولدينا في $R[X]$:

$$P=(X^2+1)(X-1)(X^2+X+1)$$

تمرين IV.9:

أ) عيّن a و b بحيث يكون كثير الحدود:

$$P=X^4+aX^3+bX^2-2X+1$$

قابلا للقسمة على $(X-1)^2$

ب) إعطِ لِـ a و b القيمتين المطلوبتين سابقا وحلّل كثير الحدود P إلى العوامل في $\mathbb{C}[X]$.

الطّريقة الأولى: نستخدم التّمرين IV . 2.

أ) كثير الحدود P قابل للقسمة على $(X-1)^2$؛ إذن $x = 1$ جذر مضاعف لِـ P؛ وعليه، نختار a و b بالكيفية التي تجعل:

$$P(1) = P'(1) = 0$$

ولدينا:

$$P(1) = a + b = 0$$

$$P'(1) = 2 + 3a + 2b = 0$$

وبالتّالي:

$$a = -b = -2$$

ب) بإعطاء لِـ a و b القيمتين المعثور عليهما سابقا، نجد:

$$P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$$

ثمّ مادام P قابلا للقسمة على $(X-1)^2$، فيوجد كثير حدود Q بحيث:

$$P = (X-1)^2 Q$$

وبما أنّ درجة P تساوي 4، إذن يكون Q ذا درجة تساوي 2.

عندئذ، نبحث على Q على الشكل:

$$Q = AX^2 + BX + C \quad , \quad A \neq 0.$$

لدينا:

$$X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2(AX^2 + BX + C)$$

وبمطابقة معاملات الطّرفين، نجد:

$$A = C = 1 \quad \text{و} \quad B = 0$$

ومنه:

$$P = (X-1)^2(X^2+1)$$

ويكون تحليل P إلى العوامل في $\mathbb{C}[X]$ مساويًا:

$$P = (X-1)^2 (X-i)(X+i)$$

الطّريقة الثّانية: نستخدم القسمة الاقليديّة.

أ) بالقيام بقسمة كثير الحدود P الإقليدية على كثير الحدود المساوي $(X-1)^2$، نجد:

$$X^4 + aX^3 + bX^2 - 2X + 1 = (X-1)^2\left(X^2 + (2+a)X + (b+2a+3)\right) + (3a+2b+2)X + (-2a-b-2).$$

ولكي يكون P قابلا للقسمة على كثير الحدود $(X-1)^2$ يلزم أن يكون الباقي، في القسمة الاقليديّة، مساويًا الصّفر. عندئذ نضع

$$3a+2b+2 = 0 \quad \text{و} \quad -2a-b-2 = 0$$

ومنه:

$$a = -2 \quad \text{و} \quad b = 2$$

ب) لدينا:

$$P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$$

وبتعويض a و b، أيضا، في القسمة الإقليديّة، نجد:

$$P = (X-1)^2 (X^2+1)$$

ويكون تفكيك P إلى العوامل في $\mathbb{C}[X]$، كما يلي:

$$P = (X-1)^2 (X-i)(X+i)$$

تمرين 10. IV:

فكّك، وفق عناصر بسيطة من النّوع الثّاني في $\mathbb{R}(X)$، الكسور النّاطقة التّالية:

أ) $\dfrac{2X-1}{(X-2)(X+3)}$ ؛ ب) $\dfrac{2X+1}{(X-2)^3}$

ج) $\dfrac{3x^5+2x^4+x^2+3x+2}{x^2+1}$ ؛ (ى $\dfrac{x^5}{(x+1)(x^2+4)^2}$

أ) ليكن : $P=2x-1$ و $Q=(x-2)(x+3)$

بما أنّ : $d^oP=1<d^oQ=2$ ، و بما أنّ كثير الحدود Q يقبل جذرين حقيقيّين متمايزين ، إذن يصبح للتّفكيك المطلوب الشّكل التّالي:

$$\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} \quad (*)$$

حيث A و B ثابتان حقيقيان .

بضرب المساواة $(*)$ في $x-2$ وبوضع $x=2$ ، نحصل على : $A=\frac{3}{5}$.

ثم بضرب $(*)$ في $x+3$ و بوضع : $x=-3$ ، نجد : $B=\frac{7}{5}$.

وعليه ، يأتي :

$$\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{3}{5(x-2)}+\frac{7}{5(x+3)}$$

ب) ليكن : $P=2x+1$ و $Q=(x-2)^3$.

بما أنّ : $d^oP=1<d^oQ=3$ ، و بما أنّ Q يقبل جذرا حقيقيا مضاعفا 3مرات $(x=2)$ ، إذن يكون للتفكيك المطلوب في $R[X]$ الشّكل:

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3} \quad (**)$$

حيث A و B و C ثوابت حقيقيّة.

بضرب $(**)$ في $(x-2)^3$ ثم بوضع : $x=2$ ، نحصل على $C=5$.

ومن ثم وبضرب المساواة ذاتها في $(x-2)^3$ نحصل على:

$$2x+1=A(x-2)^2+B(x-2)+C$$

وبمطابقة المعاملات ، نجد : $A=0$ و $B=2$.

وهكذا :

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{5}{(x-2)^3} .$$

ج) ليكن: $P = 3x^5 + 2x^4 + x^2 + 3x + 2$ و $Q = x^2 + 1$

بما أنّ: $d^\circ P = 5 > d^\circ Q = 2$ ، نقوم، أولا، بقسمة P الاقليدية على Q لكي نردّ إلى كسر ناطق فعلي. نجد، بعد القسمة الإقليدية:

$$\frac{3x^5+2x^4+x^2+3x+2}{x^2+1} = 3x^3+2x^2-3x-1 + \frac{3(2x+1)}{x^2+1}$$

وبما أنّ باقي القسمة الاقليديّة عنصر بسيط (مادام x^2+1 لا يقبل جذورا حقيقيّة)، يكون تفكيك الكسر المعتبر معطى بالصّيغة السّابقة.

د) ليكن: $P = x^3$ و $Q = (x+1)(x^2+4)^2$

لدينا: $5 = d^\circ Q > 3 = d^\circ P$.

يقبل كثير الحدود Q جذرا حقيقيا: $x = -1$. و من جهة أخرى ليس لـ x^2+4 جذورا حقيقية، وعليه، فإن تفكيك الكسر المعتبر هو التّالي: (في $R[x]$)

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \quad (***)$$

حيث A و B و C و D و E ثوابت حقيقيّة.

بضرب المساواة (***) في $x+1$ ، وبوضع $x=-1$ ، نجد: $A = -\frac{1}{25}$

ثم، من بعدها، نقوم بضرب (***) في x ونجعل $x \to +\infty$ ، فنجد:

$$0 = A + B \implies B = \frac{1}{25}$$

وبضرب (***) في $(x^2+4)^2$ وبوضع $x = 2i$ نجد: $E = -\frac{16}{5}$ و $D = -\frac{4}{5}$. و أخيرا، وبوضع $x = 0$ في (***) نجد: $C = \frac{6}{25}$

ومنه:

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2} = -\frac{1}{25(x+1)} + \frac{x+24}{25(x^2+4)} - \frac{4x+16}{5(x^2+4)^2}$$

تمرين 11. IV :

فكّك الكسور المواليّة إلى عناصر بسيطة من النّوع الأوّل في $\mathbb{C}[X]$، ثمّ من النّوع الثّاني في $\mathbb{R}[X]$:

أ) $\dfrac{1}{X^3-1}$ ؛ ب) $\dfrac{X+1}{X^2+2X+2}$

ج) $\dfrac{X^6-X^5+X^4-2X^3+X^2-X+2}{X^5+X^3-X^2-1}$.

أ) ليكن :

$$Q = X^3-1 \quad \text{و} \quad P=1$$

بما أنّ : $d^\circ P = 0 < d^\circ Q = 3$ و Q يقبل في $\mathbb{C}$ 3 جذور متمايزة : $X=1$ و $X=j$ و $X=\bar{j}$ (أنظر التمرين 2. III) ، إذن يكون للكسر المعتبر الشّكل التالي:

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X-j} + \frac{C}{X-\bar{j}} \quad (*)$$

حيث A وB وC ثوابت عقديّة.

بضرب (*) في $X-1$ وبوضع $X=1$ نجد : $A=\frac{1}{3}$. وبضرب (*) في $X-j$ وبوضع $X=j$ ، يكون لدينا:

$$B = \frac{1}{(j-1)(j-\bar{j})} = \frac{1}{3}j .$$

وبالطّريقة ذاتها نجد :

$$C = \frac{1}{(\bar{j}-1)(\bar{j}-j)} = \frac{1}{3}\bar{j} .$$

ومنه، نجد في $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{(j+\bar{j})X - 2j\bar{j}}{(X-j)(X-\bar{j})}\right)$$

ولدينا في $R[X]$:

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{(j+\bar{j})X - 2j\bar{j}}{(X-j)(X-\bar{j})}\right)$$

نجد :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right)$$

ب) ليكن : $Q = X^2+2X+2$ و $P = X+1$

بما أنّ : $d^\circ P = 1 < d^\circ Q = 2$ و أنّ Q يقبل جذرين متمايزين $x_1 = -1+i$ و $x_2 = -1-i$ ، في $\mathbb{C}$ ، إذن يكون التفكيك وفق عناصر بسيطة في $C[X]$، من الشكل :

$$\frac{X+1}{X^2+2X+2} = \frac{A}{X-x_1} + \frac{B}{X-x_2} \quad (**)$$

حيث A و B ثابتان عقديان. بضرب المساواة $(**)$ في $X-x_1$ ثمّ بوضع $X = x_1$ ، نحصل على : $A = \frac{1}{2}$. وبضرب المساواة ذاتها في $X-x_2$ ثمّ بوضع $X = x_2$ ، نجد : $B = \frac{1}{2}$؛ وبذلك يأتي التفكيك المطلوب في $C[X]$:

$$\frac{X+1}{X^2+2X+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-x_1} + \frac{1}{X-x_2}\right).$$

وفي $R[X]$، يكون الكسر المعتبر عنصرا بسيطا.

ج) قم ،أوّلا، بالقسمة الإقليديّة واستخدم، بعد ذلك، التّمرين IV.8 من أجل جذور كثير الحدود

$$P = X^5 + X^3 - X^2 - 1$$

ملاحظة: إنّ تفكيك الكسور النّاطقة وفق عناصر بسيطة من النّوع الثّاني ،مستخدم في حساب التّوابع الأصليّة.

تمرين 12. IV :

أحسب المجموعين :

أ) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ؛ ب) $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

استنتج نهايتي S_n و T_n عندما يؤول n إلى مالانهاية.

أ) بما أنّ : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ، إذن :

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

ومنه :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

و

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

ب) بما أنّ :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

إذن :

$$T_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$$

إذن:

$$T_n = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

ومنه :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{4}$$

الفصل V.

التّطبيقات الخطيّة.

I. عموميّات:

1. تعريف:

ليكن $(E,+,.)$ و $(F,+,.)$ فضائين شعاعيين على حقل واحد K. يقال عن تطبيق f من E في F أنّه K-خطي (أو إنّه خطي) إذا تحقّق مايلي: من أجل كلّ u و v من E و a من K، يكون لدينا:

$$f(u+v) = f(u)+f(v)$$

$$f(au) = af(u)$$

و يقال أيضا إنّ f تماثل لـK-فضاءات شعاعية، من E في F.

يسمّى كلّ تطبيق خطّي تقابلي تشاكلا.

يسمّى كلّ تطبيق خطّي من E في E تماثلا داخليا لـ E.

يسمّى كلّ تشاكل من E في E تشاكلا ذاتيا لـ E.

يسمّى كلّ تطبيق خطّي من E في K شكلا خطيا.

ملاحظتان:

أ) يكون f خطيا إذا وفقط إذا تحقق الشّرط التّالي:

$$\forall u,v \in E \;,\; \forall\, a,b \in K : f(au+bv) = af(u)+bf(v)$$

ب) كلّ تطبيق خطّي f من E في F تماثل لزمر آبلية، إذن: $f(0_E)=0_F$، ومهما يكن u، فإنّ: $f(-u) = -f(u)$

3- صورة تطبيق خطي ونواته:

ليكن f تطبيقا خطيا من فضاء شعاعي E في فضاء F.

أ) صورة f هي المجموعة $f(E)$ المرموز لها أيضا بـ: $\underline{Im f}$;

$$Im f = \{ v \in F / \exists u \in E , v = f(u) \} \; ; \; Im f \subset F$$

ب) نواة f هي مجموعة العناصر u من E بحيث $f(u) = 0_F$. نرمز لها بـ: $\underline{Ker f}$

$$\underline{Ker f} = \{ u \in E / f(u) = 0_F \} \; ; \; Ker f \subset E$$
$$= f^{-1}(\{0\})$$

3-3 أمثلة:

أ) ليكن E و F فضائين شعاعيين معطيين. عندئذ يكون التطبيق المنعدم θ من E في F خطيا.

ونتحقق من أن: $Ker\,\theta = E$ و $Im\,\theta = \{0_F\}$

ب) إن التطبيق

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x - y$$

شكل خطي. نواة f هي الفضاء الشعاعي الجزئي على $\mathbb{R}$ المولد بـ $(1,1)$. $Im f = \mathbb{R}$.

ج) لنشر بـ: F إلى الفضاء الشعاعي على $\mathbb{R}$ المشكل من التوابع من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$، و بـ: D إلى الفضاء الشعاعي الجزئي لـ F المشكل من التوابع القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. عندئذ، يكون التطبيق:

$$d : D \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto f'$$

$\mathbb{R}$- خطيا.

4- مبرهنة:

ليكن f تطبيقا خطيا من E في F.

أ) صورة فضاء شعاعي جزئي لـ E، وفق f، فضاء شعاعي جزئي لـ F.
ب) الصّورة العكسية لفضاء شعاعي جزئي من F، وفق f، فضاء شعاعي جزئي لـ E.
ج) يكون f متباينا إذا وفقط إذا كانت: $Ker f = \{0_E\}$
نستنتج من أ) و ب) أنّ $Im f$ ($Ker f$ على التّوالي) فضاء شعاعي جزئي لـ F (لـ E على التّوالي).

II عمليّات على التّطبيقات الخطيّة:

1- ليكن E و F K- فضائين شعاعيين و a عنصرا من K.
وليكن $f: E \longrightarrow F$ و $g: E \longrightarrow F$ تطبيقين خطيين.
نثبت أنّ التّطبيقين $f+g$ و af المعرّفين بـ: $(af)(u) = af(u)$
و $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$، خطيّان من E في F.
2- لتكن E و F و G ثلاثة فضاءات شعاعيّة على حقل واحد K.
وليكن $f: E \longrightarrow F$ و $g: F \longrightarrow G$ تطبيقين خطيين. نثبت أنّ $g \circ f$ تطبيق خطي من E في G.
3- إذا كان f تشاكلا من E على F فإنّ f^{-1} تشاكل من F على E.

ملاحظة:

نرمز بـ: $L_K(E,F)$ لمجموعة التّطبيقات الخطيّة من E في F أو بـ: $Hom_K(E,F)$

و نرمز بـ: $L_K(E)$ لمجموعات التّماثلات الدّاخلية لـ E، أو نرمز لها بـ: $End_K(E)$.

نتحقّق من أنّ: $(L_K(E,F), +, \cdot)$ K- فضاء شعاعي.
وأنّ: $(L_K(E), +, \circ)$ حلقة واحديّة تحقّق العلاقة:
$$a(g \circ f) = (ag) \circ f = g \circ (af) \; ; \forall a \in K$$

تسمّى مجموعة تشاكلات E الذّاتيّة زمرة خطيّة لـ E. يُرمز لها بـ: $GL(E)$

نثبت أنّ $(GL(E), \circ)$ زمرة (غير تبديلية، في العموم).

III التطبيقات الخطيّة المعرّفة في فضاء شعاعي ذي بعد منتهٍ

1. مبرهنة أساسية 1:

ليكن E فضاء شعاعيا على K، بعده n.

وليكن $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساسا لـ E، وليكن F فضاء شعاعيًا كيفيا على K.

إذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ أشعة معطاة من F، فإنّه يوجد تطبيق خطي وحيد f بحيث: $f(e_i) = y_i$ ؛ $i = 1, \dots, n$.

ملاحظة: يتضح، من خلال هذه المبرهنة، أنه إذا كان f و g تطبيقين خطيين، فلكي يكونا متساويين، يكفي أن تكون لهما نفس الصّور على أساس لـ E.

2. مبرهنة التّمييز (التّخصيص):

ليكن f تطبيقا خطيّا من E في F و B أساسا لـ E.

أ) يكون f متباينا إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ مستقلّة.

ب) يكون f غامرا إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ مولّدة لـ F.

ج) يكون f تشاكلا إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ أساسا لـ F

مبرهنة (التّشاكل):

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K، بعداهما منتهيان.

أ) E متشاكل مع F إذا وفقط إذا: $\dim_K E = \dim_K F$

ب) $\dim_K E = n$ إذا وفقط إذا كان E متشاكلا مع K^n.

3- مرتبة تطبيق خطي:

أ) مبرهنة أساسية 2. :

ليكن E فضاء شعاعيا على K، بعده منته. و ليكن F K-فضاء شعاعيا كيفيا و f تطبيقا خطيا من E في F. يكون لدينا عندئذ:

$$\dim_K E = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f$$

يسمّى بعد صورة f: مرتبة f و يرمز لها بـ: $rg(f)$.

ب) تمييز التشاكلات:

مبرهنة:

ليكن E و F K-فضائين شعاعيين ذوي بعدين منتهيين متساويين. وليكن f تطبيقا خطيا من E في F.

حينئذ، تكون الخصائص الثلاث التالية متكافئة:

(1) f تقابلي.

(2) f متباين.

(3) f غامر.

ملاحظة:

هذه المبرهنة خاطئة في البعد اللاّمنتهي. فمثلا، يكون التماثل الدّاخلي $f : R[X] \longrightarrow R[X]$، $P \longmapsto P'$ غامرا و غير متباين.

تمرين 1. V.

ليكن (e_1, e_2) و (f_1, f_2, f_3) الأساسين القانونيين للفضائين الشّعاعيين على $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على التوالي.

أ) عيّن التّطبيق الخطّي f من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$، الّذي تحقّق:

$$f(e_1) = 2f_2 + f_3 \quad ; \quad f(e_2) = f_2 - f_1$$

ب) أثبت أنّ : $Im\, f$ مستوي شعاعي. إعطِ له معادلة ديكارتية.

أ) ليكن x عنصرا كيفيّا من $\mathbb{R}^2$. علينا أن نعيّن $f(x)$:
بما أنّ (e_1, e_2) أساس لِـ $\mathbb{R}^2$، إذن يوجد سلّميان x_1 و x_2 بحيث،

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

وبما أنّ f خطي لزوما، فإنّ:

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2)$$

وبتعويض $f(e_1)$ و $f(e_2)$ بقيمتيهما، نحصل على:

$$f(x) = -x_2 f_1 + (2x_1 + x_2) f_2 + x_1 f_3$$

وهكذا:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (-x_2, 2x_1 + x_2, x_1)$$

ملاحظة: نشاهد على مثال أنّه من أجل تعريف تطبيق خطّي يكفي معرفة قيمه على الأساس.

ب) يتّضح من تعريف صورة f، يكون لدينا:

$$Im f = \{ y \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists\, x \in \mathbb{R}^2 \text{ و } y = f(x) \}$$

وحسب السؤال (أ) تأتي:

$$Im f = \{ y \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } y = (-x_2, 2x_1 + x_2, x_1) \}$$

وهكذا، وإذا رمزنا بِـ (y_1, y_2, y_3) لِـ y، نحصل على:

$$\begin{cases} y_1 = -x_2 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

ومنه:
$$y_1+y_2-2y_3=0$$

$$\begin{aligned} Im f &= \{(y_1,y_2,y_3)\in \mathbb{R}^3 \;/\; y_1+y_2-2y_3=0\} \\ &= \{(y_1, 2y_3-y_1, y_3) \;;\; y_1\in\mathbb{R},\; y_2\in\mathbb{R}\} \\ &= \{y_1(1,-1,0)+y_3(0,2,1) \;/\; y_1\in\mathbb{R} \text{ و } y_3\in\mathbb{R}\} \end{aligned} \qquad (*)$$

Imf هي الفضاء الشعاعي الجزئي لِـ $\mathbb{R}^3$ المولّد بواسطة الشعاعين $u_1=(1,-1,0)$ و $u_2=(0,2,1)$ المستقلّين خطيًّا؛ إذن: $\dim Imf=2$ وبذلك تكون Imf مستويا شعاعيًّا.

ونشير أيضا إلى أنّه يتّضح من $(*)$ أنّ Imf هي المستوي من $\mathbb{R}^3$ المارّ من المبدإ والذي معادلته الدّيكارتيّة هي: $Y_1+Y_2-2Y_3=0$ حيث يرمز (Y_1, Y_2, Y_3) لنقطة كيفيّة من $\mathbb{R}^3$ (حسب الأساس القانوني).

تمرين V.2 :

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K، و B أساسا لـ E و f تطبيقا خطيًّا من E في F.

1) أثبت أنّ:

أ) f متباين إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ جزءا مستقلًّا لِـ F.

ب) f غامر إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ مولّدة لِـ F.

ج) f تقابلي إذا وفقط إذا كانت $f(B)$ أساسا لِـ F.

د) f متباين إذا وفقط إذا كانت $Ker f=\{0_E\}$

2) أثبت أنّه إذا كان f تطبيقا خطيا تقابليا، يكون f^{-1} عندئذ خطيا.

1) ليكن $f : E \to F$ تطبيقا خطيا و $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ أساسا لِـ E ؛ $(\dim_K E = n)$.

i) (P لتكن a_1 ، a_2 ، ... ، a_n سلّميات في K بحيث :

$$a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) + \dots + a_n f(e_n) = 0_F$$

وبما أنّ f خطي ، إذن، نحصل على:

$$f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n) = 0_F .$$

ولكن، لدينا: $f(0_E) = 0_F$ ، من أجل كل تطبيق خطي من E في F. إذن : $f(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = f(0_E)$ ، وبما أنّ f متباين ، نحصل على :

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = 0_E$$

ومادام $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساسا لـ E، نستنتج أنّ :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

وهكذا ، تكون $f(B) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ جزءا مستقلا لـ F.

ii) وبالعكس ، ليكن $f(B)$ جزءا مستقلاّ لِـ F ، و x، y عنصرين من E بحيث :

$$f(x) = f(y)$$

فمادامت $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ أساسا لِـ E ، فتوجد، إذن، عناصر من K ، x_1 ، x_2 ، ... ، x_n و y_1 ، y_2 ، ... ، y_n بحيث :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \text{و} \quad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

ومنه :

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n)$$

و

$$f(y) = y_1 f(e_1) + y_2 f(e_2) + \dots + y_n f(e_n)$$

لأنّ f خطّي.

وتبعا لما سبق ، نكتب : $f(x) - f(y) = 0_F$

إذن:

$$(x_1-y_1)f(e_1)+(x_2-y_2)f(e_2)+\dots+(x_n-y_n)f(e_n)=0_F$$

وبما أنّ:

$$f(B)=\left(f(e_1),\dots,f(e_n)\right)$$

جزء مستقل لـ F، نستنتج، إذن، أنّ

$$x_1-y_1=x_2-y_2=\dots=x_n-y_n=0$$

وهكذا،

$$x_i=y_i\quad ;\ \forall i=1,\dots,n$$

أي أنّ:

$x=y$ و f متباين.

ب) i) ليكن y عنصرا كيفيا من F؛ فبما أنّ التّطبيق f غامر، يوجد عنصر x من E بحيث $y=f(x)$، ومادام $(e_1,\dots,e_n)$ أساسا لـ E، توجد، عندئذ، سلّميّات x_1، x_2، ...، x_n في K بحيث:

$$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$$

ولدينا، إذن:

$$y=f(x)=f(x_1e_1+\dots+x_ne_n)=x_1f(e_1)+\dots+x_nf(e_n)$$

(لأنّ f خطي). وهكذا، ومن أجل كلّ عنصر y من F، توجد عناصر من K، x_1، ...، x_n بحيث:

$$y=x_1f(e_1)+\dots+x_nf(e_n)$$

وبالتّالي تكون المجموعة $f(B)=\left(f(e_1),\dots,f(e_n)\right)$ جزءا مولدا لـ F.

ii) وبالعكس، ليكن $f(B)$ جزءا مولّدا لـ F وليكن y عنصرا كيفيا لـ F. فتوجد، عندئذ، عناصر من K بحيث:

$$y=y_1f(e_1)+y_2f(e_2)+\dots+y_nf(e_n)$$

وبما أنّ f خطي، نجد:

عندئذ، نضع :
$$y = f(y_1e_1 + \dots + y_ne_n)$$

$$x = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n \ ; \ x \in E$$
وهكذا، ومن أجل كلّ عنصر y من F، يوجد عنصر y من E لحيث $y = f(x)$ ؛ اذن f تطبيق غامر.

ج) إنّه نتيجة مباشرة للسّؤالين (أ) و(ب).

5) ليكن f تطبيقا متباينا. نعتبر نواة f : $Ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$

لدينا: $0_E \in Ker f \quad (*)$

لأنّ $f(0_E) = 0_F$، أو لأنّ $Ker f$ فضاء شعاعي جزئي لـ E.

لنبيّن أنّ :
$$Ker f \subset \{0_E\} \quad (**)$$
ليكن x عنصرا كيفيّا من $Ker f$. لدينا : $f(x) = 0_F$

و بما أنّ $0_F = f(0_E)$، إذن : $f(x) = f(0_E)$. و مادام التّطبيق f متباينا، نستنتج أنّ $x = 0_E$، و منه : $x \in \{0_E\}$

و من $(*)$ و $(**)$ نختم بأنّ : $Ker f = \{0_E\}$

و بالعكس، ليكن $Ker f = \{0_E\}$ و ليكن x و y عنصرين من E لحيث:
$$f(x) = f(y)$$
و بما أنّ f خطي، نستنتج أنّ :
$$f(x-y) = 0_F$$
أي أنّ :
$$x - y \in Ker f = \{0_E\}$$
ومنه: $x = y$ و بالتّالي f تطبيق متباين.

2) ليكن $f : E \longrightarrow F$ تقابلا، و $f^{-1} : F \longrightarrow E$

التّطبيق العكسي لـ f.

ليكن y_1 و y_2 عنصرين من F. فبما أنّ f تقابلي، إذن يوجد عنصران وحيدان x_1 و x_2 من E بحيث:

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{و} \quad y_2 = f(x_2)$$

وعليه، فإنّ:

$$f^{-1}(y_1+y_2) = f^{-1}\left(f(x_1)+f(x_2)\right) = f^{-1}\left(f(x_1+x_2)\right)$$

(لأنّ f خطي)

وبما أنّ f تقابلي، إذن:

$$f^{-1}\left(f(x_1+x_2)\right) = x_1+x_2 = f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)$$

وهكذا:

$$f^{-1}(y_1+y_2) = f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2) \quad , \forall y_1, y_2 \in E$$

ونثبت بالطّريقة ذاتها أنّ:

$$f^{-1}(ay) = a f^{-1}(y) \quad ; \forall a \in K, \ \forall y \in F$$

وبالتّالي، فإنّ f^{-1} خطي.

تمرين V.3:

نعتبر التّطبيقين الخطّيّين f من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ و g من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^3$، والمعرّفين بـ:

$$f(x, y, z) = (-x+y+z, \ x-y+z)$$

$$g(x, y) = (y, x, x+y)$$

أ) عيّن: $\operatorname{Ker} f$ و $\operatorname{Im} f$ و $\operatorname{Ker} g$ و $\operatorname{Im} g$، و بيّن أبعادها.

ب) عيّن $g \circ f$ و $f \circ g$

ج) هل يوجد تطبيق خطي h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ يحقّق: $h \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$ ؟ $g \circ h = Id_{\mathbb{R}^3}$ ؟

لدينا - تعريفا:

$$\begin{aligned} Ker f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x+y+z=0 \text{ و } x-y+z=0\} \end{aligned}$$

نحصل على الجملة الخطيّة التاليّة:

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

التي لها الحلان:

$z=0$ و $x=y$ ومنه:

$$Ker f = \{(x,x,0) \ , \ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) \ , \ x \in \mathbb{R}\}$$

وعليه، فإنّ $Ker f$ هو الفضاء الشّعاعي الجزئي لـ $\mathbb{R}^3$ المولّد بالشّعاع $(1,1,0)$، إذن: $\dim Ker f = 1$.

لنعيّن $Im f$:

$$\begin{aligned} Im f &= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ و } f(x,y,z) = (X,Y)\} \\ &= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ و } (-x+y+z \, ; \, x-y+z) = (X,Y)\} \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} Im f &= \{(-x+y+z \, , \, x-y+z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(-x+y)(1,-1) + z(1,1) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

وإذا رمزنا بـ a لـ $-x+y$ وبـ b لـ z نحصل على:

$$Im f = \{a(1,-1) + b(1,1) \ , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

وبذلك، يكون $Im f$ هو الفضاء الشّعاعي الجزئي لـ $\mathbb{R}^2$، المولّد بواسطة الشّعاعين $(1,-1)$ و $(1,1)$. ونتحقّق بسهولة من أنّ هذين الشّعاعين مستقلاّن خطيا، ويشكلان، إذن، أساسا لـ $Im f$ و $\dim Im f = 2$.

ولدينا من جهة أخرى $Im f \subset \mathbb{R}^2$، وبالتّالي نختم بأنّ: $Im f = \mathbb{R}^2$

وفيما يتعلّق التّطبيق الخطي g ، فلدينا:

$$\ker g = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (y, x, x+y) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

نستنتج ، بكلّ سهولة ، أنّ :

$$\ker g = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

ومنه:

$$\dim \ker g = 0$$

ملاحظة :

g تطبيق متباين.

$$\mathrm{Im}\, g = \{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } g(x, y) = (X, Y, Z) \}$$

نستنتج أنّ :

$$\mathrm{Im}\, g = \{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; X + Y - Z = 0 \}$$

إذن $\mathrm{Im}\, g$ هو مستوي في $\mathbb{R}^3$ ، يمرّ من المبدإ ، و $\dim g = 2$

لنعط أساسا لِ $\mathrm{Im}\, g$:

$$\mathrm{Im}\, g = \{ (X, Y, X+Y) \;/\; (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

وهكذا ، يكون $\mathrm{Im}\, g$ مولّدا بواسطة الشّعاعين : $u_1 = (1, 0, 1)$ و $u_2 = (0, 1, 1)$. وبما أنّ: $\dim \mathrm{Im}\, g = 2$ ، نستنتج أنّهما يشكّلان أساسا لِ $\mathrm{Im}\, g$. و g غير غامر.

ب) نتأكّد من أنّ :

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y + z, -x + y + z, 2z) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x, 2y) \end{aligned}$$

ج) نلاحظ أنّ: $f\circ g = 2\,Id_{\mathbb{R}^2}$ ؛ إذن: $(\frac{1}{2}f)\circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$

وهكذا، يوجد تطبيق خطي h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $h\circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$ ، وبالتأكيد: $h = \frac{1}{2}f$ خطي.

لو أنّ هناك تطبيقا (خطيا) h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $g\circ h = Id_{\mathbb{R}^3}$ ، لكان g غامرا، وذلك غير صحيح.

تمرين V.4 :

نعتبر التابعين الخطيين f و g التاليين:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (2x-4y, x-2y)$$

و

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (3x-4y, x-y)$$

أ) عيّن $\operatorname{Ker} f$ و $\operatorname{Im} f$. بيّن بعديهما. هل f متباين؟ غامر؟

ب) أثبت أنّ g تقابلي. عيّن g^{-1} . أستنتج بعدي $\operatorname{Ker} g$ و $\operatorname{Im} g$.

أ) نتحقّق من أنّ:

$$\operatorname{Ker} f = \{ y(2,1) \; / \; y \in \mathbb{R} \}$$

و

$$\operatorname{Im} f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x = 2y \}$$
$$= \{ y(2,1) \in \mathbb{R}^2 / \; y \in \mathbb{R} \}$$

نستخلص أنّ:

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ و أنّ $\dim \operatorname{Ker} f = 1 = \dim \operatorname{Im} f$.

ويتضح من التمرين 2، II، (S) أنّ f ليس متباينا. كما نستخلص من كون $\dim \operatorname{Im} f = 1 \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ ، أنّ f ليس غامرا.

(مادام f تماثلا داخليا لـ $\mathbb{R}^2$ ، غير متباين ، فلا يمكنه أن يكون غامرا
لأنّ : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$)

ب) نتأكّد أنّه من أجل كلّ زوج (X,Y) من $\mathbb{R}^2$ ، يوجد زوج (x,y) وحيد من $\mathbb{R}^2$ بحيث : $g(x,y) = (X,Y)$ ، ومنه :

$$x = 4Y - X \quad \text{و} \quad y = 3Y - X$$

وعليه ، يكون g تقابليّا و نستخلص :

$$g^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(X,Y) \longmapsto (4Y - X \; , 3Y - X)$$

وبما أنّ g متباين ، إذن : $\dim \ker g = 0$ ، ولدينا ، إلى جانب ذلك :

$$\dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

و بالتّالي :

$$\dim \operatorname{Im} g = 2$$

(يمكن أن نلاحظ أنّ g غامر ، إذن : $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$)

تمرين V.5 :

ليكن E و F فضائين شعاعيّين على $\mathbb{R}$ و f تطبيقا من E في F . ولتكن u_1 ، ... ، u_n أشعّة من E بحيث $f(u_1)$ ، ... ، $f(u_n)$ مستقلّة خطيّا. أثبت أنّ الأشعّة u_1 ، ... ، u_n مستقلّة خطيّا.

