## الفصل 3 : التوابع الحقيقية ذات متغير حقيقي :

### 1) عموميات :

التابع الحقيقي لمتغير حقيقي هو كل تطبيق f معرف على $\mathbb{R}$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ (أو معرف على جزء من $\mathbb{R}$ ويأخذ قيمه من جزء في $\mathbb{R}$).

$$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

حيث: $x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) \in \mathbb{R}$

### بيان تابع :

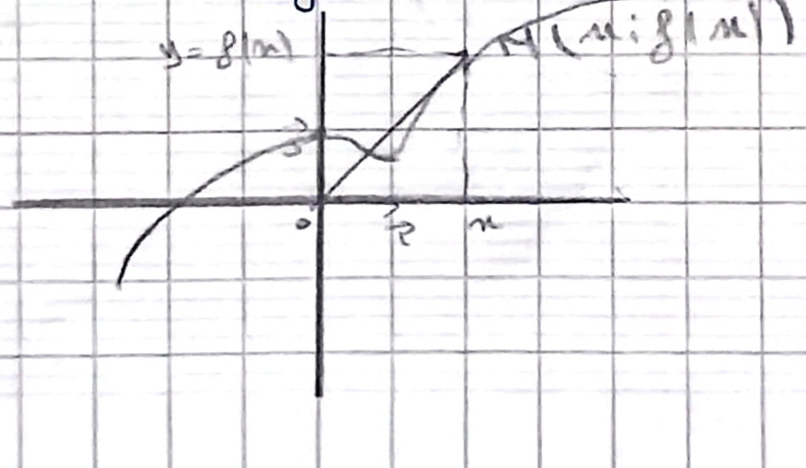
ليكن $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع حقيقي

تسمى المجموعة $\Gamma(f)$ من $\mathbb{R}^2$ بيان التابع f بحيث

$$\Gamma(f) = \{(x; f(x)) , x \in A\}$$

نزود المستوي الاقليدي $(P)$ بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و نرفق بكل نقطة $(x; f(x))$ $(x \in A)$ نقطة وحيدة من المستوي M حيث

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



النقاط $M$ (من أجل كل $x \in A$) تمثل بيان التابع $f$ في المستوي $(P)$

## عمليات جبرية حول التوابع:

ليكن $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعين حقيقيين

$$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \; g(x) \neq 0$$

$$(Kf)(x) = K\, f(x) \quad (K \in \mathbb{R}^*)$$

## تركيب تابعين:

ليكن $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعين حقيقيين . $f(A) \subseteq B$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

## تعاريف وملاحظات: ١٧

1) ليكن $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ $0$.

$f$ تابع زوجي إذا كان:

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(-x)$$

$f$ تابع فردي إذا كان:

$$\forall x \in I ; -f(x) = f(-x)$$

2) ليكن $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع حقيقي

$f$ تابع متزايد إذا كان:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

## نهاية تابع:

**تعريف:**

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ أو $x_0$ نقطة من $I$

نقول أن التابع $f$ له نهاية $(\ell \in \mathbb{R})$ عند النقطة $x_0$ ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ إذا تحقق ما يلي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

**مثال:** أثبت أن $\lim_{x \to 1} (3x - 2) = 1$

ليكن $\varepsilon > 0$ لدينا:

$$|f(x) - \ell| = |3x - 2 - 1| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$$

ومنه $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$

بأخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$ ويتحقق التعريف.

**ملاحظة:**

تعريف النهاية عند $x_0$ مستقل عن $f(x_0)$ قد يكون $f(x_0)$ موجود أو غير موجود حتى وإن كان $f(x_0)$ موجودا قد لا تساوي النهاية عند $x_0$.

**مثال:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 2$$

## وحدانية النهاية :

**نظرية :** ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا معرفا على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0$ نقطة من $I$

إذا قبل التابع $f$ نهاية عند النقطة $x_0$ فإن هذه النهاية وحيدة.

**البرهان :** لنفرض أن التابع $f$ نهايتين $l_1$ و $l_2$ عند النقطة $x_0$ أي أن :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I$$
$$|x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I$$
$$|x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

نضع $\alpha = \max\{\alpha_1 ; \alpha_2\}$ ومنه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha$$
$$\Rightarrow 0 \leq |l_1 - l_2| = |l_1 - l_2 - f(x) + f(x)|$$
$$\leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon$$

ومنه $|l_1 - l_2| = 0 \Rightarrow l_1 - l_2 = 0$

ومنه $l_1 = l_2$

## النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا معرفا على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0$ نقطة من $I$.

نقول أن التابع $f$ يقبل نهاية $(l \in \mathbb{R})$ على يمين النقطة $x_0$ إذا تحقق ما يلي:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

ونرمز لذلك ب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$

نقول أن الدالة $f$ تقبل نهاية $(l \in \mathbb{R})$ على يسار النقطة $x_0$ إذا تحقق ما يلي

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

ونرمز لذلك ب $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l$

ملاحظة:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l \Leftarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

ملاحظة: تعريف النهاية في حالة $x_0, \ell$ غير منتهيين.

حالة: $x_0 = \infty$ ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا

و $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

كما لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

حالة $\ell = \infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq A.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall B < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq B.$$

كما لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow f(x) \leq A.$$

مثال: لنثبت أن $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

ليكن $0 < A$ لدينا

$$f(x) \geq A \Rightarrow \sqrt{x} \geq A > 0 \Rightarrow x \geq A^2$$

ومنه نأخذ $B = A^2$ فيتحقق التعريف

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow f(x) \geq A$$

**نظرية :**

لتكن $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in ]a,b[$

لدينا

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ إذا من أجل كل متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجال $[a,b]$

إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$

**نتيجة :**

توجد متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $[a,b]$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq l$

بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq l$

**مثال :**

نثبت أن $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ لا تقبل نهاية عند $0$

$$f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0$$

$$u_n = \frac{1}{2n\pi}\ ,\quad x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$$

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ومنه $f(x)$ لا تقبل نهاية عند $0$.

**عمليات على نهايات التوابع :**

**نظرية :** لتكن $f$ و $g$ تابعين معرفين على نفس الجزء من $\mathbb{R}$ ويقبلان نهايتين منتهيتين $l$ و $l'$ عند النقطة $x_0$

عندئذ:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \mp g(x)] = \ell \mp \ell'$$

$$\lim_{x \to x_0} (K f(x)) = K \ell \quad / \forall K \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell \ell'$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'} \quad / \ell' \neq 0}$$

ملاحظة:

تظل النظرية السابقة صحيحة في حالة $x_0 = \infty$

أو $\ell = \infty$ أو $\ell' = \infty$ طالما كانت العمليات على النهايات معرّفة.

عدا $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ، $-\infty + \infty$ ، $0 \times \infty$

الاستمرارية:

تعريف:

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

نقول أن $f$ تابع مستمر عند النقطة $x_0$ إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ملاحظة: التعاريف مكافئة:

1) $f$ تابع مستمر عند النقطة $x_0$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2) $f$ مستمر عند النقطة $x_0$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل متتالية عددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من $I$

إذا كان $\lim_{n \to \infty} U_n = x_0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} f(U_n) = f(x_0)$

3) $f$ تابع مستمر على المجال $I$ إذا وفقط إذا كان $f$ مستمر عند كل نقطة من $I$

استمرار تابع على يمين وعلى يسار تابع:

① نقول أن $f$ تابع مستمر على يمين النقطة $x_0$ إذا كانت النهاية من اليمين تساوي الصورة:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

② نقول أن $f$ تابع مستمر على يسار النقطة $x_0$ إذا كان

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

③ $f$ تابع مستمر في النقطة $x_0$ ⇔ $f$ مستمر على يمين وعلى يسار النقطة $x_0$

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \,; & x > 1 \\ 1 \,; & x = 1 \\ x+2 \,; & x < 1 \end{cases}$$

واضح أن $g$ تابع مستمر على $\mathbb{R}-\{1\}$ لأنه على شكل كثير حدود لندرس الاستمرار عند $1$:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x^2) = 1 = g(1)$$

($g$ مستمرة على يمين $1$)

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x+2 = 3 \neq g(1)$$

($g$ غير مستمرة على يسار $1$)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\{\mathbb{Z}\}$$
$$x \to f(x) = [x]$$

التابع $f$ مستمر على $\mathbb{R}.\{\mathbb{Z}\}$

لندرس الاستمرارية على $\mathbb{Z}$.

ليكن $n \in \mathbb{Z}$ لدينا =

$$\lim_{x \underset{>}{\to} n} f(x) \neq \lim_{x \underset{>}{\to} n} (n) = n = [n] = f(n)$$

ومنه $f$ مستمرة على يمين $n$.

$$\lim_{x \underset{<}{\to} n} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} n} (n-1) = n-1 \neq f(n)$$

$f$ غير مستمر على يسار $n$.

ومنه $f$ غير مستمر عند $n$.

$$h(x) \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

معرفة على $\mathbb{R}$ وغير مستمرة عند أي نقطة من $\mathbb{R}$.

