الفصل الثالث

1.3 – التوابع الحقيقية بمتغير حقيقي:

1.1.3 – تعريف:

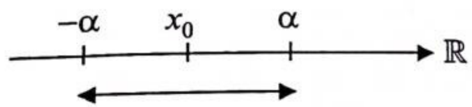
التابع الحقيقي بمتغير حقيقي هو كل تطبيق f معرّف على $\mathbb{R}$ ويأخذ قيمة في $\mathbb{R}$ (أو معرف على جزء من $\mathbb{R}$ ويأخذ قيمه في جزء من $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow B \subseteq \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

مع $x \in \mathbb{R}$ و $f(x) \in \mathbb{R}$.

2.1.3 – التابع المعرف على جوار نقطة x_0 $(x_0 \in \mathbb{R})$:

نسمي جوارًا لـ x_0 في $\mathbb{R}$ كل مجال مفتوح مركزه x_0، أي المجال $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$.



ونقول أن تابع f معرف على جوار لـ x_0 وعند x_0 نفسها (أو اختصارًا معرف على جوار x_0) إذا (⇔) إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب α بحيث يكون:

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq D_f$$ حيث D_f هي مجموعة تعريف f

ونقول أن f معرف في جوار x_0 باستثناء x_0 إذا (⇔) إذا كان:

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} =]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[\subseteq D_f$$

مثلا: $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ معرف في جوار $x_0 = 1$ باستثناء $x_0 = 1$

لان $\forall \alpha > 0 :]1-\alpha,1[\cup]1,1+\alpha[\subseteq D_f$.

$g(x)=x+2$ معرف في جوار $x_0=1$ لأن: $\forall \alpha > 0,]1-\alpha,1+\alpha[\subseteq D_f$

3.1.3 – نهاية تابع:

ليكن $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. ولتكن $x\in I$ و x_0 نقطة داخلية من I (أي أن $a<x_0<b$) و f معرف على I باستثناء x_0 على الأكثر. نقول أن f يقبل نهاية على يمين x_0 إذاا (⇔) كانت $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=\ell_1$ موجودة ووحيدة. ونقول أن f يقبل نهاية على يسار x_0 إذا كانت $\lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=\ell_2$ موجودة ووحيدة (قد يكون $\ell_1=\ell_2$). ونقول أن f يقبل نهاية عند x_0 إذاا (⇔) كانت:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=\ell \quad \ldots\ldots (1)$$

(ℓ هي القيمة المشتركة عندئذ لـ ℓ_1 و ℓ_2).

وحيث تعنى $x\xrightarrow{>}x_0$ أن x يقترب من x_0 وهو أكبر من x_0.

وتعنى $x\xrightarrow{<}x_0$ أن x يقترب من x_0 وهو أقل من x_0.

وحين وجود نهاية ℓ لتابع f نرمز لذلك اختصارًا بالرمز $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ونعني بهذه العبارة (1) أعلاه.

4.1.3 – ملاحظة:

ليكن $f: I=[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ و $x\in I$.

إذا لم تكن x_0 نقطة داخلية من $I=[a,b]$، بل $x_0\in[a,b]$ حينئذ فإنه قد يكون $x_0=a$ أو $x_0=b$، وفي هاتين الحالتين فإذا أردنا الدّقة، نستطيع القول دائمًا أنّ $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to b} f(x)$ غير موجودتين، لأننا اشترطنا في تعريف

النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ أن يقترب x من x_0 بقيم أكبر ويقترب x من x_0 بقيم أصغر، أي:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=\ell$$

إذا لم نحصل على ذات الجواب من أجل $x\xrightarrow{>}x_0$ ومن أجل $x\xrightarrow{<}x_0$ نقول أن النهاية غير موجودة (قد توجد هناك نهاية من اليمين دون وجودها من اليسار وبالعكس).

فإذا أخذنا $x_0=a$ (أو $x_0=b$) فإنه لا يمكن لنا أن نضع $x\xrightarrow{<}a$ (أو $x\xrightarrow{>}b$) لأنه لا يكون لـ $f(x)$ معنى عندما $x<a$ (أو عندما $x>b$).

ولهذا نعرف نهاية f على يمين a (على يسار b) فقط.