لتكن a_1 ، a_2 ، ... ، a_n سلّميّات حقيقيّة بحيث :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0_E \quad (*)$$

علينا أن نثبت أنّ : $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

وبتطبيق f على طرفي $(*)$ ، وباستخدام خطيّة f ، نحصل على :

$$a_1 f(u_1) + \dots + a_n f(u_n) = f(0_E) = 0_F$$

وبما أنّ $f(u_1)$ ، $f(u_2)$ ، ... ، $f(u_n)$ مستقلّة خطيّاً ، نختم بأنّ:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

تمرين 6.V :

ليكن E K-فضاء شعاعيّاً بعده n و $(e_1, \dots, e_n)$ أساساً لـ E.

أ) ليكن f شكلاً خطيّاً على E. عيّن $\dim \ker f$.

ب) ليكن f_1 ، f_2 ، ... ، f_n ، n شكلاً خطيّاً على E ، معرّفاً بـ:

$f_i(e_i) = 1$ و $f_i(e_j) = 0$ ، من أجل $i \neq j$.

أثبت أنّ $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ أساس لفضاء الأشكال الخطية الشعاعي على E.

أ) نذكر بأنّ شكلاً خطياً على E هو -تعريفاً- تطبيق خطي من E في K. يعتبر الحقل التبديلي K ، هنا، كفضاء شعاعي على K نفسه. إنّه ذو بعد مساو 1.

لتعيين $\dim \ker f$ ، نقوم، في البداية، بتعيين $\dim \operatorname{Im} f$ و نستخدم، بعد ذلك، المبرهنة:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = n$$

إذا كان f هو الشكل الخطي المنعدم ، عندئذ يكون لدينا:

$\operatorname{Im} f = \{0_K\}$ ومنه : $\dim \operatorname{Im} f = 0$ ؛ وعليه : $\dim \ker f = n$

إذا لم يكن f منعدما ، عندئذ يوجد عنصر x_0 من E بحيث:

$f(x_0) \neq 0$ ، إذن : $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$. وبالإضافة إلى ذلك ،

$\operatorname{Im} f \subset K$ ، إذن : $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim K = 1$. نستخلص مما سبق أنّ

$\dim \operatorname{Im} f = 1$ ومنه : $\dim \ker f = n-1$.

ب) نلاحظ، أوّلا، أنّ لمجموعة الأشكال الخطيّة على E بنية فضاء شعاعي على K. وللتأكّد من ذلك، يكفي أن نثبت أنّ مجموعة الأشكال الخطية على E فضاء شعاعي جزئي من المجموعة $F(E,K)$ للتّطبيقات من E في K (أنظر التمّرين 4. II). .برمز لهذا الفضاء الشّعاعي، في غالب الأحيان، بـ: $L(E,K)$.

$(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ جماعة مستقلة من $L(E,K)$. وبالفعل: لبكن a_1، a_2، ...، a_n عناصر من K بحيث:

$$a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0_{L(E,K)}$$

لدينا: $(a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(e_i) = 0 \quad ; \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

ومنه: $a_1 f_1(e_i) + \cdots + a_n f_n(e_i) = 0 ; \forall i = 1, \ldots, n$

وباستخدام تعريف الأشكال f_1، ...، f_n، نستخلص أنّ:

$a_i = 0 ; \forall i = 1, \ldots, n$.

وعلاوة على ذلك، تكون الجماعة $(f_1, \ldots, f_n)$ مولّدة لـ $L(E,K)$. لبكن f عنصرا اختياريّا من $L(E,K)$. علينا أن نجد سلّميات في K، a_1، a_2، ...، a_n بحيث:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n$$

نتأكّد من أنّ:

$$a_1 = f(e_1) \quad , a_2 = f(e_2) \quad , \ldots , \quad a_n = f(e_n)$$

تنبيه:

يتضح من الدّرس أنّ مادام $\dim E = n$ ، $\dim K = 1$، فإنّ: $\dim L(E,K) = n.1 = n$. يكفي، إذن، الإثبات بأنّ الجماعة $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ إمّا مستقلة وإمّا مولّدة لـ $L(E,K)$ لكي نجزم بأنّها أساس لـ $L(E,K)$.

تمرين V.7 :

ليكن (e_1, e_2) الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$، و f التّماثل الدّاخلي لـ $\mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة:

$$f(x, y) = (x, 2y - x)$$

أ) أوجد $\mathrm{Ker} f$ و $\mathrm{Im} f$. ماذا تستخلص؟

ب) أوجد جميع الأشعّة (x, y) اللاّمتغيرة وفق f. أثبت أنّها تشكّل فضاء شعاعيا جزئيا لـ $\mathbb{R}^2$، بعده 1.

ج) هل توجد مستقيمات شعاعيّة D من $\mathbb{R}^2$ بحيث: $f(D) = D$ ؟

د) نضع:

$$I = e_1 + e_2 \quad ، \quad J = -e_1 + e_2$$

أثبت أنّ (I, J) أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

هـ) ليكن $u = xe_1 + ye_2 = XI + YJ$.

أوجد أحداثيات $f(u)$ في الأساس (I, J) بدلالة X و Y.

أ) نجد، حسب تعريف نواة f،

$$\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \quad (1)$$

وبالتّالي:

$$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

(لأنّ: $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = 0 + \dim \mathrm{Im} f$)

نستنتج من (1) و (2) أنّ f تقابلي.

ب) علينا تعيين المجموعة F المعرّفة بـ:

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x, y) = (x, y) \}$$

وبتعويض f بقيمته، نجد:

$$F = \{ x(1, 1) \ / \ x \in \mathbb{R} \}$$

إذن، F فضاء شعاعي جزئي لِـ $\mathbb{R}^2$، مولّد بالشّعاع $(1,1)$؛ وبعده يساوي 1.

وهكذا، ينتمي جميع الأشعّة (x,y) الصّامدة (اللاّمتغيّرة) بواسطة f إلى المجموعة F التي تمثّل المنصّف الأوّل في المستوي.

ج) لنعتبر المستقيم D_0 ذا المعادلة: $x=0$ (المحور Oy).

نتحقّق من أنّ:

$$f(D_0) = \{ 2(0,y) \ , \ y \in \mathbb{R} \} = D_0$$

ليكن، الآن، D، المستقيم ذا المعادلة: $y = ax$، $a \in \mathbb{R}$.

نجد:

$$f(D) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = (2a-1)x \ , a \in \mathbb{R} \}$$

نستنتج أنّ: $f(D) = D$، إذا وفقط إذا كان $2a-1 = a$

أي: $a = 1$.

وهكذا، فإنّ المستقيم ذا المعادلة: $y = x$ تحقّق: $f(D) = D$

ملاحظة:

من السؤال (ب) نستخلص، على الفور، أنّ المستقيم الذي معادلته: $y = x$، تحقّق: $D = f(D)$.

د) نتأكّد، بسهولة، من أنّ الشّعاعين I و J مستقلاّن خطيا.

هـ) لدينا:

$$f(u) = X f(I) + Y f(J)$$

نتحقّق من أنّ:

$$f(I) = e_1 + e_2 = I$$

و

$$f(J) = -e_1 + 3e_2 = 2J + I$$

ومنه:

$$f(u) = (X+Y) I + 2Y J.$$

تمرين V. 8 :

ليكن E الفضاء الشعاعي المشكّل من كثيرات الحدود ذات مجهول واحد X ، ومعاملات حقيقية ، ودرجة أصغر أو تساوي 2 .

1) ليكن f التطبيق من E في E ، المعرّف ب :

$$f(P) = -\frac{(X+1)^2}{2}P'' + (X+1)P'$$

حيث P عنصر من E .

أ) أثبت أنّ f تماثل داخلي لـ E وأنّ : $f \circ f = f$

ب) عيّن $\ker f$ و $\operatorname{Im} f$. إعط لكلّ واحد منهما أساسا.

ج) أثبت أنّ : $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$

2) ليكن g التطبيق المعرّف من E في $\mathbb{R}^3$ ، ب :

$$g(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$$

أثبت أنّ g تشاكل وبيّن g^{-1} .

أ) علينا أن نثبت أنّ f تطبيق خطي من E في E . نلاحظ أنّه إذا كان P عنصرا من E ، عندئذ يكون $f(P)$ عنصرا من E .

وبالفعل، ليكن : $P = aX^2 + bX + c$ ؛ a و b و c ∋ $\mathbb{R}$

لدينا : $P' = 2aX + b$ ؛ $P'' = 2a$. ومنه :

$$f(P) = -\frac{(X+1)^2}{2}\cdot 2a + (X+1)(2aX+b)$$
$$= aX^2 + bX + b - a$$

وعليه : $f(P) \in E$.

لنتحقّق من أنّ f خطي. ليكن P و Q عنصرين من E و a_1 و a_2 عددين حقيقيّين. لدينا :

$$f(a_1P + a_2Q) = -\frac{(X+1)^2}{2}(a_1P + a_2Q)'' + (X+1)(a_1P + a_2Q)'$$

$$= -\frac{(x+1)^2}{2}a_1P'' - \frac{(x+1)^2}{2}a_2Q'' + (x+1)a_1P' + (x+1)a_2Q'$$

$$= a_1 f(P) + a_2 f(Q)$$

لنعتبر التّابع المركّب : $f \circ f$. ليكن :

$P = ax^2 + bx + c \quad ; a, b, c \in \mathbb{R}$

عنصرا كيفيا من E . لدينا عندئذ :

$$f(P) = ax^2 + bx + b - a$$ و

$$f(f(P)) = -\frac{(x+1)^2}{2} \cdot 2a + (x+1)(2ax+b)$$
$$= ax^2 + bx + b - a$$

ومنه : $f \circ f = f$

ب - $$\mathrm{Ker} f = \{ P \in E \ / \ f(P) = 0 \}$$
$$= \{ ax^2 + bx + c \ / \ ax^2 + bx + b - a = 0_E \ ; a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

نستخلص من ذلك أنّ : $a = b = c = 0$ ، وعليه تكون :

$$\mathrm{Ker} f = \{ c \ , \ c \in \mathbb{R} \}$$

و هي مجموعة كثيرات الحدود الثّابتة ، و يشكّل كثير الحدود الثّابت 1 أساسا لها

$$\mathrm{Im} f = \{ f(P) \ / \ P \in E \} = \{ ax^2 + bx + b - a \ / \ a, b \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ a(x^2 - 1) + b(x+1) \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \}$$

يشكّل كثيرا الحدود $x^2 - 1$ و $x + 1$ جزءا مولّدا لِـ $\mathrm{Im} f$ ، وهما مستقلّان خطيّا . إذن ، فهما يشكّلان أساسا لِـ $\mathrm{Im} f$ ، و منه يأتي : $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

جـ - نثبت أنّ : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$ على مرحلتين :

i) $$E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$$

ii) $$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{ 0_E \}$$

ج) ليكن : $P = ax^2+bx+c$ ؛ $a, b, c \in \mathbb{R}$، عنصرا كيفيا من E.
يمكن أن نكتب :
$$P = (ax^2+bx+b-a) + (c-b+a) = P_1 + P_2$$
كثير الحدود P_1 عنصر من $\mathrm{Im} f$ وكثير الحدود P_2 عنصر من $\mathrm{Ker} f$.
لدينا إذن : $E \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$. وبما أنّ الإحتواء الآخر واضح، نستخلص أنّ : $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$.

جـ) ليكن : $P = ax^2+bx+c$ ؛ $a, b, c \in \mathbb{R}$، بحيث :
$$P \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$$
لدينا : $P \in \mathrm{Im} f$ ؛ ومنه :
$$P = ax^2+bx+b-a$$
وعليه، فإنّ :
$$c = b-a$$
وعلاوة على ذلك، $P \in \mathrm{Ker} f$، إذن P ثابت وبالتّالي : $a = b = 0$. وما دام $c = b-a$ ، إذن $c = 0$. وهكذا : $P = 0$ ، وعليه : $P \in \{0_E\}$ و :
$$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f \subset \{0_E\}$$
وبما أنّ الإحتواء الآخر محقّق دوما، يكون لدينا:
$$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$$
2) نتأكّد بسهولة من أنّ g تطبيق خطّي. وفيما يتعلّق يكون g تقابليا، سنثبت أنّه من أجل كلّ ثلاثي (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$، يوجد كثير حدود وحيد P من E بحيث : $g(P) = (x, y, z)$. بما أنّ
$$g(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$$
فالمسألة تردّ إلى البحث عن P بحيث :
$$P(1) = x \ , \ P'(1) = y \ , \ P''(1) = z$$
وبما أنّ P له الشكل : $P = ax^2+bx+c$ ؛ $a, b, c \in \mathbb{R}$.
إذن :

$$\begin{cases} P(1) = a+b+c = x \\ P'(1) = 2a+b = y \\ P''(1) = 2a = z \end{cases}$$

نستنتج أنّ: $a = \frac{z}{2}$ ، $b = y - z$ ، $c = x - y + \frac{z}{2}$

وهكذا، يكون g تقابليًا و:

$$g^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$$
$$(x, y, z) \longmapsto \frac{z}{2} X^2 + (y-z) X + \left(x - y + \frac{z}{2}\right)$$

تمرين 9.V :

ليكن E فضاء شعاعيًا على K. نرمز بـ: e للوحدة في E.

نسمّي مُسقطا لـ E كلّ تماثل داخلي p لـ E بحيث: $p \circ p = p$

أ) أثبت أنّ e هو المسقط الوحيد الذي له صفة التشاكل الذاتي.

ب) أثبت أنّه يكون p مسقطا إذا وفقط إذا كان $e-p$ كذلك.

ج) أثبت أنّ: $Im\, p = Ker(e-p)$ و $Im(e-p) = Ker\, p$.

د) أثبت أنّه إذا كان p مسقطا لـ E، فإنّ: $E = Im\, p \oplus Ker\, p$

أوجد تماثلا داخليًا f لـ $E = \mathbb{R}^2$ يحقّق: $E = Im\, f \oplus Ker\, f$ ولا يكون مسقطا.

هـ) ليكن p_1 و p_2 مسقطين لـ E. إذا افترضنا أنّ الحقل K ذو مميّز مختلفة عن 2، فاثبت أنّه يكون $p_1 + p_2$ مسقطا إذا وفقط إذا كان:

$$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$$

و) أثبت أنّ كلّ مسقط p يتبادل مع أيّ تماثل داخلي f لـ E بحيث يكون $Im\, p$ و $Ker\, p$ صامدين بواسطة f.

أ) نذكّر بأنّ تشاكلا ذاتيا لـ E هو تطبيق خطّي تقابليّ من E في E
نشير، في أوّل الأمر، إلى أنّ e مسقط وتشاكل ذاتي لـ E.
ليكن p مسقطا بحيث يكون p تشاكلا ذاتيا لـ E. علينا أن نثبت أنّ
$p = e$. لدينا من جهة: $p \circ p = p$.
ومن جهة أخرى، يوجد تطبيق p^{-1} من E في E، بحيث:

$$p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = e$$

ومنه:

$$p \circ (p \circ p^{-1}) = p \circ (p^{-1} \circ p) = p$$

وبما أنّ p مسقط، نحصل على:

$$p \circ p^{-1} = p$$

إذن: $e = p$.

ب) ليكن p مسقطا لـ E. عندئذ يكون التّطبيق $e-p$ تماثلا داخليا لـ E. وعلاوة على ذلك، لدينا، من أجل كلّ عنصر x من E:

$$((e-p)\circ(e-p))(x) = (e-p)(x-p(x)) = e(x-p(x)) - p(x-p(x))$$

$$= x - p(x) - p(x-p(x))$$

وبما أنّ p مسقط لـ E، إذن:

$$p(x-p(x)) = p(x) - p\circ p(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

وبالتالي: $((e-p)\circ(e-p))(x) = (e-p)(x) \; ; \forall x \in E$

وهكذا يكون $e-p$ مسقطا لـ E.
وبالعكس، إذا $(e-p)$ مسقطا، عندئذ يكون لدينا، من جهة، ومن أجل كلّ عنصرين x_1 و x_2 من E:

$$(e-p)(x_1+x_2) = (e-p)(x_1) + (e-p)(x_2)$$

$$= x_1 - p(x_1) + x_2 - p(x_2)$$

لأنّ $(e-p)$ خطي وأنّ مجموعة التّطبيقات من E في E تشكّل K-فضاء شعاعيّا.

ومن جهة أخرى، يكون لدينا، في الفضاء الشّعاعي للتّطبيقات من E في E :

$$(e-p)(x_1+x_2) = x_1 + x_2 - p(x_1+x_2)$$

عندئذ نستنتج أنّ،

$$p(x_1+x_2) = p(x_1) + p(x_2) \quad ; \forall x_1, x_2 \in E$$

ونثبت، بالطريقة ذاتها، أنّ :

$$p(ax) = a\,p(x) \quad ; \forall a \in K, \forall x \in E.$$

وبهذا، يكون p تماثلا داخليا لـ E.

بقي أن نتحقّق من أنّ : $p \circ p = p$. فبما أنّ :

$$\begin{aligned}((e-p)\circ(e-p))(x) &= x - p(x) - p(x) + p\circ p(x) ; \forall x \in E \\ &= (e-p)(x)\end{aligned}$$

نستنتج أنّ :

$$-p(x) + p\circ p(x) = 0_E \quad ; \forall x\, E$$

ومنه :

$$p = p\circ p$$

ج) ليكن $y \in \mathrm{Im}\,p$ ؛ عندئذ يوجد $x \in E$ بحيث : $y = p(x) = p(p(x))$
لأنّ p مسقط؛ إذن $y = p(y)$ ومنه : $y \in \mathrm{Ker}(e-p)$. وهكذا :

$$\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Ker}\,(e-p)$$

ليكن $y \in [\mathrm{Ker}\,(e-p)]$. يكون عندئذ : $y = p(y)$ وبالتّالي : $y \in \mathrm{Im}\,p$

ومنه : $\mathrm{Ker}\,(e-p) \subset \mathrm{Im}\,p$

وهكذا : $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Ker}\,(e-p)$

د) ليكن p مسقطا لـ E . يتعيّن علينا أن نبرهن أنّ :

i) $\mathrm{Im}\,p + \mathrm{Ker}\,p = E$

ii) $\mathrm{Im}\,p \cap \mathrm{Ker}\,p = \{0_E\}$

من أجل ذلك، يكفي أن نثبت أنّ:

$i)\quad E \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Ker}p$

$ii)\quad \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Ker}p \subset \{0_E\}$

i) ليكن x عنصرا كيفيًا لِـ E. يمكن أن نكتب x على الشّكل:

$$x = p(x) + x - p(x)$$

نلاحظ أنّ: $p(x) \in \mathrm{Im}p$ وأنّ: $x - p(x) \in \mathrm{Ker}p$

ومنه: $E \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Ker}p$

ii) ليكن x عنصرا كيفيًا من $\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Ker}p$. فبما أنّ $x \in \mathrm{Ker}p$

إذن: $p(x) = 0_E$. ومن جهة أخرى: $x \in \mathrm{Im}p$، إذن. يوجد عنصر

y من E بحيث: $x = p(y)$. وبذلك، نحصل على:

$$p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$$

وبما أنّ: $p(x) = 0_E$، نستنتج أنّ $x = 0_E$. ومنه: $x \in \{0_E\}$.

وهكذا يكون:

$$\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Ker}p \subset \{0_E\}.$$

ليكن f التّطبيق من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$، المعرّف بـ:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (3x-4y\,,\ x-y)$$

يتضّح من التّمرين $\mathrm{II}.4$، أنّ التّطبيق f خطي. وزيادة على ذلك:

$\mathrm{Ker}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ و $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$ ومنه: $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$

ونتأكّد من أنّ: $f \circ f \neq f$.

هـ) لدينا:

$$(p_1+p_2)^2 = p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 + p_2^2$$
$$= p_1 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 + p_2$$

فلكي يكون p_1+p_2 مسقطا، يلزم ويكفي أن يكون:

$$P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 = 0 \qquad (1)$$

لنضرب هذه المساواة الأخيرة في P_1 على اليسار وعلى اليمين على التوالي؛ عندئذ نحصل على:

$$P_1 \circ P_2 + P_1 \circ P_2 \circ P_1 = 0$$
و
$$P_1 \circ P_2 \circ P_1 + P_2 \circ P_1 = 0$$

وبالمقارنة، نرى أنّ: $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$، مما يسمح بالكتابة، حسب (1):

$$2.(P_1 \circ P_2) = 0$$

ومادام K ذا مميّزة مختلفة عن 2، فإن هذا يستلزم: $P_1 \circ P_2 = 0$

وبالعكس، من الواضح أنّ: $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$ تؤدّي إلى (1)

وعليه، يكون $P_1 + P_2$ مسقطا. ($P_1 + P_2$ تماثل داخلي لـ E).

ملاحظة:

إذا لم نفترض أيّ شيء على K، فنثبت أنّ $P_1 + P_2$ مسقط إذا وفقط إذا كان: $P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 = 0$ (1).

و) ليكن f تماثلا داخليا لِـ E بحيث يكون Imp و $Ker p$ مستقرّين بواسطة f. أي: $f(Imp) \subset Imp$ و $f(Ker p) \subset Ker p$.

يتعلّق الأمر بتبيان أنّ $p \circ f = f \circ p$، حيث p مسقط.

ليكن x عنصرا من E. حسب السؤال (5)، يكتب x على الشّكل $x = x_1 + x_2$، بكيفيّة وحيدة، حيث x_1 عنصر من $Ker p$ و x_2 عنصر من Imp.

$$(p \circ f)(x) = (p \circ f)(x_1 + x_2) = p(f(x_1)) + p(f(x_2))$$

لأنّ p و f تماثلان داخليّان.

وإلى جانب ذلك، لدينا $f(x_1)$ ينتمي إلى $Ker p$ و $(p \circ f)(x) = p(f(x_2))$

لأنّ: $f(Ker p) \subset Ker p$.

ومن جهة أخرى، يوجد y في E بحيث $x_2 = p(y)$؛ وذلك لأنّ: $x_2 \in Imp$

ونستخلص ممّا سبق أنّ:

ولكن $f(p(y))$ عنصر من $f(\mathrm{Im}\,p)$ المحتوى في $\mathrm{Im}\,p$، إذن

يوجد عنصر z في E بحيث: $f(p(y)) = p(z)$. وهكذا

$$(p\circ f)(x) = p(f(p(y)))$$

$$(p\circ f)(x) = p(p(z)) = p(z) \quad (*)$$

وذلك، لأنّ: $p^2 = p$.

وزيادة على ذلك، فإنّ:

$$(f\circ p)(x) = f(p(x_1)) + f(p(x_2)) = f(p(x_2))$$

لأنّ: $f(p(x_1)) = 0$؛ ومنه:

$$(f\circ p)(x) = f(p(x_2)) = f(p(p(y))) = f(p(y)) = p(z) \quad (**)$$

ومن $(*)$ و $(**)$ تأتي المساواة:

$$p\circ f = f\circ p.$$

تمرين 10. VI.

ليكن E فضاء شعاعيا على K. وليكن E' و E'' فضائين شعاعيين جزئيين متكاملين لِـ E. من أجل كلّ x من E، يوجد عنصران x' و x'' من E' و E'' على التوالي بحيث يكتب x، وبكيفية وحيدة، على الشكل: $x = x' + x''$. نسمّي إسقاطا شعاعيا من E على E' بالموازاة مع E''، التطبيق f من E في E' والذي يُرفق x بِـ: x'.

أ) أثبت أنّ مثل هذا التطبيق خطي.

ب) نرمز بِـ e للتطبيق المطابق لـ E. ماذا يمثّل التطبيق $(e-f)$؟

ج) ما هي الحالة التي يكون فيها f تشاكلا ذاتيا لِـ E؟

د) أثبت أنّ كلّ مسقطٍ p لِـ E إسقاط شعاعي لِـ E على صورته بالموازاة مع نواته (الهاء عائد على p)*.

---

* ملاحظة من المترجم.

ونستخلص ممّا سبق أنّ:

$$(p\circ f)(x) = p(f(p(y)))$$

ولكن $f(p(y))$ عنصر من $f(\mathrm{Im}\,p)$ المحتوى في $\mathrm{Im}\,p$، إذن يوجد عنصر z في E بحيث: $f(p(y)) = p(z)$. وهكذا

$$(p\circ f)(x) = p(p(z)) = p(z) \qquad (*)$$

وذلك، لأنّ: $p^2 = p$.

وزيادة على ذلك، فإنّ:

$$(f\circ p)(x) = f(p(x_1)) + f(p(x_2)) = f(p(x_2))$$

لأنّ: $f(p(x_1)) = 0$؛ ومنه:

$$(f\circ p)(x) = f(p(x_2)) = f(p(p(y))) = f(p(y)) = p(z) \qquad (**)$$

ومن $(*)$ و $(**)$ تأتي المساواة:

$$p\circ f = f\circ p.$$

تمرين 10. IV.

ليكن E فضاء شعاعيا على K. وليكن E' و E'' فضائيين شعاعيين جزئيين متكاملين لـ E. من أجل كلّ x من E، يوجد عنصران x' و x'' من E' و E'' على التوالي بحيث يكتب x، وبكيفيّة وحيدة، على الشّكل: $x = x' + x''$. نسمّي إسقاطا شعاعيّا من E على E' بالموازاة مع E''، التّطبيق f من E في E' والّذي يُرفق x بـ x'.

أ) أثبت أنّ مثل هذا التّطبيق خطي.

ب) نرمز بـ e للتّطبيق المطابق لـ E. ماذا يمثّل التّطبيق $(e-f)$؟

ج) ما هي الحالة الّتي يكون فيها f ثنا كلا ذاتيا لـ E؟

د) أثبت أنّ كلّ مسقطٍ p لـ E إسقاط شعاعي لـ E على صورته بالموازاة مع نواته (الهاء عائد على p)*.

---

* ملاحظة من المترجم.

أ) ليكن x و y عنصرين من E بحيث:

$x = x' + x''$ و $y = y' + y''$ حيث: $x', y' \in E'$ و $x'', y'' \in E''$

لدينا:

$$f(x+y) = f(x' + x'' + y' + y'')$$

وبما أنّ E' و E'' فضاءان شعاعيان جزئيان لـ E، إذن:

$$x' + y' \in E' \quad \text{و} \quad x'' + y'' \in E''.$$

وعليه، يأتي:

$$f(x' + y' + x'' + y'') = f(x) + f(y) = x' + y'$$

ونثبت بالطّريقة ذاتها أنّ:

$$f(ax) = a f(x) \quad , \forall a \in K \quad , \forall x \in E.$$

وهكذا، يكون f تطبيقا خطيّا.

ب) بما أنّ كلّ عنصر x من E يمكن أن يكتب، بكيفيّة وحيدة، على الشّكل: $x = x' + x''$ حيث $x' \in E'$ و $x'' \in E''$، إذن يكون لدينا:

$$(e - f)(x) = x - f(x) = x - x' = x''$$

نستخلص أنّ التّطبيق $e - f$ هو الإسقاط الشّعاعي من E على E'' بالموازاة مع E'.

ج) نعلم أنّ f خطي. فلكي نثبت أنّه تشاكل ذاتي لـ E، يلزم ويكفي أن يكون:

i) E هو المنطلق والوصول لـ f.

ii) f تقابليا.

تكون مجموعة الانطلاق E مساوية لمجموعة الوصول E' إذا وفقط إذا كان $E'' = \{0_E\}$. وفي هذه الحالة يكتب كلّ عنصر x من E، بكيفيّة وحيدة، على الشّكل:

$x = x + 0_E \in E' + E''$ و $f(x) = x$ ؛ و بالتّالي : $f = e$
التّطبيق المطابق تقابلي.

5) يتّضح من التّمرين 9. IV ، أنّه من أجل كلّ مسقط p من E ، لدينا:
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$$
و عليه ، فإنّ $\operatorname{Im} p$ و $\operatorname{Ker} p$ فضاءان شعاعيّان جزئيّان متكاملان لِـ E
و أنّ التّطبيق p' من E في $\operatorname{Im} p$ ، الذي يرفق بِـ x العنصر $p(x)$ ، هو
إسقاط لِـ E على صورة p ، بالموازاة مع نواته.

تمرين 11. IV :

ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، تطبيقا خطيّا كيفيّا. نعتبر
التّطبيق $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرّف بِـ : $g(x,y) = (x, y - f(x))$

أ) أثبت أنّ g خطّي . عيّن $\operatorname{Ker} g$.

ب) هل g تقابلي ؟ إذا كان الجواب "نعم" ، عيّن g^{-1} .

أ) نتأكّد بكل سهولة من أنّ g خطّي و أنّ $\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

ب) بما أنّ $\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ ، إذن g تطبيق متباين. و تبعا لذلك ، يأتي :
$\dim \operatorname{Im} g = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ (لأنّ : $\dim \operatorname{Ker} g = 0$) ، و بالتّالي يكون التّطبيق g
غامرا . و هكذا ، يكون g تقابليا. نتحقّق ، من بعد هذا ، من أنّ :
$$g^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y + f(x))$$

تمرين 12 - IV :

ليكن (e_1, e_2, e_3) أساسا لِـ : $\mathbb{R}^3$. نضع :
$e'_1 = e_1$ ؛ $e'_2 = e_1 + 2e_2$ ؛ $e'_3 = 2e_2 + 3e_3$

1) أثبت أنّ : (e'_1, e'_2, e'_3) أساس لِ $\mathbb{R}^3$.

2) ليكن f التّماثل الدّاخلي لِ $\mathbb{R}^3$ والمعرّف بِ:

$f(e_1) = e'_1$ ، $f(e_2) = e'_2$ ، $f(e_3) = e'_3$.

أ) أثبت أنّ f تقابلي.

يمثّل (e_1, e_2, e_3) ، فيما يلي ، الأساس القانوني لِ $\mathbb{R}^3$.

ب) أحسب $f(x, y, z)$ ، من أجل العنصر (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$.

جـ) ليكن : $u = e_1 = (1, 0, 0)$ ، $u_2 = (1, 1, 0)$. أثبت أنّ : $f(u_1) = u_1$ و $f(u_2) = 2u_2$. عيّن شعاعا غير منعدم u_3 بحيث : $f(u_3) = 3u_3$.

د) أثبت أنّ (u_1, u_2, u_3) أساس لِ $\mathbb{R}^3$.

3) نضع : $g = f - 3\,id$ ، حيث يرمز id للتّطبيق المطابق لِ $\mathbb{R}^3$. عيّن أساسا لِ Img. استنتج بُعدي Img و $Kerg$ وعيّن أساسا لِ $Kerg$.

4) نضع : $f \circ f = f^2$ ، $f \circ f^2 = f^3$ و $h = (f - 3id) \circ (f - 2id) \circ (f - id)$

أثبت أنّ: $h = f^3 - 6f^2 + 11f - 6id$

5) ليكن a عددا حقيقيّا و u شعاعا لِ $\mathbb{R}^3$ يحقّق : $f(u) = au$

أثبت أنّ : $h(u) = (a^3 - 6a^2 + 11a - 6)u$

أحسب $h(u_1)$ ، $h(u_2)$ ، $h(u_3)$. ماذا يمكن قوله على التّابع h ؟

6) استنتج، من السّؤال السّابق، أنّ:

$$f^{-1} = \frac{1}{6}f^2 - f + \frac{11}{6}id$$

---

1) يكفي إثبات أنّ (e'_1, e'_2, e'_3) عائلة مستقلّة لِ $\mathbb{R}^3$.

2) أ) بما أنّ التّطبيق f خطي ، إذن يكافئ إثبات أنّ f تقابلي إثبات بأنّ صورة أساس (e_1, e_2, e_3) لـ $\mathbb{R}^3$ ، وفق f ، أساسٌ

(e'_1, e'_2, e'_3) لِـ $\mathbb{R}^3$ ؛ وهو حال هذا التّطبيق.

ب) نجد :
$$f(x, y, z) = (x+y, 2y+2x, 3z)$$

ب) نستخدم السّؤال (ب) لإثبات أنّ : $f(u_1) = u_1$ و $f(u_2) = 2u_2$

بحث من بعد ذلك، عن أعداد حقيقيّة c, b, a بحيث:
$$f(a, b, c) = (3a, 3b, 3c)$$

الشّعاع $u_3 = (1, 2, 1)$ يلبّي المطلوب.

نثبت أنّ (u_1, u_2, u_3) جماعة مستقلّة.

د) ليكن : $g = f - 3\,id$. نثبت أنّ :

3)-
$$\operatorname{Im} g = \{a(1,0,0) + b(0,1,0) \ ,\ a, b \in \mathbb{R}^2\}$$

وبما أنّ الشّعاعين : $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ مستقلّان خطيّا، فهما يشكّلان أساسا لِـ $\operatorname{Im} g$. نستنتج من ذلك أنّ : $\dim \operatorname{Im} g = 2$

وبالتّالي : $\dim \operatorname{Ker} g = 1$ (لأنّ g تماثل داخلي لِـ $\mathbb{R}^3$).

يوطي الشّعاع u_3 أساسا لِـ : $\operatorname{Ker} g$.

4)- بما أنّ التّطبيق f خطي، نحصل على:
$$h(u) = f^3(u) - 6f^2(u) + 11 f(u) - 6u$$
من أجل كلّ u من $\mathbb{R}^3$ ؛ ولنشر إلى أنّ h خطّي.