## خواص التوابع المستمرة :

**نظرية** : كل تابع مستمر على مجال مغلق ومحدود $[a;b]$ فهو تابع مستمر بانتظام على المجال $[a;b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a<b)$

**البرهان** :

ليكن $f$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ المغلق والمحدود

لنستعمل البرهان بالخلف ولنفرض أن $f$ غير مستمر بانتظام على $[a,b]$

أي أن : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in [a,b]$

$|x-y| < \alpha$ و $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

$\alpha = 1 \to \exists x_1, y_1 \in [a,b]\ |x_1 - y_1| < 1$ و $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

(1) $\alpha = \frac{1}{n} \to \exists x_n y_n \in [a,b]\ |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

فنتحصل على متتاليتين عدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

محدودتين لأن $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n, y_n \in [a,b]$ و $[a,b]$ محدود

وحسب مبرهنة بولزانو فيرشتراس لمحتويات على متتاليتين جزئيتين متقاربتين $(x_{nk})$ و $(y_{nk})$

$y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n}$

من جهة أخرى لدينا : العلاقة (1) تستلزم أن

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$

لنفرض أن $\lim_{k\to\infty} x_{nk} = l \in [a,b]$ ومنه

$0 < |y_{nk} - l| = |y_{nk} - x_{nk} + x_{nk} - l| \leq |y_{nk} - x_{nk}| + |x_{nk} - l|$

$|x_{nk} - y_{nk}| < \frac{1}{n}$

Cours : نظرية :

لتكن $f$ تابع مستمر على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$
عندئذ $f$ تابع محدود على المجال $[a;b]$ ويبلغ حديه
الأعلى والأدنى على المجال $[a;b]$ أي أن :

$$\exists x_1, x_2 \in [a;b]$$

$$f(x_1) = \inf f(x) \qquad f(x_2) = \sup f(x)$$

البرهان :

لنفرض أن $f$ تابع مستمر على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$

1) لنثبت أن $f$ تابع محدود على المجال $[a,b]$

نستعمل البرهان بالخلف ولنفرض أن $f$ غير محدود على $[a,b]$
أي أن :

$$\forall K > 0, \exists x \in [a,b] \quad , |f(x)| > K$$

نأخذ بعده

$$K = 1, \quad \exists x_1 \in [a,b], \ |f(x_1)| > 1$$

$$K = 2, \quad \exists x_2 \in [a;b], \ |f(x_2)| > 2$$

$$K = n, \quad \exists x_n \in [a;b], |f(x_n)| > n \qquad (1)$$

نتحصل على متتالية عددية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من $[a,b]$

بحيث :

$$|f(x_n)| \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

( من العلاقة (1) ونظرية الحصر )

كما أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة لأن $[a,b]$ محدود

فحسب نظرية بولزانو فيرشتراس المتتالية $(x_n)$

تحتوي على متتالية جزئية $(x_{n_k})$ متقاربة نحو حد

$\ell \in [a,b]$

كما أن $f$ تابع مستمر على $[a,b]$ إذن فهو مستمر

عند $\ell$ أي أن $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to+\infty} f(\ell)$

ومنه $f$ تابع محدود على المجال $[a;b]$

2) لنثبت أن $f$ يدرك حديه على المجال $[a;b]$

واضح أن $M=\sup\limits_{[a;b]} f(x)$ و $m=\inf\limits_{[a;b]} f(x)$ موجودين

(لأن $f$ محدود)

لنكتب الخاصية المميزة للحد الأعلى

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists x_\varepsilon \in [a;b);\ M-\varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq M$$

لنأخذ قيم لـ $\varepsilon$ فنجد

$$\varepsilon=1;\ \exists x_1 \in [a;b],\ M-1 < f(x_1) \leq M$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2};\ \exists x_2 \in [a;b]\ M-\frac{1}{2} < f(x_2) \leq M$$

$$\varepsilon=\frac{1}{n},\ \exists x_n \in [a;b]\ M-\frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

وهكذا نتحصل على متتالية عددية $(x_n)$ على المجال $[a;b]$

إذن فهي محدودة فهي تحتوي على متتالية جزئية

$(x_{n_k})$ متقاربة نحو حد $\ell \in [a,b]$ وبما أن $f$

مستمر على المجال $[a;b]$ فإنه

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to+\infty} f(\ell) \in \mathbb{R}$$

من جهة أخرى لدينا

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} M$$

وهذا يعني أن : $f(\ell) = M$

نأخذ $\ell = x_n$ فينتهي البرهان

بنفس الطريقة نبرهن حالة inf .

مثال: $f(x)=x$ على المجال $]1;2[$

نظرية: ليكن $f$ تابع مستمر على المجال $[a;b]$

لو كان $f(a)f(b)<0$ فإنه يوجد عدد $c\in]a;b[$

بحيث: $f(c)=0$

البرهان: ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع مستمر

حيث: $f(a)f(b)<0$

لنفرض أن $f(a)>0$ و $f(b)<0$ ولنعتبر المجموعة

$$E=\{x\in[a,b] \ , \ f(x)<0\}$$

واضح أن $E$ غير خالية لأن $(b\in E)$ ومحدودة

من الأعلى ومنه نضع $\sup E = M$

لنثبت أن $f(M)=0$

- لنفرض أن $f(M)>0$ عندئذ يوجد مجال $]M-\alpha;M+\alpha[$

بحيث $f$ تابع موجب على هذا المجال (من الاستمرار) $\alpha>0$

ولكن $f(M-\frac{\alpha}{2})>0$ و $M>M-\frac{\alpha}{2}$ ومنه

$M-\frac{\alpha}{2}\in E$ أي أن $f(M-\frac{\alpha}{2})<0$

وهذا تناقض

لنفرض أن $f(x)>0$ ومنه $f$ تابع موجب على المجال

$]x-\alpha, x+\alpha[$ $(\alpha>0)$

ولكن $x < x+\frac{\alpha}{2}$ و $f(x+\frac{\alpha}{2})>0$

ومنه $x+\frac{\alpha}{2} \in E$

تناقض

أي أن $f(x)=0$ وهذا ينهي البرهان.

مثال:

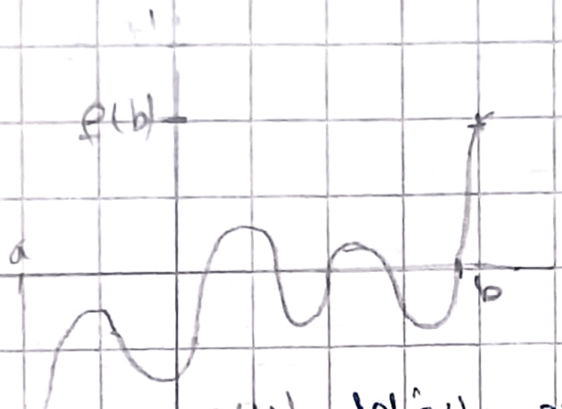
المعادلة $x^5-3x+1=0$ تقبل حلا في المجال $]0,1[$

ملاحظة:

1) عند إضافة شرط الرتابة يصبح الحل وحيدا

Bouthayna

2) تفسير هندسي:




$f(a)$ يقطع محور الفواصل $(C_f)$

$(y=0)$

نظرية القيم المتوسطة:

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابع مستمر على مجال كيفي

$I$ من $\mathbb{R}$ ولتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين

للتابع $f$ بحيث $x_1 < x_2$ عندئذ من أجل كل

عدد حقيقي $K$ محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ ( و قد يساويهما ) ..
يوجد عدد $c$ من $]x_1 ; x_2[$ بحيث $f(c) = K$

البرهان :
لنعتبر التابع

$$g : [x_1 ; x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x) - K$$

و تابع مستمر ( مجموع توابع مستمرة ) على المجال $[x_1 ; x_2]$ و لدينا :

$$g(x_1) g(x_2) = [f(x_1) - K] [f(x_2) - K]$$
$$f(x_1) < K < f(x_2)$$
$$f(x_2) < K < f(x_1)$$

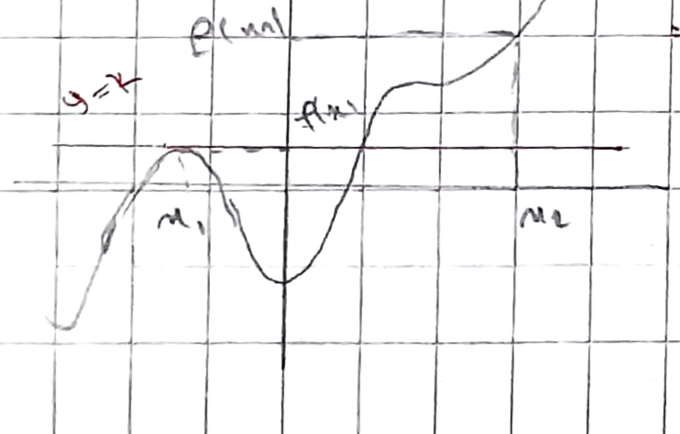
ومنه يوجد $c$ من $]x_1 , x_2[$ بحيث $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = K$

ملاحظات :

1) عند إضافة شرط الرتابة في نظرية القيم المتوسطة يصبح الحل $c$ وحيدا.