5.1.3 – تعريف:

ليكن $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $x\in I$ و $a<x_0<b$ (أي x_0 نقطة داخلية من $[a,b]$) و f معرف على I باستثناء x_0 على الأكثر.

أ) نقول أن f يقبل نهاية ℓ عندما تقترب x من x_0 ونرمز لذلك بالرمز $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ إذاا (⇔) تحقق الاستلزام التالي:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon),\forall x\in I: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

أي لما تقترب x من x_0 فإن (⇐) $f(x)$ تكون قريبة من ℓ، لذلك نقول أيضًا أن:

$$|x-x_0|\longrightarrow 0\Rightarrow|f(x)-\ell|\longrightarrow 0$$

وهناك شكل آخر لتعريف نهاية تابع وهو التالي:

ب) من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ من عناصر I فإن: إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} x_n=x_0$ فإن (⇐) $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$.

مثال: برهن أن: $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$.

الحل: حسب التعريف الأول (الشكل (أ)).

$$\forall \varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in\mathbb{R} : |x-1|<\delta \Rightarrow \left|(x^2+1)-2\right|<\varepsilon$$

$$|x-1|<\delta \Rightarrow \left|x^2-1\right|<\varepsilon$$

أي يجب أن يكون:

$$|x-1|<\delta \Rightarrow \left|(x-1)(x+1)\right|<\varepsilon$$

$$|x-1|<\delta \ (\text{فرضا}) \Rightarrow |x+1| = \left|(x-1)+2\right| \le |x-1|+2 < \delta+2$$

ومنه:

$$|x-1|<\delta \Rightarrow \left|(x-1)(x+1)\right| = |x-1||x+1| < \delta(\delta+2)$$

ونريد أن يكون:

$$\delta(\delta+2)<\varepsilon \Leftrightarrow \delta^2+2\delta<\varepsilon \Leftrightarrow \delta^2+2\delta-\varepsilon<0$$

وبحل هذه المتراجحة في δ كمجهول نجد أن:

$$\Delta' = 1+\varepsilon>0 \Rightarrow \delta_1 = -1-\sqrt{1+\varepsilon},\ \delta_2=-1+\sqrt{1+\varepsilon}$$

و $\delta_1<0$ مرفوض لأننا نبحث عن $\delta(\varepsilon)>0$ الذي يحقق التعريف (كما فعلنا في البحث عن $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ الذي يحقق التعريف في حالة المتتاليات).

ولذا فإن: $\delta_2=-1+\sqrt{1+\varepsilon}>0$ ومنه: $\exists\delta(\varepsilon)=-1+\sqrt{1+\varepsilon}>0$ يحقق التعريف.

لأنه إذا كان: $|x-1|<\delta=-1+\sqrt{1+\varepsilon}$ فإن: $2-\sqrt{1+\varepsilon}<x<\sqrt{1+\varepsilon}$

ومنه نجد: $1-\varepsilon<x^2<1+\varepsilon$ وبالتالي $\left|x^2-1\right|<\varepsilon$.

أي أن:

$$|x-1|<\delta=-1+\sqrt{1+\varepsilon} \Rightarrow \ (\text{فعلا})\ \left|x^2-1\right|<\varepsilon.$$

الحل بطريقة أخرى: باستعمال الشكل الثاني من التعريف، أي الشكل (ب).

إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية من عناصر $\mathbb{R}$ متقاربة من $x_0=1$ أي أن: $\lim_{n\to+\infty} x_n=1$ فإن $x_n\cdot x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\cdot 1$ أي أن $x_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

ويكون x_n^2+1 مجموع متتاليتين متقاربتين ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n^2+1) = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 + \lim_{n\to+\infty} 1 = 1+1=2$$

وهذا حسب النظرية 10.1.2.

ويجب ملاحظة أن الشكل الثاني من التعريف (ب) يكون على الغالب أسهل من الشكل الأول (أ).

نتيجة:

إن نفي الجزء (ب) من التعريف 5.1.3 يلعب دورًا هامًا جدًا في كثير من الحالات وذلك كما يلي:

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\neq\ell \ \text{و}\ \exists x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\neq\ell$$

مثال: $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

برهن أن f لا تقبل نهاية لما يؤول x نحو 0.