5)- ليكن u شعاعا لِـ $\mathbb{R}^3$. تنتج المساواة :
$$h(u) = (a^3 - 6a^2 + 11a - 6)\,u \quad ; a \in \mathbb{R}$$

من السّؤال (4) ومن تعريف f. وبعد ذلك، وحسب السّؤال (2-ب)

نثبت أنّ : $h(u_1) = h(u_2) = h(u_3) = 0$. وما دام (u_1, u_2, u_3)

أساسا لِـ $\mathbb{R}^3$ ، نستنتج أنّ h تماثل داخلي لِـ $\mathbb{R}^3$

6)- بما أنّ h هو التّابع المنعدم، إذن:
$$f^3 - 6f^2 + 11f - 6\,id = 0 \qquad (*)$$

و إلى جانب ذلك، f تطبيق تقابلي ، إذن f^{-1} موجود. ويسمح لنا ذلك بالتركيب بـ f^{-1} في المساواة (*) للحصول على النتيجة المطلوبة

تمرين V.13 :

ليكن E الفضاء الشعاعي المكوّن من التوابع الحقيقيّة القابلة للاشتقاق مالانهاية من المرّات. نعتبر التطبيقين D و I:

$$I : E \longrightarrow E \qquad \text{و} \qquad D : E \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto f \qquad\qquad\qquad f \longmapsto f'$$

1)- أثبت أنّ D خطيّ وعيّن نواته.

2)- ليكن a عنصراً من $\mathbb{R}$. نعتبر التّابع :

$$h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{ax}$$

أ) أثبت أنّ h_a عنصر من $Ker(D-aI)$.

ب) عيّن $Ker(D-aI)$

3)- ليكن a و b عنصرين متمايزين من $\mathbb{R}$.

أ) أثبت أنّ : $(D-aI)\circ(D-bI) = (D-bI)\circ(D-aI)$

ب) استنتج أنّه إذا f منتميا إلى $Ker\left[(D-aI)\circ(D-bI)\right]$ فإنّ $(f'-bf)$ ينتمي إلى $Ker(D-aI)$ و $(f'-af) \in Ker(D-bI)$

4)- أ) أثبت أنّ : $Ker\left[(D-aI)\circ(D-bI)\right] = Ker(D-aI) \oplus Ker(D-bI)$

ب) استنتج حلول المعادلة : $f'' - (a+b)f' + abf = 0$

ثمّ حلول المعادلة $f'' + k_1 f' + k_2 f = 0$ حيث يقبل ثلاثي الحدّ، وفق r : $r^2 + k_1 r + k_2 = 0$ ، جذرين حقيقيّين مختلفين.

---

1) استخدم تعريف الخطية لإثبات أنّ D خطي.

لدينا:

$$\operatorname{Ker} D = \{ f \in E \mid Df = f' = 0_E \}$$

نواة التطبيق D هي مجموعة التوابع الثابتة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

2) أ) لدينا:

$$h_a(x) = e^{ax} \quad (\text{و}) \quad h'_a(x) = a e^{ax}$$

من أجل كلّ x حقيقي.

$$(D - aI) h_a = h'_a - a h_a$$

ومنه:

$$((D-aI)(h_a)(x) = a e^{ax} - a e^{ax} = 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن: $h_a \in \operatorname{Ker}(D - aI)$

لنشر إلى أنّ $D-aI$ تماثل داخلي لـِ E.

ب) $$\operatorname{Ker}(D-aI) = \{ f \in E \mid (D-aI)f = f' - af = 0 \}$$

ونستخلص أنّ:

$$\operatorname{Ker}(D-aI) = \{ f \in E \mid f(x) = C e^{ax} \; ; \forall x \in \mathbb{R} \; (\text{مع}) \; C \in \mathbb{R} \}$$

3) أ) ليكن a و b عنصرين مختلفين من $\mathbb{R}$ و f عنصرا كيفيا من E.

عندئذ يكون لدينا:

$$(D-aI) \circ (D-bI)(f) = (D-aI)(f' - bf) = f'' - bf - af' + abf$$

$$= (D-bI)(f' - af) = (D-bI) \circ (D-aI)(f)$$

وعليه، يأتي:

$$(D-aI) \circ (D-bI)(f) = (D-bI) \circ (D-aI)$$

ب) ليكن f عنصرا من $\operatorname{Ker}[(D-aI) \circ (D-bI)]$. نكتب عندئذ:

$$(D-aI) \circ (D-bI)(f) = 0$$

أي أنّ:

$$(D-aI)(f' - bf) = 0$$

$$f' - bf \in Ker(D-aI)$$

ومنه:

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$(D-aI)\circ(D-bI) = (D-bI)\circ(D-aI)$$

ومنه:

$$f \in Ker((D-bI)\circ(D-aI))$$

$$((D-bI)\circ(D-aI))(f) = 0$$

إذن:

$$(D-bI)(f' - af) = 0 \quad \text{و}$$

وعليه:

$$(f' - af) \in Ker(D-bI)$$

4- (أ) علينا أن نثبت أن:

(i $Ker((D-aI)\circ(D-bI)) = Ker(I-aI) + Ker(D-bI)$

(ii $Ker(D-aI) \cap Ker(D-bI) = \{0_E\}$

i) لدينا:

$$Ker((D-aI)\circ(D-bI)) = \{f \in E \,/\, (D-aI)(D-bI)(f) = 0_E\}$$
$$= \{f \in E \,/\, (D-aI)(f' - bf) = 0_E\}$$

$$Ker((D-aI)\circ(D-bI)) = \{f \in E \,/\, f'' - (a+b)f' + abf = 0_E\}$$

ليكن f عنصرا من: $Ker(D-aI) + Ker(D-bI)$

يكتب f على الشكل: $f = f_1 + f_2$ حيث: $f_1 \in Ker(D-aI)$

و $f_2 \in Ker(D-bI)$. أي أن:

$$f_1' - af_1 = 0 \quad (\text{و}) \quad f_2' - bf_2 = 0.$$

ومنه: $f_1'' - af_1' = 0$ و $f_2'' - bf_2' = 0$

وتبعا لذلك، يأتي:

$$f_1'' - af_1' + f_2'' - bf_2' = f'' - af_1' - bf_2' = 0$$

ونستخلص أن:

$$f'' - af' - bf' + af_2' + bf_1' = 0$$

و منه :

$$f'' - (a+b)f' + ab f_2 + ba f_1 = f'' - (a+b)f' + ab f = 0$$

بمعنى أنّ :

$$f \in Ker[(D-aI)\circ(D-bI)]$$

و هكذا، نحصل على أنّ :

$$Ker(D-aI) + Ker(D-bI) \subset [(D-aI)\circ(D-bI)] \quad (*)$$

و من جهة أخرى، نمكن كتابة أيّ عنصر f لـ E على النّحو التّالي :

$$f = \frac{f'-bf}{a-b} + \frac{-(f'-af)}{a-b}$$

ولنضع :

$$h = \frac{f'-bf}{a-b} \quad و \quad g = \frac{-(f'-af)}{a-b}$$

(h و g معرّفان جيّدا لأنّ : $a \neq b$)

لنعتبر عنصرا f من $Ker[(D-aI)\circ(D-bI)]$. عندئذ، يتضح من السّؤال (ب) أنّ : $f'-bf$ ينتمي إلى $Ker(D-aI)$ و $f'-af$ ينتمي إلى $Ker(D-bI)$ ، وهما فضاءان جزئيان لـ E . إذن، h منتم إلى $Ker(D-aI)$ و g ينتمي إلى $Ker(D-bI)$.

و بناء على ما سبق : $f = h + g$ و : $f \in Ker(D-aI) + Ker(D-bI)$

وبه نتحصّل على الاحتواء الثّاني :

$$Ker[(D-aI)\circ(D-bI)] \subset Ker(D-aI) + Ker(D-bI) \quad (**)$$

و يعطي لنا الاحتواء المزدوج $(*)$ و $(**)$ المساواة المطلوبة

ii)

ليكن : $f \in Ker(D-aI) \cap Ker(D-bI)$

لدينا، من جهة : $f' = af$ ، ومن جهة أخرى : $f' = bf$

إذن : $(a-b)f = 0_E$. وبما أنّ : $a-b \neq 0$

إذن : $f = 0_E$. و هكذا :

$$Ker(D-aI) \cap Ker(D-bI) \subset \{0_E\}$$

وما دام الإحتواء الثّاني صحيحا ، فإنّنا نحصل على:

$$Ker(D-aI) \cap Ker(D-bI) = \{0_E\}$$

ب) لتكن المعادلة :

$$f'' - (a+b) f' + abf = 0 \quad (1)$$

حلول هذه المعادلة عناصر لـ $Ker((D-aI) \circ (D-bI))$ ، و حسب السّؤال السّابق ، نستنتج أنّ f يكتب بكيفيّة وحيدة على الشّكل:

$$f = f_1 + f_2$$

حيث $f_1 \in Ker(D-aI)$ و $f_2 \in Ker(D-bI)$.

و لكن ، لدينا ، حسب السّؤل (2-ب) :

$f_1(x) = c_1 e^{ax}$ و $f_2(x) = c_2 e^{bx}$ مهما يكن x من $\mathbb{R}$ ؛

c_1 و c_2 عددان حقيقيّان كيفيّان

و هكذا ، تكون حلول المعادلة (1) هي التّوابع f من الشّكل:

$$f(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}, \forall x \in \mathbb{R} \; ; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

لتكن المعادلة :

$$f'' + k_1 f' + k_2 f = 0 \quad (2)$$

نضع : $k_1 = -(a+b)$ و $k_2 = ab$. و بذلك ، يكون a و b جذرين لثلاثي الحدّ : $r^2 + k_1 r + k_2 = 0$

وما دام هذا الثّلاثي الحدّ متمتّعا بجذور حقيقيّة متمايزة ، فإنّنا نستنتج ، عندئذ ، إنّ لحلول المعادلة (2) الشّكل :

$$f(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} \; ; \forall x \in \mathbb{R} \; ; \; (\text{حيث}) \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

وأنّ :

$$a = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2} \; ; \; b = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}$$

تمرين 14 : V

ليكن E_2 الفضاء الشعاعي المشكّل من كثيرات الحدود التي درجتها أصغر أو تساوي 2. وليكن u الشكل الخطيّ على E_2 والمعرّف بـ :

$u(ax^2+bx+c) = a+b\sqrt{2}$ ، حيث a و b و c أعداد حقيقيّة.

1) أ- أثبت أنّ كثير الحدود : $P_1 = 1$ منتم إلى $\ker u$.

ب- عيّن كثير حدود P_2 ينتمي إلى $\ker u$ بحيث تشكّل الثنائية (P_1, P_2) أساسا لـ $\ker u$.

جـ- عيّن كثير حدود P_3 من E_2 بحيث تشكّل المجموعة (P_1, P_2, P_3) أساسا لـ E_2 و بحيث :

$$u(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3) = a_3$$

من أجل كلّ a_1 و a_2 و a_3 من $\mathbb{R}$.

2) ليكن f تطبيقا خطيّا من E_2 في E_2 بحيث :

$f(P_1) = f(P_2) = 0$ و $f(P_3) = P_3$

أ- أثبت أنّ : $f \circ f = f$

ب- ماهي نواة f ؟

جـ- عبّر عن f بدلالة u.

نذكّر بأنّ شكلا خطيّا على E_2 هو تطبيق خطّي من E_2 في $\mathbb{R}$.

1) أ- لدينا : $u(P_1) = u(1) = 0$.

إذن : $P_1 \in \ker u$

ب- نثبت، بكلّ سهولة، أنّ :

$$\ker u = \{-b(\sqrt{2}x^2 - x) + c \ ; \ b, c \in \mathbb{R}\}$$

و به يكون $\ker u$ مولّدا بكثيري الحدود :
$$P_1 = 1 \quad \text{و} \quad P_2 = \sqrt{2}x^2 - x$$
و هذان كثيرا الحدود مستقلاّن خطيّا ، فهما يشكّلان ،إذن، أساسا لِ : $\ker u$.

جـ - ينبغي على كثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أن تشكّل أساسا لِ E_2
مادامت درجتا الحرارة لِ P_1 و P_2 مساويتين 0 و 2 على التّوالي، فعلينا أن نختار كثير حدود P_3 من الدّرجة 1 . و بما أنّ كثيرات الحدود الثّلاثة متمتّعة بدرجات متمايزة ، إذن ،فهي مستقلّة خطيّا و مادام: $\dim E_2 = 3$ ، فهي تشكّل ،إذن ، أساسا لِ E_2 .
لكثير الحدود P_3 الشّكل :
$$P_3 = AX + B \quad ; \ A \in \mathbb{R}^* \ , B \in \mathbb{R}$$
نختار A و B لكي نحصل على:
$$u(a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3) = a_3$$
و بما أنّ u خطي و أنّ P_1 و P_2 عنصران من $\ker u$ ، فالأمر يعود إلى اختيار A و B نجيث :
$$a_3\, u(P_3) = a_3 \quad , \ \forall a_3 \in \mathbb{R}$$
نحصل على : $\quad u(P_3) = 1$
و منه : $\quad u(AX + B) = A\sqrt{2} + 1$
و عليه ، يأتي :
$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} X + B \quad ; \ B \in \mathbb{R}$$
نستطيع أخذ : $B = 0$ و به يكون :
$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} X .$$
2) P - يتعلّق الأمر بإثبات أنّ التّماثل الدّاخلي f لـ E_2 يحقّق :
$$f(f(Q)) = f(Q) \ ; \ \forall Q \in E_2 .$$

من أجل ذلك، ليكن Q عنصراً من E_2. بما أنّ (P_1, P_2, P_3) أساس لـ E_2، إذن توجد سلّميات وحيدة b_1 و b_2 و b_3 بحيث:

$$Q = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3$$

ومنه:

$$(f \circ f)(Q) = (f \circ f)(b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3)$$
$$= f\big(b_1 f(P_1) + b_2 f(P_2) + b_3 f(P_3)\big)$$

وذلك لأنّ f خطي؛ وبما أنّ: $f(P_1) = f(P_2) = 0$، عندئذ، يأتي:

$$(f \circ f)(Q) = f(b_3 f(P_3)) = f(b_3 P_3)$$
$$= b_1 f(P_1) + b_2 f(P_2) + b_3 f(P_3)$$
$$= f(b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) = f(Q)$$

ب- لدينا:

$$\operatorname{Ker} f = \{ Q \in E_2 \mid f(Q) = 0_{E_2} \}$$
$$= \{ a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 \,/\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} ; f(a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3) = 0_{E_2} \}$$

وحسب تعريف f، يأتي:

$$\operatorname{Ker} f = \{ a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 ; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} ; a_3 P_3 = 0_E \}$$

نستخلص أنّ: $a_3 = 0$. وهكذا:

$$\operatorname{Ker} f = \{ a_1 P_1 + a_2 P_2 ; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Ker} u$$

جـ- بما أنّ (P_1, P_2, P_3) أساس لـ E_2 وأنّ:

$$u(P_1) = u(P_2) = f(P_1) = f(P_2) = 0 ; u(P_3) = 1 , f(P_3) = P_3$$

إذن:

$$f(Q) = P_3 \cdot u(Q) \quad ; \forall Q \in E_2$$

ونكون بهذا قد أثبتنا أنّ الشكل الخطّي u مرفق بمسقط f.

تمرين II-15:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K، بعداهما منتهيان.

وليكن u و v عنصرين من $L_K(E,F)$. أثبت أنّ:

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$$

يمكن أن نكتب كلّ عنصر x من صورة التّطبيق $(u+v)$ على الشّكل:

$$x = (u+v)(y) = u(y) + v(y)$$

حيث y عنصر من E.

العنصر x موجود في $Im\,u + Im\,v$، لدينا، إذن، الإحتواء:

$$Im(u+v) \subset Im\,u + Im\,v$$

وعليه يأتي:

$$rg(u+v) \leq \dim_K(Im\,u + Im\,v) \leq rg(u) + rg(v)$$

و من جهة أخرى: $u = (u+v) - (v)$، إذن:

$$rg(u) \leq rg(u+v) + rg(-v) = rg(u+v) + rg(v)$$

لأنّ:

$$rg(-v) = \dim_K Im(-v)$$

وأنّ: $Im\,v = Im(-v)$

و بالمثل:

$$rg(v) \leq rg(u+v) + rg(u)$$

و بالتّالي:

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v)$$

تمرين VI . 16:

ليكن E_n الفضاء الشّعاعي المشكّل من كثيرات الحدود ذات درجة أصغر أو تساوي n؛ وليكن a عددا حقيقيّا موجبا تماما ومثبّتا.

1) أ- أوجد Q في E_3 و b في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$(x^2+1)\,Q'(x) + a x\,Q(x) + b = x^4$$

ب- نضع: $S(x) = \operatorname{Argsh} x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

اكتب التكامل:

$$\int_0^x (1+u^2)^{\frac{a}{2}-1}\,du$$

بدلالة x و $S(x)$ و ذلك في حالة: $a=1$ و $a=3$.

2) أ- أثبت أنّه إذا كان Q كثير حدود ذي معاملات حقيقيّة، وإذا كان b عددا حقيقيّا بحيث:

$$(x^2+1)\,Q'(x) + a x\,Q + b = 0$$

عندئذ: $Q=0$ و $b=0$. (أعتبر الحدّ ذا أكبر درجة في Q)

ب- ليكن n عددا صحيحا موجبا تماما، و F_n المجموع المباشر لـ E_{n-1} و $\mathbb{R}$. يُرمز لعناصر F_n بـ: (Q,b)، مع $Q \in E_{n-1}$ و $b \in \mathbb{R}$.

نعتبر التّطبيق الخطي u من F_n في E_n والمعرّف بـ:

$$u(Q,b) = (x^2+1)\,Q'(x) + a x\,Q(x) + b$$

i) قارن بعدي E_n و F_n

ii) أوجد نواة u باستخدام (أ-2)

iii) استنتج أنّه من أجل كلّ P من E_n، يوجد عنصر واحد، وواحد فقط، (Q_p, b_p) من F_n بحيث:

$$(x^2+1)\,Q_p'(x) + a x\,Q_p(x) + b_p = P(x)$$

3) نثبّت P في E_n، مع $n>0$.

أ- إذا كان b_p و Q_p معرّفين كما جاء أعلاه في (ب-2)، أثبت أنّ:

$$P(x)\,(1+x^2)^{\frac{a}{2}-1} = \left[Q_p(x)\,(1+x^2)^{\frac{a}{2}}\right]' + b_p\,(1+x^2)^{\frac{a}{2}-1}$$

ب) عبّر، بواسطة x و $S(x)$ و b_p و $Q_p(x)$ ، عن التكامل :

$$\int_0^x P(u)\,(1+u^2)^{\frac{a}{2}-1}\,du$$

في الحالتين: $a = 1$ و $a = 3$. واكتب بالصّيغة الصّريحة لمّا: $P(x) = x^4$

ج) حل المعادلتين التّفاضليتين التّاليتين:

$$(x^2+1)\,y' + (a-2)\,xy = (x^2+1)\,P(x)$$

$$(x^2+1)\,y' + a\,x\,y = P(x)$$

في الحالتين : $a = 1$ و $a = 3$. أكتب ذلك بصريح العبارة عندما : $P(x) = x^4$.

---

1) . P - نضع :

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

حيث A و B و C و D أعداد حقيقيّة يطلب تعيينها. لدينا:

$$Q'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

ومنه :

$$(3A+aA)x^4 + (2B+aB)\,x^3 + (C+3A+aC)\,x^2 + (2B+aD)\,x + C + b = x^4$$

وبمطابقة الطّرفين ، نجد :

$$A = \frac{1}{3+a} \;;\; B = 0 \;;\; C = \frac{-3}{(3+a)(a+1)}$$

$$D = 0 \;;\; b = \frac{3}{(3+a)(a+1)}$$

وهكذا يكون :

$$Q(x) = \frac{x^3}{a+3} - \frac{3x}{(3+a)(a+1)} \;,\; b = \frac{3}{(a+3)(a+1)}$$

ب) نضع:

$$I_a = \int_0^x (1+u^2)^{\frac{a}{2}-1} du$$

نقوم بتغيير المتغيّر:

$u = sh t$، ومنه: $1+u^2 = ch^2 t$، $du = ch t\, dt$

وبالتّالي:

$$I_a = \int_0^{S(x)} (ch^2 t)^{\frac{a}{2}-1} ch t\, dt = \int_0^{S(x)} (ch t)^{a-1} dt$$

--- إذا كان: $a = 1$، فإنّ: $I_1 = S(x)$

--- إذا كان $a \geq 2$، نقوم، عندئذ بمكاملة بالتّجزئة:

$U = (ch t)^{a-2}$ ، $dV = ch t\, dt$

$dU = (a-2)\, sh t (ch t)^{a-3} dt$ ، $V = sh t$

ومنه:

$$I_a = \left[sh t\, (ch t)^{a-2}\right]\Big|_0^{S(x)} - \int_0^{S(x)} (a-2)\, sh^2 t\, (ch t)^{a-3} dt$$

لدينا:

$$sh^2 t = ch^2 t - 1$$

إذن:

$$I_a = x(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1} - (a-2) I_a + (a-2) I_{a-2}$$

ومنه:

$$I_a = \frac{x(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1}}{a-1} + \frac{a-2}{a-1} I_{a-2}$$

ومن أجل $a = 3$، نحصل على:

$$I_3 = \frac{x(x^2+1)^{1/2}}{2} + \frac{S(x)}{2}$$

2) أ) - نفترض أنّ درجة Q تساوي $m \geq 0$، بالضّبط:

$Q(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ ؛ $a_m \neq 0$ (مع)؛

يساوي الحدّ ذو أكبر درجة لكثير الحدود: $(x^2+1)Q'(x) + aQ(x) + b$ (*)

مايلي:
$$m a_m x^{m+1} + a\, a_m x^{m+1} = (m+a)\, a_m x^{m+1}$$

وبما أنّ $a_m \neq 0$ وأنّ $0 < a$ ، إذن:
$$(m+a)\, a_m \neq 0$$

وبه يكون كثير الحدود (*) من الدّرجة (m+1) بالضبط. إذن، إذا كان:
$$(x^2+1)\, Q'(x) + a x\, Q(x) + b = 0$$

فإنّ: $Q=0$ ، ويكون b في هذه الحالة مساويا الصّفر.

ب). i) لدينا:
$$\dim E_n = n+1$$

و:
$$\dim F_n = \dim E_{n-1} + 1 = n+1$$

إذن:
$$\dim E_n = \dim F_n = n+1$$

ii) - إذا كان:
$$(Q, b) \in \ker u$$

يكون لدينا، عندئذ:
$$(x^2+1)\, Q'(x) + a x\, Q(x) + b = 0$$

وحسب (2-أ)، نحصل، إذن، على: $Q=0$ و $b=0$ ، إذن: $\ker u = \{0\}$ و u متباين.

iii) - بما أنّ u متباين وأنّ: $\dim F_n = \dim E_n$ ، إذن يكون u تشاكلا بين E_n و F_n ، وبالأخصّ، ومن أجل كلّ P في E_n ، يوجد عنصر وحيد $(Q_p, b_p) \in F_n$ ، بحيث:
$$(x^2+1)\, Q'_p(x) + a x\, Q_p(x) + b_p = P(x)$$

3) ليكن P في E_n مع : $0 < d^\circ P$

أ) لدينا:

$$(x^2+1)\,Q'_p(x) + a\,x\,Q_p(x) + b_p = P(x)$$

إذن:

$$P(x)\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1} = (x^2+1)^{\frac{a}{2}}\,Q'_p(x) + a\,x\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1}\,Q_p(x) + b_p\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1}$$

ويكون لدينا:

$$\left[Q_p(x)\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}}\right]' = (x^2+1)^{\frac{a}{2}}\,Q'_p(x) + a\,x\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1}\,Q_p(x)$$

إذن:

$$P(x)\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1} = \left[(x^2+1)^{\frac{a}{2}}\,Q_p(x)\right]' + b_p\,(x^2+1)^{\frac{a}{2}-1}$$

ب) لدينا:

$$\int_0^x P(u)\,(1+u^2)^{\frac{a}{2}-1}\,du = \int_0^x \left[(u^2+1)^{\frac{a}{2}}\,Q_p(u)\right]' du + \int_0^x b_p\,(u^2+1)^{\frac{a}{2}-1}\,du$$

$$= (x^2+1)^{\frac{a}{2}}\,Q_p(x) - Q_p(0) + b\,I_a$$

مع الإحتفاظ بالرموز المستخدمة آنفا.

-- إذا كان: $a = 1$:

$$\int_0^x \frac{P(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \sqrt{x^2+1}\,Q_p(x) - Q_p(0) + b_p\,S(x)$$

-- إذا كان: $a = 3$:

$$\int_0^x \sqrt{1+u^2}\,P(u)\,du = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,Q_p(x) - Q_p(0) + b_p\left[\,H(x)\,\right]$$

حيث:

$$H(x) = \left(\frac{x(x^2+1)^{1/2}}{2} + \frac{S(x)}{2}\right)$$

-- إذا كان : $P(x) = x^4$ يكون لدينا حسب $[P-(1)]$:

$$Q_p(x) = \frac{x^3}{a+3} - \frac{3x}{(a+3)(a+1)}$$

و: $b_p = \dfrac{3}{(a+3)(a+1)}$ ، $Q_p(0)=0$

ومنه:

$$\int_0^x \frac{u^4\,du}{\sqrt{1+u^2}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x}{8}\right)+\frac{3}{8}S(x)$$

و

$$\int_0^x \sqrt{1+u^2}\,u^4\,du = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^5}{6}+\frac{x^3}{24}-\frac{x}{16}\right)+\frac{S(x)}{16}$$

ج) $(x^2+1)\,y' + (a-2)\,xy = (x^2+1)\,P(x)$ (E)

معادلة تفاضلية خطيّة من الرّتبة الأولى وذات طرف ثان. نبحث، في البداية، عن حلّ المعادلة العام، وذلك بدون طرف ثان:

$$(x^2+1)\,y' + (a-2)\,xy = 0 \qquad (E_0)$$

ومنه:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{(a-2)x}{x^2+1}\,dx = -\left(\frac{a}{2}-1\right)\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

وعليه، يأتي:

$$y = C(x^2+1)^{-\frac{a}{2}+1} \quad ; \; C\in\mathbb{R}$$

للحصول على حلّ المعادلة (E) العام، نستخدم طريقة تغيّر الثّابت. نجد:

$$C'(x) = (x^2+1)^{\frac{a}{2}-1}\,P(x)$$

ويسمح السّؤال (ب) بإنهاء الحساب على النّحو الموالي:

--- إذا كان $a = 1$:

$$C(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}Q_p(x) + b_p S(x) - Q_p(0) + A \quad ; \; A\in\mathbb{R}$$

ومنه:

$$y = (x^2+1)\,Q_p(x) + b_p(x^2+1)^{\frac{1}{2}}S(x) - Q_p(0)(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + A(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

--- إذا كان $a = 3$:

$$C(x) = (x^2+1)^{3/2}Q_p(x) + b_p\left[\frac{x(x^2+1)^{1/2}}{2}+\frac{S(x)}{2}\right] - Q_p(0) + A. \; ; A\in\mathbb{R}$$

ومنه

$$y = (x^2+1)Q_p(x) + b_p\left[\frac{x}{2} + \frac{(x^2+1)^{-1/2} S(x)}{2}\right] - Q_p(0)(x^2+1)^{-1/2} + A(x^2+1)^{-1/2}$$

---إذا كان $x^4 = P(x)$:

$$Q_p(x) = \frac{x^3}{a+3} - \frac{3x}{(a+3)(a+1)} \quad ;$$

$$b_p = \frac{3}{(a+3)(a+1)} \quad ; \quad Q_p(0) = 0$$

إذن:

إذا كان $a = 1$:

$$y(x) = (x^2+1)\left(\frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x\right) + \frac{3}{8}(x^2+1)^{1/2} S(x) + A(x^2+1)^{1/2}$$

وإذا كان $a = 3$:

$$y(x) = \frac{x^5}{6} + \frac{x^3}{24} - \frac{x}{16} + \frac{S(x)}{16\sqrt{x^2+1}} + A(x^2+1)^{-1/2}$$

وبالمثال، فإنّ

$$(x^2+1)y' + axy = P(x) \qquad (E_1)$$

معادلة تفاضليّة خطيّة من الرّتبة الأولى وبطرف ثان.

للمعادلة المبتورة من طرفها الثّاني الحل:

$$y = C(x^2+1)^{-a/2} \; ; \; C \in \mathbb{R}$$

وتعطي طريقة تغيير الثّابت: $C'(x) = (x^2+1)^{a/2-1} P(x)$

إذن، إذا كان $y(x)$ حلاً للمعادلة التّفاضليّة (E)، عندئذ يكون حلّ المعادلة (E_1) مساويا، $\frac{y(x)}{x^2+1}$؛ ومنه، إذا كان $x^4 = P(x)$، يأتي:

إذا كان $a = 1$، فإنّ:

$$y(x) = x^3/4 - 3/8\,x + 3/8\,\frac{S(x)}{\sqrt{x^2+1}} + A/\sqrt{x^2+1}$$

واذا كان $a = 3$، فإنّ:

$$y(x) = 1/(x^2+1)\left(x^5/6 + 1/24\,x^3 - 1/16\,x\right) + S(x)/16(x^2+1)^{3/2} + A/(x^2+1)^{3/2} \; ; \; A \in \mathbb{R}$$

- VI - الفصل

م - المصفوفات

I - المصفوفات الملحقة بتطبيق خطي.

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K ، بعداهما منتهيان.
وليكن $B = (e_1, \dots, e_n)$ أساسا لـ E و $B' = (f_1, \dots, f_m)$ أساسا لـ F.

ليكن f تطبيقا خطيا من E في F. عندئذ، تنتمي الأشعة $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، ... ، $f(e_n)$ إلى F ، فهي تكتب، إذن، على شكل عبارات خطية لأشعة الأساس B' : f_1 ، ... ، f_m.

لدينا من أجل $j = 1, \dots, n$:

$$f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{ij} f_i + \cdots + a_{mj} f_m$$

ويسمى جدول الأعداد:

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots \ f(e_n) \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_m \end{array}
\end{array}$$

المصفوفة الملحقة بالتطبيق f ، بالنسبة للأساسين B و B'.
نرمز لهذه المصفوفة ب : (a_{ij})
في الكتابة (a_{ij}) ، يشير i إلى رتبة الأسطر بينما يرمز j لرتبة الأعمدة.
المصفوفة متعلقة بأساسي E و F.

II. فضاءات المصفوفات.

1 - تعاريف و رموز:

أ) ليكن K حقلا تبديليا و m و n عددين طبيعيين غير منعدمين. نسمي مصفوفة ذات m سطرا و n عمودا (أو مصفوفة من النمط (m,n)) ومعاملات في K ، كل جدول لأعداد a_{ij} من K حيث يشير $i \in [1,m]$ للأسطر و يشير $j \in [1,n]$ إلى الأعمدة.
يرمز للمصفوفة ب : (a_{ij}) ، وهي تطبيق من $[1,m] \times [1,n]$ في K.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى الأعداد معاملات أو حدود المصفوفة.
نرمز ب : $M_{m,n}(K)$ لمجموعة المصفوفات ذات m سطرا و n عمودا ومعاملات في K.

ب) تكون مصفوفتان $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ متساويتين إذا كان لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة وإذا كان : $a_{ij}=b_{ij}$ من أجل كلّ $i=1,\ldots,m$ وكلّ $j=1,\ldots,n$.

ج) يقال عن مصفوفة M من النمط (n,n) أنّها مصفوفة مربّعة رتبتها n. تسمّى متتالية العناصر القطرية $(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$ القطر الرئيسي.

يسمّى مجموع العناصر القطرية لـ M : أثر المصفوفة ويرمز له بـ: $\mathrm{Tr}M$

يقال عن مصفوفة مربّعة أنّها قطرية إذا كان $a_{ij}=0$ من أجل $i\neq j$.

يقال عن مصفوفة مربّعة أنّها مثلثية سفلية (أو من الأسفل) إذا كان: $a_{ij}=0$ لمّا $i<j$.

يقال عن مصفوفة مربّعة أنّها مثلثية علوية (أو من الأعلى) إذا كان: $a_{ij}=0$ لمّا $i>j$.

تسمّى المصفوفة المربّعة القطرية ذات الرتبة n والتي تساوي عناصرها القطرية 1، مصفوفة الوحدة من الرتبة n؛ ونرمز لها بـ: I_n.

يقال عن مصفوفة مربّعة أنّها متناظرة (أو تناظرية) (ضدّ تناظرية على التوالي) إذا كان: $a_{ij}=a_{ji}$ ($a_{ij}=-a_{ji}$) من أجل كلّ i ومن أجل كلّ j من $[1,n]$.

جمع المصفوفات:

إذا كانت $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتين من النمط ، نضع: $A+B=C$ مع: $C=(a_{ij}+b_{ij})$.

ضرب مصفوفة في سلمي.

ليكن c سلميا معطى في K و A مصفوفة معطاة من $M_{mn}(K)$ جداء A في C بـ: $C.A=C(a_{ij})=(c.a_{ij})$

مبرهنة:

$(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ فضاء شعاعي على K، بعده $m.n$.

المصفوفات M_{ij} من النمط (m,n) والتي عناصرها منعدمة ماعدا الحد الموجود بالسطر i والعمود j الذي يساوي 1، تشكل أساسا للفضاء الشعاعي المذكور.

تسمى الجماعة $(M_{ij})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]}$ أساسا قانونيا.

4- الجداء المصفوفي:

ليكن K حقلا تبديليا.

ولتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة من $M_{m,n}(K)$، و $B=(b_{ij})$ مصفوفة من $M_{n,p}(K)$. (أي، بحيث يكون عدد أعمدة A مساويا عدد أسطر B). نعرف، عندئذ، جداء A و B، بهذا الترتيب، بواسطة المصفوفة: $C=A\cdot B=(c_{ij})$ حيث:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

من أجل كل $i=1,\dots,m$ وكل $j=1,\dots,p$.