2) إذا كان $f : I \to \mathbb{R}$ تابع مستمر على مجال $I$ مجال فإن $f(I)$ مجال من $\mathbb{R}$.

التفسير الهندسي :




$(C_f)$ يقطع المستقيم $y = K$ .

**قاعدة:** أستاذ

$(U_n)$ ليست رتيبة ولكن $(U_{2n})$ و $(U_{2n+1})$ رتيبتان احداهما متزايدة والأخرى متناقصة)

4) نبقى النظريتين السابقتين صحيحتين في حالة تغير الصورة بالمقابل.

**مثال:**

ليكن $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^*$ عدد فردي.

f أثبت أن المعادلة $a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x = b$

تقبل حلا في $\mathbb{R}$

نضع $f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x - b = 0$

f مستمر على $\mathbb{R}$ (كثير حدود)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد

$\exists c \in \mathbb{R}$ بحيث $f(c) = 0$

## Cours - نظرية ( النقطة الصامدة )

ليكن $f:[a,b] \to [a,b]$ تابع مستمر عندئذ توجد نقطة $c \in [a,b]$ تحقق $f(c)=c$ (أي $f$ تابع له نقطة صامدة في المجال $[a,b]$).

**البرهان:** لنعرف التابع $g$ كما يلي:

$$g:[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \to g(x) = f(x) - x.$$

$g$ تابع مستمر على $[a,b]$ كمجموع توابع مستمرة

كما لدينا: $g(a)g(b) = \underbrace{(f(a)-a)}_{\geq 0}\underbrace{(f(b)-b)}_{\leq 0} \leq 0$

$a \leq f(a) \leq b$

$a \leq f(b) \leq b$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد $c \in [a,b]$

بحيث $f(c) = c$ أي $g(c) = 0$ وهو المطلوب.

• قابلية الاشتقاق:

تعريف: ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال

مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$ نقول أن التابع $f$ قابل

للاشتقاق عند النقطة $x_0$ إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة ومنتهية في هذه الحالة هذه النهاية تسمى

المشتق التابع $f$ عند $x_0$ ونرمز لها بـ $f'(x_0)$

ملاحظة:

1) بوضع $x - x_0 = h$ حيث:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2) $f$ قابل للاشتقاق على $I$ إذا وفقط إذا كان $f$

قابل للاشتقاق عند كل نقطة من $I$

مثال: $f(x) = x$ على $\mathbb{R}$.

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \to 0} (1) = 1$$

إذا $f$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$ معرف على $[0, +\infty[$

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ لدينا:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \in \mathbb{R} \quad x_0 \neq 0$$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in ]0, +\infty[$

الاشتقاق على اليمين وعلى اليسار نقطة:

ليكن $f$ تابع معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

نقول أن $f$ تابع قابل للاشتقاق على يمين النقطة $x_0$ إذا كانت

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجودة و منتهية وتسمى المشتق $f$ على يمين النقطة $x_0$ ونرمز لها بـ $f'_d(x_0)$ أو

- $f$ ق ا عند $x_0$ ⟸ $f$ ق ا على يمين وعلى يسار النقطة $x_0$ و $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

**مثال:**

أدرس قابلية الاشتقاق $f(x) = |x|$ عند 0.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x} = 1 ; \quad f'_d(0)$$

$f$ ق ا على يمين 0.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1 ; \quad f'_g(0)$$ $f$ ق ا على يسار 0

ونستنتج غ ق ا عند 0.

مبرهنة:

لتكن $f$ تابع معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

نقول أن $f$ ق ا عند النقطة $x_0$

إذا و فقط إذا كانت

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

بحيث من أجل كل $h$ حيث $x_0+h \in I$

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

البرهان:

$\Leftarrow$ نفرض أن $f$ ق ا عند $x_0$.

نضع

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

لدينا $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ وكذلك لدينا

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\varepsilon(h) + h f'(x_0)$$

وهذا ينهي البرهان.

$\Rightarrow$

نفرض أنه يوجد $\varepsilon(h)$ بحيث $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

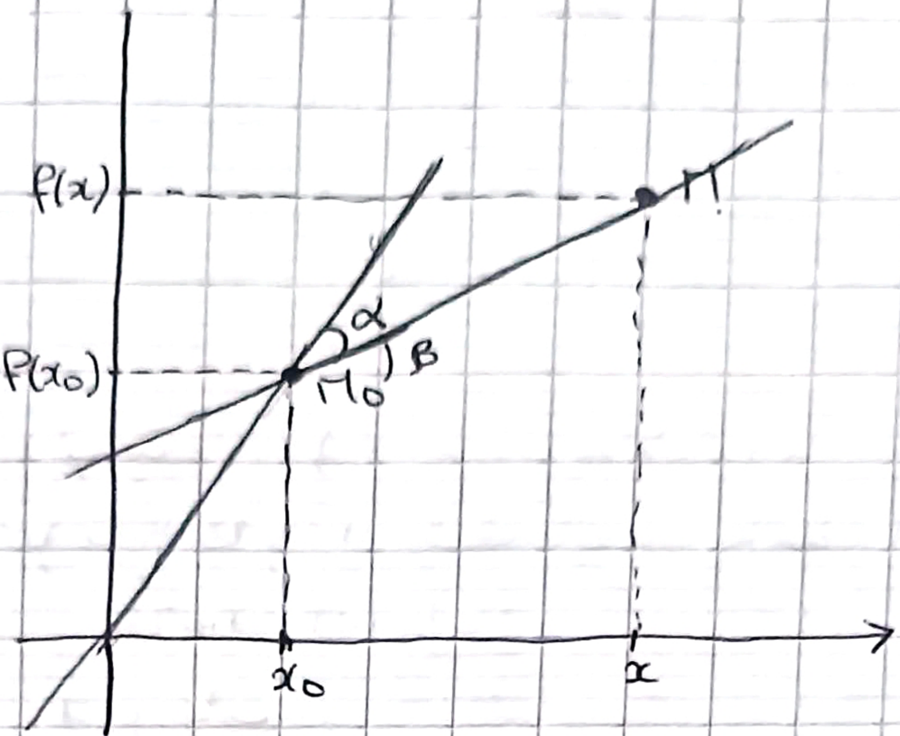
ويحقق $f(x_0+h) = f(x_0) + h\ell + h\varepsilon(h)$

$(\ell \in \mathbb{R})$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell + \varepsilon(h) \xrightarrow{h \to 0} \ell \in \mathbb{R}$$

ومنه $f$ ق ا عند $x_0$ ولدينا $f'(x_0) = \ell$.

التفسير الهندسي:




النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تمثل ميل المستقيم $(MM_0)$ $(\tan\beta)$

أي: $\tan\beta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

لما $x$ يؤول الى $x_0$ يؤول المستقيم $(MM_0)$ الى وضع المماس $(T)$ وتؤول $\beta$ الى الزاوية $\alpha$ أي أن:

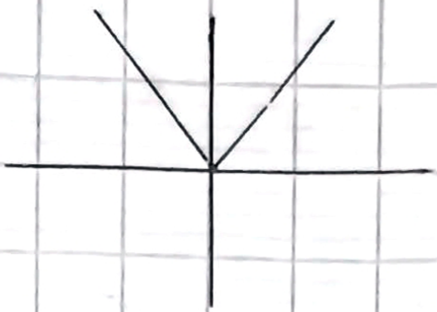
$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tan\alpha$$

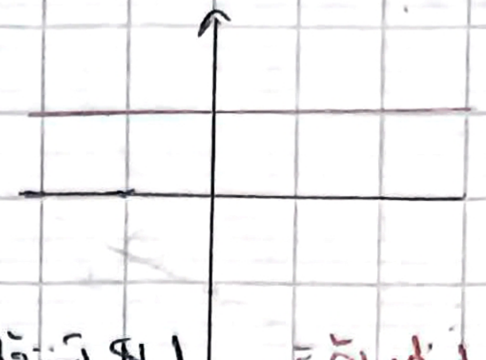
ملاحظة:

1) البحث عن مشتق تابع عند نقطة $x_0$ يعني البحث عن مماس لبيان التابع من النقطة ذات الفاصلة $x_0$

2) يمكن تفسير المشتق من اليمين ومن اليسار بنعرف المماس الأيمن ونعرف المماس الأيسر.

مثال =





$f(x)=2$

نظرية = (الاشتقاق والاستمرار).

كل تابع قابل للاشتقاق عند نقطة ما هو تابع مستمر عند هاته النقطة.

البرهان =

ليكن $f$ تابع معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ وقابل للاشتقاق عند نقطة $x_0 \in I$ أي أن:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$$

حيث $\lim_{h\to \infty} \varepsilon(h)=0$

أي = $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0)$

بحيث $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0)=0$

ومنه $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

ومنه $f$ مستمر عند $x_0$ وهذا ينهي البرهان.

عكس النظرية السابقة غير صحيح

مثال مضاد = $f(x)=|x|$ مستمر عند 0 ولكن غير قابل للاشتقاق عنده.