الحل: نختار مثلا:

$$x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi},\quad y_n=\frac{1}{\frac{-\pi}{2}+2n\pi}$$

عندئذ لدينا:

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \text{و}\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لكن:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=1\neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)=-1$$

ومنه f لا يقبل نهاية لما يؤول x نحو 0.

ملاحظة: لو طلب منا إثبات أن $\lim_{x\to x_0}\sin\frac{1}{x}\neq\ell$. (حيث ℓ معطى مسبقًا) فهنا نختار متتالية واحدة (x_n) بحيث:

$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ و $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \ell$

مثلا: $g(x)=\cos\frac{1}{x}$ ، $\ell=1$. لنبرهن أن g لا تتقارب نحو 1.

نختار $x_n=\frac{1}{\pi+2n\pi}$ ، ومنه $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ و $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = -1 \neq 1 = \ell$

ومنه g لا تتقارب نحو $\ell=1$.

6.1.3 – نظرية:

إن التعريفين السابقين (أ) و (ب) حول نهاية تابع، متكافئـــان، أي أن (أ) ⇔ (ب).

بعبارة أخرى: إذا قبل f نهاية ℓ حسب التعريف (أ) فإنه يقبل نفس النهاية حسب التعريف (ب).

البرهان: نفرض أن الشكل (أ) صحيح ونبرهن صحة الشكل (ب)، أي إذا كانت ℓ هي نهاية $f(x)$ لما $x \to x_0$ فإن التعريف التالي صحيح:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0, \forall x \in \mathbb{R} \,;\, |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ولتكن $(x_n)_n$ متتالية كيفية من عناصر $\mathbb{R}$، متقاربة نحو x_0 ، عندئذ:

$$\forall \delta>0, \exists N(\delta)\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N} : n\geq N \Rightarrow |x_n-x_0|<\delta$$

ومنه فإن: $\lim_{x_n\to x_0} f(x_n)=\ell$.

وبالعكس، نفرض أن (ب) صحيح ولنبرهن صحة (أ). أي نفرض أنه من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ متقاربة من x_0 يكون $\lim_{x_n\to x_0} f(x_n)=\ell$.

ولنفرض جدلاً أن ℓ ليست نهاية لـــ $f(x)$ حسب التعريف (أ)، أي التعريف (أ) ليس صحيحًا من أجل ℓ وبالتالي يكون نفيه صحيحًا أي:

$$\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta(\varepsilon_0)>0, \exists x\in\mathbb{R} : |x-x_0|<\delta \text{ و } |f(x)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

وما دام هذا الأمر صحيحا $\forall\delta>0$ ، فإننا سنعطي لـــ δ بعض القيم كما يلي:

$$\delta=1,\ \exists x_1 : |x_1-x_0|<1 \text{ و } |f(x_1)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

$$\delta=\frac{1}{2},\ \exists x_2 : |x_2-x_0|<\frac{1}{2} \text{ و } |f(x_2)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

$$\delta=\frac{1}{3},\ \exists x_3 : |x_3-x_0|<\frac{1}{3} \text{ و } |f(x_3)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

. . . .

$$\delta=\frac{1}{n},\ \exists x_n : |x_n-x_0|<\frac{1}{n} \text{ و } |f(x_n)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

وهكذا نحصل على متتالية $(x_n)_n$ متقاربة من x_0 لأن:

$$0\leq|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \Rightarrow |x_n-x_0|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

أي أن $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x_0$.

وبما أن (ب) صحيح وحيث $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x_0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$ ومنه:

$$\forall\varepsilon_0>0, \exists N(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N} : n\geq N \Rightarrow |f(x_n)-\ell|<\varepsilon_0 \text{ و } |f(x)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

وهذا غير ممكن لأنه حسب ما تقدم أعلاه لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N} : |f(x_n)-\ell|\geq\varepsilon_0$$

وبالتالي فالفرض الجدلي خاطئ، وعليه يجب أن تكون ℓ نهاية لـــ $f(x)$ حسب (أ) أيضًا.

مثال: برهن أن $\lim_{x\to2}\frac{x^2+1}{x^2+3}=\frac{5}{7}$.