عموما، جداء مصفوفتين، إن وجد، غير تبديلي.

5- منقول مصفوفة:

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة من $M_{m,n}(K)$

منقول المصفوفة A هي المصفوفة المرموز لها بـ: $^{t}A=(b_{kl})$ من $M_{n,m}(K)$ والمعرفة بـ: $b_{kl}=a_{lk}$ من أجل كل: $k=1,\dots,n$ وكل: $l=1,\dots,m$.

6- علاقات بين تطبيق خطي ومصفوفته.

1. مبرهنة:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K بعداهما m و n منتهيان.
وليكن B أساسا لـ E و B' أساسا لـ F. عندئذ، يكون التطبيق:

$$u : L_K(E,F) \longrightarrow M_{m,n}(K)$$
$$f \longmapsto M_f(B,B')$$

تشاكلا.

ملاحظتان:

أ - يتعلّق التقابل السّابق، أساسا، باختيار الأساسين في E و F.

ب - مادام u خطيا، يكون لدينا، إذن:

$$M_{f+g}(B,B') = M_f(B,B') + M_g(B,B')$$

$$M_{af}(B,B') = a\, M_f(B,B')$$

وذلك من أجل كلّ f و g في $L(E,F)$، و a في K.

2 - قضيّة:

ليكن E و F و G ثلاث فضاءات ذات أبعاد منتهية.
ولتكن B_E و B_F و B_G أسس E و F و G على التّرتيب.
وليكن:

$$f : E \longrightarrow F$$
و
$$g : F \longrightarrow G$$

تطبيقين خطيّين

ولتكن $M_f(B_E,B_F)$ و $M_g(B_F,B_G)$ المصفوفتين الملحقتين بـ f و g على التّرتيب، وفق الأساسين الموافقين.

عندئذ :

$$M_{g\circ f}(B_E, B_G) = M_g \cdot M_f$$

خصائص :

P - إذا كانت A مصفوفة من النمط (n,p) ، فإنّ : $I_n A = A = A I_p$

ب - لتكن A و B و C ثلاث مصفوفات.

i) إذا كانت إحدى العبارتين $A(B+C)$ أو $AB+AC$ معرّفة تكون الأخرى معرّفة أيضا و تكونان متساويتين. ولدينا النتيجة ذاتها بالنسبة لـ : $(B+C)A$ و $BA+CA$

ii) إذا كان أحد الجدائين : $(AB)C$ أو $A(BC)$ معرّفا ، عندئذ يكون الثاني معرّفا أيضا و لدينا المساواة :

$$(AB)C = A(BC)$$

iii) إذا كان c عنصرا من K ، فإنّ :

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

ج) نرمز بـ: O للمصفوفة المنعدمة. لدينا:

$$0A = 0 \quad \text{و} \quad A \cdot 0 = 0$$

غير أنّ $AB = 0$ لا تؤدّي إلى : $0 = A$ أو $0 = B$

3 - الكتابة المصفوفية لتطبيق خطّي.

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K ذوي بعدين n و p على الترّتيب. وليكن B_E أساسا لـ E و B_F أساسا لـ F . وليكن f تطبيقا خطيا من E في F، و A مصفوفة f بالنسبة للأساسين B_E و B_F. نضع : $y=f(x)$ من أجل كلّ x من E و نرمز بـ: X للمصفوفة العمودية لأحداثيات x وفق الأساس B_E ، وبـ: Y للمصفوفة العمودية لأحداثيات y وفق B_F.

عندئذ ، يكون لدينا:

$$Y = A \cdot X$$

IV - المصفوفات المربّعة:

نرمز لفضاء المصفوفات المربّعة ذات رتبة n ومعاملات في K، بـ: $M_n(K)$.

1 - نتحقّق من أنّ $M_n(K)$ المزوّدة بجمع وضرب المصفوفات حلقة واحديّة، وعنصر الوحدة فيها هو I_n.

نشير إلى إنّه إذا كان E فضاء شعاعيّا على K، بعده n، وكان B أساسا لـ E، عندئذ لا تكون I_n سوى المصفوفة $M_{Id_E}(B,B)$ المرموز لها أيضا بـ $M_{Id_E}(B)$ حيث يرمز Id_E للتطبيق المطابق في E

2 - المصفوفات المربّعة المنتظمة (أو القابلة للقلب)

أ - تعريف:

نقول عن مصفوفة مربّعة A، رتبتها n، إنّها قابلة للقلب أو منتظمة إذا وجدت مصفوفة مربّعة B، رتبتها n، بحيث:

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

إذا وجدت المصفوفة B، فهي وحيدة، ويرمز لها بـ: A^{-1}.

يرمز لمجموعة المصفوفات المربّعة ذات رتبة n ومعاملات في K، والقابلة للقلب بـ: $GL_n(K)$.

وفي الواقع، نثبت أنّه:

تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة B من $M_n(K)$ بحيث

$$A \cdot B = I_n \quad \left(\text{أو } BA = I_n\right)$$

ب - مبرهنة:

(1) ليكن E و F فضائين شعاعيين على K لهما بعد واحد n منته. وليكن B_E أساسا لـ E و B_F أساسا لـ F.

ليكن f تطبيقا خطيّا من E في F و $A = M_f(B_E, B_F)$

عندئذ، يكون f تقابليّا إذا وفقط إذا كانت A قابلة للقلب و

$$A^{-1} = (Mf)^{-1} = M(f^{-1})$$

ii) إذا كانت A و B مصفوفتين قابلتين للقلب رتبتها n، عندئذ تكون المصفوفة AB قابلة للقلب و : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) إذا كانت A قابلة للقلب ، تكون المصفوفة A^{-1}، عندئذ، قابلة للقلب و : $(A^{-1})^{-1} = A$

iv) تتمتّع $GL_n(K)$ المزوّدة بضرب المصفوفات ببنية زمرة

V - تغيير الأسس.

1 - مصفوفة الإنتقال.

ليكن E K-فضاء شعاعيّا بعده n و $B = (e_1, \dots, e_n)$ أساسا لِ E (قديما) و $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ أساسا جديدا لِ E.

نسمّي مصفوفة الانتقال من B إلى B' ، المصفوفة المرموزلها بِ P والتي تساوي $M_{Id_E}(B', B)$.

مصفوفة الانتقال P من B إلى B' هي المصفوفة التي يساوي عناصرالأشعّة العموديّة فيها احداثيات أشعّة الأساس الجديد B' بالنّسبة للأساس القديم B.

تعرّف المساواتُ $e'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i$ المصفوفةَ $P = (P_{ij})$

2 - خصائص:

ليكن E K-فضاء شعاعيّا و B وَ B' أساسين لـ E.

وليكن x عنصرا من E. نرمز بِ : X لمصفوفة أحداثيات x العموديّة بالنّسبة لِ B ، و بِ : X' لمصفوفة أحداثيات x العموديّة بالنّسبة لِ B' ونرمز بِ : P لمصفوفة الإنتقال من B إلى B'. عندئذ يكون لدينا مايلي :

P قابلة للقلب و P^{-1} هي مصفوفة الإنتقال من B' إلى B

و $X = PX'$ و $X' = P^{-1}X$

ب-

3. **مبرهنة:** ليكن E_1 و E_2 فضائين شعاعيين على K، بعداهما منتهيان و B_1 و B'_1 أساسين لـ E_1، و B_2 و B'_2 أساسين لـ E_2. وليكن P مصفوفة الإنتقال من B_1 إلى B'_1 و Q مصفوفة الإنتقال من B_2 إلى B'_2. لتكن f تطبيقا خطيا من E_1 في E_2 و $A = M_f(B_1, B_2)$ و $B = M_f(B'_1, B'_2)$ عندئذ: إذا كان ...، فإن:

$$\underline{B = Q^{-1}.A.P}$$

يوضّح الرّسم أدناه الأسس الّتي وفقها كُتبت المصفوفات:

$$E_1 \xrightarrow{Id_{E_1}} E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{Id_{E_2}} E_2$$

$$(B'_1) \underbrace{\quad}_{P} (B_1) \underbrace{\quad}_{A} (B_2) \underbrace{\quad}_{Q^{-1}} (B'_2)$$

$$(B'_1) \xrightarrow{B} (B'_2)$$

حالة خاصّة هامّة: ليكن f تماثلا داخليّا لـ E و B و B' أساسين لـ E و P مصفوفة الإنتقال من B إلى B'. إذا كانت $A = M_f(B)$ و $A' = M_f(B')$ تكون عندئذ المصفوفتان A و A' مقيّدتين بالعلاقة:

$$\underline{A' = P^{-1}.A.P}$$

4- المصفوفات المتكافئة - المصفوفات المتشابهة.

أ- تعاريف

لتكن A و B مصفوفتين من $M_{m,n}(K)$. نقول عن A و B أنّهما متكافئتان إذا وجدت مصفوفتان P و Q مربّعتان وقابلتان للقلب بحيث:

$$B = Q \cdot A \cdot P$$

للمصفوفة P الرّتبة n و لِـ Q الرّتبة m.

إذا كانت A و B مصفوفتين مربّعتين من الرّتبة n، فنقول عنهما أنّهما متشابهتان إذا وجدت مصفوفة مربّعة P من الرّتبة n وقابلة للقلب، بحيث:

$$B = P^{-1} . A . P$$

ب- ملاحظة:

لقد رأينا أنّ مصفوفتين ملحقتين بتطبيق خطّي واحد متكافئتان، كما أنّ مصفوفتين ملحقتين بتماثل داخلي واحد متشابهتان.

و في الواقع، نثبت الخاصيتين المميّزتين:

① لتكن A و B مصفوفتين من $M_{m,n}(K)$ و E و F فضائين شعاعيّين على K بعداهما m و n على الترتيب. عندئذ تكون A و B متكافئتين إذا وفقط إذا كانت A و B مصفوفتين لتطبيق خطّي واحد وفق أسس متمايزة، من E في F.

② إذا كانت A و B مصفوفتين من $M_n(K)$ و E فضاء-K شعاعيا بعده n، فإنّ:

A و B متشابهتان إذا وفقط إذا كانت A و B مصفوفتين لتماثل داخلي واحد ذاته لـ E وفق أسس متمايزة.

VI - مرتبة مصفوفة:

1 - تعريف:

نسمّي مرتبة مصفوفة A مرتبة الأشعّة العموديّة لـ A

و بعبارة أخرى ، مرتبة A هي العدد الأكبر لأشعّة A العموديّة المستقلّة خطيّا.

نرمز لها بـ : $rg(A)$.

2 - قضيّة:

① إذا كانت A هي المصفوفة من النّمط (m,n) للتطبيق الخطي f من E في F ، بالنّسبة لأساسين B_E و B_F ، فإنّ:

$$rg(A) = rg(f)$$

$$rg(A) = rg({}^tA)$$

② تساوي مرتبة A العدد الأكبر لأشعّة A السّطريّة المستقلّة خطيّا.

$rg(A) \leq m$ و $rg(A) \leq n$

③ تكون مصفوفتان A و B متكافئتين إذا و فقط إذا كانت لهما مرتبة واحدة.

ب - التّطبيقات متعدّدة الخطيّة

1 - تعاريف:

لتكن E_1 ، E_2 ، .... ، E_n و F فضاءات شعاعيّة على K و

$$f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$$
$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

يقال عن التّطبيق f أنّه متعدّد الخطيّة أو n - خطيّ إذا كان f خطيًا بالنّسبة لكل واحد من المتغيّرات.

وبعبارة أخرى،

من أجل كلّ $i = 1$ ، ... ، n وكلّ v_i و w_i في E_i وكلّ سلّمي c في K،

يكون لدينا:

$$f(v_1, \dots v_{i-1}, v_i + w_i, v_{i+1}, \dots, v_n) =$$
$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

و

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, c v_i, \dots, v_n) = c\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

لنشر إلى أنّ:

① $$f(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$$

② عموما، f غير خطي. فعلى سبيل المثال، يحقق التّطبيق

$$f : E \times E \longrightarrow F$$

$$f(c(x, y)) = f(cx, cy) = c^2 f(x, y)$$

إذا كان f ثنائي الخطيّة، في حين أنّ:

$$f(c(x, y)) = c\, f(x, y)$$

إذا كان f خطيًا.

2 - شكل - n خطي على K - فضاء شعاعي.

نسمّي شكلا n - خطيّا على K - فضاء شعاعي E، كلّ تطبيق n - خطي f معرّف من $\underbrace{E\times E\times\dots\times E}_{n\ \text{مرّة}} = E^n$ في K.

3 - شكل n - خطي متناوب على E.

هو شكل n - خطي f معرّف من E^n نحو K بحيث:
$$f(v_1,\dots,v_n)=0.$$
كلّما كان للعنصر $(v_1,\dots,v_n)$ شعاعان متساويان.

مبرهنة 1:

ليكن $f: E^n \longrightarrow K$ شكلا n - خطيّا متناوبا.

1 - إذا بدّلنا v_i بـ v_j و v_j بـ v_i، نحصل من أجل كلّ $i \neq j$ على:
$$f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) = -f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n)$$

2 - إذا أضفنا إلى شعاع من $(v_1,\dots,v_n)$ عبارة خطيّة للأشعة الأخرى، فإنّ الصّورة لا تتغيّر حينئذ.

3 - إذا كانت الأشعة v_1، ...، v_n مرتبطة (مقيّدة)، فإنّ:
$$f(v_1,\dots,v_n)=0$$

II - المحدّدات.

1 - التّطبيق المحدّد:

ليكن E - K فضاء شعاعيّا بعده n، و $B=(e_1,\dots,e_n)$ أساسا له. نسمّي تطبيقا محدّدا وفق الأساس B، الشّكل n - الخطّي المتناوب على E والمرموز له بـ: $\det_B$، بحيث: $\det_B(e_1,\dots,e_n)=1$

ليكن $(v_1,\dots,v_n)$ عنصرا من E^n. يسمّى السّلّمي: $\det_B(v_1,\dots,v_n)$ محدّد الجماعة $(v_1,\dots,v_n)$ بالنّسبة للأساس B.

2 - محدّد مصفوفة مربّعة:

لتكن A مصفوفة مربّعة رتبتها n. نسمي محدّد A، محدّد جماعة الأشعّة العمودية لِـ A، بالنسبة للأساس K^n القانوني.
ونرمز لمحدّد A بـ: $\det A$.

3 - تغيير الأساس في المحدّدات:

ليكن E، K - فضاء شعاعيًا بعده n، ولتكن B و B' أساسين له.
عندئذ يكون لدينا:

$$\det_{B'}(v_1, \dots, v_n) = \det_B(v_1, \dots, v_n) \cdot \det_{B'}(B)$$

ومن ذلك نستخلص الـ:

مبرهنة 2:

ليكن E K فضاء شعاعيًا بعده n و B أساسا له. عندئذ، تكون جماعة الأشعّة $v_1, \dots, v_n$ مستقلّة إذا وفقط إذا كان محدّد الجماعة $(v_1, \dots, v_n)$، وفق الأساس B، منعدما.

4 - ترميزة - حساب المحدّدات:

P - ليكن $(e_1, \dots, e_n)$ أساسا لِـ E. ولتكن $(v_1, \dots, v_n)$ عنصرا كيفيا لِـ E^n. نضع:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

نرمز لمحدّد الجماعة $(v_1, \dots, v_n)$ وفق الأساس (e_i): بـ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وهو أيضا محدّد المصفوفة (a_{ij}). يقول بأنّه من الرّتبة n.

ب ـ مثالان :

1 ـ محدّد من الرّتبة 2 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

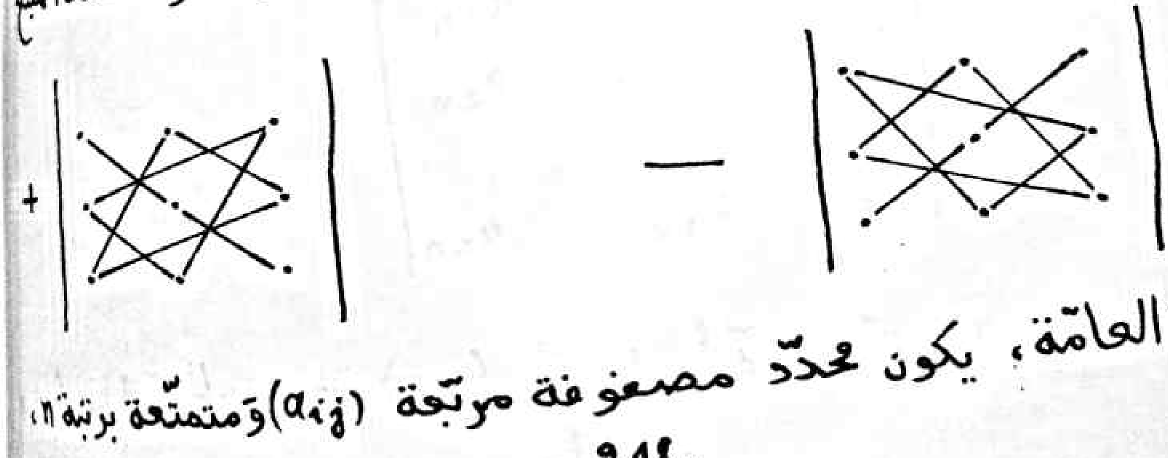
2 ـ محدّد من الرّتبة 3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

القاعدة التي بها شُكّلت هذه الحدود إنطلاقا من معاملات المصفوفة هي التّاليَة :

نضع إشارة + ، في (*) ، أمام جداء عناصر القطر الرّئيسي وأمام الحدّين المشكّلين من ضرب عناصر القطرين الموازيين للقطر الرّئيسي في العناصر المتواجدة عند النّقاط الأكثر بعدا (أو ابتعادا) عن القطرين الموافقين وتتشكّل العناصر المسبوقة بـ: — في (*) ، حسب القانون نفسه و المطبّق ، هذه المرّة ، على القطر غير الرّئيسي.

وتعرف هذه الطّريقة بطريقة ساروس (sarrus) . والمخطّط المتّبع هو :



وفي الحالة العامّة، يكون محدّد مصفوفة مربّعة (a_{ij}) ومتمتّعة برتبة n،

مساويا العدد :

$$\sum_{p \in S_n} \varepsilon(p)\, a_{p(1)1} \cdot a_{p(2)2} \cdot \ldots\, a_{p(n)n}$$

حيث يرمز S_n للزّمرة المتناظرة المشكّلة من التّبديلات p لـ $\{1, 2, \ldots, n\}$.

$\varepsilon(p) = +1$ ، إذا قمنا بعدد زوجي من المناقلات.

$\varepsilon(p) = -1$ ، إذا قمنا بعدد فردي من المناقلات.

ملاحظة:

بمبادلة عنصرين متمايزين من تبديلة وترك العناصر الأخرى صامدة (لا متغيّرة) ؛ نحصل على تبديلة أخرى. يسمّى هذا التّحويل مناقلة.

مثال: للانتقال من 123 إلى 231 ، نبادل 2 و 1 فنحصل على: 213 ، ثمّ نبادل 3 و 1 وبه نحصل على: 231.

استخدمنا نحو يلين ، إذن: $\varepsilon(p) = +1$.

نتأكّد أنّه من أجل الانتقال من 123 إلى 132 استخدمنا مناقلة واحدة وبذلك: $\varepsilon(p) = -1$

5 - قواعد الحساب:

نثبت أنّه:

1) إذا كان عمودان متساويين ، أو إذا كان أحد الأعمدة منعدما ، أو إذا كان أحد الأعمدة عبارة خطيّة للأعمدة الأخرى ، عندئذ يكون المحدّد منعدما.

2) الخطيّة بالنّسبة للعمود ذي الرّتبة j.

(أ)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a'_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a'_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & (a'_{1j} + a_{1j}) & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj-1} & (a'_{nj} + a_{nj}) & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ب)

$$c\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & (c \cdot a_{1j}) & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & (c \cdot a_{nj}) & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3) إذا أضفنا إلى أحد الأعمدة عبارةً خطّيّة للأعمدة الأخرى، فإنّ المحدّد لا يتغيّر.

4) إذا كانت A مصفوفة مربّعة رتبتها n ، يكون لدينا عندئذ:

$$\det(cA) = c^n \det A$$

5)

$$\det({}^tA) = \det A$$

6) يتضّح من خلال الخاصيّة (5) أنّ الخصائص 1) و 2) و 3) تبقى صحيحة من أجل الأسطر.

6- محدّد جداء مصفوفتين:

مبرهنة 3:

لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين من الرّتبة n. عندئذ لدينا:

$$\det(AB) = \det A \,.\, \det B$$

نستخلص من ذلك:

أ) إذا كانت A قابلة للقلب، فإنّ: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

(وبالخصوص: $\det A \neq 0$)

وتبرير التّعريف:

ب) محدّد تماثل داخلي u لفضاء شعاعي E على K، بعده n، هو محدّد المصفوفة الملحقة بـ u وفق أساس كيفي. نرمزله بـ: $\underline{\det u}$

ومن جهة أخرى، لدينا:

مبرهنة 4:

ليكن f تماثلا داخليّا لـ K-فضاء شعاعي E ذي بعد منته n.
لتكن A المصفوفة الملحقة بـ f وفق أساس B لـ E. عندئذ تكون هذه الشّروط التّالية متكافئة:

1- f تقابلي.

2- A قابلة للقلب.

3- $\det A \neq 0$.

7- نشر محدّد بالنّسبة لحدود صفّ.

أ- تعريف:

ليكن $D = \det(a_{ij})$، محدّدا رتبته n.

نسمّي محدّدا مصغرا للحدّ a_{ij} (ملحقا بالحدّ a_{ij})، المحدّد ذا

الرتبة $n-1$ المحصل عليه من D بحذف السطر i والعمود j، ونرمز له بـ
D_{ij}

ب - وعمليًا، نحصل على المحدد D، أيضا، بنشره حسب عمود أو حسب سطر.

ونثبت أنّه:

ب$_1$ - حسب عمود، وليكن، مثلا، العمود j، لدينا:

$$D = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}$$

وذلك من أجل كلّ $j = 1, \dots, n$

ب$_2$ - وحسب سطر، وليكن - مثلا - السطر i، يصبح لدينا:

$$D = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}$$

من أجل كلّ $i = 1, \dots, n$.

ج) حساب مقلوب مصفوفة مربّعة منتظمة:

لنضع، من أجل كلّ i، $j = 1, \dots, n$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

نثبت أنّه إذا كانت A مصفوفة مربّعة قابلة للقلب رتبتها n، عندئذ تضحى المصفوفة A^{-1} موجودة و:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^tC$$ ، حيث: $C = (C_{ij})$

نسمّي C مصفوفة المرافقات لـ A أو المصفوفة المرافقة له A.

C مصفوفة مربّعة رتبتها n.

8 - مرتبة مصفوفة:

لتكن A مصفوفة غير منعدمة، من النمط (m, n).

تساوي مرتبة المصفوفة A الرتبة الأعظمية لمصفوفة مربّعة مستخرجة يكون محدّدها غير منعدم.

تكون مرتبة A مساوية r إذا وفقط إذا وجد محدّد غير منعدم رتبته r يكون مستخرجا من A.

9 - قاعدة حساب محدّد بالكتل.

لتكن M مصفوفة مربّعة رتبتها $n+p$ ومشكّلة من أربع كتل (أقسام) كما يبيّن ذلك الرسم الموالي:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

حيث يرمز 0 للمصفوفة المنعدمة ذات النمط (p,n) وحيث A (B على التوالي)، (C على التوالي) مصفوفة من النمط (n,n) ((n,p) على التوالي)، ((p,p) على التوالي).

نثبت أنّ محدّد المصفوفة M مستقلّ عن B وأنّ:

$$\det M = \det A \cdot \det C$$

تمرين 1. VI :

أوجد المصفوفة M الملحقة بكلّ واحد من التّطبيقات المواليّة، بالنّسبة للأساسين القانونيين لفضاءات البدء والوصول.

أ- $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (3x-y\ ,\ 2x+4y\ ,\ 5x-6y)$

ب- $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ،

f_2 هو الإسقاط على $\mathbb{R}^2$ بالموازاة مع $e_3 = (0,0,1)$

ج- $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

f_3 هو الدّوران حول المبدإ زاويته θ.

د- $f_4 = f_2 \circ f_1$

أ- ليكن $B=(u_1,u_2)$ و $B'=(e_1,e_2,e_3)$ أساسي $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ القانونين على التّرتيب. ولتكن $M_{f_1}(B,B')$ المصفوفة الملحقة بالتّطبيق f_1 وفق هذين الأساسين. نكون أعمدة المصفوفة M_{f_1} مشكّلة من أحداثيات الأشعّة $f_1(u_1)$ و $f_1(u_2)$ وفق الأساس (e_1,e_2,e_3).

لدينا:

$$f_1(u_1) = f_1(1,0) = (3,2,5) = 3e_1 + 2e_2 + 5e_3$$

و

$$f_1(u_2) = f_1(0,1) = (-1,4,-6) = -e_1 + 4e_2 - 6e_3$$

إذن:

$$M_{f_1}(B,B') = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

ب- التّطبيق الخطّي f_2 معرّف بـ:

$$f_2(x,y,z) = (x,y) \quad ; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

ولدينا:

$$M_{f_2}(B',B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ج- نبحث أوّلا عن عبارة التّطبيق f_3. ليكن (x,y) عنصرا كيفيّا من $\mathbb{R}^2$. إذا وضعنا:

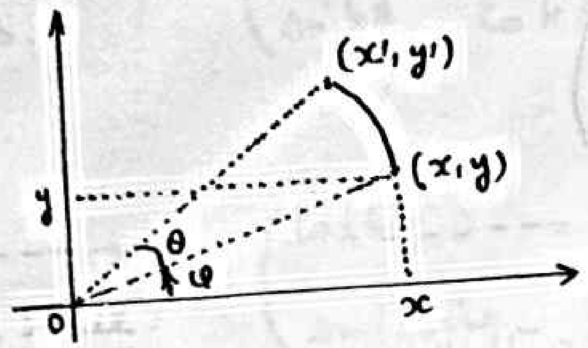
$$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

و

$$f_3(x,y) = (x',y')$$

وما دام f_3 دورانا حول نقطة المبدإ زاويته θ ، فإننا نحصل عندئذ على:

$$f_3(x,y) = f_3(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$= (r\cos(\varphi+\theta), r\sin(\varphi+\theta))$$
$$= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$



وعليه، يأتي:

$$f_3(u_1) = f_3(1\ 0) = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\, u_1 + \sin\theta\, u_2$$

و

$$f_3(u_2) = f_3(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta\, u_1 + \cos\theta\, u_2$$

ومنه، تكون المصفوفة الملحقة بـ f_3 بالنسبة للأساس (u_1, u_2) مساوية:

$$M f_3(B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>ملاحظة</u>: ليس من الضروري إعطاء عبارة التطبيق f_3 من أجل كل عنصر من $\mathbb{R}^3$. ولكتابة المصفوفة، يكفي إيجاد $f_3(u_1)$ و $f_3(u_2)$ فقط.

د) f_4 تطبيق من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$، ومصفوفته بالنّسبة للأساس (u_1, u_2) تساوي جداء المصفوفتين M_{f_2} و M_{f_1}. لدينا:

$$M_{f_4}(B) = M_{f_2}(B', B) \cdot M_{f_1}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$M_{f_4}(B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

تمرين 2. VI:

لتكن A المصفوفة التّاليّة:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

أ- أحسب A^n ، $n \in \mathbb{N}^*$

ب- أثبت أنّ A قابلة للقلب وأحسب A^{-1}.

ج- أستنتج A^n ، $n \in \mathbb{Z}^*$.

أ) الطّريقة الأولى: يتعلّق الأمر بالإستدلال بالتّدرّج على n.

من أجل $n = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

من أجل $n = 2$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

لنفترض أنّه لدينا من أجل $k=n$:

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

ولنثبت أنّ :

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}$$

لدينا : $A^{k+1} = A^k . A$ ، وبالتّالي :

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & -\cos k\theta \sin\theta - \sin k\theta \cos\theta \\ \sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta & -\sin k\theta \sin\theta + \cos\theta \cos k\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}$$

إذن :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad ; n \in \mathbb{N}^*$$

الطريقة الثانية، وتتمثل بإلحاق تطبيق خطي بالمصفوفة A^n

إذا اعتبرنا في $\mathbb{R}^2$ الأساس القانوني $B=(v_1, v_2)$،

عندئذ يُلحق بالمصفوفة A التطبيقُ الخطي f من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$،

والمتمثل في الدوران ذي الزاوية θ، والمركز عند نقطة المبدإ،

(ارجع إلى التمرين 1-ج. VI). وما دامت المصفوفة A^n

$(n \in \mathbb{N}^*)$ جداء للمصفوفة A في ذاتها n مرة، فإنها تلحق

بالتطبيق الخطي:

$$g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ مرة}}$$

بالنسبة للأساس B. وبما أن التطبيق g تركيب لـ n دوران

مركزا عند المبدإ وزاويتها θ، فهو، إذن، دوران زاويته

$n\theta$ ومركز عند المبدإ. وهكذا، نأتي:

$$A^n = M_g(B) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{N}^*$$

ب- علينا أن نثبت وجود مصفوفة M بحيث:

$$A \cdot M = M A = I_2$$

لتكن: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. عندئذ نكتب:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos\theta - c\sin\theta & b\cos\theta - d\sin\theta \\ a\sin\theta + c\cos\theta & b\sin\theta + d\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\begin{cases} a\cos\theta - c\sin\theta = 1 \\ a\sin\theta + c\cos\theta = 0 \\ b\cos\theta - d\sin\theta = 0 \\ b\sin\theta + d\cos\theta = 1 \end{cases}$$

نجد : $a = \cos\theta$ ؛ $b = \sin\theta$ ؛ $c = -\sin\theta$ ؛ $d = \cos\theta$

وهكذا ، فإنّ المصفوفة A^{-1} موجودة وتساوي :

$$A^{-1} = M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

والتي تمكن كتابتها على النّحو :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

وهي نتيجة منتظرة ، إذ لإثبات أنّ المصفوفة A قابلة للقلب ، يلزم و يكفي إثبات أنّ الدّوران f المركز عند نقطة المبدإ وزاويته θ ، تقابلي ، وهو أمر صحيح. وبما أنّ التّطبيق العكسي f^{-1} دوران مركز عند المبدإ وزاويته $(-\theta)$ ، فإنّنا نكتب عندئذ :

$$A^{-1} = \left(M_f(B)\right)^{-1} = M_{f^{-1}}(B)$$

حيث :

$$M_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

نكتفي بإيجاد A^n من أجل $n \in \mathbb{Z}_-^*$ لأنّنا نعلم A^n عندما $n \in \mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ حسب ٢ـ . ليكن ، إذن ، $n \in \mathbb{Z}_-^*$. نستطيع أن نضع : $n = -k$

حيث $k \in \mathbb{N}^*$. وعليه تأتي :

$$A^n = A^{-k} = (A^{-1})^k = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{k \text{ مرّة}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

وهكذا :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(-n\theta) & \sin(-n\theta) \\ -\sin(-n\theta) & \cos(-n\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin(n\theta) \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} ; \forall n \in \mathbb{Z}^*_-$$

ومنه ،

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} ; \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

<u>ملاحظة</u> :

إذا رمزنا بـ A^0 للمصفوفة :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نحصل ، بذلك ، على :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

<u>تمرين 3 . VI</u> :

لتكن E مجموعة المصفوفات المربّعة ذات الرّتبة 2

ومعاملات حقيقيّة ومتمتّعة بالشّكل:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

أ- أثبت أنّ E فضاء شعاعي جزئي للفضاء الشّعاعي $M_2(\mathbb{R})$ المؤلّف من المصفوفات المربّعة الحقيقيّة الّتي رتبتها 2.

ب- أوجد أساسا لـ E. ما هو بعده؟

جـ- أثبت أنّ التّطبيق f المعرّف بـ:

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}$$

تماثل داخلي لـ E. عيّن مصفوفة التّطبيق f وفق الأساس المطلوب وكذا نواة f وبعدها.

أ- نلاحظ أنّ E مجموعة جزئية غير خالية من $M_2(\mathbb{R})$ الّذي يحوي: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. وبعد هذا، نعتبر عنصرين A و A' من E و r و r' عنصرين من $\mathbb{R}$. إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

عندئذ نكتب:

$$rA + r'A' = r\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + r'\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra + r'a' & rb + r'b' \\ rb + r'b' & r'b' + r'c' \end{pmatrix}$$

و $rA + r'A'$ عنصر من E. وعليه، فإنّ E فضاء شعاعي جزئي لـ $M_2(\mathbb{R})$

ب- ليكن A عنصرا كيفيّا من E. يكتب العنصر A على النّحو التّالي:

$$\ldots = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= aB_1 + bB_2 + cB_3$$

وهو ما يسمح بالختم بأنّ المصفوفات B_1 وَ B_2 وَ B_3 تولّد E. الأشعّة B_1 وَ B_2 وَ B_3 مستقلّة خطيّا. وبالفعل، لتكن a_1 و a_2 و a_3 سلّميات حقيقيّة بحيث:

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أي أنّ:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

وهكذا، تكون الجماعة (B_1, B_2, B_3) أساسًا لِـ E. بعد E يساوي 3.

ج- التّطبيق f تطبيق فعلا من E في E. بقي، إذن، الإثبات أنّه خطّي. لنعتبر r و r' عنصرين من $\mathbb{R}$ و A و A' عنصرين من E.

إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

فإنّ:

$$rA + r'A' = \begin{pmatrix} ra + r'a' & rb + r'b' \\ rb + r'b' & rc + r'c' \end{pmatrix}$$

وَ

$$f(rA + r'A') = \begin{pmatrix} ra + r'a' + rc + r'c' & rb + r'b' \\ rb + r'b' & ra + r'a' + rb + r'b' + rc + r'c' \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix} + r'\begin{pmatrix} a'+c' & b' \\ b' & a'+b'+c' \end{pmatrix}$$

$$= r\,f(A) + r'\,f(A')$$

وبهذا، يكون f تطبيقا خطيّا من E في E، فهو إذن تماثل داخلي لـ E.

لتكن M_f المصفوفة الملحقة بـ f بالنّسبة للأساس (B_1, B_2, B_3).

لدينا:

$$f(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.B_1 + 0.B_2 + 1.B_3$$

$$f(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.B_1 + 1.B_2 + 1.B_3 .$$

$$f(B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.B_1 + 0.B_2 + 1.B_3 .$$

ومنه:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

لنعيّن نواة f.

$$\mathrm{Ker} f = \{ A \in E \;/\; f(A) = 0_{M_2(\mathbb{R})} \}$$

نجد:

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;;\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

ومنه: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ أساس لـ $\mathrm{Ker} f$ و $\dim \mathrm{Ker} f = 1$

تمرين 4. VI

1) لتكن $D=(a_{ij})$ المصفوفة القطرية ذات الرتبة n، مع $a_{ii}=b_i \neq 0$ من أجل كلّ $i=1,\dots,n$. أثبت أنّ D قابلة للقلب
وأحسب D^{-1} و D^k من أجل كلّ عنصر k من $\mathbb{Z}$.

2) نعتبر المصفوفتين A و B ذواتي معاملات حقيقية:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

أ- حدّد مرتبتي A و B.

ب- أثبت أنّ: $B^3=0$. أستنتج A^k من أجل كلّ عدد طبيعي k.

---

1) نستخدم تعريف مصفوفة قابلة للقلب لإثبات أنّ: $D^{-1}=(d_{ij})$

مع:

$$d_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{b_i} & ; i=j \quad ; i=1,\dots,n\\[2mm] 0 & ; i\neq j \quad ; i,j=1,\dots,n\end{cases}$$

وعليه، يكون مقلوب مصفوفة قطرية مصفوفة قطرية.

من أجل كلّ عنصر k من $\mathbb{N}$، نثبت بالتدريج أنّ:

$$D^k=\begin{pmatrix}b_1^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_2^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_n^k\end{pmatrix}$$

مع $I_n=D^0$ المصفوفة المطابقة من الرتبة n.

ومن أجل عنصر k من $\mathbb{Z}_-$، ضع $k=-m$ واستخدم المصفوفة D^{-1}. نجد، من جديد، شكل المصفوفة السابقة.

2- أ- مرتبة مصفوفة هي العدد الأكبر للأشعة العمودية المستقلة خطيًا. وإلى جانب هذا، نلاحظ أنّ الأشعة العمودية للمصفوفة A، وهي: $u_1 = (1,0,0)$ و $u_2 = (1,1,0)$ و $u_3 = (0,1,1)$، مستقلة خطيًا في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$، وعليه: $rg A = 3$. ومن جهة أخرى، نلاحظ، أيضا، أنّ شعاعي المصفوفة B العمودية، وليكونا: $v_1 = (1,0,0)$ و $v_2 = (0,1,0)$، مستقلان خطيًا في $\mathbb{R}^3$.

نستخلص من ذلك أنّ: $rg B = 2$

ب- استخدم تعريف جداء مصفوفتين لإثبات أنّ: $B^3 = 0$.

نلاحظ أنّ:

$A = I_3 + B$، حيث: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

وبذلك، يكون لدينا، من أجل كلّ عدد طبيعي k:

$$A^k = (I_3+B)^k = I_3^k + k I_3^{k-1} B + \frac{k(k-1)}{2} I_3^{k-2} B^2 + 0$$

ويتضح من خلال السؤال (1) أنّ:

$$A^k = I_3 + k I_3 B + \frac{k(k-1)}{2} I_3 B^2$$

ولكن، $I_3 B = B$ و $B^2 = I_3 B^2$

إذن:

$$A^k = I_3 + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2$$

وفي النهاية:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \forall k \in \mathbb{N}$$

ملاحظة:

يمكن القول أيضا إنّه مادامت I_3 هي عنصر الوحدة للجداء المصفوفي في $M_3(\mathbb{R})$، عندئذ نكتب: $I_3^k = I_3$ من أجل كلّ عدد طبيعي k.

تمرين 5. VI :

1) لتكن A و B عنصرين من $M_{n,m}(\mathbb{R})$ و a عدداً حقيقياً. أثبت أن:

أ- $t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

ب- $t(aA) = a\,{}^tA$

2) إذا كانت A عنصرا من $M_{m,m}(\mathbb{R})$ و B عنصرا من $M_{m,p}(\mathbb{R})$ أثبت ،باستخدام قاعدة ضرب المصفوفات، أن:

$$t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$

3) إذا كانت A مصفوفة قابلة للقلب من $M_n(\mathbb{R})$، أثبت أن:

$$({}^tA)^{-1} = t(A^{-1})$$

---

1) لتكن :

$$A = (a_{ij}) \quad , \quad B = (b_{ij}) \quad \text{و} \quad i = 1, \dots, n.$$
$${}^tA = (a'_{ji}) \quad , \quad {}^tB = (b'_{ji}) \qquad j = 1, \dots, m.$$

لدينا :

$$(a'_{ji}) = a_{ij} \quad , \quad b'_{ji} = b_{ij} \quad ; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m$$

و :

$$A+B = C = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij})$$

و علاوة على ذلك :

$$t(A+B) = {}^tC = (c'_{ji})$$

حيث :

$$c'_{ji} = c_{ij} \qquad \forall i = 1, \dots, n. \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

إذن:

$$(c'_{ji}) = (a'_{ji} + b'_{ji}) = (a'_{ji}) + (b'_{ji}) = {}^tA + {}^tB$$

وبالتالي:

$$t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

ب- قم باستدلال مماثل لما سبق.

ج- لتكن:

$$A = (a_{ij}) \quad , \quad B = (b_{jl}) \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad j = 1, \dots, m \quad ; \quad l = 1, \dots, p$$

$${}^tA = (a'_{ji}) \quad , \quad {}^tB = (b'_{lj})$$

لدينا:

$$a'_{ji} = a_{ij} \quad ; \quad b'_{lj} = b_{jl} \quad ; \forall i, j, l.$$

و

$$A \cdot B = C = (c_{il})$$

حيث:

$$c_{il} = a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + \dots + a_{im} b_{ml}$$

وزيادة على ذلك:

$$t(A \cdot B) = {}^tC = (c'_{li})$$

حيث:

$$c'_{li} = c_{il} = a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + \dots + a_{im} b_{ml}$$
$$= a'_{1i} b'_{l1} + a'_{2i} b'_{l2} + \dots + a'_{mi} b_{lm}$$

وذلك

$$\forall \, i = 1, \dots, n$$
$$\forall \, l = 1, \dots, p$$

نلاحظ أنّ المعامل c'_{li} نحصل عليه بضرب السّطر l للمصفوفة في العمود i للمصفوفة ^tA.

لدينا إذن:

$$(c'_{li}) = {}^tB \cdot {}^tA$$

ومنه:

$$^t(A\cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

3- نعلم، من جهة، أنّه تكون مصفوفة A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان محدّد A مختلفا عن الصّفر؛ ومن جهة أخرى، يكون محدّد A مساويا محدّد المصفوفة المنقولة ^tA. وعليه، فإنّ المصفوفة ^tA قابلة للقلب. وبذلك، ومادام:

$$A\cdot A^{-1} = I_n$$

حيث I_n تمثّل المصفوفة المطابقة لِـ $M_n(\mathbb{R})$، وباستخدام السّؤال يكون لدينا:

$$^t(A\cdot A^{-1}) = {}^t(A^{-1})\cdot {}^tA = {}^tI_n = I_n$$

إذن:

$$\underline{^t(A^{-1})} = I_n\cdot({}^tA)^{-1} = \underline{({}^tA)^{-1}}$$

....

تمرين 6. VI:

1) ليكن K حقلا تبديليّا و n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و A و B عنصرين من $M_n(K)$. أثبت أنّ أثر $(A\cdot B)$ يساوي أثر $(B\cdot A)$:

$$(Tr(A\cdot B) = Tr(B\cdot A))$$

2) نعتبر A و B مصفوفتين من $M_2(\mathbb{R})$ بحيث:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \qquad B\cdot A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

عيّن x و y.

---

1) لتكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ و
$AB = C = (c_{ij})$ و $BA = D = (d_{ij})$
وذلك من أجل $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, n$.

لدينا:

$$Tr(A\cdot B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}\right) =$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} +$$
$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} +$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} =$$

$$= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots b_{1n}a_{n1} +$$
$$b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} +$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = Tr(B\cdot A)$$

2) يتضح من خلال السؤال (1) أنّ:

$$Tr(A\cdot B) = 15 = Tr(B\cdot A) = x+y$$

$(B\cdot A)$

و مادام:

$$\det(A\cdot B) = 36-52 = \det(B\cdot A) = xy-16$$

فإنّ:

$$xy = 0$$

إذن:

و بذلك نحصل على الجملة:

$$\begin{cases} x+y = 15 \\ xy = 0 \end{cases}$$

و نختم بأنّ: $(x=15$ و $0=y)$ أو $(x=0$ و $15=y)$

تمرين 7: VI

ليكن E الفضاء الشّعاعي على $\mathbb{R}$ المؤلّف من المصفوفات المربّعة ذات رتبة 2، و معاملات حقيقيّة. لنعتبر المصفوفة:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

التّماثل الدّاخلي f لِـ E، المعرّف بـ: $f(M) = N\cdot M$، من أجل كلّ عنصر M من E.

أ- إعط أساسا B لِـ E و اعط بُعد E.

ب- ما هي مصفوفة التّماثل f بالنّسبة للأساس المعثور عليه؟

ج- أحسب أثر و محدّد المصفوفة A المطلوبة في (ب).

د- هل التّطبيق f تقابلي؟

م- لتكن M عنصرا كيفيّا من E. للمصفوفة M الشّكل:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

حيث a وَ b وَ c وَ d أعداد حقيقيّة. ويمكن أن نكتب أيضا:

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

وهكذا تكون E مولّدة بواسطة (M_1, M_2, M_3, M_4). ونتأكّد، بكلّ سهولة، أنّ هذه الجماعة مستقلّة في E. ومنه:

$$B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$$

أساس في E، وبه يكون بعد E مساويا 4 .

ب- لتحديد المصفوفة A للتّماثل f بالنّسبة للأساس B، ينبغي تحليل (تفكيك) $f(M_1)$ وَ $f(M_2)$ وَ $f(M_3)$ وَ $f(M_4)$ حسب عناصر الأساس B. لدينا:

$$f(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = M_1 + 3M_3$$

$$f(M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M_2 + 3M_4$$

$$f(M_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2M_1 + 4M_3$$

$$f(M_4) = \begin{pmatrix} 1 & \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2M_2 + 4M_4$$

ومنه :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; ; i, j = 1, 2, 3, 4$$

جـ. لدينا :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 10$$

وبتحليل محدّد المصفوفة A وفق عناصر السّطر الأوّل، نحصل على :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

وبحساب كلّ محدّد من المحدّدين المحصّل عليهما، باستخدام طريقة ساروس ، نجد :

$$\det A = 16 - 24 + 2(18 - 12) = 4$$

- بما أنّ محدّد المصفوفة A الملحقة بـ f مختلف عن الصّفر، فإن f تقابلي.

....

تمرين 8 VI :

ليكن E و F فضائين شعاعيين على K ذوي بعدين 3 و 2 على التّرتيب. وليكن (e_1, e_2, e_3) أساسا لـ E و (u_1, u_2) أساسا ليكن f التّطبيق الخطّي من E في F والمعرّف بـ :

$f(e_1) = u_1 + u_2$; $f(e_2) = 2u_1$; $f(e_3) = u_1 - u_2$.

أ- أوجد المصفوفة M الملحقة بـ f بالنسبة للأساسين (e_i) و (u_j).

ب- نعتبر الأشعة:

$$e'_1 = e_1 + e_2 \qquad u'_1 = u_1 + u_2$$
$$e'_2 = e_2 + e_3 \qquad \text{و}$$
$$e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \qquad u'_2 = -u_1 + u_2$$

أثبت أنّ (e'_i) أساس لـ E و (u'_j) أساس لـ F. عيّن مصفوفة الانتقال P من العناصر (e_i) إلى العناصر (e'_i)، ومصفوفة الانتقال Q من (u_i) إلى (u'_j).

جـ- استنتج المصفوفة B الملحقة بـ f بالنسبة للأساسين (e'_i) و (u'_j).

أ- المصفوفة M الملحقة بـ f بالنسبة للأساسين (e_i) و (u_j) هي:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ب- نتحقق بسهولة أنّ الأشعة e'_1, e'_2, e'_3 مستقلة خطيا في الفضاء الشعاعي E، وبما أنّ بعد E يساوي 3، إذن، فالعائلة (e'_1, e'_2, e'_3) تشكّل أساسا لـ E.

وبالطريقة ذاتها، نثبت أنّ (u'_1, u'_2) أساس لـ F.

مادامت مصفوفة الإنتقال P من الأساس (e_1, e_2, e_3) إلى الأساس (e'_1, e'_2, e'_3) مصفوفة من النمط $(3,3)$ تكون معاملات العمود فيها مساوية مركبات e'_j بالنسبة للأساس (e_1, e_2, e_3)،

نحصل على :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و بالمثل، تكون مصفوفة الإنتقال Q من الأساس (u_1, u_2) الأساس (u'_1, u_2) مساوية :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جـ- المصفوفة B الملحقة بـ f بالنسبة للأساسين (e'_i) و (u'_j) معطاة بواسطة :

$$B = Q^{-1}.M.P$$

بما أنّ المصفوفة Q من النّمط $(2,2)$ ، تكون المصفوفة Q^{-1} أيضا، من النّمط $(2,2)$ و :

$$Q.Q^{-1} = I_2$$ حيث: $$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لتكن : $Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، و بالتالي :

$$Q.Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و منه :

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

و هي الجملة المنتهية بالحلّ :

$$a = \frac{1}{2} \; ; \; c = -\frac{1}{2} \; ; \; b = \frac{1}{2} \; ; \; d = \frac{1}{2}$$

لدينا إذن :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

وبذلك تأتي :

$$B = Q^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

بالنسبة للصيغة $Q^{-1}AP$ ، يُستحسن العودة، دوما، إلى الرسم (المخطّط) التالي :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "Id_E"] & E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "Id_F"] & F \\
(e'_i) \arrow[r, bend right, "P"'] \arrow[rrr, bend right=40, dashed, "B"'] & (e_i) \arrow[r, bend right, "A"'] & (u_j) \arrow[r, bend right, "Q^{-1}"'] & (u'_j)
\end{tikzcd}$$

$$B = M_f((e'_i),(u'_j)) = M_{Id_F}((u_j),(u'_j)).A.M_{Id_E}((e'_i),(e_i))$$

$$= Q^{-1}.A.P.$$

-----------   -----------   -----------

تمرين 9. VI :

لنعتبر المصفوفة M المعرّفة بِ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

والتطبيق الداخلي f لِ $\mathbb{R}^3$، والمتمتع بِ M كمصفوفة ملحقة به وفقا الأساس القانوني $B = (e_1, e_2, e_3)$.

أ - عيّن $\text{Im} f$ و $\text{Ker} f$. إعط أساسا لكل واحد من هذين الفضائين الشعاعيين الجزئيين.

ب - ليكن $B' = (2e_1 + 2e_2, 2e_1 - 2e_2, 2e_3)$ أساسا آخر لِ $\mathbb{R}^3$. عيّن مصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس B'.

جـ - استنتج المصفوفة الملحقة بِ f بالنسبة للأساس B'.

أ - لدينا :

$$\text{Im} f = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ و } f(x,y,z) = (a,b,c) \right\}$$

$$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ و } M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$$

نحصل على الجملة :

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 2x + 2y + z = b \\ 2y + 2z = c \end{cases}$$

نحصل على حلولها، بإعطاء لِ a و c - مثلا - قيما إختيارية و $b = a + \frac{c}{2}$ وهكذا :

$$\text{Im} f = \left\{ \left(a, a + \frac{c}{2}, c\right), (a,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ a(1,1,0) + c\left(0,\tfrac{1}{2},1\right) \ , \ (a,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

و بذلك يكون الفضاء الشّعاعي الجزئي $\mathrm{Im} f$ مولّدا بالشّعاعين $(1,1,0)$ و $(0,\frac{1}{2},1)$. و نتحقّق بسهولة أنّهما مستقلّان خطيّا و يشكّلان أساسا لِـ $\mathrm{Im} f$. نستخلص من ذلك أنّ بعد $\mathrm{Im} f$ يساوي 2.

ملاحظة:

من الممكن إعطاء بعد $\mathrm{Im} f$ قبل تعيين $\mathrm{Im} f$، و ذلك باستخدام مرتبة المصفوفة M. نتحقّق من أنّ $\det M = 0$، و منه: $\mathrm{rg}\, M < 3$ و عليه: $\dim \mathrm{Im} f < 3$. و من جهة أخرى، توجد مصفوفة من النّمط $(2,2)$ مستخرجة من المصفوفة M يكون محدّدها مختلفا عن الصّفر (نأخذ، على سبيل المثال، المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$). تساوي مرتبة المصفوفة M 2 و عليه: $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

نتأكّد، من بعد ذلك، من أنّ الشّعاعين $u_1 = (2,2,0)$ و $u_2 = (1,2,2)$ مستقلّان خطيّا، فهما يشكّلان إذن، أساسا لِـ $\mathrm{Im} f$. وهكذا يكون $\mathrm{Im} f$ فضاء شعاعيا جزئيّا من $\mathbb{R}^3$، محدّدا جيّدا مادمنا نعرف أساسا له.

بالنّسبة لنواة f نجد:

$$\mathrm{Ker} f = \{ a(1,-2,2) \ , \ a \in \mathbb{R} \}$$

و يشكل الشّعاع الوحيد $(1,-2,2)$ أساسا لِـ $\mathrm{Ker} f$ و به نحصل على:

$$\dim \mathrm{Ker} f = 1$$

ب - لتكن $B' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (2e_1 + 2e_2 , 2e_1 - 2e_2 , 2e_3)$

إنّ مصفوفة الانتقال P من الأساس B إلى الأساس B' هي:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ج - بالرّجوع إلى المخطّط ،

$$\begin{tikzcd} E_{(e_i)} \arrow[r, "f"] & E_{(e_i)} \arrow[r, "Id_E"] & E_{(e'_i)} \\ E_{(e'_i)} \arrow[u, "P"] & & \end{tikzcd}$$

$$(e_i) \xrightarrow{M} (e_i) \xrightarrow{P^{-1}} (e'_i)$$

يتّضح أنّ المصفوفة A لِـ f بالنّسبة للأساس B' هي : $P^{-1}.M.P$

و لحساب المصفوفة P^{-1} ، نستخدم مصفوفة المرافقات C لدينا، $P^{-1}=\frac{1}{\det P}\cdot {}^tC$

حيث ${}^tC$ هي منقولة المصفوفة C.

نثبت، بتحليل محدّد المصفوفة P وفق السّطر الأخير، أنّ: $\det P = -16$

و بالنّسبة للمصفوفة $C=(c_{ij})$ ، لدينا:

$$c_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4 \quad ; \quad c_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4 \quad ; \quad c_{13}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4 \quad ; \quad c_{22}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4 \quad ; \quad c_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad c_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad c_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-8$$

و منه :

$$C=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C={}^tC$$

ومن ذلك يأتي :

$$P^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

و

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

تمرين 10 VI :

ليكن E فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$ بعده 3. وليكن f التماثل الداخلي المتمثّل وفق أساس $B=(e_1,e_2,e_3)$ ، بالمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

عيّن العددين الحقيقيين a و b اللذين من شأنهما أن تجعلا صورة الشعاع $e'_1 = e_1 + ae_2 + be_3$ ، وفق f ، منعدمة : $f(e'_1)=0$.

نضع $e'_2 = f(e_2)$ و $e'_3 = f(e_3)$. أثبت أنّ $B'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ تشكّل أساسا لـ E.

اكتب المصفوفة A' الملحقة بـ f وفق الأساس B'. استنتج $\mathrm{Ker} f$ و $\mathrm{Im} f$

$e_1 + a e_2 + b e_3$

P- بما أن:

$f(e_1') = f(e_1) + a f(e_2) + b f(e_3)$

إذن:

$= -e_1 - 2e_2 - 2e_3 + a(-3e_1 - 2e_2 - 3e_3) + b(4e_1 + 4e_2 + 5e_3)$

$= (-1-3a+4b)e_1 + (-2-2a+4b)e_2 + (-2-3a+5b)e_3 = 0$

وبما أن الأشعة e_1 ، e_2 ، e_3 مستقلة خطيا، إذن:

$$\begin{cases} -1 - 3a + 4b = 0 \\ -2 - 2a + 4b = 0 \\ -2 - 3a + 5b = 0 \end{cases}$$

ومنه: $a = b = 1$

ب- نتأكد بسهولة من الأشعة:

$e_1' = e_1 + e_2 + e_3$

$e_2' = f(e_2) = -3e_1 - 2e_2 - 3e_3$

$e_3' = f(e_3) = 4e_1 + 4e_2 + 5e_3$

مستقلة خطيا وما دام بعد الفضاء الشعاعي E مساويا 3، عندئذ تكون العائلة $B' = (e_1', e_2', e_3')$ أساسا لـ E.

ج- بالرجوع إلى المخطط:

$$\begin{tikzcd} \underset{(e_i')}{E} \arrow[r, "Id_E"] \arrow[r, bend right, swap, "P"] & \underset{(e_i)}{E} \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend right, swap, "A"] & \underset{(e_i)}{E} \arrow[r, "Id_E"] \arrow[r, bend right, swap, "P^{-1}"] & \underset{(e_i')}{E} \end{tikzcd}$$

يكون لدينا:

$$A' = P^{-1}.A.P$$

حيث يرمز P لمصفوفة الانتقال من الأساس B إلى الأساس B'.

$$P=\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&-2&4\\1&-3&5\end{pmatrix}$$

وباستخدام مصفوفة المرافقات C نجد المصفوفة P^{-1} :

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\,{}^{t}C=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

و :

$$A'=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3&4\\-2&-2&4\\-2&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&-2&4\\1&-3&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ونستخلص من المصفوفة A' أنّ:

$f(e'_2)=e'_2$ وأنّ : $f(e'_3)=e'_3$

باعتبار الأساس B' في الفضاء الشعاعي E ، نكون لدينا :

$$\ker f=\{X\in E \;/\; f(X)=0_E\}$$

$$=\{X=ae'_1+be'_2+ce'_3\in E \;/\; f(ae'_1+be'_2+ce'_3)=0;\; a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

وبما أنّ f خطي وأنّ : $f(e'_1)=0$ ، نحصل، عندئذ على : $b=c=0$

و $\ker f=\{ae'_1\,;\,a\in\mathbb{R}\}$

بأنّها الفضاء الشعاعي الجزئي لـ E المولّد بالشعاع e'_1 ، فبعده يساوي إذن : 1

... $\mathrm{Im} f$ فضاء شعاعيا جزئيا لـ E بعده ...

ومن جهة أخرى، يكون ، أيضا :

ونجد بالنسبة للأساس B'

$$\mathrm{Im} f = \{ a e'_1 + b e'_2 \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \}$$

و $\mathrm{Im} f$ فضاء شعاعيا جزئيا مولدا بالشعاعين e'_1 و e'_2

وبما يكون هذان الشعاعان مستقلان خطيا، فهما يشكلان أساسا لـ $\mathrm{Im} f$

....

تمرين 11. VI :

أحسب المحددين التاليين :

أ- $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ و ب- $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$.

أ- نستعمل قاعدة ساروس أو ننشر وفق سطر أو عمود.

المحدد يساوي : $2abc$.

ب- مادام محدد مصفوفة مثلثية مساويا جداء العناصر المتواجدة في القطر الرئيسي ، فإننا نحول المحدد المعطى للحصول على محدد مصفوفة مثلثية.

بإضافة مجموع السطر الثاني و الثالث إلى الأول من المحدد، فإن هذا الأخير لا يتغير:

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

وبطرح العمود الثّالث من الثّاني، نحصل على:

$$D=\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & a+b+c \\ 2b & -b-c-a & 2b \\ 2c & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

وبطرح العمود الأوّل من الثّالث، يأتي:

$$D=\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & c+a+b & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

....

تمرين 12. VI:

أحسب المحدّدين ذوي الرّتبتين: 4 و $(n+1)$ على التّرتيب:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

بإضافة العمود الأوّل من المحدّد D_1 إلى العمودين الثّالث والرّابع منه، نجد:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & a+c & a+d \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

وبالنّشر وفق السّطر الأوّل نجد :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ b & a+c & a+d \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

وبطرح العمود الأوّل من الثّالث نجد :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ b & a+c & a+d-b \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

وبالنّشر وفق السّطر الثّالث يأتي :

$$D_1 = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ a+c & a+d-b \end{vmatrix} = 3a - b + 2c + d$$

بضرب سطر المحدّد D_2 الأوّل في (-1) وإضافته (بعد ذلك) إلى جميع الأسطر الأخرى، نحصل على :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & x-x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-x_n \end{vmatrix}$$

ولدينا، هكذا، محدّد مصفوفة مثلّثية علويّة. إنّه يساوي جداء عناصر القطر الرّئيسي :

$$D_2 = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

تمرين VI.13 :

لتكن x ، a_0 ، a_1 ، .... ، a_n عناصر من $\mathbb{R}$.
وليكن $D_n(x)$ المحدد ذا الرتبة $(n+1)$ الموالي :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

أثبت أن :

$$D_n(x) = x D_{n-1}(x) + a_n .$$

واحسب $D_n(x)$.

أنشر المحدد $D_n(x)$ وفق العمود الأخير للحصول على :

$$D_n(x) = x D_{n-1}(x) + a_n$$

نستنتج أن :

$$D_n(x) = x^n D_0(x) + x^{n-1} a_1 + x^{n-2} a_2 + \dots + x a_{n-1} + a_n \; ; n \in \mathbb{N}^*$$

مع :

$$D_0(x) = a_0$$

تمرين VI.14 :

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ وليكن $D_n(x)$ و $d_n(x)$ المحددين من الرتبة n المعرفين بـ :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad d_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

أ) أثبت أنّ:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

استنتج عبارة بسيطة لـ $D_n(x)$ بدلالة x.

ب) أقم العلاقة:

$$d_n(x) = x\,d_{n-1}(x) + x^{n-1}$$

عيّن $d_1(x)$ و $d_2(x)$ ثمّ $d_n(x)$ بدلالة x

نطرح العمود الأوّل من جميع الأعمدة الأخرى للحصول على:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

ج:

$$D_n(x) = x^{n-1} \;;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ام المحدّد شكلا متعدّد الخطيّة ، و بالتّالي فهو خطّيّ بالنّسبة
فة السّطريّة أو الأشعّة العموديّة ، يكون لدينا باعتبار عمود
الأوّل $d_n($:

$$d_n(x)=\begin{vmatrix}1+x & 1 & \dots & 1\\ 1+0 & 1+x & \dots & 1\\ & \dots\dots & & \\ 1+0 & 1 & \dots & 1+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1+x & \dots & 1\\ & \dots\dots & & \\ 1 & 1 & \dots & 1+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1+x & \dots & 1\\ & \dots\dots & & \\ 0 & 1 & \dots & 1+x\end{vmatrix}$$

وهكذا، يكون $d_n(x)$ مساويا مجموع محددين يطابق أحدهما $D_n(x)$.
نثبت أن الثاني يساوي $x\,d_{n-1}(x)$، عندما نقوم بنشره وفق العمود الأول.

ومنه: $d_n(x) = x\,d_{n-1}(x) + x^{n-1}$

لدينا: $d_1(x) = 1+x$ و $d_2(x) = x^2+2x$

$d_3(x) = x\,d_2(x) + x^2 = x^3+3x^2$

وبالتدرج على $n \in \mathbb{N}^*$، نثبت أن:

$d_n(x) = x^n + n\,x^{n-1}\quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

تمرين 15. VI:
أوجد مرتبة كل مصفوفة من المصفوفتين التاليتين:

أ- $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ ؛ ب- $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3\end{pmatrix}$

أ- الطريقة الأولى: نستخدم تعريف مرتبة مصفوفة. لنعتبر إذن، الأشعة العمودية: $u_1=(2,3,-1,0)$، $u_2=(-3,1,0,2)$، $u_3=(4,5,-1,4)$ لتكن a_1، a_2، a_3 عناصر ولندرس استقلالها الخطي.

عناصر من $\mathbb{R}$ بحيث : $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$

أي ،

$$\begin{cases} 2a_1 - 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \\ -a_1 \qquad - a_3 = 0 \\ \qquad 2a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

وينتج من المعادلتين الأخيرتين ومن المعادلة الأولى أنّ :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

هذه القيم تحقق المعادلة الثانية، وعليه، فالجملة تقبل حلاً وحيدا وهذا الحلّ هو :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

وبه تكون الأشعة الثلاثة مستقلة خطيا وتكون مرتبة المصفوفة A مساوية 3 .

<u>الطريقة الثانية</u> : نستخدم المحددات. لتكن A_1 المصفوفة ذات 3 أسطر و 3 أعمدة التالية :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إنّ محددها غير منعدم : ($\det A_1 = 8$) . وتساوي مرتبة المصفوفة A عدد أسطر (أعمدة) المصفوفة A_1، أي : 3.

<u>ملاحظة</u>:

إذا اعتبرنا المصفوفة : $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

نجد: $\det A_2 = 0$ ، غير أنّه، طبقا للمبرهنة، يكفي التمكن من استخراج مصفوفة من A ، تتمتّع بأعلى رتبة ممكنة و يكون محدّدها مختلفا عن الصفر.

ب- ننتهج الطّريقتين الواردتين في -أ- . نثبت أنّ مرتبة المصفوفة B تساوي 4.

تمرين 16. VI :

ليكن a عنصرا من $\mathbb{R}$، و u_1 ، u_2 ، u_3 ثلاثة أشعّة من $\mathbb{R}^3$ معرّفة بـ:

$$u_1 = (a,1,1) \quad , \quad u_2 = (1,a,1) \quad , \quad u_3 = (1,1,a)$$

عيّن، حسب قيم a ، بعدَ الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بـ:

$$u_1, u_2, u_3$$

إذا كانت الأشعّة u_1 ، u_2 ، u_3 مستقلّة خطيّا، يكون بُعد الفضاء الشّعاعي الجزئي S المولّد بواسطة هذه الأشعّة مساويا 3. وبعد S يساوي أيضا، مرتبة جملة الأشعّة u_1 ، u_2 ، u_3 أو مرتبة المصفوفة التي تساوي الأشعّة العموديّة فيها الأشعّة u_1 ، u_2 ، u_3 على الترتيب:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det A = a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2+a-2)$$

ولدينا:

$\det A \neq 0$ إذا كان $a \neq 1$ و $a \neq -2$

وهكذا، إذا كان $a \neq 1$ و $a \neq -2$ ، تكون الأشعّة u_1 ، u_2 ، u_3 مستقلّة

خطيا ويكون بعد الفضاء الشعاعي الجزئي S المذكور مساويا 3.

إذا كان $a = 1$ ، عندئذ يكون $u_1 = u_2 = u_3$ و بعد S يساوي 1 (مرتبة A تساوي 1).

إذا كان $a = 2$ ، تكون مرتبة A مساوية 2 و نتحقق من أنّ u_1 و u_2 مستقلان خطيا ويكون بعدي مساويا 2 (على سبيل المثال)

....

تمرين VI.17 : تحقق مما إذا كانت المصفوفتان التاليتان (ذواتا معاملات في $\mathbb{R}$) قابلتين للقلب واحسب مقلوبيهما في حالة وجودهما:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

تكون مصفوفة M من النمط (n,n) قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان محدّدها مختلفا عن الصّفر؛ وفي هذه الحالة:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, {}^tC$$

حيث C هي مصفوفة المرافقات و ${}^tC$ هي منقولة C. نثبت أنّ A ليست قابلة للقلب، لأنّ: $\det A = 0$.

المصفوفة B قابلة للقلب إذ أنّ: $\det B = 3 \neq 0$. لتكن $C = (C_{ij})$ المصفوفة المرافقة لـ B. لدينا: $C_{11} = 1$ ، $C_{21} = 1$ ، $C_{31} = 1$ ، $C_{12} = 2$ ، $C_{22} = -1$ ، $C_{32} = -1$ ، $C_{13} = -1$ ، $C_{23} = 2$ ، $C_{33} = -1$. و منه:

$${}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad : \text{و} \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين 18. VI: لتكن a_{ij} ، i ، j = 1، ...، n توابع قابلة للاشتقاق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$. ولتكن $D_n(x)$ محدّد المصفوفة "(a_{ij})" أثبت أنّ:

$$D'_n(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & & a_{2n}(x) \\ & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

تطبيق: أوجد $D'_3(x)$ إذا كان:

$$D_3 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

نعلم أنّ التّابع $D_n(x)$ تحقّق - تعريفاً - :

$$D_n(x)=\sum_{s\in S_n} \varepsilon(s)\, a_{s(1)1}(x)\, a_{s(2)2}(x) \dots a_{s(n)n}(x)$$

حيث يرمز الحرف s لتبديلة لِـ $[1, n]$ و $\varepsilon(s)$ إشارتها؛ وبه يكون التّابع D_n قابلاً للاشتقاق كجمع وضرب لتوابع قابلة للاشتقاق.