التابع المشتق (المشتقة على مجال I).

ليكن $f$ تابع حقيقي معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ إذا قبل التابع $f$ الاشتقاق على المجال $I$ فعندئذ نسمي التابع الذي نرمز له بـ $f'$ والمعرف بـ: $f' : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f'(x)$ التابع المشتق للتابع $f$.

أمثلة: $(k \in \mathbb{R})$ ، $f(x) = k$

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (0) = 0$$

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f'(x) = 0$$

$$f' : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R}$$

$$x \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المشتقات ذات الرتب العليا:

ليكن $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ وقابل للاشتقاق على $I$ ومشتقه $f'$، إذا قبل $f'$ مشتقا فإن هذا المشتق الأخير هو المشتق الثاني للتابع $f$ والمشتق من الرتبة الثانية للتابع $f$ ~~...~~

ونرمز له بـ $f''$ (أو $f^{(2)}$)

(هو المشتق الأول للتابع $f'$)

وهكذا نعرف المشتقات المتتابعة أو المشتقات ذات الرتب العليا للتابع $f$ كما نصطلح على أن المشتق من الرتبة 0 هو التابع $f$ نفسه.

cours

## عمليات على التوابع القابلة للاشتقاق:

نظرية: ليكن $f$ و $g$ تابعين معرفين على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ وقابليين للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in I$

عندئذ التوابع:

$f \pm g$ ; $f \times g$ , $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ ; $Kf$ $(K \in \mathbb{R})$

$\frac{1}{g}$ كلها توابع قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0$ كما لدينا:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \times f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$(Kf)'(x_0) = K \cdot f'(x_0)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

البرهان:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{-1}{g(x) \cdot g(x_0)} \times \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \times \frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= f'(x_0) \times \frac{1}{g(x_0)} + \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \times f(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0) f(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

## مشتقة تابع مركب:

**نظرية:** ليكن $f$ تابع معرف على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و ليكن $g$ تابع معرف على مجال $J$ يحوي $f(I)$ $(f I \subseteq J)$
إذا كان $f$ ق.ا عند النقطة $x_0$ و $g$ قابل للاشتقاق عند النقطة $y_0 = f(x_0)$
عندئذ $g\circ f$ ق.ا عند النقطة $x_0$ ولدينا:

$$(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$$

**أمثلة:**

$$f(x) = u(x) \quad ; \quad g(x) = e^x$$

$$e^{u(x)} = (g\circ f)(x)$$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

$u(x)$ تابع موجب ق.ا

$$[\ln u(x)]' = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)}$$

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$\left((u(x))^n\right)' = n\, u'(x)\, [u(x)]^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

## التابع العكسي:

**تعريف:** ليكن $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ تابعا نقول أن التابع $f$ يقبل تابعا عكسيا إذا وجد تابع نرمز له بـ $f^{-1}$ يحقق:

$$f^{-1} : B \to A$$
$$y \to f^{-1}(y) = x$$

حيث $f(x) = y$

أي $(f\circ f^{-1})(x)=x$ ، $(f\circ f^{-1})(y)=y$

ملاحظة: 1) $C_f$ و $C_{f^{-1}}$ متناظران بالنسبة للمنصف الأول.

2) كل تابع $f$ مستمر ورتيب تماما له تابع عكسي $f^{-1}$ ($f^{-1}$ مستمر ورتيب تماما) (له نفس اتجاه تغير $f$)

مثال: $f:[0;+\infty[\to m$

$x\to f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ وأوجد $f^{-1}$ موجود.

لدينا $y=\dfrac{1}{x+1}$

$x=\dfrac{1}{y}-1=\dfrac{1-y}{y}$

$f^{-1}(y)=\dfrac{1-y}{y}$ ; $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{x}$

مشتق تابع عكسي:

نظرية: ليكن $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا مستمرا ورتيبا تماما على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x\in I$

إذا كان $f$ ق. ا عند النقطة $x_0$ وكان $f'(x_0)\neq 0$ عندئذ $f^{-1}$ ق. ا عند النقطة $y_0=f(x_0)$ كما لدينا:

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

البرهان:

ليكن $y_0=f(x_0)$ لدينا:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

لما $y\to y_0$ أي $f(x)\to f(x_0)$ لأن $f$ مستمر $\Leftarrow x\to x_0$

ولأن $f$ ق. ا عند $x_0$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

بما أن $f(x_0) \neq 0$ فإن $f^{-1}$ ق. ا عند $y_0$ .

## نظرية التزايدات المنتهية:

### 1) القيم الحدية:

تعاريف: ليكن $f$ تابعا معرفا على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

① نقول أن للتابع $f$ قيمة عظمى مطلقة عند النقطة $x_0$ من $I$ إذا وفقط إذا تحقق مايلي

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

كما نقول أن $f$ له قيمة صغرى مطلقة عند $x_0$ من $I$ إذا وفقط

$$\forall x \in I; \quad f(x) \geq f(x_0)$$

② نقول أن للتابع $f$ قيمة عظمى محلية أو (نسبية) عند النقطة $x_0$ من $I$ إذا وفقط

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

أي: $\forall x \in ]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[ \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

بنفس الطريقة نعرف قيمة صغرى محلية أو نسبية.

③ نقول أن للتابع $f$ قيمة قصوى عند $x_0$ إذا كان للتابع $f$ قيمة عظمى أو صغرى محلية عند النقطة $x_0$

مثال:

$$f : [-2 ; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = x(2 - 3x)$$

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $12$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(\frac{2}{3})$ | $\searrow$ | $-4$ |

نظرية: ليكن f تابعا معرفا على مجال I من $\mathbb{R}$ و $x_0 \in I$ ، اذا كان للتابع f قيمة قصوى عند $x_0$ وكان $f'(x_0)$ موجود فإن: $f'(x_0)=0$

البرهان: لنفرض أن لـ f قيمة قصوى (عظمى) عند $x_0$ أي أن:

$$\exists\ \alpha > 0,\ \forall x \in ]x_0-\alpha\ ;\ x_0+\alpha[ \qquad f(x) \leq f(x_0)$$

بما أن $f'(x_0)$ موجود أيا أن:

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \underset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0) \leq 0}{x-x_0 \geq 0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \underset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0) \leq 0}{x-x_0 \leq 0} \geq 0.$$

اذا $f'(x_0)=0.$

(نفس البرهان في حالة قيمة محلية صغرى).

أمثلة: $f(x)=x^2$ ، $g(x)=|x|$

نظرية رول = ROLLE

ليكن f تابعا مستمرا على المجال $[a,b]$ وقابلا للاشتقاق على المجال $]a,b[$ ، اذا كان $f(a)=f(b)$ عندئذ توجد نقطة $c \in ]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$

البرهان: واضح أن اذا كان f ثابتا فإن النظرية محققة (c هو أي عدد من $]a,b[$)

2) لنفرض أن f تابع غير ثابت وهو مستمر على $[a,b]$ ($[a,b]$ مغلق ومحدود) اذن فهو يبلغ حديه (حسب نظرية سابقة)

$$\exists\ x_0, x_1 \in [a,b]$$

$$f(x_0) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

$$f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x).$$

بما أن $f$ ثابت فإنه لا يمكن أن يكون $f(x_0)=f(x_1)=f(a)=f(b)$

حالة $f(x_0)\neq f(a)=f(b)$ = أي أن $x_0\in ]a,b[$ ↑ $x_0\neq a$ ; $x_0\neq b$

كما أن $f$ له قيمة قصوى عند $x_0$ و $f'(x_0)$ موجود

(شروط النظرية و $x_0\in ]a,b[$)

$f'(x_0)=0$ حسب نظرية سابقة.

(وهذا ينهي البرهان نأخذ $x_0=c$)

حالة $f(x_1)\neq f(a)=f(b)$ بنفس الطريقة السابقة.

تفسير هندسي :

TD- حل التمرين 04 :

1) نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R} : h(x)=h\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ...(*)

- لتكن $P(n)$ الخاصية التي تحقق (*) من أجل $n=1$ لدينا :

$\forall x\in\mathbb{R} : h(x)=h\left(\frac{x}{2}\right)$ (معطاة)

ومنه $P(1)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ونبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ أي نبين أن: $h(x)=h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

لدينا: $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^* : h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=h\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^n}\right)$

$=h\left(\frac{x}{2}\right)$ (من فرضية التراجع)

$=h(x)$ (من المعطيات)

2) نبين أن $h$ ثابت:

$\exists c\in\mathbb{R} : \forall x\in\mathbb{R} ; h(x)=c$ ?

cours = ملاحظة =

1) $g(x)=x^3$ على $[-1;1]$ مستمر وقابل للاشتقاق على $]-1;1[$

ولكن $g(-1)\neq g(1)$ ولكن $g'(0)=0$

2) $f(x)=|x|$ على $[-2;2]$

نظرية التزايدات المنتهية = T.A.F

ليكن $f$ تابعا معرفا ومستمرا على المجال $[a,b]$ وقابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$ عندئذ توجد نقطة $c\in]a,b[$ تحقق =

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

البرهان = لنعرف التابع $g$ كالتالي =

$$g:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x\to g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

$g$ تابع مستمر على $[a,b]$ وقابل للاشتقاق على $]a,b[$

لأنه مجموع وجداء توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق لدينا:

$g(a)=0$ و $g(b)=0$

ومنه بتطبيق رول نجد أن

$$\exists c\in]a,b[\quad g'(c)=0$$

أي $g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

وهذا ينهي البرهان.