الحل: باعتبار $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+3}$ و $x_0=2$ ، نرى أن: $f(x_n)=\frac{x_n^2+1}{x_n^2+3}$ حيث $(x_n)_n$ "متتالية كيفية من عناصر $\mathbb{R}$، متقاربة من $x_0=2$ عندئذ يكون حسب النظرية 10.1.2:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \Rightarrow x_n \cdot x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4 \Rightarrow x_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$$

وبالتالي المتتاليات (x_n^2+1) و (x_n^2+3) متقاربة و $x_n^2+3 \neq 0$ فتكون المتتالية $\frac{x_n^2+1}{x_n^2+3}$ متقاربة أيضا حسب النظرية 10.1.2.

ولدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n^2+1}{x_n^2+3} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n^2+1)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n^2+3)} = \frac{5}{7}$.

7.1.3 – ملاحظة هامة:

كل النظريات التي برهنت حول نهايات المتتاليات تبقى صحيحة في حالة نهايات التوابع، وتبرهن بطريقة مشابهة لأن المتتاليـة هي تطبيـق (أو تابع).

ملاحظة: في حالة النهاية من اليمين أو اليسار يصبح التعريف كما يلي:

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall x\in I; x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)=\ell$$

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall x\in I; x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)=\ell$$

8.1.3 – النهايات غير المنتهية:

1) نقول أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ إذا (⇔) تحقق التعريف التالي:

$$\forall\varepsilon>0, \exists K(\varepsilon)>0 : x\geq K \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ونقول أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall\varepsilon>0, \exists K(\varepsilon)<0 : x\leq K \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

وتدمج الحالتين السابقتين في حالة واحدة كما يلي: نقول أن:

$$\forall\varepsilon>0, \exists K(\varepsilon)>0 : |x|\geq K \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \ (\Leftrightarrow) \text{ إذا } \lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\ell$$

2) ونقول أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall A>0, \exists\delta(A)>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\geq A$$

ونقول أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall B<0, \exists\delta(B)>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\leq B$$

وتدمج الحالتين السابقتين في حالة واحدة كما يلي:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall K>0, \exists\delta(K)>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|\geq K$$

3) نقول أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall L>0, \exists H(L)>0 : x\geq H \Rightarrow f(x)\geq L$$

ونقول أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall L>0, \exists H(L)<0 : x\leq H \Rightarrow f(x)\geq L$$

ونقول أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall L<0, \exists H(L)>0 : x\geq H \Rightarrow f(x)\leq L$$

ونقول أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ إذا (⇔) تحقق:

$$\forall L<0, \exists H(L)<0 : x\leq H \Rightarrow f(x)\leq L$$

وتدمج الحالات الأربعة السابقة في حالة واحدة كما يلي:

$$\forall K>0, \exists M(K)>0 : |x|\geq H \Rightarrow |f(x)|\geq M \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

مثال: برهن أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty$ (أي سواء $x\to+\infty$ أو $x\to-\infty$).

الحل: نطبق التعريف:

$$\forall K>0, \exists M(K)>0 ? : |x|\geq M \Rightarrow x^2\geq K$$

والهدف هنا هو البحث فقط عن وجود $M(K)$ الذي يحقق صحة الاستلزام، أي إذا كان $|x|\ge M$ صحيحًا فإنه ينتج حتما أن $x^2\ge K$، لذا نفرض أن $|x|\ge M$، إذن:

$$|x|\ge M \Rightarrow |x|^2\ge M^2 \Rightarrow x^2\ge M^2$$

ومنه يكفي أخذ $K=M^2$ ومنه: $\exists M(K)=\sqrt{K}>0$ يحقق المطلوب.

لأنه إذا كان:
$$|x|\ge M=\sqrt{K} \Rightarrow x^2=|x|^2\ge K$$

مثال: برهن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty$.

الحل: نستعمل التعريف:

$$\forall K<0,\exists M(K)>0\,?: x\ge M \Rightarrow (1-x^2)\le K$$

$$x\ge M>0 \Rightarrow x^2\ge M^2 \Rightarrow 1-x^2\le 1-M^2$$

فيكفي أخذ $K=1-M^2$ ومنه: $M^2=1-K>0$.

لأن $K<0$، ومنه $\exists M(K)=\sqrt{1-K}>0$ يحقق المطلوب.