ولدينا:

$$D'_n(x)=\sum_{s\in S_n} \varepsilon(s)\, a'_{s(1)1}(x)\, a_{s(2)2}(x) \dots a_{s(n)n}(x) +$$

$$\sum_{s\in S_n} \varepsilon(s)\, a_{s(1)1}(x)\, a'_{s(2)2}(x) \dots a_{s(n)n}(x) +$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}(x)\, a_{\sigma(2)2}(x) \dots a'_{\sigma(n)n}(x)$$

في كلّ مجموع من هذه المجاميع Σ تظهر عبارة محدّد
على سبيل المثال - هو المحدّد المحصّل عليه انطلاقا من ...
الابتدائي (المعطى) بتعويض $a_{i1}(x)$ بـ $a'_{i1}(x)$ في العمود الأ...
(من أجل $i = 1, \dots, n$) والمحافظة على الأعمدة الأخرى
وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة مع الملاحظة أنّ ...
مصفوفة مربّعة ومحدّد منقولها متساويان.

ب -

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x+1) + 9 + x^2 - 1 + 4 + x(x-1) + 3 = 3x^2 + 15$$

تمرين 19 . III :

يسمّى عنصر من $M_3(\mathbb{R})$ مصفوفة سحريّة إذا كان
مجموع عناصر عمود كيفي ومجموع عناصر سطر كيفي ومجموع كلّ واحد
من القطرين متساوية.

أ - أثبت أنّ مجموعة المصفوفات السحريّة فضاء شعاعي جزئي
من $M_3(\mathbb{R})$.

ب - أثبت أنّ كلّ مصفوفة سحريّة مجموع لمصفوفة تناظريّة ومصفوفة
سحريّة ضدّ تناظريّة.

ج - أوجد أساسا للفضاء الشعاعي المشكّل من المصفوفات
السحريّة.

٢- لتكن A مصفوفة سحرية لِـ $M_3(\mathbb{R})$ وليكن ع عددا حقيقيا يرمز لمجموع حدود عمود (أو سطر أو قطر) كيفي لـ A. ليكن ه العدد الحقيقي الملحق بالطريقة ذاتها، بالمصفوفة السحرية B من $M_3(\mathbb{R})$. يتضح من تعريف مجموع مصفوفتين أنّ $A+B$ مصفوفة سحرية مرفقة بالعدد الحقيقي ع+ه.

وتثبت بالطريقة نفسها، أنّه من أجل كلّ سلّمي حقيقي b، تكون المصفوفة bA مصفوفة سحرية مرفقة بالعدد الحقيقي b.ع.

وبذلك تكون مجموعة المصفوفات السحرية فضاء شعاعيا جزئيا من $M_3(\mathbb{R})$ وهو غير خال إذ أنّه تحوي المصفوفة المنعدمة ذات الرتبة 3.

ب- إذا ما رمزنا بـ a_{ij} لمعاملات مصفوفة اختيارية A من $M_3(\mathbb{R})$ وإذا ما وضعنا:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} \quad \text{و} \quad c_{ij} = \frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}$$

من أجل كلّ i و $j = 1، 2، 3$؛ عندئذ يأتي: $a_{ij} = b_{ij}+c_{ij}$

ومن جهة أخرى، نتأكّد من أنّ: $b_{ji} = b_{ij}$ و $c_{ji} = -c_{ij}$

من أجل كلّ i و $j = 1,2,3$. إذن إذا وضعنا: $A_+ = (b_{ij})$ و $A_- = (c_{ij})$ عندئذ تصبح: $A = A_+ + A_-$ حيث A_+ مصفوفة تناظرية و A_- مصفوفة ضد تناظرية من $M_3(\mathbb{R})$.

بقي أن نبيّن أنّه إذا كانت A مصفوفة سحرية، يكون الأمر كذلك بالنسبة لـ A_+ و A_-.

ينتج من تعريف A_+ وتعريف A_- أنّه إذا كانت A سحرية، عندئذ تكون A_+ مصفوفة سحرية يُلحق بها العددُ ع ذاتُه الملحق بـ A في حين تكون A_- مصفوفة سحرية يلحق بها العدد الحقيقي "صفر".

ج - ينتج ممّا سبق أنّ مجموعة المصفوفات المتناظرة السّحريّة
و مجموعة المصفوفات ضد التّناظريّة السّحريّة فضاءان
شعاعيان جزئيان من $M_3(\mathbb{R})$ يكون مجموعهما مباشرا وصا
فضاءا المصفوفات السّحريّة.
نحصل، إذن، على أساس لهذا الأخير، بالقيام باتّحاد
أساسي هذين الفضاءين الجزئيين.

لتكن:

$$A_+ = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

مصفوفة تناظريّة؛ وتكون A_+ سحريّة إذا وفقط إذا:

$$a+b+c = a+d+e = d+b+f = e+f+c = 2e+b$$

و ينتج من ذلك أنّ:

$$b+c = d+e \; ; \quad d+b = e+c$$

إذن:

$$c-d = b-e = d-c$$

ومنه:

$$d = c \quad \text{و} \quad b = e$$

وبالتّالي:

عندئذ، يكون لدينا:

$$a+b+c = c+b+f = 2e+b = 3b$$

$$f = a \quad \text{و} \quad c = 2b - a$$

وعليه، تكون كلّ مصفوفة سحريّة من الشّكل التّالي:

$$\begin{pmatrix} a & 2b-a & b \\ 2b-a & b & a \\ b & a & 2b-a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= aA_1 + bA_2$$

نثبت بسهولة أنّ المصفوفتين A_1 و A_2 مستقلّتان خطيّا،
فهما تشكّلان، إذن، أساسا لفضاء المصفوفات السّحريّة المتناظرة.
وإلى جانب هذا، فلكي تكون مصفوفةٌ ضد تناظريّةٌ

$$A_- = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

سحريّة، يلزم ويكفي أن يكون:

$$a+b = a-c = b+c = 0$$

أي: $a = c = -b$.

إذن، كلّ مصفوفة ضد تناظرية سحريّة متمتّعة بالشّكل:

$$a\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = aA_3$$

إذن، تشكّل المصفوفات A_1 و A_2 و A_3 أساسا للفضاء الشّعاعي
الحقيقي للمصفوفات السّحريّة ويساوي بعد هذا الأخير: 3.

تمرين VI.20:

أثبت أنّ كلّ مصفوفة عقديّة $A=(a_{ij})$ من الرّتبة n بحيث
من أجل كلّ $i=1,\dots,n$: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$، قابلة للقلب.

نعلم أنّه تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت مرتبة A مساوية n
أي، إذا كانت أشعة A العموديّة مستقلّة خطيًّا.
لنعتبر عبارة خطيّة منعدمة للأشعة العموديّة V_j من A:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j V_j = 0$$

أو:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) e_i = 0$$

حيث (e_i) يمثّل الأساس القانوني لِـ $\mathbb{C}^n$. يكون لدينا من أجل كلّ $i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j a_{ij} = 0$$

ليكن k دليلا بحيث:

$$|b_k| = \sup_{j=1,\ldots,n} |b_j|$$

عندئذ يكون لدينا:

$$-b_k a_{kk} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_j a_{kj}$$

إذن:

$$|b_k| \cdot |a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |b_j| \cdot |a_{kj}| \leq |b_k| \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}$$

يكون السلّمي b_k منعدما، وإلّا، سيوجد $k \in [1, n]$ بحيث: $|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$ وهو ما ينافض الفرض. وعليه: $b_k = 0$ وبالتالي جميع b_j منعدمة (لأنّ $|b_k| = \sup_{j=1,\ldots,n} |b_j|$) وتكون A قابلة للقلب.

الفصل VII

جمل المعادلات الخطيّة

عموميات :

تعاريف : لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة معطاة من $M_{n,p}(K)$ و ليكن $b=(b_1,\dots,b_n)$ عنصرا من K^n. نسمّي حلاً للجملة المعرّفة بهذه المعطيات، كلّ عنصر $(x_1,\dots,x_p)$ من K^p حيث :

$$
(S)\quad \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n
\end{cases}
$$

تسمّى المصفوفة A مصفوفة الجملة وتسمّى مرتبتها مرتبة الجملة ونرمز لها بـ : ر.

نسمّي العنصر ط من K^n طرف الجملة الثاني.

نسمّي الجملة التي يكون طرفها الثاني منعدما جملة متجانسة.

الجملة الخطيّة المتجانسة الملحقة بالجملة (S) هي الجملة (S') المتحصّل عليها بتعويض الطرف الثاني في S بـ: ط = 0 من K^n.

2. ملاحظتان:

أ- لتكن B المصفوفة وحيدة العمود $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. يكون العنصر $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ من K^p حلاً لـ (S) إذا و فقط إذا كانت المصفوفة وحيدة العمود $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ تحقّق:

$$AX = B$$

ب- ليكن f التطبيق الخطّي من K^p في K^n تساوي مصفوفته، وفق الأساسين القانونيين، المصفوفة A. إنّ حلول الجملة (S) هي سوابق الشعاع b وفق f.

3- خاصيتان:

أ- مجموعة حلول الجملة المتجانسة (S') هي $\mathrm{Ker} f$ (وذلك طبقا للملاحظة ب).

ب- اذا كان x_0 حلاً خاصًا للجملة (S)، عندئذ تكون مجموعة حلول هذه الجملة مساوية: $x_0 + \mathrm{Ker} f$.

II- جملة كرامر (cramer):

1- تعريف:

يقال عن جملة إنها لكرامر إذا كان: $n = p = r$

2- مبرهنة:

لتكن (S) جملة مصفوفتها مربّعة، عندئذ تكون القضايا التالية متكافئة:

أ- (S) جملة لكرامر.

ب- لـ(S) حلّ وحيد.

جـ- ليس للجملة المتجانسة (S') إلاّ الحلّ التّافه $(0, 0, \dots, 0)$ من K^p

دستور كرامر: لنرمز بـ A_j للمصفوفة المحصّل عليها بتعويض العمودة j بالشّعاع b. نثبت أنّ الحلّ الوحيد $(x_1, \dots, x_p)$ لـ (S) معطى بواسطة الصّيغ:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

III - حلّ جملة معادلات خطيّة:

1- تعاريف: لتكن M مصفوفة مربّعة قابلة للقلب مستخرجة من A. يسمّى محدّد M محدّدا رئيسيّا للجملة. وتسمّى رتبتها r. يسمّى المجاهيل التي تتطابق أدلّتها بأدلّة أعمدة المصفوفة M: المجاهيل الرئيسيّة. وتسمّى المعادلات التي تتطابق أدلتها مع أدلة أسطر M: المعادلات الرّئيسيّة. تسمّى الجملة المؤلّفة من المعادلات الرّئيسيّة: جملة رئيسيّة.

من الممكن القيام باختيار المجاهيل والمعادلات الرّئيسيّة بطرق شتى.

سنفترض أنّ M هي المصفوفة المستخرجة من A والمحصّل عليها بحذف الـ $p-r$ عمودا أخيرا و الـ $n-r$ سطرا أخيرا.

2- نثبت أنّه:

أ- إذا كان $r=n$ $(p>)$ فإنّ للجملة عندئذ حلولا. إذا كانت $x_{n+1}, \dots, x_p$ معطاة كيفيّا (اختياريّا)، فيوجد حلّ وحيد $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_p)$ لـ (S).

ويتعلّق هذا الحل بالـ $p-n$ سلّميا اختياريّا.

ب- إذا كان $r<n$ ،

فلكي يكون للجملة (S)، على الأقلّ، حلّ، يلزم ويكفي أن يكون الـ $n-r$ محدّدا مميّزا مواليا:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix} \qquad r+1 \leq k \leq n$$

منعدما. وبصيغة أدقّ، لدينا:

مبرهنة فونتوني - روشي (Fontené - Rouché):

لتكن (S) جملة مشكّلة من n معادلة خطيّة و p مجهولا ومرتبتها تساوي r.

أ- $p = n = r$. الجملة تقبل حلاّ وحيدا.

ب- $p > n = r$. الجملة تقبل حلولا متعلّقة بالقيم الاختياريّة لـ $p-n$ مجهولا غير رئيسي.

ج- $n > r$. يكافئ وجود الحلول انعدام الـ $n-r$ محدّدا مميّزا، وهي الحالة التي تكافئ فيها الجملة (S) الجملة الرئيسيّة.

تمرين 1. VII:

ليكن f تماثلا داخليّا لـ $\mathbb{R}^3$، ولتكن

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

مصفوفة f وفق الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

تعتبر جملة المعادلات الخطية (S) :

$$
(S)\quad \begin{cases} kx + y + z = a \\ x + ky + z = b \\ x + y + kz = c \end{cases}
$$

حيث k ، a ، b ، c وسيطات حقيقية معطاة.

1. أعط كتابة مصفوفية لهذه الجملة.
2. أثبت أنه إذا قبلت الجملة (S) حلاً (x_0, y_0, z_0) ، فيحصل، عندئذ، على كل حل آخر لـ (S) بإضافة عنصر من $\operatorname{Ker} f$ لـ (x_0, y_0, z_0).
3. نضع: $u_1 = (k, 1, 1)$ ، $u_2 = (1, k, 1)$ ، $u_3 = (1, 1, k)$ و $v = (a, b, c)$. أثبت أنه تقبل الجملة (S)، على الأقل حلاً إذا وفقط إذا كان v منتمياً إلى الفضاء الشعاعي الجزئي لـ $\mathbb{R}^3$ المولد بـ (u_1, u_2, u_3).
4. عيّن المجموعة U للقيم k التي تقبل الجملة (S) من أجلها حلاً وحيداً. هات طريقة تسمح لحساب هذا الحل.
5. عيّن، حسب قيم k ، مرتبة و نواة f.
6. إعط، من أجل كل قيمة لـ k غير منتمية لـ U ، شرطاً لازماً وكافياً تحققه الأعداد a و b و c ، لكي تقبل الجملة، على الأقل، حلاً.
7. حل (S) في كل من الحالتين:

(أ) $k = 1$ ، $a = b = c = 3$.

(ب) $k = -2$ ، $a = b = 1$ ، $c = -2$.

---

1. بما أن X و B هما المصفوفتان وحيدتا العمود:

$$
X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}
$$

إذن تكتب الجملة (S) على الشّكل : $A\cdot X = B$.

2- ليكن $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ حلا للجملة (S) و $X=(x,y,z)$ من $\mathrm{Ker}\,f$. عندئذ يأتي : $A\cdot X_0 = B$ و $A\cdot X = 0$ وبالتالي نستخلص من المساواة :

$$A(X_0+X) = A\cdot X_0 + A\cdot X = B$$

أنّ X_0+X حلّ للجملة (S).

وبالعكس، ليكن $X'=(x',y',z')$ حلاّ كيفيّا للجملة (S). لدينا $A\cdot X' = B$.

لنضع : $X = X'-X_0$. عندئذ يأتي:

$$A\cdot X = A\cdot(X'-X_0) = A\cdot X' - A\cdot X_0 = B-B=0$$

إذن X عنصر من $\mathrm{Ker}\,f$، ويكتب كلّ حلّ آخر (X') لـ (S) على الشّكل $X'=X_0+X$.

3- لنفترض أنّ الجملة (S) تملك، على الأقلّ، حلاّ، $X_0=(x_0,y_0,z_0)$.
عندئذ يصبح لدينا: $A\cdot X_0 = B$، وهي المساواة التي تتم كتابتها أيضا على الشّكل:

$$x_0u_1 + y_0u_2 + z_0u_3 = v$$

وهكذا يكون v عبارة خطيّة للأشعّة u_1 و u_2 و u_3، فهو ينتمي إذن، إلى الفضاء الشّعاعي الجزئي المولّد بواسطة العائلة (u_1,u_2,u_3).
وبالعكس، لنفترض أنّ v منتم إلى الفضاء الشّعاعي الجزئي لـ $\mathbb{R}^3$، والمولّد بـ: (u_1,u_2,u_3)، عندئذ توجد سلّميات حقيقيّة x_0، y_0، z_0 بحيث:

$$V = x_0u_1 + y_0u_2 + z_0u_3$$

أو، على شكل مصفوفي مكافئ : $A\cdot X_0 = B$. وهذا يؤدّي إلى أنّ (x_0,y_0,z_0) حلّ للجملة (S).

المجموعة U المعرّفة بـ:
$U=\{k\in\mathbb{R} \,/\, \exists!\,(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ ، $V = x_0u_1+y_0u_2+z_0u_3\}$ (3)

لنكن k ... إذن يعود الأمر إلى القول بأنّ U هي مجموعة الأعداد k التي من أجلها تشكّل الجماعة (u_1,u_2,u_3) أساسا لـ $\mathbb{R}^3$، أو القول أيضا بأنّها جماعة مستقلّة لـ $\mathbb{R}^3$. ونعلم أنّه تكون الجماعة (u_1,u_2,u_3) مستقلّة إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$؛ ومنه:

$$U=\{k\in\mathbb{R} \mid \det A\neq 0\}$$

وفي هذه الحالة، نحسب الحلّ (x_0,y_0,z_0) على شكل مصفوفي: $X_0 = A^{-1}\cdot B$ ، أي بالكيفية التّالية:

$$x_0 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & k & 1 \\ c & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$y_0 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} k & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & k \end{vmatrix}$$

$$z_0 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} k & 1 & a \\ 1 & k & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}$$

5. تأكّد من أنّ محدّد المصفوفة A هو:
$$\det A = (k-1)^2(k+2)$$

إذا كان $k\neq 1$ و $k\neq -2$ ، تكون مرتبة التّطبيق f ، والّتي هي مرتبة المصفوفة A أيضا، مساوية 3. في هذه الحالة، تكون الأشعة العمودية للمصفوفة A مستقلّة خطيّا وتشكّل أساسا لـ $\operatorname{Im} f$. وعليه، $\dim \operatorname{Im} f = 3$ ، وبالتّالي: $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ و $\dim \operatorname{Ker} f = 0$
(أو: مرتبة A تساوي 3 إذن: $\det A \neq 0$ و f تقابلي، إذن: متباين).

إذا كان $k = 1$ ، تكون مرتبة A مساوية 1، ومنه $\dim Im f = 1$، و $\dim Ker f = 2$. نجد :

$$Ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

إذا كان $k = -2$ ، تكون مرتبة A مساوية 2؛ ومنه: $\dim Im f = 2$ و $\dim Ker f = 1$. نجد :

$$Ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$

6- إذا كان $k = 1$ عندئذ يتضح من (3) أن شرطا لازما وكافيا لكي تقبل الجملة (S)، على الأقل حلاً، هو: $a = b = c$.

وتكون مجموعة حلول (S)، في هذه الحالة:

$$\{(x, y, a - x - y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}$$

إذا كان $k = -2$، عندئذ، لكي تقبل الجملة (S)، على الأقل، حلا، فيكون من الشروط اللازمة والكافية لذلك مايلي: $a = b = c = 0$.

وفي هذه الحالة ، تكون مجموعة الحلول هي :

$$\{(x, x + \frac{a-b}{3}, x + \frac{2a+b}{3}) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$$

7- من السؤال 6 ، يأتي أنّ :

أ- مجموعة حلول الجملة (S) هي:

$$\{(x, y, 3 - x - y) \; , \; x, y \in \mathbb{R}\}$$

ب- مجموعة الحلول هي :

$$\{(x, x, x+1) \; , \; x \in \mathbb{R}$$

تمرين 2 . VII :

حل جمل المعادلات الخطيّة:

ب) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

، $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

أ. <u>الطّريقة الأولى</u> : نستخدم المحدّدات. لتكن A مصفوفة الجملة المعطاة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 26 \neq 0 .$$

الجملة المعطاة 3 معادلات و 3 مجاهيل و محدّدها مختلف عن الصّفر، إذن، فهي جملة لكرامر، وتملك حلاًّ وحيدا معطى بـ:

$$x = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix} \; ; \; y = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix} \; ; \; z = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}$$

أي: $x = 1$ ، $y = -3$ ، $z = -2$.

<u>الطّريقة الثّانية</u> : نستخدم الشّكل المصفوفي للجملة المعطاة :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

نرمز بـ A لمصفوفة الجملة المعطاة. وبما أنّ $\det A \neq 0$ ، إذن A قابلة للقلب.

و بالتالي :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

نحدد المصفوفة A^{-1} و نضربها في المصفوفة وحيدة العمود $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ للحصول على النتيجة:

الطريقة الثالثة: مادام حساب $\det A$ قد أثبت أن الجملة لكرامر، وعليه، نستخدم طريقة الحل المباشرة.

ب - لدينا جملة ذات ثلاث معادلات و مجهولين. نختار معادلتين كيفيا (عشوائيا!) و نتحقق، من بعد ذلك، من أن حل الجملة المشكلة من هاتين المعادلتين تحقق المعادلة الثالثة. لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

إنها لكرامر. و حلها المباشر يعطينا :

$x = 3$ و $y = -1$.

و هاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة و بذلك يكون حل الجملة إذن: $x = 3$ و $y = -1$.

جـ - لدينا جملة من ثلاث معادلات وأربعة مجاهيل. من المعادلتين الأولى والثانية نستخلص: $x_4 = 1$ و تصبح الجملة بذلك:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

و هو ما يعطي :

$$x_3 = 2x_2 - x_1$$

الجملة تقبل مالانهاية من الحلول المعطاة بالرباعيات: $(x_1, x_2, 2x_2 - x_1, 1)$ حيث x_1 و x_2 حقيقيان إختياريان.

تمرين 3. VII

م- حل الجملة:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 11y + 10z = 0 \end{cases}$$

ب- إعط التمثيل المصفوفي لتطبيق خطي ملحق بهذه الجملة (وفق الأساسين القانونيين). هات مرتبة هذا التطبيق وأوجد نواته.

م- لنعتبر المصفوفة A الملحقة بالجملة المعطاة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

محددها منعدم و مرتبتها تساوي 2. و هكذا تكون الجملة المتجانسة المعطاة مكافئة جملتها الرئيسية من معادلتين رئيسيتين، ولتكونا المعادلتين الأوليين، و مجهولين رئيسيين x و y. عندئذ نضع: $z = a$ و نحل الجملة:

$$\begin{cases} x + y = -a \\ 2x - 3y = -4a \end{cases}$$

نجد: $x = -\frac{7}{5}a$ و $y = \frac{2}{5}a$. وتكون حلول الجملة المعطاة، إذن، مشكّلة من الثلاثيات $(-7b, 2b, 5b)$ حيث b عدد حقيقي كيفي.

ب- من الممكن إرفاق الجملة المعطاة بتطبيق خطي f معرّف وفق الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ بواسطة:

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 4e_3 \; ; \; f(e_2) = e_1 - 3e_2 - 11e_3 \; ; \; f(e_3) = e_1 + 4e_2 + 10e_3$$

و تكون المصفوفة الملحقة بهذا التّطبيق f متطابقة مع المصفوفة A المعطاة آنفا. مرتبة المصفوفة A مساوية 2 ونواة f هي مجموعة حلول هذه الجملة.

تمرين 4. VII :

عيّن أساسا للفضاء الشّعاعي الجزئي المعرّف بواسطة الجملة التّاليّة:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

لتكن A مصفوفة الجملة المتجانسة المعطاة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

و: $\det A = 0$

و علاوة على ذلك:

$$rg\, A = 2$$

وهكذا تكون الجملة مكافئة لجملتها الرّئيسيّة ذات معادلتين رئيسيتين ومجهولين رئيسيّين x و y مثلا. نضع $z = a$ ونحلّ الجملة (لكرامر):

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 7y = 2a \end{cases}$$

نجد:

$x = a$ و $y = 0$.

هذان الحلان تحقّقان المعادلة الثّالثة، نستخلص من ذلك أنّ مجموعة حلول

الجملة المعطاة هي: $S = \{ (a,0,a) \,,\, a \in \mathbb{R} \}$

وهي فضاء شعاعي جزئي لـ $\mathbb{R}^3$ ، بعده 1، و يعطي الشعاع $(1,0,1)$ أساساله.

....

تمرين 5. VII : حل جملتي المعادلات التاليتين و ناقش ذلك حسب قيم الوسيط m :

$$\text{(أ)} \begin{cases} -mx + y - mz = 0 \\ x + my - z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{(ب)} \begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

حيث a ، b ، c عناصر لـ $\mathbb{R}$.

أ- المصفوفة الملحقة بالجملة الأولى هي: $A = \begin{pmatrix} -m & 1 & -m \\ 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = (m-1)(3m+1)$$

وهكذا، إذا كان: $1 \neq m$ و $-\frac{1}{3} \neq m$ ، تكون الجملة لكرامر

تقبل إذن، حلاً وحيداً معطى بـ:

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \; ; \; y = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} -m & 0 & -m \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; z = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} -m & 1 & \\ 1 & m & \\ 2 & 1 & \end{vmatrix}$$

يعطي حسابها:

$x=\frac{2m+1}{3m+1}$; $y=\frac{-m(3m+2)}{(m-1)(3m+1)}$; $z=\frac{-2m^2-2m-1}{(m-1)(3m+1)}$.

إذا كان $m=1$ ، تصبح الجملة مساوية:

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x+y-z=-1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

محدّد هذه الجملة الأخيرة منعدم. ويساوي محدّد معاملات المجهولين x و y في المعادلتين الأوليين: -2 ؛ وتكون المصفوفة A لهذه الجملة ذات مرتبة مساوية 2. نعتبر هاتين المعادلتين رئيسيتين وx وy مجهولين رئيسيين. إنّ المحدّد الرئيسي الوحيد للجملة:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

غير منعدم ؛ وعليه ليس هناك وجود للحلول، وذلك طبقا لمبرهنة فونتني - روشي. وبالفعل، لو نضع: $z=a$ و نحل الجملة:

$$\begin{cases} -x+y=a \\ x+y=a-1 \end{cases}$$

نجد:

$$x=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y=-\frac{1}{2}$$

هذا الحلّ لا تحقّق المعادلة الثالثة وعليه، ليس للجملة حلول.

قم ببرهان مماثل في حالة: $m=-\frac{1}{3}$.

ب- المصفوفة A الملحقة بالجملة (ب) هي:

$x=\frac{2m+1}{3m+1}$ ؛ $y=\frac{-m(3m+2)}{(m-1)(3m+1)}$ ؛ $z=\frac{-2m^2-2m-1}{(m-1)(3m+1)}$.

إذا كان $m=1$ ، تصبح الجملة مساوية:

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ x+y-z=-1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

محدّد هذه الجملة الأخيرة منعدم. ويساوي محدّد معاملات المجهولين x و y في المعادلتين الأوليين: -2 ؛ وتكون المصفوفة A لهذه الجملة ذات مرتبة مساوية 2. نعتبر هاتين المعادلتين رئيسيتين و x و y مجهولين رئيسيين. إنّ المحدّد الرئيسي الوحيد للجملة:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

غير منعدم ؛ وعليه ليس هناك وجود للحلول، وذلك طبقا لمبرهنة فونتني-روشي. وبالفعل، لو نضع: $z=a$ و نحل الجملة:

$$\begin{cases} -x+y=a \\ x+y=a-1 \end{cases}$$

نجد:

$x=-\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$

هذا الحلّ لا تحقّق المعادلة الثالثة وعليه، ليس للجملة حلول.

قم ببرهان مماثل في حالة: $m=-\frac{1}{3}$.

ب- المصفوفة A الملحقة بالجملة (ب) هي:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2m(2-m)$$

و إذا كان $m \neq 0$ و $m \neq 2$، تكون الجملة لكرامر، و تقبل إذن حلاً وحيداً. نجد:

$$x = \frac{-a(m^2+1)+b(m-1)+c(m+1)}{4m-2m^2}$$

$$y = \frac{a(m+3)+b(3-2m)-3a}{4m-2m^2}$$

$$z = \frac{a(1-3m)+b+c(2m-1)}{4m-2m^2}$$

إذا كان $m = 0$، تصبح الجملة من الشكل:

$$\begin{cases} 2x+y-z = a \\ x+z = b \\ 3x+y = c \end{cases} \qquad (*)$$

وتساوي مرتبة هذه الجملة: 2. في هذه الحالة نعطي لـ z قيمة إختيارية ونحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x+y = a+z \\ x = b-z \end{cases}$$

وهي جملة لكرامر.

ويكون حلها مساويا:

$x = b-z$ و $y = a-2b+3z$

وبالتعويض في المعادلة الثالثة من $(*)$، نحصل على: $b+a=c$.

وهكذا، إذا كان: $b+a \neq c$، عندئذ لا تقبل الجملة $(*)$ حلولا، وإذا

وإذا كان : $b+a=c$ ، عندئذ تقبل الجملة مالانهاية من الحلول المعطاة
بواسطة المجموعة:

$$\{(b-z,\ a-2b+3z,\ z)\ ,\ a,b,z\in\mathbb{R}\}$$

وباستدلال مماثل ، نثبت أنّه من أجل $m=2$ ، لا تقبل الجملة
حلولا إذا كان : $5a-b\neq 3c$ ، وتقبل مالانهاية من الحلول إذا كان:
$5a-b=3c$. مجموعة الحلول هي :

$$\left\{\left(\frac{3z+2a-b}{3}\right),\ \frac{2b-a-3z}{3}\ ,\ z\right)\ ;\ a,b,z\in\mathbb{R}\right\}$$

تمرين 6. VII :

أ - ليكن a و b عددين حقيقيين . أوجد مرتبة المصفوفة

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & 1\\ 1 & ab & 1\\ 1 & b & a\end{pmatrix}$$

وذلك حسب مختلف قيم العددين a و b.

ب - ليكن :

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$ وحل وناقش

الجملة : $M(a,b).X=Y$

جـ - إذا كانت $M(a,b)$ مصفوفة لتماثل داخلي وفق الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ ، فأوجد -حسب مختلف قيم a و b - أساسا لـ $Kerf$ و آخر لـ Imf .

وإذا كان : $c=a+b$ ، عندئذ تقبل الجملة مالانهاية من الحلول المعطاة بواسطة المجموعة :

$$\left\{(b-z\,,\,a-2b+3z\,,\,z)\ ,\ a,b,z\in\mathbb{R}\right\}$$

وباستدلال مماثل ، نثبت أنّه من أجل $m=2$ ، لا تقبل الجملة حلولا إذا كان : $5a-b\neq 3c$ ، وتقبل مالانهاية من الحلول إذا كان : $5a-b=3c$. مجموعة الحلول هي :

$$\left\{\left(\frac{3z+2a-b}{3}\right),\ \frac{2b-a-3z}{3}\ ,\ z\right)\ ;\ a,b,z\in\mathbb{R}\right\}$$

تمرين 6. VII :

أ- ليكن a و b عددين حقيقيين . أوجد مرتبة المصفوفة

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & 1\\ 1 & ab & 1\\ 1 & b & a\end{pmatrix}$$

وذلك حسب مختلف قيم العددين a و b.

ب- ليكن :

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad \text{و}\quad Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

وحل وناقش الجملة : $M(a,b).X=Y$

جـ- إذا كانت $M(a,b)$ مصفوفة لتماثل داخلي f وفق الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ ، فأوجد حسب مختلف قيم a و b أساسا لـ $Ker f$ و آخر لـ $Im f$.

نثبت أنّ:
$$\det M(a,b) = b(a-1)^2(a+2)$$

- إذا كان: $a \neq 1$ و $a \neq -2$ و $b \neq 0$، فإنّ مرتبة $M(a,b)$ تساوي 3.
- إذا كان: $a = 1$، عندئذ تكون أسطر المصفوفة $M(a,b)$ الثلاثة متطابقة، وعليه تكون مرتبة $M(1,b)$ مساوية 1.
- إذا كان $a \neq 1$ و $b = 0$، عندئذ يكون عمود $M(a,0)$ الثاني منعدما وتكون $M(a,0)$ متمتعة بمحدّد مصغّر غير منعدم رتبته 2:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1$$

تساوي مرتبة المصفوفة $M(a,0)$ 2.

- إذا كان $a = -2$، عندئذ، من أجل كلّ b، يوجد محدّد مصغّر غير منعدم رتبته 2:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

تساوي مرتبة المصفوفة $M(-2,b)$ 2.

ب- كما كان الشأن في السؤال السابق، نميّز أربع حالات:

- إذا كان $a \neq 1$ و $a \neq -2$ و $b \neq 0$، فإنّ الجملة لكرامر. نجد:

$$x = \frac{y_2 + y_3 - (a+1)y_1}{(a+2)(1-a)} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_3 - (a+1)y_2}{b(a+2)(1-a)}$$

$$z = \frac{y_1 + y_2 - (a+1)y_3}{(a+2)(1-a)}$$

- إذا كان $a = 1$ عندئذ لكي يكون للجملة على الأقلّ حلّ، يلزم ويكفي أنّ يكون $y_1 = y_2 = y_3$ (إرجع إلى التمرين III.1). وفي هذه الحالة تكون مجموعة الحلول مساوية:

$$\{(x_1, x_2, y_1 - x_1 - bx_2) \ , \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

قم باستدلال مماثل من أجل الحالات الأخرى.

ج --- إذا كان $a \neq 1$ و $a \neq -2$ و $b \neq 0$ ، عندئذ تكون $M(a,b)$ قابلة للقلب و يكون f تقابليا. و عليه تأتي : $\{0\} = \text{Ker} f$ و $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$ ؛ و على سبيل المثال، يكون الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ أساسا لـ $\text{Im} f$.

--- إذا كان $a = 1$ ، عندئذ تكون مرتبة المصفوفة $M(1,b)$ مساوية 1. و نحصل على أن: $\dim \text{Im} f = 1$ و $\dim \text{Ker} f = 2$.

$$\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + by + z = 0\}$$

و من أسس $\text{Ker} f$ - مثلا - لدينا : $((0,1,-b), (1,0,-1))$.