ملاحظة =

$f'>0 \Leftarrow f$ متزايد.

$f'<0 \Leftarrow f$ متناقص.

$f'=0 \Leftarrow f$ ثابت.

## نظرية التزايدات المنتهية المعممة:

ليكن $f$ و $g$ تابعين مستمرين على المجال $[a,b]$ وقابلين للاشتقاق على المجال $]a,b[$ بحيث $\underbrace{\forall x\in ]a,b[,\ g'(x)\neq 0}_{①}$ عندئذ توجد نقطة $c\in ]a,b[$ تحقق:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**البرهان:**

لو نفرض أن $g(a)=g(b)$ فإنه حسب رول:

$$\exists\ c\in ]a,b[\ ;\quad g'(c)=0$$

وهذا تناقض مع الشرط ① . إذن $g(a)\neq g(b)$

الآن لنعرف التابع $h$ كما يلي:

$$h:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x\longmapsto h(x)=f(x)-f(a)-[g(x)-g(b)]\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

واضح أن $h$ مستمر وق.ا على $]a,b[$ كمجموع وجداء توابع مستمرة وق.ا

$h(a)=0$ و $h(b)=0$

وحسب رول . $\exists\ c\in ]a,b[\ ;\ h'(c)=0$

أي

$$f'(c)=g'(c)\,\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

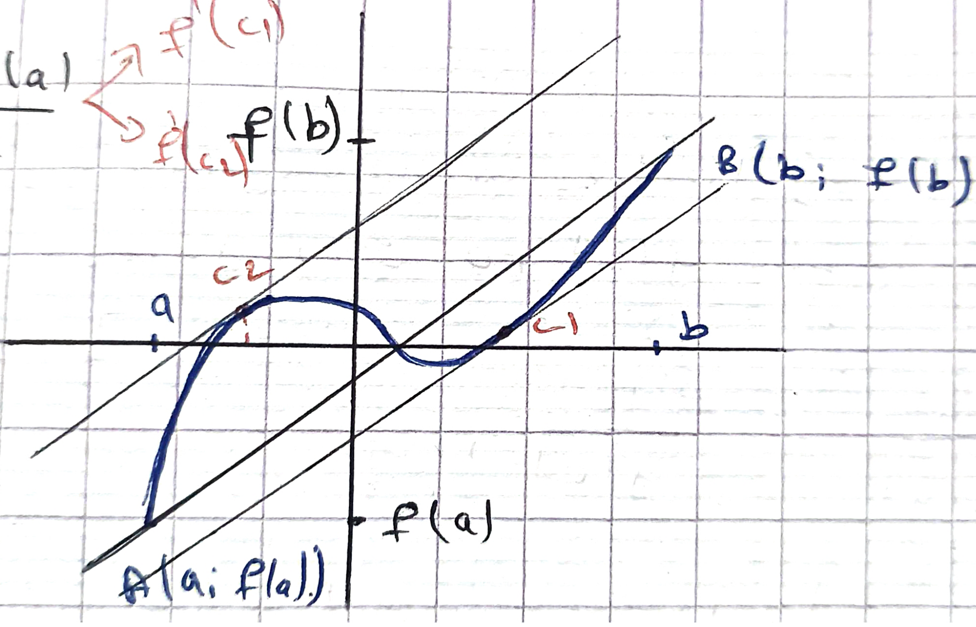
وهذا ينهي البرهان.

**ملاحظات:**

1) لو نضع $g(x)=x$ في T.A.F المعممة $\Leftarrow$ T.A.F بوضع $f(a)=f(b)$ في T.A.F $\Leftarrow$ رول.

2) تفسير الهندسي لـ T.A.F

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \begin{cases} \nearrow f'(c_1) \\ \searrow f'(c_2) \end{cases}$$



Cours

## مبرهنة لوبيتال:

إذا كان f تابع قابل للاشتقاق من الرتبة (n) و $(f(x))^n \neq 0$

في جوار $x_0$ و g كذلك

وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots \lim \frac{f(x)^n}{g(x)^n}$$

مثال:

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{2x}{1} = -2$$

## التوابع المعتادة في التحليل:

التابع اللوغاريتمي: لنعرف التابع

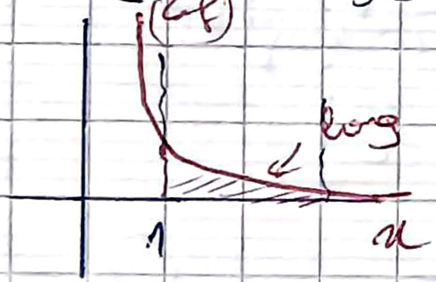
$x \to f(x) = \frac{1}{x}$

$f : ]0;+\infty[ \to \mathbb{R}$

تابع مستمر على المجال $]0;+\infty[$ إذن فهو يقبل تابعا أصليا f

نرمز له ب log وتسمى بالتابع اللوغاريتمي الطبيعي (النيبيري)

وهو معرف كما يلي:




$$\begin{cases}(\log x)' = \frac{1}{x} \\ \log 1 = 0\end{cases} \Rightarrow \log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$x \in ]0;+\infty[$

خواص التابع اللوغاريتمي: $h : ]0;+\infty[ \to$ log : $]0;+\infty[$ تابع مستمر

وقابل للاشتقاق مالانهاية المرات على $]0;+\infty[$ وهو متزايد

كذلك من أجل كل x و y من $]0;+\infty[$

$$\begin{cases}\log xy = \log x + \log y \\ \log\frac{x}{y} = \log x - \log y \ ; \ \log\frac{1}{x} = -\log x \ ; \ \forall r\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

$$\log x^r = r\log x$$

$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt \; ; x \in ]0,1]$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\log'(x)$ | | $+$ | |
| $\log x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

ملاحظة: من أجل $a \in \mathbb{R}_*^+ / \{1\}$ نعرف التابع اللوغارتمي ذو الأساس $a$ ونرمز له $\log a$

$\log_a : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$

تمرين: أدرس تغير $x \to \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

التابع الأسي: التابع $\log \; ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ مستمر ومتزايد تماما إذن فهو يقبل تابعا عكسيا نرمز له بـ "exp" ويسمى التابع الأسي ونعرف كما يلي: (ملاحظة: $\exp : e^x$)

$\exp = \log^{-1} ]0,+\infty[ \; ; \; y = e^x \Leftrightarrow \log y = x \; , \; e^0 = 1 \; , \; x \in \mathbb{R} \; , \; y \in ]0,+\infty[$

وهو تابع موجب تماما ومستمر على $\mathbb{R}$.

مشتقة التابع الأسي: $\log$ هو تابع ق ا عند كل نقطة من $]0,+\infty[$ ولدينا: $(\log)'(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \; ; \forall x \in ]0,+\infty[$ ومنه exp ق ا على $\mathbb{R}$ ولدينا: $y = e^x$

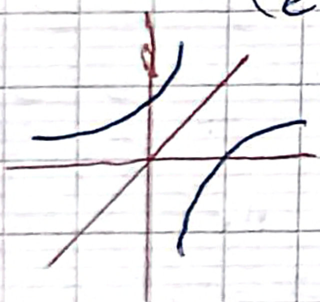
$$(e^x)' = \frac{1}{(\log)' y} = \frac{1}{1/y} = y = e^x$$

خواص التابع الأسي:

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad e^{x+y} = e^x . e^y$

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$(e^x)^n = e^{nx}$



| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(e^x)'$ | | $+$ | |
| $e^x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

توابع القوى: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $a$ نعرف تابع قوى $a$ كما يلي: $f : \mathbb{R} \to ]0,+\infty[ \; ; \; x \to f(x) = a^x = e^{x \log a}$

وهو عبارة عن تابع مستمر و ق ا (كتركيب وجداء لتوابع مستمرة و ق ا) على مجال تعريفه ولدينا:

$f'(x) = a^x = (\log a)\, e^{x \log a} = \ln a \; e^{x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$a > 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

$0 < a < 1$

خواص توابع القوى - مثال لكل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b لدينا

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad (a^x)^y = a^{xy}$

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad (ab)^x = a^x b^x \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \; ; \; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ; $a^x a^y = a^{x+y}$

البرهان: $(ab)^x = e^{x \log ab} = e^{x \log a + x \log b} = e^{x \log a} e^{x \log b} = a^x b^x$

ملاحظة: تابع قوى العدد a $(a \neq 1)$ هو التابع العكسي للتابع اللوغاريتمي ذو الأساس a.