لأنه لو كان: $x\ge M=\sqrt{1-K}>0 \Rightarrow x^2\ge 1-K \Rightarrow (1-x^2)\le K$

ملاحظة: إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ و $g(x)$ محدود من الأدنى في جوار ∞ $(g(x)\ge K)$ فإن: $\lim\limits_{x\to\infty}(f+g)(x)=\infty$.

لأن $f(x)+g(x)\ge f(x)+K$ ومنه:

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x)\ge \lim_{x\to\infty}(f(x)+K)=\infty$$

مثلا: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$ و $\sin x\ge -1$ محدود من الأدنى. (رغم أن $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ غير موجودة).

9.1.3 – نظرية (اختبار كوشي):

ليكن $f: I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا حقيقيا.

عندئذ لدينا: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ $(x,x_0\in I)$ إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$(2)\ldots\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x,x'\in I:\begin{cases}|x-x_0|<\delta\\ |x'-x_0|<\delta\end{cases}\Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

البرهان:

(⇐) نفرض أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ونبرهن صحة الشرط (2).

ما دامت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x'\to x_0} f(x')=\ell$ $(x,x'\in I)$

ومنه:

$$\forall\frac{\varepsilon}{2}>0,\exists\delta(\varepsilon)>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x'-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x')-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(x')|=|f(x)-\ell+\ell-f(x')|$$

$$\le |f(x)-\ell|+|f(x')-\ell|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ومنه صحة الشرط (2).

(⇒) نفرض أن الشرط (2) صحيح ونبرهن أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

لتكن $n,m,N\in\mathbb{N}^*$. بحيث: $n>m>N>\frac{1}{\delta}$ فإن $\frac{1}{n}<\frac{1}{m}<\frac{1}{N}<\delta$

ومنه:

$$\begin{cases} \left|(x_0+\frac{1}{n})-x_0\right| = \frac{1}{n} < \delta \\ \left|(x_0+\frac{1}{m})-x_0\right| = \frac{1}{m} < \delta \end{cases} \Rightarrow \left|f(x_0+\frac{1}{n}) - f(x_0+\frac{1}{m})\right| < \varepsilon$$

لأن الشرط (2) محقق، وهذا يعني أن المتتالية: $u_n = f(x_0+\frac{1}{n})$ لكوشي

وبالتالي فهي متقاربة (حسب 26.1.2) أي:

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_0+\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow \left|f(x)-\ell\right| = \left|f(x)-f(x_0+\frac{1}{n})+f(x_0+\frac{1}{n})-\ell\right|$$

$$\le \left|f(x)-f(x_0+\frac{1}{n})\right| + \left|f(x_0+\frac{1}{n})-\ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

لأن (2) محقق وهذا يعني أن: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

لأن: $x\to x_0$ يعني $|x-x_0|<\delta$.

مثال: برهن مستخدمًا اختبار كوشي أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ موجودة.

الحل: نتأكد من تحقق التعريف:

$$\forall \varepsilon < 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 ? : \forall x, x' \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} 0<|x| = |x-0| < \delta \\ 0<|x'| = |x'-0| < \delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x'}{x'}\right| < \varepsilon$$

لدينا:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x'}{x'}\right| = \left|\frac{x'\sin x - x\sin x'}{xx'}\right| \le \frac{|x'\sin x| + |x\sin x'|}{|xx'|} \le \frac{|x|+|x'|}{|x||x'|}$$

وحيث $|x||x'|>0$ فإنه يوجد $q\in\mathbb{Q}$ (حسب كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$) بحيث:

$|x||x'|>q>0$ ومنه $\frac{1}{|x||x'|}<\frac{1}{q}$ وبالتالي:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x'}{x'}\right| \le \frac{|x|+|x'|}{|x||x'|} < \frac{2\delta}{q}$$

وبأخذ $\frac{2\delta}{q} = \varepsilon$ فإنه $\exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon q}{2} > 0$ يحقق المطلوب.

إذن حسب اختبار كوشي فإن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ موجودة.

2.3 – التوابع المستمرة:

1.2.3 – تعريف:

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا حقيقيا، $x_0 \in I$، نقول أن f مستمرًا عند النقطة x_0 إذا $(\Leftrightarrow)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ويمكن أن نعيد هذا التعريف بالرجوع إلى تعريف النهاية بالشكل التالي:

أ) f مستمرا عند $x_0 \in I$ $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in I : |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

وبصورة عامة فإن العدد δ يكون تابعا لـــ ε و x_0 أي $\delta(\varepsilon, x_0)$.