و إلى جانب هذا ، لدينا:

$$\text{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = y = z\}$$

و يكون الشعاع $(1,1,1)$ أساسا لـ $\text{Im} f$.

--- إذا كان $a \neq 1$ و $b = 0$ ، وما دامت مرتبة $M(a,0)$ مساوية 2 عندئذ يكون لدينا: $\dim \text{Im} f = 2$ و $\dim \text{Ker} f = 1$.

و نجد:

$$\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = z = 0\}$$

و يكون الشعاع $(0,1,0)$ أساسا لـ : $\text{Ker} f$.

$\text{Im} f$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي لـ $\mathbb{R}^3$ المولد بواسطة الشعاعين $u_1 = (1,0,-1)$ و $u_2 = (0,1,1-a)$.

و تعالج الحالات الأخرى بالطريقة ذاتها.

تمرين 7 : VII

لتكن المصفوفتان: $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

حيث a و b و c و d أعداد حقيقية. نبحث فيما إذا توجد مصفوفة $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ ، ذات معاملات حقيقية بحيث:

$$A\cdot X+X\cdot A=B \qquad (1)$$

أ- عيّن جملة المعادلات وفق x، y، z، t التي تعبّر عن المساواة (1)

ب- أثبت أنّ شرطا لازما وكافيا لكي توجد مصفوفة X تحقّق (1) هو:

$$a-b-c+d=0$$

أ- بضرب المصفوفات وجمعها نحصل على الجملة:

$$\begin{cases} 2x+y+z = a \\ x+2y+t = b \\ x+2z+t = c \\ y+z+2t = d \end{cases} \qquad (*)$$

التي تكافئ المساواة (1)

ب- لتكن X مصفوفة تحقّق (1). نحصل على الجملة (*). إنّ مجموع المعادلتين الأولى والرابعة يساوي مجموع المعادلتين الثانية والثالثة. ينتج من ذلك أنّ: $a+d=b+c$.

وبالعكس، لتكن a، b، c، d أعدادا حقيقية تحقّق: $a+d=b+c$. يتعلّق الأمر بإثبات أنّه توجد مصفوفة $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ بمعنى أنّه توجد أعداد حقيقية x، y، z، t بحيث: $A\cdot X+X\cdot A=B$ ،

تضمن حدوث (*) ؛ وبعبارة أخرى، يكون للجملة (*) حلول

إنّ للجملة (*) أربع معادلات وأربعة مجاهيل ؛ ولمصفوفتها مرتبة مساوية 3. نأخذ المعادلات الثلاثة كمعادلات رئيسية و x و y و z كمجاهيل رئيسية. المحدّد المميز الوحيد للجملة،

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$$

منعدم، ($= 0 = 4(a-b-c+d) =$). فالجملة المعطاة تقبل حلولا وهي تلك المعطاة بواسطة الجملة الرئيسية، (وذلك طبقا لمبرهنة فونتوني - روشي):

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y = b - t \\ x + 2z = c - t \end{cases}$$

وهي متعلقة بالقيمة الاختيارية المعطاة لـ t.

تمرين 8. VIII :

إنّ معاملات الجملة الموالية عناصر لحقل K، مميّزته 5، وينبغي البحث عن الحلول في K^4 :

$$\begin{cases} w + 2x + 3y + 4z = 1 \\ 4w + x + 2y + 3z = 1 \\ 3w + 4x + y + 2z = 1 \\ 3w + 3x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

إذا ما جمعنا معادلات هذه الجملة الأربعة، نرى أنّ أيّ حلّ (w,x,y,z)

$$10(w+x+y+z)=4$$

هذا مستحيل وفق المميزة 5 . ليس للجملة حل.

0 0

0

الفصل - VIII -

القيم الذّاتيّة - الأشعّة الذّاتيّة.

تأفطر مصفوفة مربّعة.

I. القيم الذّاتيّة - الأشعّة الذّاتيّة.

1. تعاريف:

ليكن E فضاء شعاعيّا على K و f تماثلا داخليّا لِـ E. يسمّى سلّمي c من K قيمة ذاتيّة لِـ f إذا وجد شعاع غير منعدم u من E بحيث :

$$f(u) = cu.$$

تسمّى مجموعة القيم الذّاتيّة لِـ f : طيف f. (يمكن أن يكون خاليا)

ويسمّى الشّعاع u من E شعاعا ذاتيا لـ f إذا وجدت قيمة ذاتية c بحيث:

$$f(u) = cu.$$

و يقال عن مثل هذا الشّعاع أنّه شعاع ذاتي لِـ f ، ملحق بِـ c.

إنّ مجموعة الأشعّة الذاتية الملحقة بقيمة ذاتيّة واحدة c، فضاء شعاعي جزئي من E، ونسمّيه فضاء شعاعيّا جزئيّا ذاتيّا ملحقا بـ c و نرمز له بـ: E_c.

ملاحظات :

$E_c = \{ u \in E \ / \ f(u) = cu \} \neq \{0\}$. و

$\dim E_c \geq 1$.

ينتمي شعاع E المنعدم إلى E_c، وهو ملحق بجميع القيم الذاتية.

كل شعاع ذاتي غير منعدم ملحق بقيمة ذاتية وحيدة.

يكون الـ 0 من K قيمة ذاتية لـ f اذا وفقط إذا لم يكن التماثل الداخلي f متباينا.

مثال :

لتكن E مجموعة التطبيقات القابلة للاشتقاق مالانهاية من المرات من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$؛ وليكن f عنصرا من E و d التماثل الداخلي لـ E المعرّف بـ : $d(f) = f'$

إن طيف d هو $\mathbb{R}$ بأكمله. و الأشعة الذاتية الملحقة بـ $c \in \mathbb{R}$: هي التوابع f من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ المعرّفة بـ :

$f(x) = Ae^{cx}$ ، من أجل كل x حقيقي ؛ A ثابت إختياري.

قضية:

ليكن E فضاء شعاعيا على K، له بعد منته n. وليكن f تماثلا داخليا لـ E. ولتكن A المصفوفة المربعة الملحقة بـ f وفق أساس B_E لـ E ؛ وليكن c عنصرا من K. عندئذ:

يكون c قيمة ذاتية لـ f إذا وفقط إذا كان: $\det(A - cI_n) = 0$؛

يشير I_n إلى مصفوفة الوحدة من الرتبة n.

ملاحظات :

لتكن A مصفوفة مربعة رتبتها n ومعاملاتها في K. نرمز بـ f للتماثل الداخلي لـ K^n لحيث تكون المصفوفة A مصفوفة f وفق الأساس القانوني لـ K^n.

يقول عن سلّمي إنّه قيمة ذاتية لـ A إذا وفقط إذا

ليكن X مجهولا ، عندئذ يكون $\det(A - XI_n)$ كثير حدود

ويسمى كثير حدود A المميز ونرمز له بـ:

$$\det(A - XI_n) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{Tr}\,A)X^{n-1} + \dots + \det A$$

يكون شعاع u من K^n <u>شعاعا ذاتيا</u> لـ A إذا وفقط إذا كان $AU = cU$ أو $(A - cI_n)U = 0$ حيث U عمود ...

II التماثلات الداخلية والمصفوفات المربعة القابلة للتأقطر

1 - تعاريف :

أ - ليكن E فضاء شعاعيا على K بعده منته ومساو n .
يقال عن التماثل الداخلي f لـ E أنّه <u>قابل للتأقطر</u> إذا وجد أساس لـ E تكون مصفوفة f وفقه قطريّة .
نثبت أنّه يكون f قابلا للتأقطر إذا وفقط إذا تمتّع E بأساس مشكّل من أشعّة ذاتية لـ f .

ب - يقال عن مصفوفة مربّعة A ذات رتبة n إنّها قابلة للتأقطر إذا كانت متشابهة مع مصفوفة قطريّة D .
(أي ، إذا وجدت مصفوفة مربّعة P قابلة للقلب ورتبتها n ، ومصفوفة قطريّة D بحيث : $D = P^{-1}A.P$) .

2 - نثبت أنّه :

إذا كان f تماثلا داخليّا لـ K - فضاء شعاعي E ،
وإذا كانت $c_1, \dots, c_p$ قيما ذاتيّة متمايزة لـ f ،
وإذا كانت $u_1, \dots, u_p$ أشعّة ذاتيّة غير منعدمة ملحقة بهذه القيم

ذاتية على الترتيب ، عندئذ
مطلقا .
نستخلص من ذلك أنّه :
لكي يكون تماثل داخلي
أن يتمتّع بـ n قيمة ذا
استنبط لنا "تماثل داخلي
برهنة :
ليكن E فضاء شع
لـ E و A مصفوفة
لتكن $c_1, c_2, \dots$
و k_i رتبة مضاعفة
أ - $E_{c_i} \le k_i$
ب)
أ - ليكن
هي
هي
ب -

...ذاتية على الترتيب ، عندئذ تكون الأشعة الذاتية $u_1, \dots, u_p$ مستقلة خطيا.

نستخلص من ذلك أنه :

لكي يكون تماثل داخلي لفضاء E ذي بعد n ، قابلا للتناظر ، يكفي أن يتمتع بـ n قيمة ذاتية متمايزة (يصح هذا القول إذا ما استبدلنا "تماثل داخلي" بمصفوفة مربعة رتبتها n)

برهنة:

ليكن E فضاء شعاعيا ذا بعد منته مساو n ، و f تماثلا داخليا لـ E و A مصفوفة ملحقة بـ f.

لتكن $c_1, c_2, \dots, c_p$ $(p \leq n)$ القيم الذاتية المتمايزة لـ f وليكن k_i رتبة مضاعفة c_i كجذر لكثير حدود A المميز P. عندئذ يأتي:

أ- $\dim E_{c_i} \leq k_i$ ، من أجل كل $i = 1, \dots, p$.

ب) f قابل للتأقطر
A قابلة للتأقطر $\iff$
$$P(c) = (c_1 - c)^{k_1} (c_2 - c)^{k_2} \dots (c_p - c)^{k_p}$$
و
$$\dim E_{c_i} = k_i \; ; i = 1, \dots, p$$

تمرين $VIII.1$:

ليكن f التماثل الداخلي لـ $\mathbb{R}^3$ ، المعرف بـ :
$$f(x, y, z) = (-x + y - z \; , \; -x + y + z \; , \; -2x + 2y)$$

أ- ليكن c عددا حقيقيا. احسب $\det(A - cI_3)$ ، حيث A هي المصفوفة الملحقة بـ f بالنسبة لأساس $\mathbb{R}^3$ القانوني و I_3 هي المصفوفة المطابقة لـ $M_3(\mathbb{R})$.

ب- أستنتج القيم الذاتية c_1, c_2, c_3 لـ f و عين الفضاءات الجزئية

الذاتية E_{c_1} ، E_{c_2} ، E_{c_3} الموافقة.

ج - لتكن u_1 و u_2 و u_3 أشعة ذاتية غير منعدمة ملحقة بالقيم الذاتية c_1 و c_2 و c_3. أثبت أن العائلة (u_1, u_2, u_3) أساس لـ $\mathbb{R}^3$. المصفوفة B لـ f وفق هذا الأساس.

د - عين، من أجل اختيار خاص للأشعة (u_1, u_2, u_3)، مصفوفة الإنتقال من الأساس القانوني إلى الأساس (u_1, u_2, u_3) وتأكد من صيغة تغيير الأساس.

أ - إن المصفوفة A الملحقة بـ f وفق الأساس القانوني $B = (e_1, e_2, e_3)$ لـ $\mathbb{R}^3$ هي:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$A - cI_3 = \begin{pmatrix} -1-c & 1 & -1 \\ -1 & 1-c & 1 \\ -2 & 2 & -c \end{pmatrix}$$

و:

$$\det(A - cI_3) = 4c - c^3$$

ب - نستنتج من السؤال السابق أن:

$$c_1 = 0 \ , \ c_2 = 2 \ , \ c_3 = -2$$

وهي القيم الذاتية لـ f التي تكون جذورا لكثير الحدود المميز:

$$P = 4X - X^3.$$

الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي $E_{c_1} = E_0$ الموافق للقيمة الذاتية $c_1 = 0$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي:

$$E_0 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(v) = c_1 v = 0 \} = \operatorname{Ker} f$$

شعاع $v=(x,y,z)$ من E_0 تحقق الجملة:

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى والثانية نحصل على: $z=0$ ومن الثالثة، يأتي: $x=y$

ومنه:

$$E_0 = \{ x(1,1,0) \ , \ x\in\mathbb{R} \}$$

يكون E_0 ، هكذا، الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولّد بواسطة الشعاع: $(1,1,0)$. لدينا : $\dim E_0 = 1$.

الفضاء الجزئي الذاتي $E_{c_2}=E_2$ الموافق للقيمة الذاتية $c_2=2$

هو:

$$E_2 = \{ v\in\mathbb{R}^3 \ / \ f(v) = 2v \}$$

لتكن x, y, z أحداثيات شعاع v من E_2 ، إنها تحقق:

$$\begin{cases} -x+y-z=2x \\ -x+y+z=2y \\ -2x+2y=2z \end{cases}$$

وهي الجملة التي نتمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$-3x+y-z=0$$
$$-x-y+z=0$$
$$-2x-2y-2z=0$$

ولهذه الجملة مالانهاية من الحلول المتمثلة في:

$$z=y \ \text{و} \ x=0$$

وعليه يأتي:

$$E_2 = \{ y(0,1,1) \ , \ y\in\mathbb{R} \}$$

إذن ، E_2 هو الفضاء الشعاعي الجزئي لِـ $\mathbb{R}^3$ المولّد بالشعاع ...

ولدينا : $\dim E_2 = 1$

وبالطريقة ذاتها ، يكون الفضاء الشعاعي الجزئي E_{c_3} الملحق بالقيمة الذاتية $c_3=-2$ ذا بعد يساوي 1 ؛ وهو مولّد بالشعاع $(1,0,1)$

$$E_3 = \{ a(1,0,1) \ , \ a \in \mathbb{R} \}$$

جـ - لتكن u_1 ، u_2 ، u_3 أشعة ذاتية غير منعدمة وملحقة بالقيم الذاتية c_1 ، c_2 ، c_3 . فما دامت القيم الذاتية c_1 ، c_2 ، c_3 متمايزة مثنى مثنى، عندئذ تكون الأشعة u_1 ، u_2 ، u_3 ، طبقا للنتيجة II.2 ، مستقلة خطيا، وبالتالي ، فهي تشكل أساسا لِـ $\mathbb{R}^3$ (لأنّ : $3 = \dim \mathbb{R}^3$)

وتبعا لذلك ، وبما أنّ u_1 ، u_2 ، u_3 عناصر لـ E_{c_1} ، E_{c_2} ، E_{c_3} على الترتيب، عندئذ يأتي :

$$f(u_1) = c_1 u_1 = 0 \ ,$$
$$f(u_2) = c_2 u_2 = 2u_2 \ ,$$
$$f(u_3) = c_3 u_3 = -2u_3 \ .$$

والمصفوفة B لِـ f وفق الأساس (u_1, u_2, u_3) هي :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

د) لنختر : $u_1 = (1,1,0)$ ، $u_2 = (0,1,1)$ ، $u_3 = (1,0,1)$

إنّ مصفوفة الإنتقال P من الأساس القانوني $B = (e_1, e_2, e_3)$ إلى الأساس $B' = (u_1, u_2, u_3)$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالرجوع إلى المخطط :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{(u_i)} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[r, bend right, "P"'] \arrow[rrr, bend right=60, "B"'] & \mathbb{R}^3_{(e_i)} \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend right, "A"'] & \mathbb{R}^3_{(e_i)} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[r, bend right, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^3_{(u_i)}
\end{tikzcd}$$

$B = P^{-1}.A.P$ حيث P^{-1} هي مقلوب المصفوفة P.

ستخدام مصفوفة المرافقات، نجد:

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

منه:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

وهكذا نجد المصفوفة B من جديد.

مرين 2. VIII :

ليكن E الفضاء الشعاعي المشكّل من كثيرات الحدود الحقيقية ذات درجة أقلّ أو تساوي 2.

أ- أثبت أنّ التطبيق f المعرّف بـ:

$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P' \quad , \forall P \in E$$

حيث P' هو مشتقّ P، تماثل داخلي لـ E.

ب- أكتب المصفوفة A الملحقة بـ f وفق الأساس $(1, X, X^2)$.

ج- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لِ f.

أ- بطريقة مماثلة لتلك الواردة في التمرين 8.II.-أ- ، نثبت أنّ f تطبيق خطي من E في E.

ب- لدينا:

$$f(1) = 1+2X$$
$$f(X) = (2X+1)X-(X^2-1) = 1+X+X^2$$
$$f(X^2) = (2X+1)X^2-(X^2-1)2X = 2X+X^2$$

و منه نستخلص المصفوفة A لِ f بالنسبة للأساس $(1, X, X^2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ج- ليكن c عددا حقيقيا و I_3 مصفوفة $M_3(\mathbb{R})$ المطابقة. لدينا:

$$A - cI_3 = \begin{pmatrix} 1-c & 1 & 0 \\ 2 & 1-c & 2 \\ 0 & 1 & 1-c \end{pmatrix}$$

و

$$\det(A-cI_3) = (1-c)^3-4(1-c) = (1-c)(c^2-2c-3)$$

و تكون قيم f الذاتية مساوية:

$$c_1=1 \,,\quad c_2=-1 \,,\quad c_3=3$$

وتبعا لذلك، يكون الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي $E_{c_1}=E_1$ الموافق للقيمة الذاتية $c_1=1$، مساويا:

$$E_1 = \left\{ P\in E \;/\; f(P)=P \right\}$$

وإذا كان:

$$P = ax^2+bx+c \quad ; \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

نحصل على المساواة : $f(P)=P$ ، الجملة :

$$\begin{cases} a+b = a \\ 2a+b+2c = b \\ b+c = c \end{cases}$$

$a=-c$ و $b=0$. وعليه :

$$E_1 = \{ a(X^2-1) \ , a \in \mathbb{R} \}$$

وهو الفضاء الشعاعي الجزئي لـ E المولد بكثير الحدود : X^2-1.

إذن، ذو بعد 1.

بالطريقة ذاتها، نجد أن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين E_{c_2} و E_{c_3} الملحقين بالقيمتين الذاتيتين $c_2=-1$ و $c_3=3$ على الترتيب، يساويان:

$$E_{c_2} = E_{-1} = \{ a(X-1)^2 \ , a\in\mathbb{R} \}$$

$$E_{c_3} = E_3 = \{ a(X+1)^2 \ , a\in\mathbb{R} \}$$

نلاحظ أن E_{c_2} و E_{c_3} فضاءان شعاعيان جزئيان مولدان بكثيري الحدود $(X-1)^2$ و $(X+1)^2$ على الترتيب. فهما، إذن، ذوا بعد 1.

ملاحظة:

بما أن القيم الذاتية متمايزة مثنى مثنى، نستنتج أن كثيرات الحدود : $P_1 = X^2-1$ و $P_2=(X-1)^2$ و $P_3=(X+1)^2$ تشكل أساسا لـ E، وتكون مصفوفة f وفق هذا الأساس مساوية المصفوفة القطرية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

التشاكل الداخلي f قابل للتأقطر.

تمرين 3. VIII :

ليكن f تماثلا داخليا لِـ $\mathbb{R}^3$ و

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة f وفق أساس $\mathbb{R}^3$ القانوني.

أ- أوجد قيم f الذاتية.

ب- عيّن فضاءات f الجزئية الذاتية واعط أساسا لكلّ واحد منها.

ج- استنتج أساسا مشكلا من أشعة f الذاتية لِـ $\mathbb{R}^3$ و بيّن مصفوفة f وفق هذا الأساس.

أ- من أجل عنصر c من $\mathbb{R}$ و من أجل المصفوفة I_3 ، يكون لدينا:

$$A - cI_3 = \begin{pmatrix} -1-c & 1 & 1 \\ 1 & -1-c & 1 \\ 1 & 1 & -1-c \end{pmatrix}$$

و

$$\det(A - cI_3) = (-1-c)^3 - 3(-1-c) + 2$$
$$= -(c-1)(c+2)^2$$

ومنه تأتي قيم f الذاتية:

$c_1 = 1$ وهي جذر بسيط ، و :

$c_2 = -2$ وهي جذر مضاعف.

ب- ليكن E_{c_1} الفضاء الجزئي الذاتي الملحق بالقيمة الذاتية c_1 ؛ عندئذ يكون لدينا:

$$E_{c_1} = E_1 = \{ V \in \mathbb{R}^3 \ / \ AV = V \}$$

حيث يرمز الحرف V للمصفوفة وحيدة العمود :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ونكتب المساواة: $AV = V$ على النحو التالي:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ومن ذلك نستخلص الجملة:

$$\begin{cases} -x + y + z = x \\ x - y + z = y \\ x + y - z = z \end{cases}$$

التي تكافئ:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

وبطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على: $x=y$ ، وينتج من المعادلتين الأخيرتين: $y=z$. وهكذا، تقبل الجملة مالانهاية من الحلول المعطاة بـ: $x=y=z$. نستنتج أنّ:

$$E_1 = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\}$$

إذن، E_1 هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$، والمولّد بواسطة الشعاع $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ويمثّل V_1 أساسا لـ E_1 الذي يكون بُعده بذلك مساويا 1.

ليكن E_{c_2} الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي الملحق بالقيمة الذاتية c_2.

وكما كان الشأن أعلاه، نكتب:

$$E_{c_2} = E_{-2} = \{ V \in \mathbb{R}^3 / AV = -2V \}$$

حيث: $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

تكافئ المساواة: $AV = V$ و الجملة:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

تساوي مرتبة هذه الجملة 1، نثبّت مجهولين، ونعبّر عن الثالث (z مثلا) بدلالة الآخرين (x و y). يكون لدينا حينئذ:

$$z = -x - y$$

و

$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

وبذلك، يكون الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_{-2} مولّدا بالشعاعين $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ المستقلين خطيا. فهما يشكلان، إذن، أساسا لـ E_{-2} وهو ما يسمح بالجزم بأنّ بُعد هذا الأخير يساوي 2.

جـ- إنّ الأشعة V_1، V_2، V_3 المعطاة أعلاه هي أشعة f الذاتية، وهي مستقلة خطيا. فهي، إذن، تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

وزيادة على ما سبق، فإنّ الأشعة V_1، V_2، V_3 تحقق: $f(V_1) = V_1$، $f(V_2) = -2V_2$، $f(V_3) = -2V_3$، ومنها نستخلص المصفوفة B لـ f وفق الأساس (V_1, V_2, V_3)، وهي:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ت 4. VIII :

نعتبر المصفوفة A من $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

أ. أثبت أنّها قابلة للتّاقطر، وأوجد مصفوفة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطريّة.

ب. حل الجملة التّفاضليّة :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad (*)$$

أ. لكي نثبت أنّ المصفوفة A قابلة للتّاقطر، يكفي أن نثبت أنّ $\mathbb{R}^3$ يملك أساسا B مشكّلا من أشعّة ذاتيّة لِ A. وفي هذه الحالة، تمثّل العناصر القطريّة للمصفوفة القطريّة في القيم الذاتيّة الملحقة بالأشعّة الذّاتيّة للأساس B' والمختارة وفق ترتيب مختار في البداية؛ وتكون المصفوفة P هي مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني B لِ $\mathbb{R}^3$ إلى الأساس B'.

نتحقق من أنّ قيم A الذّاتيّة هي:

$c_1 = 0$ ، $c_2 = -2$ ، $c_3 = 4$

ومن ذلك نستخلص الفضاءات الشّعاعيّة الجزئيّة الذّاتيّة الملحقة

بالقيم الذّاتيّة c_1، c_2، c_3 على التّرتيب:

$$E_{c_1} = E_0 = \left\{ a(1,1,0) \ , a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{c_2} = E_{-2} = \left\{ a(-1,1,2) \ , a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{c_3} = E_4 = \left\{ a(1,-1,1) \ , a \in \mathbb{R} \right\}$$

وتبعا لذلك، ومادامت القيم الذّاتيّة متمايزة مثنى مثنى (1)، فإنّ الأشعة الذّاتية $V_1=(1,1,0)$، $V_2=(-1,1,2)$، $V_3=(1,-1,1)$ مستقلّة خطيّا. إذن، فهي تشكّل أساسا B' لـ $\mathbb{R}^3$. وتكون المصفوفة P التي تسمح بالإنتقال من الأساس القانوني B إلى الأساس B'، مساوية:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

إنّ المصفوفة A قابلة للتّاقطر (حسب (1)) والمصفوفة القطريّة D هي:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>ملاحظة</u>: للتّأكد من هذه النّتيجة، يمكننا حساب المصفوفة P^{-1} والقيام بالجداء: $P^{-1}.A.P$ الذي ينبغي أن يعطي D.

ب - يرجع حل الجملة (*) إلى حل الجملة:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (**)$$

(بسبب $A = P.D.P^{-1}$)

نقم بتغيير التّوابع المجهولة : (1)

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

وذلك، قصد تبسيط الحسابات. وبالإشتقاق نحصل على: (2)

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

لأن P^{-1} غير متعلّقة بـ: t .

وبعد هذا، نقوم بضرب الجملة $(**)$ في P^{-1} من اليسار، ونحصل، بأخذ (1) و (2) في الحسبان، على:

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

وتكتب هذه النّتيجة على شكل الجملة التّفاضليّة:

$$\begin{cases} X'(t) = 0 \\ Y'(t) = -2\,Y(t) \\ Z'(t) = 4\,Z(t) \end{cases}$$

لتي يسهل حلها.

نجد: $x(t) = c_1$ ، $y(t) = c_2 e^{-2t}$ ، $z(t) = c_3 e^{4t}$

حيث c_1 ، c_2 ، c_3 ثوابت حقيقية كيفية.

و بعد هذا، يأتي حسب (1):

إذن:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}.$$

أي:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 - c_2 e^{-2t} + c_3 e^{4t}$$
$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} - c_3 e^{4t}$$
$$z(t) = 2c_2 e^{-2t} + c_3 e^{4t}.$$

تمرين 5. VIII

أثبت أن المصفوفتين:

(أ) $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ و (ب) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

غير قابلتين للتأقطر.

نتأكد من أنّ كثير حدود A المميز يساوي:

$$P = det(A - XI) = (X-1)^2(-X+4)$$

نستخلص، من ذلك، قيم A الذّاتية، وهي:

$c_1 = 1$ ، جذر مضاعف $(2 = k_1)$؛

و

$c_2 = 4$ ، جذر بسيط $(1 = k_2)$.

لكي نثبت أنّ المصفوفة A غير قابلة للتّأقطر، يكفي أن نبيّن الفضاء الشّعاعي الجزئيّ الذّاتي E_1 الملحق بالقيمة الذاتيّة $c_1 = 1$، يتمتّع ببعد مختلف عن $(2 = k_1)$. من أجل ذلك، لدينا:

$$E_{c_1} = E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{ x(2, 1, 2) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

(وهذا، بعد الحسابات).

وهكذا، يتّضح أنّ E_1 هو الفضاء الشّعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^3$، والمولّد بالشّعاع $(2, 1, 2)$ وبه يكون $\dim E_1 = 1 \neq 2$، حيث 2 هو رتبة مضاعفة c_1.

إذن، A ليست قابلة للتّأقطر.

ب - نثبت أنّه إذا كان c عددا حقيقيا و I_3 ممثّلة لمصفوفة $M_3(\mathbb{R})$ المطابقة، عندئذ نحصل على:

$$det(B - cI_3) = (1-c)^3.$$

لدينا، إذن، قيمة ذاتية واحدة $(c=1)$ مضاعفة ثلاث مرّات، ونتأكد من الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي الوحيد E_1 الملحق بهذه القيمة الذاتية هو:

$$E_1 = \left\{ a(1,0,1) + b(0,1,1) \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

نلاحظ أنّ $\dim E_1 = 2$ وهو مختلف عن رتبة مضاعفة القيمة الذاتية، $k=3$.

وهكذا، تكون B غير قابلة للتّقطير.

تمرين 6. VIII

ليكن f تماثلا داخلياً لِـ $\mathbb{R}^3$ وَ id التّطبيق المطابق لِـ $\mathbb{R}^3$.

نفترض وجود أشعة غير منعدمة u_1، u_2، u_3 تحقّق:

$$(1) \quad f(u_1) = 2u_1 \; ; \; (2) \; f(u_2) = u_1 + 2u_2 \; ; \; (3) \; f(u_3) = u_3 .$$

1) لتكن λ_1، λ_2، λ_3 سلّميّات معطاة؛ نضع:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \, ,$$
$$v = (f - 2id)u \, ,$$
$$w = (f - id)v \, .$$

ماذا يمكن قوله عن v و w إذا ما كان $u=0$؟

أ- عبّر عن v و w بواسطة الأشعة u_1، u_2، u_3.

ب- أثبت، عندئذ، أنّ (u_1, u_2, u_3) أساس لِـ $\mathbb{R}^3$، وبيّن مصفوفة f وفق هذا الأساس.

2) نضع:

$$f(x,y,z) = (2x, 2x+2y-z, x+z)$$

$$f - id = g_1$$

$$f - 2id = g_2$$

أ. عيّن صور أشعّة أساس $\mathbb{R}^3$ القانوني وفق g_1 و g_2. استخلص من ذلك بُعدي Img_1 و Img_2 ثم بُعدي $Kerg_1$ و $Kerg_2$.

ب. عيّن الأشعّة غير المنعدمة u_1 ، u_2 ، u_3 المحققة للشروط (1) و (2) و (3) الواردة أعلاه.

جـ. عيّن قيم f الذاتية وكذا فضاءاتها الجزئيّة الذاتيّة. هل يمكن إيجاد أساس لـ $\mathbb{R}^3$ يكون مشكّلا من أشعّة ذاتيّة لـ f؟

---

1) إذا كان: $u = 0$ ، فإنّ: $v = 0$ و بالتّالي $w = 0$ لأنّ $f - 2id$ ($f - id$ على التّوالي) تماثل داخلي لـ $\mathbb{R}^3$.

أ-
$$v = (f - 2id)u = (f - 2id)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3)$$

وذلك طبقا لتعريف u.

$$v = \lambda_1 f(u_1) - 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 f(u_2) - 2\lambda_2 u_2 + \lambda_3 f(u_3) - 2\lambda_3 u_3$$

لأنّ f خطي ، وحسب الشروط (1) ، (2) ، (3) ، يأتي:

$$v = \lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_3$$

ومن جهة أخرى ،

$$w = (f - id)v = (f - id)(\lambda_2 u_1 - \lambda_3 u_3) = \lambda_2 u_1$$

ب- يكفي إثبات أنّها أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ،

أوّلا : لإثبات أنّ (u_1, u_2, u_3) جماعة مستقلّة.

لتكن a_1 ، a_2 ، a_3 سلّميات حقيقيّة بحيث:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

وحسبما سبق ، يأتي :

$$a_2 u_1 - a_3 u_3 = 0 \ ,$$

و

$$a_2 u_1 = 0 \ .$$

وعليه:

$a_2 = 0$ (لأنّ: $u_1 \neq 0$) و $a_3 u_3 = 0$ ومنه: $a_3 = 0$ (لأنّ: $u_3 \neq 0$)
بقي: $a_2 u_2 = 0$ الذي يعطي بدوره $a_2 = 0$ (لأنّ: $u_2 \neq 0$). وهكذا، نكون
قد بيّنّا أنّ السّلميّات a_1، a_2، a_3 منعدمة، وهو ما يسمح بالختم
بأنّ الأشعة u_1، u_2، u_3 مستقلّة خطيّا.

<u>ثانيا</u>:

لنرمز بـ A لمصفوفة f وفق الأساس (u_1, u_2, u_3). عندئذ تأتي:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) نضع:

$$f(x, y, z) = (2x,\ 2x + 2y - z,\ x + z)$$
$$f - id = g_1$$
$$f - 2\,id = g_2$$

أ- لتكن e_1، e_2، e_3 أشعة أساس $\mathbb{R}^3$ القانوني:

$$g_1(e_1) = (f - id)(e_1) = (f - id)(1, 0, 0) = f(1, 0, 0) - (1, 0, 0)$$
$$= (2, 2, 1) - (1, 0, 0) = (1, 2, 1) = e_1 + 2e_2 + e_3$$
$$g_1(e_2) = (f - id)(0, 1, 0) = (0, 2, 0) - (0, 1, 0)$$
$$= (0, 1, 0) = e_2$$
$$g_1(e_3) = (f - id)(0, 0, 1) = (0, -1, 1) - (0, 0, 1)$$
$$= (0, -1, 0) = -e_2$$

$$g_2(e_1) = (f - 2id)(1,0,0) = (0,2,1) \ ;$$
$$g_2(e_2) = (f - 2id)(0,1,0) = (0,0,0) \ ;$$
$$g_2(e_3) = (f - 2id)(0,0,1) = (0,-1,-1) .$$

$$\begin{aligned} Im\, g_1 &= \left\{ g_1(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x\, g_1(e_1) + y\, g_1(e_2) + z\, g_1(e_3) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. \\ &= \left\{ x(e_1 + 2e_2 + e_3) + (y - z) e_2 \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. \end{aligned}$$

[...] الفضاء الشعاعي الجزئي المولّد بـ : $g_1(e_1)$ و $g_1(e_2)$ المستقلّين خطيّا.