التوابع المثلثية وتوابعها العكسية:

① تابع الجيب $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ هو تابع مستمر وقابل للاشتقاق ودوري دوره $2\pi$ وهو تابع فردي

مقصور تابع الجيب $\sin : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

مستمر ومتزايد تماما (متزايد تماما) إذن فهو يقبل تابعا عكسيا يسمى بقوس الجيب ونرمز له بـ: Arc sin ($\sin^{-1}$)

وهو معرف بـ $\mathrm{Arc\,sin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\mathrm{Arc\,sin}(x) = y \Leftrightarrow \sin(y) = x \quad -1 \leq x \leq 1 \; , \; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{Arc\,sin}(x)$ هو تابع مستمر ومتزايد تماما لدينا وهو كذلك تابع فردي

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin^{-1}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ |

لدينا $\mathrm{Arc\,sin}(x) = y \Leftrightarrow -y = -\mathrm{Arc\,sin}(x)$

$\sin(-y) = \sin(-\mathrm{Arc\,sin}(x))$ ; $\sin(-y) = -\sin \mathrm{Arc\,sin}\, x = -x$ وf

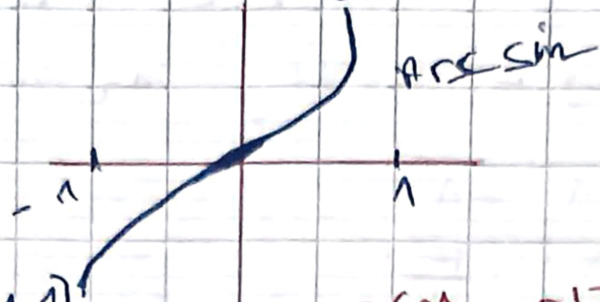
ومنه $\mathrm{Arc\,sin}(\sin(-y)) = \mathrm{Arc\,sin}(-x) \Rightarrow -y = -\mathrm{Arc\,sin}(x)$

إذن فهو تابع فردي

مشتق $\text{Arc}\sin$ = واضح أن $\sin$ تابع ق.ا على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
ولدينا $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\forall x \in$, $\sin'(x) = \cos x \neq 0$

عندئذ ~~sin~~ $\text{arc}\sin$ قابل للاشتقاق $]-1,1[$ كما لدينا

$$(\text{Arc}\sin)'(x) = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \Rightarrow (\text{Arc}\sin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$




تابع جيب التمام $=\cos$ $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$ هو تابع مستمر وقابل على $\mathbb{R}$ وهو زوجي ودوري ودورة $2\pi$ نضع الاقتصار $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$ تابع مستمر ورتيب تماما (متناقص تماما) فهو يقبل تابعا عكسيا نسميه قوس جيب التمام ونرمز له بالرمز $\text{Arc}\cos$ ($\cos^{-1}$) ولدينا:

$\text{Arc}\cos: [-1,1] \to [0,\pi]$, $\text{Arc}\cos(x) = y \Leftrightarrow \cos y = x \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$

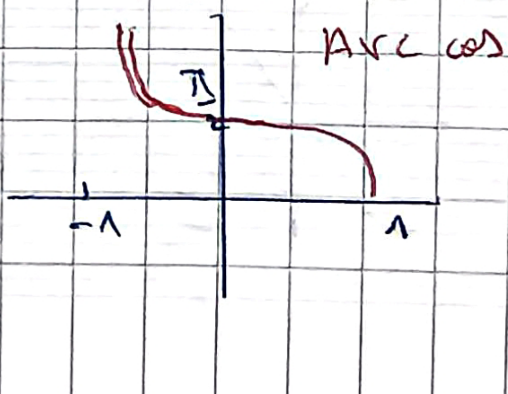
تابع مستمر ومتناقص تماما.

مشتق $\text{Arc}\cos$ = لدينا $\cos$ تابع ق.ا على $[0,\pi]$ ولدينا
$(\cos x)' = -\sin x \neq 0 \quad \forall x \in ]0;\pi[$

ومنه $\text{Arc}\cos$ ق.ا على المجال $[-1,1] \setminus \{\cos 0; \cos\pi\}$ ولدينا

$$\text{Arc}\cos'(x) = \frac{1}{\cos' y} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\text{Arc}\cos$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ |



## تابع الظل | tan:

$\tan ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ تابع مستمر ومتزايد تماما

$x \to \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

لذا فهو يقبل تابع عكسي يرمز له ب $Arc\tan$ وهي تابع قوس الظل

ولدينا $Arc\tan\ \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$Arc\tan x = y \Leftrightarrow \tan y = x,\ x \in \mathbb{R} ;\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

حساب بعض القيم:

| $x$ | $0$ | $1$ | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\arctan x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{4}$ |

مشتقة $Arc\tan$ : لدينا $\tan$ قا ع المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

ولدينا $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

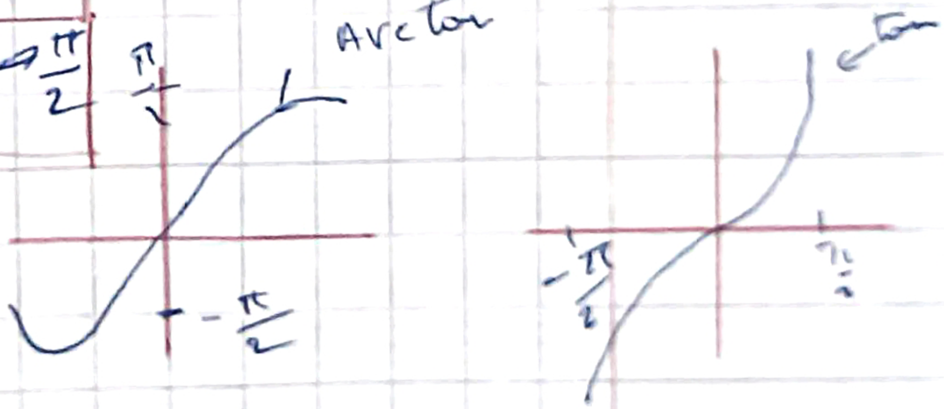
ومنه $Arc\tan$ قا ع $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

لأن $\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 y} + 1$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $Arc\tan'$ | | $+$ | |
| $Arc\tan$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |



ملاحظة ① يمكن تعريف tan على مجالات من الشكل

$](2n-1)\frac{\pi}{2};(2n+1)\frac{\pi}{2}[$ حيث $n\in\mathbb{Z}$

② التابع $]0,\pi[\to\mathbb{R}$ : cotan ولدينا $(\text{Arc cotg})'(x)=\dfrac{-1}{1-x^2}$

التوابع المثلثية الزائدية:

لنعرف التوابع التالية: $sh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

تابع الجيب الزائدي

تابع جيب التمام الزائدي $ch:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$

$x\to ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$th(x)=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

تابع الظل الزائدي

يمكن ملاحظة أن sh تابع فردي و ch زوجي و th فردي

خواص: من أجل كل $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$ لدينا

① $ch^2x-sh^2x=1$

② $sh(x\pm y)=sh\,x\,ch\,y\pm sh\,y\,.ch\,x$.

③ $ch(x\mp y)=ch\,x\,ch\,y\mp sh\,x\,sh\,y$.

④ $th(x\mp y)=\dfrac{th\,x\pm th\,y}{1\mp th\,x\,th\,y}$

⑤ $e^x=sh\,x+ch\,x$.

التوابع العكسية للتوابع الزائدية

التابع العكسي لـ sh = $sh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمر $sh'(x)=ch(x)>0$

ومتزايد تماما إذن فهو يقبل تابعا عكسيا نرمز له:

$\arg sh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ونسميه عمدة الجيب الزائدي

$\arg sh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ; $\arg sh(x)=y \iff sh\,y=x$

التابع العكسي لـ $ch$ :

$$ch'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}} = \frac{(e^{x}+1)(e^{x}-1)}{2e^{x}}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(ch)'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $ch$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ |

لنفرض التابع $(ch)$ كما يلي $ch : [0;+\infty[ \to [1;+\infty[$ مستمر ومتزايد تماما إذن فهو يقبل تابعا عكسيا نرمز له بـ $\arg ch$ ويسمى تابع جيب التمام الزائدي ولدينا:

$x \in ]1;+\infty[\ ;\ y \in [0;+\infty[$

$$\arg ch : [1;+\infty[ \to [0;+\infty[$$

$$e^{y} = sh\,y + ch\,y = \sqrt{ch^2 y - 1} + ch\,y \quad / \quad \arg ch(x) = y \iff ch\,y = x$$

إذن:

$$y = \log\left(ch\,y + \sqrt{ch^2 y - 1}\right)$$

$$\arg ch\,x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\arg ch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

التابع العكسي لـ $th$ :

$$th : \mathbb{R} \to ]-1;1[$$

$$x \to th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

$$th'(x) = \frac{sh'(x)\,ch(x) - ch'(x)\,sh(x)}{ch^2 x}$$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $th'$ | $+$ | |
| $th$ | $-1$ $\nearrow$ | $+1$ |

$th$ مستمر ومتزايد تماما إذن فهو يقبل تابعا عكسيا ونرمز له بـ $\arg th$ ويسمى بعبارة الظل الزائدي ولدينا $\arg th(x) = y \iff th\,y = x$

$-1 < x < 1 \quad y \in \mathbb{R}$

لدينا

$$\arg th\,x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$(\arg th)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

**نظرية: (قاعدة لوبيتال):** ليكن التابعان $f$ و $g$ المعرفان على $]a,b[$ و $f,g$ ويحققان الشروط التالية:

① $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ ② $f$ و $g$ ق.ا على المجال $]a,b[$

③ $\forall x\in ]a,b[\ ;\ g'(x)\neq 0$ ④ النهاية $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة.

