التوابع المتداولة في التحليل -الدرس رقم 05-

التابع اللوغارتمي

ليكن التابع:

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

التابع f مستمر على المجال $]0, +\infty[$ اذن فهو يقبل تابعا اصليا F على المجال $]0, +\infty[$.
نسمي هذا التابع الأصلي F بالتابع اللوغارتمي الطبيعي (أو النيبري) ونرمز له بالرمز $\log$ وهو معرف كما يلي:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \begin{cases} (\log x)' & = & \frac{1}{x} \\ \log 1 & = & 0. \end{cases}$$

خواص التابع اللوغارتمي:

$\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ هو تابع مستمر، قابل للاشتقاق مالا نهاية من المرات على مجال تعريفه وهو متزايد تماما.
كما لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و y من المجال $]0, +\infty[$ لدينا:

$$\log xy = \log x + \log y$$
$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$
$$\log \frac{1}{x} = -\log x$$
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \log x^r = r \log x$$
$$\forall x \in]0, 1[, \quad \log x < 0$$
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \log x > 0$$

ملاحظة:

من أجل كل $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ نعرف التابع اللوغارتمي ذو الأساس a والذي نرمز له بـ $\log_a$ كما يلي :

$$\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$$

يمكنك ملاحظة أن هذا التابع يتمتع بنفس خواص التابع اللوغارتمي الطبيعي.

التابع الأسي

التابع $\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ مستمر ومتزايد تماما على مجال تعريفه، اذن فهو يقبل تابعا عكسيا $\log^{-1}$ والذي نرمز له بالرمز $\exp$
ويسمى التابع الأسي ونكتب اصطلاحا $\exp x = e^x$

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$
$$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$$
$$x \in \mathbb{R} \qquad y \in]0, +\infty[$$

وهو تابع موجب تماما ومستمر ومتزايد تماما على $\mathbb{R}$.

خواص التابع الأسي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad e^{x+y}=e^{x}e^{y}$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}$$
$$\forall r,x\in\mathbb{R},\quad (e^{x})^{r}=e^{rx}.$$

ملاحظة:

باستخدام نظرية مشتق تابع عكسي يمكننا اثبات أن مشتق التابع الأسي هو التابع الأسي نفسه.
ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$(e^{x})'=\frac{1}{(\log x)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^{x}.$$

توابع القوى

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a نعرف تابع القوى ذو الأساس a كما يلي:

$$f:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$$
$$x\to f(x)=a^{x}=e^{x\log a}.$$

وهو عبارة عن تابع موجب تماما ومستمر وقابل للاشتقاق (كجداء تابعين) على مجال تعريفه. ولدينا من اجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

$$(a^{x})'=(e^{x\log a})'=\log a e^{x\log a}.$$

خواص توابع القوى:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad (a^{x})^{y}=a^{xy}$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (ab)^{x}=a^{x}b^{x},\qquad (\frac{a}{b})^{x}=\frac{a^{x}}{b^{x}}$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y},\qquad a^{x}a^{y}=a^{x+y}.$$

ملاحظة:

يمكنك ملاحظة أن تابع قوى ذو الأساس $a, a\neq 1$ يقبل تابعا عكسيا، وتابعه العكسي هو التابع اللوغارتمي ذو الأساس a أي: $\log_{a}$.

التوابع المثلثية الزائدية (أوالقطعية)

تابع الجيب الزائدي هو التابع الذي نرمز له بالرمز sh ومعرف كما يلي:

$$sh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

تابع جيب التمام الزائدي هو التابع الذي نرمز له بالرمز ch ومعرف كما يلي:

$$ch:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$$
$$x\to ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

تابع الظل الزائدي هو التابع الذي نرمز له بالرمز th ومعرف كما يلي:

$$th:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to th(x)=\frac{shx}{chx}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

بحساب بسيط يمكنك التأكد أن التابعين sh و th فرديان، في حين أن التابع ch زوجي.
كما أنه لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و y ما يلي:

$$ch^{2}x-sh^{2}x=1$$
$$shx+chx=e^{x}$$
$$sh(x-y)=shxchy-shychx,\qquad sh(x+y)=shxchy+shychx$$
$$ch(x-y)=chxchy-shyshx,\qquad ch(x+y)=chxchy+shyshx$$
$$th(x-y)=\frac{thx-thy}{1-thxthy},\qquad th(x+y)=\frac{thx+thy}{1+thxthy}$$

التوابع العكسية للتوابع المثلثية الزائدية

واضح أن sh تابع مستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومتزايد تماما اذن فهو يقبل تابعا عكسيا sh^{-1} نرمز له بالرمز $argsh$ ويسمى بتابع عمدة الجيب الزائدي وهو كذالك تابع مستمر ومتزايد تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$argsh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$y=argshx\Leftrightarrow x=shy$$
$$x\in\mathbb{R}\qquad y\in\mathbb{R}.$$

لاحظ أنه من الخواص السابقة لدينا:

$$e^{y}=chy+shy=\sqrt{1+sh^{2}y}+shy=\sqrt{1+x^{2}}+x$$

ومنه:

$$y=\log(\sqrt{1+x^{2}}+x)$$

أي أن:

$$argshx=\log(\sqrt{1+x^{2}}+x)$$

التابع $argsh$ قابل للاشتقاق ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

$$(argsh)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

التابع $ch:[0,+\infty[\to[1,+\infty[$ مستمر ومتزايد تماما، فهو يقبل تابعا عكسيا ch^{-1} نرمز له بـ $argch$ ويسمى عمدة جيب التمام الزائدي. ولدينا:

$$argch:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$$
$$y=argchx\Leftrightarrow x=chy$$
$$x\in[1,+\infty[\qquad y\in[0,+\infty[.$$

بنفس الطريقة السابقة يمكن ايجاد أن:

$$argchx = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

و

$$(argch)^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

التابع $th : \mathbb{R} \to]-1,1[$ مستمر ومتزايد تماما، فهو يقبل تابعا عكسيا th^{-1} نرمز له بـ $argth$ ويسمى عمدة الظل الزائدي. ولدينا:

$$argth :]-1,1[\to \mathbb{R}$$

$$y = argthx \Leftrightarrow x = thy$$

$$x \in]-1,1[\qquad y \in \mathbb{R}.$$

بنفس الطريقة السابقة يمكن ايجاد أن:

$$argthx = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$$

و

$$(argth)^{'}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

ملاحظة:

يمكننا بنفس الطريقة تعريف تابع التظل الزائدي كما يلي:

$$cothx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

تمرين:

أدرس تغيرات التوابع المثلثية الزائدية وتوابع القوى ثم أرسم تمثيلاتها البيانية.