[إ]ذن، $\dim Img_1 = 2$

وإلى جانب هذا، تكون $Im\, g_2$ الفضاء الشعاعي الجزئي لـ $\mathbb{R}^3$ المولّد بـ : $g_2(e_1)$ و $g_2(e_3)$ المستقلّين خطيّا. إذن : $\dim Img_2 = 2$

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّه مادام :

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^3 &= \dim Im\, g_1 + \dim Ker\, g_1 = 3 \\ &= \dim Im\, g_2 + \dim Ker\, g_2 = 3 \end{aligned}$$

فإنّ :

$$\dim Ker\, g_1 = \dim Ker\, g_2 = 1 .$$

ب- لنضع : $u_i(x_i, y_i, z_i)$; $i = 1, 2, 3$ أشعّة غير منعدمة :

نستنتج من الشّروط (1) و (2) و (3) :
$u_1 = (0,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$

ج ـ ليكن c عددا حقيقيا. ولتكن I_3 مصفوفة $M_3(\mathbb{R})$ المطابقة، و B مصفوفة f وفق أساس $\mathbb{R}^3$ القانوني.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$\det(B - cI_3) = \begin{vmatrix} 2-c & 0 & 0 \\ 2 & 2-c & -1 \\ 1 & 0 & 1-c \end{vmatrix} = (2-c)^2(1-c)$$

وقيم f الذّاتيّة هي:

$c_1 = 2$ ، جذر مضاعف $(2 = k_1)$؛

و

$c_2 = 1$ ، جذر بسيط $(1 = k_2)$.

ملاحظة:

إنّ هذه القيم الذّاتيّة منتظرة حسب (2 ـ ب ـ) وتعريف قيمة تماثل داخلي الذّاتيّة.

لنرمز بـ E_{c_i} للفضاء الجزئي الذاتي لـ f الملحق بالقيمة الذّاتيّة c_i. نثبت أنّ (وهي نتيجة محصّل عليها حسب (ب)):

$$E_{c_1} = E_2 = \{ y\,(0,1,0) \;;\; y \in \mathbb{R} \}$$
$$E_{c_2} = E_1 = \{ b\,(0,1,1) \;;\; b \in \mathbb{R} \}$$

وبما أنّ $k_2 = 1 = \dim E_1$ و $k_1 \neq 1 = \dim E_2$ ، إذن، يكون f غير قابل للتّأقطر. وعليه، فإنّنا لا نستطيع إيجاد أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ، مشكّل من أشعّة ذاتيّة لـ f.

تمرين 7. VIII :

نعطي المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أثبت أنّ : $A^2 = A + 2I$ حيث I هي المصفوفة المطابقة من الرتبة 3. أستنتج أنّ A قابلة للقلب ، وعبّر عن A^{-1} بدلالة A.

2) ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، A^n القوّة النّونية للمصفوفة A. أثبت، بالتّدرّج على n، أنّ : $A^n = a_n A + b_n I$ ، حيث a_n و b_n عددان طبيعيان تحقّقان الجملة :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases} \quad (S)$$

3) لتكن M مصفوفة مربّعة رتبتها 2 ، حيث : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

أ) عيّن قيم M الذّاتية وكذا أشعّتها الذّاتيّة. استخلص من ذلك مصفوفة قطريّة D ومصفوفة قابلة للقلب P بحيث : $D = P^{-1}.M.P$

ب- أحسب D^2 و D^3. عبّر عن D^n ثمّ عن M^n وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n.

جـ- اعط كتابة مصفوفيّة للجملة (S) واستنتج من السّؤال (ب) عبارة للمعاملات a_n و b_n بدلالة n.

---

1) نتحقّق، بسهولة، من خلال الحسابات ، أنّ :

$$A^2 = A + 2I$$

و ينتج من ذلك أنّ :

$$\frac{A(A-I)}{2} = I$$

وهكذا، توجد مصفوفة $B = \frac{A-I}{2}$، رتبتها 3، بحيث: $AB = I$

إذن A قابلة للقلب و:

$$A^{-1} = B = \frac{A-I}{2}$$

2) من أجل $n = 0$، لدينا: $A^0 = I = 0A + 1I = a_0 A + b_0 I$

من أجل $n = 1$، $A = 1.A + 0.I$. لنضع: $a_1 = 1$ و $b_1 = 0$.

فالعددان الطبيعيان $a_0 = 0$ و $b_0 = 1$ تحققان فعلا:

$$\begin{cases} 1 = 0 + 1 \\ 0 = 2 \cdot 0 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} a_1 = a_0 + b_0 \\ b_1 = 2a_0 \end{cases}$$

وبه تكون العلاقة صحيحة، إذن، من أجل $n = 1$.

لنفترض أنها صحيحة حتى الرتبة n ولنبرهن صحتها من أجل $(n+1)$، أي:

$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$ حيث a_{n+1} و b_{n+1}

عددان طبيعيان تحققان:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases} \qquad (S)$$

لنحسب A^{n+1}:

$$A^{n+1} = A^n . A = A \cdot A^n$$

$$= (a_n A + b_n I)(A) \quad \text{(حسب فرضية التدرج)}$$

$$= a_n A^2 + b_n A = a_n (A + 2I) + b_n A \quad \text{(حسب 1)}$$

وهكذا:

$$A^{n+1} = \underbrace{(a_n+b_n)}_{a_{n+1}} A + \underbrace{2a_n}_{b_{n+1}} I$$

ولدينا أيضا:

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} \\ b_{n+2} = 2a_{n+1} \end{cases}$$

ومنه النتيجة المطلوبة.

3)

أ- قيم M الذاتية هي جذور كثير الحدود المميز لـ M:

$$P = \det(M - XI_2)$$

ليكن c عددا حقيقيا. عندئذ، يأتي:

$$\det(M - cI_2) = c^2 - c - 2$$

الذي يعطي القيمتين الذاتيتين: $c_1 = -1$ و $c_2 = 2$، والمتمثلتين في جذري P البسيطين.

ليكن E_{-1} الفضاء الجزئي الذاتي لـ M الملحق بالقيمة $c_1 = -1$:

$$E_{-1} = \{ U = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ MU = -U \}$$

حيث يرمز U للمصفوفة وحيدة العمود الملحقة بالشعاع $u = (x,y)$.

نثبت أن:

$$E_{-1} = \{ x(1,-2) \ / \ x \in \mathbb{R} \}$$

يكون الفضاء الجزئي الذاتي E_2 الملحق بالقيمة $c_2 = 2$ مساويا:

$$E_2 = \{ x(1,1) \ / \ x \in \mathbb{R} \}$$

ونستخلص مما سبق أن $u_1 = (1,-2)$ و $u_2 = (1,1)$ شعاعان ذاتيان لـ E_1 و E_2 على الترتيب وأنهما مستقلان خطيا.

وبما أن: $\dim E_{-1} = \dim E_2 = 1$، وهو رتبة مضاعفة c_1 و c_2

إذن M قابلة للتأقطر.

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية تحقق $D = P^{-1}.M.P$

حيث:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

ملاحظة:

توجد مصفوفات كثيرات من نمط D و P التي ترد على السؤال.
(لقد إخترنا القيم الذاتية وفق ترتيب معين، ثم قمنا باختيار شعاع خاص غير منعدم، كل واحد من الفضائين الجزئيين الذاتيين. وعليه، فإن D و P متعلقتان بهذا الاختيار).

ب - لنحسب D^2 و D^3. نثبت أن:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

و أن:

$$D^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

و بعد هذا، نبين، باستخدام الإستدلال بالتراجع على n، أن:

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

و إلى جانب ذلك، و بالقيام بضرب طرفي المساواة: $D = P^{-1}.M.P$ يمينا، في P^{-1}، ويسارا، في P، نحصل على:

$$M = P.D.P^{-1}$$

و بالتالي:

$$M^2 = (P.D.P^{-1})(P.D.P^{-1}) = (PD)\,I\,(D\,P^{-1})$$
$$= P\,(D\,I\,D)\,P^{-1} = P.D^2.P^{-1}$$

وذلك طبقا لكون الجداء المصفوفي تجميعيا. ونحصل بحساب مماثل على:

$$M^3 = P.D^3.P^{-1}$$

وفي النّهاية، نحصل بالتّراجع على n، على:

$$M^n = P.D^n.P^{-1}$$

وذلك من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ج- لتكن X_n (X_{n+1} على التّوالي) المصفوفة وحيدة العنصر: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

($X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ ، على التّوالي)

وتعطينا كتابة مصفوفية للجملة (S):

$$X_{n+1} = MX_n \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه:

$$X_{n+1} = M(MX_{n-1}) = \dots = M^n X_1 = PD^nP^{-1}X_1$$
$$= PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

حيث: $a_1 = 1$ و $0 = b_1$

وبما أنّ:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

و

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أي :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1}}{3} \\ \frac{2(-1)^{n+1}}{3} + \frac{2^{n+1}}{3} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{matrix}$$

ومنه :

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

و

$$b_n = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

تمرين 8. VIII.

ليكن $B=(e_1, e_2, e_3, e_4)$ أساس $\mathbb{R}^4$ القانوني و f التماثل الداخلي لـ $\mathbb{R}^4$ المعرّف بـ :

$$f(e_i) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

من أجل كلّ $i = 1, \dots, 4$.

أ- عيّن المصفوفة A لـ f وفق الأساس B.

ب- عيّن $\text{Im}f$ وبُعدي $\text{Im}f$ و $\text{Ker}f$. اعط أساسا لـ $\text{Ker}f$.

ج- عيّن قيم f الذاتيّة وكذا الفضاءات الجزئيّة الذاتيّة الموافقة. هل المصفوفة A قابلة للتأقطر؟

أ-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(والتأكّد من ذلك سهل)}$$

ب- نثبت أنّ :

$$\text{Im}f = \left\{ f(x, y, z, t) \;/\; (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \left\{ a(1,1,1,1) \ / \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

وعليه:

$$\dim \operatorname{Im} f = 1$$

وبالتالي:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 3$$

وإلى جانب ذلك، لدينا:

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ f(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / \ A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \ / \ x+y+z+t = 0 \right\}$$

وبه يكون $\operatorname{Ker} f$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولّد بواسطة الأشعة: $(1,0,0,-1)$ ، $(0,1,0,-1)$ و $(0,0,1,-1)$ التي تشكل أساساً لِ $\mathbb{R}^4$ (لأنّ: $\dim \operatorname{Ker} f = 3$).

جـ- ليكن c عدداً حقيقياً ولتكن I_4 المصفوفة المطابقة لِ $\mathbb{R}^4$.

لدينا:

$$\det(A - cI_4) = c^3(c-4)$$

ومن هذه المساواة نستخلص قيم f الذاتية وهي:

$c_1 = 0$، جذر مضاعف 3 مرّات $(k_1 = 3)$؛

$c_2 = 4$ ، جذر بسيط. $(k_2 = 1)$.

والفضاءان الجزئيان الموافقان هما:

$$E_{c_1} = E_0 = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \ / \ f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \right\} = \operatorname{Ker} f.$$

$$E_{C_2} = E_4 = \left\{ x(1,1,1,1) \ / \ x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Im} f$$

وبما أنّ : $\dim E_0 = 3$ = درجة (رتبة) مضاعفة C_1 وأنّ

$\dim E_4 = 1$ = " " C_2 ، إذن

نستخلص أنّ A قابلة للتّأقطر (أنظر المبرهنة) ، وتمثل المصفوفة

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

مصفوفة قطريّة.

تمرين 9. VIII :

نعتبر المصفوفة :
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1) أ- عيّن قيم A الذّاتيّة والفضاءات الجزئيّة الذّاتيّة الموافقة.

ب- أوجد مصفوفة قطريّة D ومصفوفة قابلة للقلب P بحيث: $A = P.D.P^{-1}$.

2) أحسب معاملات A^n بدلالة n .

3) نعتبر المتتاليّات الثّلاثة (U_n) ، (V_n) ، (W_n) المعرّفة بواسطة حدودها الأولى U_0 ، V_0 ، W_0 و العلاقات الموالية:

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} U_n = -4U_{n-1} - 6V_{n-1} \\ V_n = 3U_{n-1} + 5V_{n-1} \\ W_n = 3U_{n-1} + 6V_{n-1} + 5W_{n-1} \end{cases}$$

أحسب U_n، V_n، W_n بدلالة n و U_0 ، V_0 ، W_0.

1) أ. قيم A الذاتية هي:

$c_1 = -1$ و $c_2 = 2$ و $c_3 = 5$.

إنها جذور بسيطة، وعليه تكون A قابلة للتأقطر.

ليكن f التماثل الداخلي لـ $\mathbb{R}^3$ الذي ألحقت به المصفوفة A وفق أساس $\mathbb{R}^3$ القانوني. ويكون، عندئذ، الفضاء الجزئي الذاتي E_{c_i} لـ f (أو لـ A) الملحق بالقيمة الذاتية c_i مساويا:

$$E_{c_i} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = c_i \cdot u \right\}$$

وبعبارة أخرى، لو نضع: $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، نحصل على:

$$E_{c_i} = \left\{ U \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AU = c_i \cdot U \right\}$$

$$= \left\{ U \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ (A - c_i)U = 0 \right\}$$

نثبت أنّ:

من أجل $c_1 = -1$: $E_{-1} = \left\{ a(2,-1,0) \ / \ a \in \mathbb{R} \right\}$.

ويكون $u_1 = (2,-1,0)$ شعاعا ذاتيا غير منعدم لـ: E_{-1}.

ومن أجل $c_2 = 2$: $E_2 = \left\{ a(1,-1,1) \ / \ a \in \mathbb{R} \right\}$

ويكون $u_2 = (1,-1,1)$ شعاعا ذاتيا غير منعدم لـ: E_2.

ومن أجل $c_3 = 5$: $E_5 = \left\{ a(0,0,1) \ / \ a \in \mathbb{R} \right\}$

ويكون $u_3 = (0,0,1)$ شعاعا ذاتيا غير منعدم لـ E_5.

تسمح النّتيجة 2. II بالجزم بأنّ الأشعّة الثّلاثة u_1 ، u_2 ، u_3 مستقلّة خطيًا ، وبالتّالي فهي تشكّل أساسا جديدا لـ $\mathbb{R}^3$.

ب- وتكون مصفوفة f وفق هذا الأساس ، مساوية المصفوفة القطريّة :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

بحيث :

$$D = P^{-1} A \cdot P$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني إلى الأساس (u_1, u_2, u_3). نحصل على :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 - نثبت، باستخدام التّراجع على n ، أنّ :

$$A^n = P \cdot D^n P^{-1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

وبتعويض المصفوفات P ، D و P^{-1} بقيمها ، نحصل على :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 5^n \end{pmatrix}$$

3 - نلاحظ أنّ جملة العلاقات (ع) تكتب على الشّكل المصفوفي :

$$X_n = A X_{n-1}$$

حيث X_n (X_{n-1} على التّوالي) هي المصفوفة وحيدة العمود :

$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$ ، $X_{n-1} = \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$ على التّوالي)

و بواسطة إستدلال بالتّدرّج على n، ينتج أنّ:

$X_n = A^n X_0$ ، من أجل كلّ عدد طبيعي n.

و بعبارة أخرى :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

و ينتج من ذلك أنّ:

$$U_n = (2(-1)^n - 2^n)\, U_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})\, V_0$$
$$V_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)\, U_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})\, V_0$$
$$W_n = (-2^n + 5^n)\, U_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)\, V_0 + 5^n W_0$$

و هذا، من أجل كلّ عدد طبيعي n.

تمرين 10. VIII .

نعتبر المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

حيث a وسيط حقيقي.

1) عيّن قيمها الذّاتية و أشعّتها الذّاتية. هل المصفوفة A قابلة للتّقطير؟

2) من أجل أيّة قيمة لـ a تكون المصفوفة A قابلة للتّقطير؟ و في هذه الحالة، استنتج مصفوفة قطريّة D و مصفوفة قابلة للقلب P بحيث :

$$D = P^{-1}.A.P$$

3) نفترض $a = 0$.

أ ـ أحسب A^n بدلالة n.

ب ـ نعتبر المتتاليات الثلاثة (u_n)، (v_n)، (w_n) المعرّفة بواسطة حدودها الأولى (u_0)، v_0، w_0 وبجملة العلاقات التالية:

$$(\mathcal{E})\quad \begin{cases} u_n = 3u_{n-1} \\ v_n = 4u_{n-1} + v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ w_n = 3w_{n-1} \end{cases}$$

استنتج من -أ- قيم u_n، v_n، w_n بدلالة n و u_0، v_0، w_0.

---

1) قيم A الذاتيّة هي:

$c_1 = 1$ ، جذر بسيط $(k_1 = 1)$؛

و

$c_2 = 3$ ، جذر مضاعف $(k_2 = 2)$.

وفيما تخصّ أشعّة A الذاتيّة، ينبغي إيجاد الفضائين الجزئيّين الذاتيّين E_{c_1} و E_{c_2}.

نثبت أنّ:

$$E_{c_1} = E_1 = \{ y(0,1,0) \;/\; y \in \mathbb{R} \}$$

ومن ذلك يأتي:

$$\dim E_1 = 1.$$

وتكون، بذلك، الأشعة الذاتيّة الملحقة بـ: $c_1 = 1$، من الشكل $(0,y,0)$ حيث y عدد حقيقي كيفي. ومن الأشعّة الذاتيّة غير المعدومة، لدينا،

على سبيل المثال، $u_1=(0,1,0)$.

وإلى جانب هذا، لدينا:

$$E_{c_2}=E_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; (A-3I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 4x-2y+2z=0\ ;\ ax=0\right\}$$

ونكون، هكذا، قد رددنا إلى مناقشة حسب الوسيط a.

① إذا كان $a\neq 0$ ، عندئذ: $x=0$ و $y=z$ ومنه:

$$E_3=\{y(0,1,1)\;/\;y\in\mathbb{R}\}$$

تكون الأشعة الذاتية الملحقة بـ $c_2=3$ من الشكل $(0,y,y)$، $y\in\mathbb{R}$.

وفي هذه الحالة يكون:

$\dim E_3=1\neq 2$: رتبة مضاعفة c_2.

② إذا كان $a=0$: عندئذ: $2x-y+z=0$ ، و

$$E_3=\{x(1,0,-2)+y(0,1,1)\;/\;x,y\in\mathbb{R}\}$$

نتأكد من أن E_3 متمتع ببعد يساوي $2=k_2$ (مادام $u_2=(1,0,-2)$ و $u_3=(0,1,1)$ مستقلين خطيا).

2) يتضح مما سبق أنه تكون A قابلة للتقطير إذا وفقط إذا كان ($\underline{k_1=1}=\dim E_1$ و $\underline{k_2=2}=\dim E_3$ وهي الحالة التي يكون فيها $a=0$)

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=P^{-1}.A.P$$

مصفوفة قطرية، في حين أن P تساوي:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

(أنظر التمرين 9.VIII).

3) نفترض أنّ $a = 0$

P - في هذه الحالة، A قابلة للتّأقطر و $A = P.D.P^{-1}$. وينتج من ذلك أنّ:

$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$

(بالتّراجع على n).

نتحقّق من أنّ:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

والتي يسهل حسابها بدلالة n.

ب- بواسطة استدلال مماثل للذي أوردناه في التّمرين السّابق، نكتب (ع) على النّحو الموالي:

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \cdot \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

وبعد حساب A^n، تستنتج قيم U_n و V_n و W_n بدلالة n و U_0، V_0 و W_0.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

تمرين 11. VIII :

ليكن $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ الفضاء الشّعاعي المشكّل من التّوابع العدديّة لمتغير حقيقي، و القابلة للاشتقاق مالانهاية من المرّات على $\mathbb{R}$.

وليكن D التّماثل الدّاخلي لِـ $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ المعرّف بِـ :

$$D : C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto Df = f'$$

حيث f' هو التّابع المشتقّ لِـ f.

سنرمز بِـ : E للفضاء الشّعاعي الجزئي لِـ $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ والمشكّل من التّوابع f المعرّفة بِـ:

$$f(x) = P(x)\,\mathrm{ch}x + Q(x)\,\mathrm{sh}x \;, \forall x \in \mathbb{R}$$

حيث P و Q كثيرا حدود ذوا معاملات حقيقيّة ودرجة أقل أو تساوي 2 .

1) أ- إذا كان R و S كثيري حدود معاملاتهما حقيقيّة و تحقّقان العلاقة:

$$R(x) + S(x)\,e^{-2x} = 0 \;; \forall x \in \mathbb{R}$$

فاثبت، عندئذ، أنّ :

$$0 = S = R \quad (\text{تابع منعدم})$$

(إعانة : إعتبر نهاية العبارة $S(x)e^{-2x}$ عندما يؤول x إلى $+\infty$)

ب- لتكن f_1 ، f_2 ، ... ، f_6 توابع حقيقيّة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$، ومعرّفة بِـ:

$f_1(x) = \mathrm{ch}x$, $f_2(x) = \mathrm{sh}x$, $f_3(x) = x\,\mathrm{ch}x$

$f_4(x) = x\,\mathrm{sh}x$, $f_5(x) = x^2\mathrm{ch}x$, $f_6(x) = x^2\mathrm{sh}x$

من أجل كلّ عنصر x من $\mathbb{R}$

أثبت أنّ هذه التوابع السّتة تشكّل أساسا لِـ E

جـ- أثبت أنّ E مستقر وفق D (بمعنى أنّ : $D(E) \subset E$)

سنرمز، فيما سيلي ، بـ $\bar{D}$ للتّماثل الدّاخلي لِـ E بحيث:

$$\bar{D} : E \longrightarrow E$$

$$f \longmapsto \bar{D}f = Df = f' \quad ; \forall f \in E$$

2) أ- أكتب المصفوفة الملحقة بِـ $\bar{D}$ وفق الأساس $(f_1, \dots, f_6)$.

ب- أثبت أنّ $\bar{D}$ تشاكل ذاتي لـ E.

3) أ- أحسب قيم $\bar{D}$ الذّاتيّة وعيّن الفضاءات الجزئيّة الذّاتيّة الموافقة.

ب- هل التّماثل الدّاخلي $\bar{D}$ قابل للتّأقطر؟

---

1) أ- ليكن R و S كثيري حدود معاملاتهما حقيقيّة وتحقّقان العلاقة:

$$R(x) + S(x)\,e^{-2x} \quad ; \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$$

فبما أنّ S عبارة عن مزج خطّي لتوابع القوى وأنّ التّابع الأسّي "يهيمن على القوى"، إذن:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} S(x)\,e^{-2x} = 0 \quad (1).$$

ومن جهة، وحسب العلاقة $(*)$، لدينا:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(R(x) + S(x)\,e^{-2x} \right) = 0 \quad (2)$$

و (1) و (2) يأخذ،

$$\lim_{x \mapsto +\infty} R(x) = 0 \quad (3)$$

لنبرهن بالتّناقض أنّ R كثير حدود منعدم. لنميز حالتين من أجل ذلك:

الحالة الأولى: لنفترض أنّ لِـ R درجة m أكبر أو تساوي 1،
$$R = a_m x^m + \dots + a_0 \quad ; a_m \neq 0$$

عندئذٍ، تكون:
$$\lim_{x \mapsto +\infty} R(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} a_m x^m = \pm\infty$$

حسب إشارة a_m؛ وهذا يناقض الفرضيّة (3)

الحالة الثّانية:
لنفترض أنّ لِـ R درجة منعدمة، $R = a_0 \neq 0$؛ ينتج من هذا:
$$\lim_{x \mapsto +\infty} R(x) = a_0 \neq 0$$

وهو ما يناقض أيضا الفرضيّة (3).
نستخلص ممّا سبق أنّ R منعدم ($R(x) = 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$).
ويكون لدينا، حسب $(*)$،
$$e^{-2x} S(x) = 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$
ولكن: $e^{-2x} \neq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، إذن:
$$S(x) = 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$
وهكذا، نكون قد أثبتنا أنّ التّابعين R و S منعدمان.
ب- تشكّل العائلة $(f_1, f_2, \dots, f_6)$ السّابق تعريفها، أساسا لِـ E. لنبرهن ذلك على مرحلتين.
لنلاحظ، بادئ ذي بدء، أنّ هذه التّوابع منتمية إلى E.
① إنّها عائلة مستقلّة لِـ E، وبالفعل: لتكن $a_1, \dots, a_6$ سلّميات حقيقية بحيث:
$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_6 f_6 = 0$$

وبعبارة أخرى:

$$a_1 \operatorname{ch}x + a_2 \operatorname{sh}x + a_3 x \operatorname{ch}x + a_4 x \operatorname{sh}x + a_5 x^2 \operatorname{ch}x + a_6 x^2 \operatorname{sh}x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

وبتعويض $\operatorname{ch}x$ بـ: $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ و $\operatorname{sh}x$ بـ: $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$، نجد:

$$\left[a_1+a_2+(a_3+a_4)x+(a_5+a_6)x^2\right]e^{x} + \left[a_1-a_2+(a_3-a_4)x+(a_5-a_6)x^2\right]e^{-x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

وبضرب طرفي هذه المساواة في e^{-x} نحصل على:

$$\underbrace{a_1+a_2+(a_3+a_4)x+(a_5+a_6)x^2}_{R(x)} + \underbrace{\left[a_1-a_2+(a_3-a_4)x+(a_5-a_6)x^2\right]}_{S(x)}e^{-2x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

نحصل على نتيجة مماثلة لـ $(*)$؛ وحسب (P) نستخلص أنّ:

$$R(x) = S(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ومنه:

$$a_1+a_2 = a_1 - a_2 = 0 \;;\; a_3+a_4 = a_3 - a_4 = 0 \;;\; a_5+a_6 = a_5-a_6 = 0$$

أي أنّ:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 0$$

وهو المطلوب أوّلاً.

② إنّها عائلة مولّدة لـ E؛ وبالفعل: علينا أنّ نثبت أنّ كلّ عنصر من E يكتب كمزج خطي للعناصر f_1، f_2، ...، f_6.

ليكن f عنصرا من E، عندئذ، تمكن الكتابة:

$$f(x) = P(x)\operatorname{ch}x + Q(x)\operatorname{sh}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

حيث P و Q كثيرا حدود معاملاتهما حقيقيّة ودرجتهما ≤ 2.

توجد إذن أعداد حقيقيّة c_0، c_1، c_2، b_0، b_1، b_2 بحيث:

$$P(x) = b_2x^2+b_1x+b_0 \quad \text{و} \quad Q(x) = c_2x^2+c_1x+c_0$$

وهكذا، يصبح:

$$f(x) = (b_2x^2+b_1x+b_0)\,chx + (c_2x^2+c_1x+c_0)\,shx$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

وبعبارة أخرى:

$$f = b_0\,chx + c_0\,shx + b_1x\,chx + c_1x\,shx + b_2x^2chx + c_2x^2shx \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أنّ:

$$f = b_0f_1 + c_0f_2 + b_1f_3 + c_1f_4 + b_2f_5 + c_2f_6$$

مع كون c_2, c_1, c_0 ، b_2, b_1, b_0 أعدادا حقيقيّة.

من ① و ② يأتي أنّ:

$$\dim E = 6$$

جـ - E مستقرّ بواسطة D (أي: $D(E) \subset E$)

وفعلا: ليكن f عنصرا من E؛ علينا أن نثبت أنّ: $Df \in E$.

$f' = Df$ تحقّق:

$$f'(x) = (P(x)\,chx + Q(x)\,shx)' =$$

$$= P'(x)\,chx + P(x)\,shx + Q'(x)\,shx + Q(x)\,chx \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن:

$$f'(x) = [P'(x)+Q(x)]\,chx + [P(x)+Q'(x)]\,shx \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

لنضع:

$U(x) = P'(x)+Q(x)$ و $V(x) = P(x)+Q'(x)$ من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$

ومن السّهل التّحقّق من أنّ U و V كثيرا حدود معاملاتهما حقيقيّة ودرجتهما أقلّ أو تساوي 2. ($d^\circ U \leq \max(d^\circ P', d^\circ Q)$ و $d^\circ V \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q')$).

وهكذا، يكون لدينا، من جهة: $f'\in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ لكون f منتميًّا إلى الفضاء ذاته، ومن جهة أخرى:

$$f'(x)=U(x)\,\mathrm{ch}\,x+V(x)\,\mathrm{sh}\,x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

حيث U وV كثيرا حدود معاملاتهما حقيقيّة ودرجتهما أقلّ أو تساوي 2. نختم بأنّ $Df\in E$.

ويسمح لنا ما سبق بالجزم بأنّ التّطبيق الخطّي:

$$\begin{aligned}\bar{D}: E &\longrightarrow E\\ f &\longmapsto \bar{D}f=f'\end{aligned}$$

تماثل داخلي لـ E، فعلا.

2) لكتابة المصفوفة A الملحقة بـ $\bar{D}$ وفق الأساس $(f_1,\dots,f_6)$ ينبغي حساب $\bar{D}f_1$، ...، $\bar{D}f_6$ بدلالة f_1، ...، f_6. لدينا:

$$\bar{D}f_1=f_2\ ,\ \bar{D}f_2=f_1\ ,\ \bar{D}f_3=f_1+f_4\ ,\ \bar{D}f_4=f_2+f_3$$

$$\bar{D}f_5=2f_3+f_6\ ,\ \bar{D}f_6=2f_4+f_5$$

ومن ذلك تأتي المصفوفة:

$$A=M_{\bar{D}(f_1,\dots,f_6)}=\begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} \bar{D}f_1 & \bar{D}f_2 & \bar{D}f_3 & \bar{D}f_4 & \bar{D}f_5 & \bar{D}f_6 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\\ f_5\\ f_6 \end{array} \end{array}$$

ب- مادام $\bar{D}$ تماثلا داخليًّا، فيكفي إثبات أنّه تقابلي لكي يصبح تشاكلا ذاتيًّا لـ E. ويكافئ ذلك إثبات: $\det A\neq 0$. ويسمح لنا حساب بالكتل بإثبات أنّ:

$$\det A=-1\neq 0$$

(إرجع الى التّذكير بالدّرس حول المحدّدات، الفصل VI).

3) ب- ليكن c عددا حقيقيّا و I_6 المصفوفة المطابقة لِ $M_6(\mathbb{R})$.

نثبت، بواسطة حساب محدّدات بالكتل أيضا، أنّ:

$$\det(A-cI_6) = (c^2-1)^3$$

وتساوي، عندئذ، قيم $\bar{D}$ الذّاتيّة:

$c_1 = -1$ و $c_2 = 1$ وهما جذران ثلاثيّا المضاعفة لكثير حدود A المميّز، ($k_1 = k_2 = 3$).

ويكون الفضاءان الجزئيّان الذّاتيّان الموافقان E_{c_1} و E_{c_2} مساويين:

① $$E_{c_1} = E_{-1} = \{ f \in E \;/\; \bar{D}f = -f \}$$

ولكنّ: $\bar{D}f = -f \Leftrightarrow f'(x) = -f(x)$ من أجل كلّ x حقيقي x، وهي معادلة تفاضليّة ذات متغيّرات قابلة للفصل يكون حلّها العام:

$$f(x) = Ke^{-x};\ \forall x \in \mathbb{R}\ (و)\ K \in \mathbb{R}.$$

وبشكل آخر، نكتب:

$$f(x) = K\,ch\,x - K\,sh\,x\ ;\forall x \in \mathbb{R}\ (و)\ K \in \mathbb{R}$$

وتبيّن هذه المساواة أنّنا وجدنا، فعلا، عنصرا f من E.

لدينا إذن:

$$E_{-1} = \{ f \in E \;/\; f(x) = K(ch\,x - sh\,x);\forall x \in \mathbb{R},\ \text{مع}\ K \in \mathbb{R} \}$$

② وبالمثل:

$$E_{c_2} = E_1 = \{ f \in E \;/\; \bar{D}f = f \}$$

$$= \{ f \in E \,/\, f(x) = L e^{x} = L(\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x) \,;\, \forall x \in \mathbb{R} \,,\, L \in \mathbb{R} \}$$

وهكذا يكون:

$$E_{-1} = \{ f \in E \,/\, f = K(f_1 - f_2) \,;\, K \in \mathbb{R} \},$$

$$E_{1} = \{ f \in E \,/\, f = L(f_1 + f_2) \,;\, L \in \mathbb{R} \}.$$

ومما سبق، ينتج أنّ E_{-1} (E_1 على التوالي) فضاء شعاعي جزئي لـ E مولّد بـ $f_1 - f_2$ ($f_1 + f_2$، على التوالي)؛ والشعاعان التابعان الأخيران غير منعدمين.

ب- لدينا، حسبما سبق:

$$\dim E_{-1} = \dim E_{1} = 1$$

(يمثّل $f_1 - f_2$ أساسا لـ E_{-1} و $f_1 + f_2$ أساسا لـ E_1).

في كلّ من الحالتين، تختلف بُعد الفضاء الجزئي الذّاتي عن رتبة مضاعفة القيمة الذّاتيّة التي توافقه. نستخلص من ذلك أنّ التماثل الدّاخلي D غير قابل للتّقطير (طبقا للجزء (ب) من المبرهنة الواردة في الدّرس).

المراجع

1. J. chevallet et M. Morel. Du cours aux applications, Algèbre linéaire (1), Librairie Armand Colin.
2. D. FADDEEV et I. SOMINSKI. Recueil d'exercices d'Algèbre supérieure. Edition MIR, Moscou 1972.
3. A. KUROSH. Cours d'Algèbre supérieure, Edition MIR, Moscou 1971.
4. G. Lefort. Algèbre et analyse, exercices, Paris 1964.
5. J. Lelong-ferrand, J.M. ARNaudies. Cours de Mathématiques Tome 1, Algèbre, Paris, Dunod 1977.
6. M. Quesanne. Algebre, collection U.
7. K. Zizi. Polycopié de M003, Université d'Oran-1975-1976.
8. Revue de sciences mathematiques et Physique, librairie Vuibert.
9. séries d'exercices de T.D., de devoirs à rédiger et devoirs de synthèse réalisées à l'université d'oran.