عندئذ: $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

**البرهان:** نمدد بالاستمرار التابعين $f$ و $g$ عند $a$ فنجد:

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x), & x\in ]a,b[ \\ 0 & x=a \end{cases} \quad \text{و} \quad \tilde g(x) = \begin{cases} g(x); & x\in ]a,b[ \\ 0 & x=a \end{cases}$$

من أجل كل $x\in [a,b[$ التابعان $\tilde f$ و $\tilde g$ يحققان شروط نظرية T.A.F المعممة على المجال $[a,x]$ اذن يوجد عدد $c\in ]a,x[$ يحقق:

$$\frac{\tilde f(x)-\tilde f(a)}{\tilde g(x)-\tilde g(a)} = \frac{\tilde f'(c)}{\tilde g'(c)} \quad \text{أي} \quad \frac{\tilde f(x)}{\tilde g(x)} = \frac{\tilde f'(c)}{\tilde g'(c)}$$

بحيث: $a<c<x$ اذن لما $x\to a$ فإن $c\to a$ أي أن:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**ملاحظات**

① بطريقة مماثلة ندرس حالة $x\to b^-$ أو $x\to x_0$

② العكسية خاطئة، مثال مضاد: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$

ولكن غير موجودة $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim (1+\cos x)$

③ يمكن رد الحالات $\infty\times 0$ و $\frac{\infty}{\infty}$ الى الحالة $\frac{0}{0}$

أمثلة: أحسب: $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{2x^2} = \frac{0}{0}$ ح.ع.ت لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{4x} = \frac{0}{0}$ ح.ع.ت

نطبق لوبيتال مرة ثانية $\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{4} = -\frac{1}{4}$ فنجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$

**التوابع من الصنف $C^n$:** ليكن $n$ عددا طبيعيا غير معدوم نقول عن التابع $f$ المعرف على المجال $I$ من $\mathbb{R}$ أنه من الصنف $C^n$ و أنه ق.ا باستمرار $n$ مرة إذا كان $f$ ق.ا $n$ مرة وكان المشتق $f^{(n)}$ مستمرا على المجال $I$ ونكتب $f \in C^n(I)$ أما فقط ذلك $f \in C^0(I)$ أو $f \in C(I)$ إذا كان $f$ مستمرا على $I$ و $f \in C^\infty(I)$ إذا كان $f$ ق.ا ما لا نهاية من المرات على $I$.

**مثال:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

هل $f \in C^1(\mathbb{R})$ ؟

① واضح أن $f$ مستمر على $\mathbb{R}^*$ (كجداء وتركيب توابع مستمرة على $\mathbb{R}^*$)

لـ الاستمرار عنده: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

ومنه $f$ مستمر عند $0$ ومنه $f$ مستمر على $\mathbb{R}$.

② $f$ ق.ا على $\mathbb{R}^*$

ق.ا عند $0$: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f'(0) = 0$

$\Leftarrow$ $f$ ق.ا عند $0$ ومنه $f$ ق.ا على $\mathbb{R}$.

نظرية (دستور تايلور بباقي لاغرانج). ليكن $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$
بحيث $f \in C^n([a,b])$ و $f^{(n)}$ قابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$
وليكن $x_0 \in [a,b]$ عندئذ من أجل كل $x \in [a,b]$ لدينا:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$
$$+ \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}_{\text{باقي لاغرانج}}$$

و $c$ محصور بين $x$ و $x_0$

البرهان: نضع في دستور تايلور $g(t) = (t-x)^{n+1}$

$$g'(t) = (n+1)(t-x)^n.$$

نظرية (دستور تايلور - كوشي):
ليكن $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ بحيث $f \in C^n([a,b])$ و $f^{(n)}$
قابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وليكن $x_0 \in [a,b]$ عندئذ
من أجل كل $x \in [a,b]$ لدينا

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$$ باقي كوشي

مع $0 < \theta < 1$

البرهان: نضع في دستور تايلور $g(t) = t - x$

$$g'(t) = 1$$

نظرية: ليكن $f \in C^{n+1}(I)$ بحيث $I$ مجال من $\mathbb{R}$
وليكن $x_0 \in I$ عندئذ من أجل كل $x$ و $x \in I$ ($x \neq x_0$)
لدينا:

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x_0 - x)$$

الباقي يكتب على شكل لاغرانج او كوشي

$(ch)' = sh$

$(sh)' = ch$

ملاحظة: بوضع $x_0 = 0$ في دستور تايلور، الغرانج نحصل على دستور ماك لوران من الرتبة $(n+1)$ بباقي لاغرانج ولدينا

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + x^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$$

مقارنة التوابع بجوار نقطة:

تعاريف:

ليكن $f$ و $g$ تابعين معرفين عند جوار نقطة $x_0$ (باستثناء محتمل لـ $x_0$).

1) نقول أن $g$ تابع مسيطر على $f$ لما $x \to x_0$ (أو عند $x_0$) ونكتب $f = O(g)$ لما $x \to x_0$ إذا كان يوجد عدد ثابت $M$ يحقق $|f(x)| \leq M|g(x)|$ (عند $x_0$)

أو نقول أن: $\left|\frac{f}{g}\right|$ تابع محدود في جوار $x_0$.

2) نقول أن $f$ تابع مهمل أو (قابل للإهمال) أمام التابع $g$ لما $x \to x_0$ (عند $x_0$) ونكتب $f = o(g)$ إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.$$

يسمى $o$ و $O$ برموز لانداو.

مثال:

$x^2 \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$ ؛ $x \sin x \underset{x\to\infty}{=} O(x^2)$

نظرية: ليكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعا قابلا للاشتقاق $(n+1)$ مرة على المجال $]a,b[$ عندئذ يوجد $c \in ]a,b[$ حيث:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

حل التمرين:

1) بما أن الدالة $x \to ch(x)$ من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$ فهي من الصنف $C^5(\mathbb{R})$ إذن من الصنف $C^5([0,a])$

وبالتالي دستور تايلور لاغرانج لـ $ch$ على $[0,a]$ هو:

$$ch(a) = ch(0) + \frac{a\, ch'(0)}{1!} + \frac{a^2}{2!} ch^{(2)}(0) + \frac{a^3}{3!} ch^{(3)}(0) + \frac{a^4}{4!} ch^{(4)}(0) + \frac{a^5}{5!} ch^{(5)}(c)$$

حيث $c \in ]0,a[$

بما أن: $\forall x \in ]0,a[ : \begin{cases} ch'(x) = sh(x) \\ sh'(x) = ch(x) \end{cases}$ مع $\begin{cases} sh(0) = 0 \\ ch(0) = 1 \end{cases}$

فإن: $ch(a) = 1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} sh(c)$ (1)

2) من العلاقة (1) نجد:

$$\frac{a^5}{5!} sh(c) = ch(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}$$

$0 < c < a \Rightarrow sh(0) < sh(c) < sh(a)$ لأن $sh$ متزايدة على $[0,a]$

$$\Rightarrow 0 \leq sh(c) \leq sh(a).$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{a^5}{5!} sh(c) \leq \frac{a^5}{5!} sh(a).$$

$$\Rightarrow 0 \leq ch(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!} sh(a).$$

3) من المتراجحة ② نجد:

$$1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} \leq ch(a) \leq 1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} sh(a)$$

نأخذ: $a = \frac{1}{2}$ نجد:

$$1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} sh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{384} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{384} + \frac{1}{2^5 \times 5!} sh\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{433}{384} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840} sh\left(\frac{1}{2}\right).$$

بما أن: $sh\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}5 < 1 \Rightarrow \frac{1}{3840} sh\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{3840}$

وعليه: $\frac{433}{384} \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}.$

و.هـ.م.

خواص:

1) $f=o(g) \Leftarrow f=O(g)$ (العكس ليس صحيح)

2) $f=O(g)$ و $h=O(g) \Leftarrow f+h=O(g)$

3) $f=o(g)$ و $h=o(g) \Leftarrow f+h=o(g)$

4) $f=o(g)$ و $h=O(g) \Leftarrow f+h=O(g)$

5) $f=o(g)$ و $h=O(f) \Leftarrow h=o(g)$

6) $f=O(g)$ و $h=o(f) \Leftarrow h=o(g)$

**تكافؤ تابعين عند نقطة:**

تعريف: نقول أن $f$ تكافئ $g$ لما $x \to x_0$ (أو عند $x_0$)

ونكتب $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$ إذا كان: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

مثال: $e^x \underset{x\to 0}{\sim} x+1$ ، $\lim \frac{e^x}{x+1} = 1$

ملاحظة: $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f-g = o(f) \Leftrightarrow f-g = o(g)$ ، $x \to x_0$

• دستور تايلور - يونغ:

نظرية: ليكن $f$ تابع معرف على مجال $[a,b]$ بحيث $x_0 \in [a,b]$

لنفرض أن $f^{(n)}(x_0)$ موجود (ونهائي) عندئذ من أجل كل

$x \in [a,b]$ لدينا:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o(x-x_0)^n$$

بحيث: $R_n(x_0,x) = o(x-x_0)^n$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x_0,x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

ملاحظة: يمكن كتابة دستور تايلور يونغ كما يلي:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

بحيث

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x_0,x)}{(x-x_0)^n} , & x \neq x_0 \\ 0 , & x = x_0 \end{cases}$$

مع ملاحظة أن $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

## تطبيقات:

**نظرية:** ليكن f تابعا من الصنف $C^n$ بجوار النقطة $x_0$ بحيث:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

و $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

يقبل f قيمة قصوى عند النقطة $x_0$ إذا وفقط إذا كان n عددا زوجيا، إضافة إلى ذلك:

إذا كان $f^{(n)}(x_0) > 0$ فإن القيمة القصوى هي صغرى.

$f^{(n)}(x_0) < 0$ " " " " كبرى.

**مثال:** هل $f(x) = x^3$ تقبل قيمة قصوى عند $x_0 = 0$

$f'(x) = 3x^2$ , $f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x$ , $f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = 6$ , $f^{(3)}(0) = 6 \neq 0$

$n = 3$ ومنه f لا يقبل قيمة قصوى عند $x_0 = 0$

## النشر المحدود:

1) النشر المحدود من الرتبة n عند النقطة $x_0$

**تعريف:** ليكن f تابعا معرفا بجوار 0 (باستثناء محتمل لـ 0)

نقول أن التابع f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0 إذا وجد مجال مفتوح I يحوي 0 بحيث من أجل كل $x \in I$ لدينا:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

بحيث ε تابع معرف على I ويحقق $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

و $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

**مثال:**

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x \\ \underline{1-x} & 1+x+x^2+x^3 \\ x & \\ \underline{x-x^2} & \\ x^2 & \\ \underline{x^2-x^3} & \\ x^3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x}{1-x}$$

ملاحظات: وجود النشر المحدود لـ $f$ بجوار 0 يستلزم $\lim_{x\to 0} f(x)=a_0\in\mathbb{R}$ إذن حتى يكون النشر المحدود لـ $f$ بجواره موجود من اللازم أن يكون $\lim_{x\to 0} f(x)\in\mathbb{R}$ ولكن إذا كان $f(0)=a_0$ فإن

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x)$$

$x\to 0$

ومنه $f$ ق ا عند 0.

**نظرية (وحدانية $a_n\in\mathbb{R}$)**

إذا قبل $f$ نشرا محدودا من الرتبة $n$ بجوار 0 فإن هذا النشر وحيد

**البرهان:** لنفرض أن لـ $f$ نشرين محدودين من الرتبة $n$ بجوار 0

أي أنه: $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)$

مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$f(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)$

مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

ومنه من أجل كل $x\in I\{0\}$

$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\dots+(a_n-b_n)x^n=x^n\{\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)\}$ ①

لما $x\to 0$ نجد $a_0-b_0=0$ و

$a_0=b_0$

بقسمة الطرفين ① على $x$ نجد:

$a_1-b_1+(a_2-b_2)x+\dots+(a_n-b_n)x^{n-1}=x^{n-1}\{\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)\}$

لما $x\to 0$ $a_1-b_1=0\Rightarrow a_1=b_1$

نكرر العملية فنجد أن: $a_k=b_k$ $0\leq k\leq n$

فتصبح المعادلة ①

$x^n\{\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)\}=0$ $x\in I\{0\}$

يعني $\varepsilon_2(x)=\varepsilon_1(x)$.

ومنه النشر المحدود وحيد

نظرية: اذا كان $f^{(n)}(0)$ موجود فإن $f$ يقبل نشرا محدودا بحيث

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

وحيث $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

البرهان: تطبيق مباشر لدستور تايلور يونغ

مثال: رأينا سابقا أن $DL(0,n)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

كما لدينا $\frac{1}{1-x} = f(x) = C^n(\mathbb{R}\setminus\{1\})$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

بما أن النشر المحدود وحيد فإن:

$f(0) = 1 , \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1 \quad \forall\ 1 \le k \le n.$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \quad \forall\ 1 \le k \le n.$

نتيجة: اذا قبل تابع زوجي (فرديا على التوالي) نشرا محدودا بجوار 0 فإن جزءه العادي (كثير حدود) كثير حدود زوجي (فردي على الترتيب).

البرهان: ليكن $f$ تابعا فرديا ويقبل $DL$ بجواره

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

لدينا

$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots (-1)^n a_n x^n + x^n\varepsilon(-x)$$

لدينا: $f(-x) = -f(x)$ إذن:

$-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n - x^n\varepsilon(x)$

$= a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n a_nx^n + (-1)x^n\varepsilon(x-$

بالمطابقة نجد:

$-a_0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$-a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

$\vdots$

$-a_{2k} = a_{2k} \Rightarrow a_{2k} = 0$

كل معاملات الرتبة الزوجية معدومة ومنه يحتوي على الحدود فردية.

أمثلة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) & , x \neq \end{cases}$$

في جوار 0 لدينا:

$f(x) = x^n\left(x\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\right)$

بحيث: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = 0$ ومنه $f$ يقبل نشرا محدودا من الرتبة $n$ بجوار 0

وليست $f$ غير مستمرة عنده.

$$g(x) \begin{cases} 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

بحيث:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

g غير ق.ا عند كل نقطة من $\mathbb{R}$ ولتكن h ‏$D(0,2)$

g ذات $g(x) = 1+x+x^2\varepsilon(x)$ بجوار 0.

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

نظرية: لتكن $f \in C^{n+1}(I)$ حيث $I$ مجال مغلق أو مفتوح $n \geq 0$
أو نصف مفتوح ولتكن $x_0 \in I$ عندئذ

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0)$$

$$+ \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)} x_0 + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a+\theta h)$$

$$f(a-h) = f(a) - h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a-\theta h)$$

إذن

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{h^2} = \frac{h^2 f''(a) + \frac{h^3}{3!}\left[f^{(3)}(a+\theta h) - f^{(3)}(a-\theta h)\right]}{h^2}$$

$$= f''(a) + \frac{h}{3!}\left[f^{(3)}(a+\theta h) - f^{(3)}(a-\theta h)\right]$$

بما أن $f^{(3)}$ محدودة في $I$ فإن: $\lim_{h\to 0} \frac{h}{3!}\left[f^{(3)}(a+\theta h) - f^{(3)}(a-\theta h)\right] = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left[f''(a) + \frac{h}{3!}\left[f^{(3)}(a+\theta h) - f^{(3)}(a-\theta h\right.\right.$$

$$= f''(a) + \lim_{h\to 0} \left(f^{(3)}(a+\theta h) - f^{(3)}(a-\theta\right.$$

$$= f''(a).$$

$k=0 \quad (n-k)!$

cours درس / مبرهنة :

إذا قبل التابع f نشرا محدودا من الرتبة n بجواره فإنه يقبل نشرا محدودا من f بقية لرتبة $n \geq m$ بجواره .

**البرهان** : لنفرض أن :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

بحيث $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

لتكن $n \geq m$ $(m \in \mathbb{N})$ فإن :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + a^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + x^m \left[ a_{m+1} x + \dots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x) \right]$$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + x^m \varepsilon_1(x)$$

واضح أن $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ وهذا ينهي البرهان .

**مثال** :

$f(x) = e^x$ و $C^n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$

نستعمل دستور ماك لوران :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)} x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad \Leftarrow \quad f^{(k)}(x) = e^x$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

عمليات حول النشور المحدودة =

نظرية = ليكن f و g تابعين يقبلان نشرا محدودا حتى الرتبة n بجوار 0

عندئذ التوابع $f \pm g$ ، $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ ($\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$)

تقبل نشرا محدودا حتى الرتبة n بجواره

1) الجزء العادي لنشر $f \pm g$ هو مجموع الجزئين العاديين لـ f و g.

2) الجزء العادي لنشر $f \times g$ نحصل عليه بالاحتفاظ فقط بالرتب الأقل أو تساوي n في جداء الجزئين العاديين لنشر f و g.

3) الجزء العادي لنشر $\frac{f}{g}$ هو كثير الحدود من الرتبة n في القسمة وفق القوى المتزايدة للجزء العادي لـ f على الجزء العادي لـ g.

مثال: $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

نظرية (حالة تركيب التوابع) = ليكن f و g تابعين يقبلان نشرا محدودا حتى الرتبة n بجوار 0 بحيث $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ ، عندئذ التابع $u(x) = (f \circ g)(x)$ يقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجواره.

البرهان: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

$g(x) = b_0 + b_1 x$.

$u(x) = f(g(x)) = a_0 + a_1 [g(b)] + a_2 [a_2 b]^2$