أي أنه لما $|x-x_0|\to 0$ فإن $|f(x)-f(x_0)|\to 0$ أيضا.

وبعبارة أخرى نقول أنه عندما تكون x قريبة من x_0 فإن $f(x)$ تكون قريبة من $f(x_0)$.

ويمكن كذلك بالرجوع إلى تعريف النهاية بالمتتاليات أن نعيد تعريف الاستمرار بالشكل التالي:

ب) f مستمر عند $x_0 \in I$ $\Leftrightarrow$ (من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ من عناصر I فإن: $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$).

أي أن التابع المستمر يحقق الشرط:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$$

2.2.3 – الاستمرار على يمين (يسار) نقطة:

بما أن تعريف الاستمرار يرجع إلى تعريف النهاية، فيمكن استنتاج الاستمرار من اليمين (اليسار) بالرجوع إلى الملاحظة 4.1.3.

والشرط اللازم والكافي حتى يكون f مستمرا عند نقطة x_0 هو أن يكون مستمرًا على يمين ويسار هذه النقطة في نفس الوقت. أي أن:

f مستمرا عند x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$

وإذا كان f مستمرا عند كل نقطة x_0 من I فنقول أن f مستمرا على المجموعة I.

مثال: التابع $f(x)=x+2$ مستمر على المجموعة $\mathbb{R}$ كلها لأنه إذا كانت $x_0\in\mathbb{R}$ نقطة ما فنرى أن:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0+2 = f(x_0)$$

مثال: ليكن التابع g المعرف بـ:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 : x>1 \\ 1 : x=1 \\ x+2 : x<1 \end{cases}$$

فنرى أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} g(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x+2)=3$ وبالتالي g غير مستمر على يسار $x_0=1$. لأن: $3=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} g(x)\neq g(1)=1$

وأن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} x^2=1$ وبالتالي g مستمر على يمين $x_0=1$

لأن: $1=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=g(1)=1$.

ورغم ذلك فإن g ليس مستمرا عند $x_0=1$ لأن الشرط:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} g(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=g(1)$ غير محقق

أي أنه حتى يكون تابع ما غير مستمر عند نقطة x_0، يكفي أن يكون غير مستمر على يمين x_0، أو غير مستمر على يسار x_0.

أو بعبارة أدق: يظهر من تعريف التابع المستمر عند نقطة أنه حتى يكون f مستمرًا عند x_0 يجب أن تتوفر شروط ثلاثة:

1• أن يكون f معرفا عند x_0.

2• أن تكون $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجودة ووحيدة.

3• أن تكون قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ تساوي $f(x_0)$ أي:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

وعليه فإن التابع f يكون غير مستمر إذا لم يتحقق أحد الشروط الثلاثة السابقة.

مثلا: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ غير معرف عند: $x_0=0$ فهو لا يحقق الشرط الأول، إذن غير مستمر عند $x_0=0$.

أو نقول f غير مستمر عند $x_0\in D_f$ إذا ($\Leftrightarrow$) تحقق أحد الشرطين:

$\exists\varepsilon>0,\forall\delta(\varepsilon)>0,\exists x\in D_f: |x-x_0|<\delta$ و $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$

أو توجد متتالية (x_n) من عناصر D_f بحيث:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \quad \text{و} \quad f(x_n) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$$

3.2.3 – نظرية:

إذا كان $f,g: I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعين مستمرين عند نقطة $x_0\in I$ فإن:

1• التوابع $f\pm g$، $f\cdot g$، $\frac{f}{g}$ $(g(x_0)\neq 0)$، كلها مستمرة عند x_0

•2 إذا كان fog معرفا وكان f مستمرا عند النقاط $g(x_0)$ فإن fog يكون مستمرا أيضا عند x_0.

البرهان:

•1 نأخذ الحالة $f+g$ ونبرهن البقية بنفس الطريقة:

إذا كان f و g مستمران عند x_0 فإن:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2}>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall x\in I : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| = |f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)|$$

$$\le |f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ومنه: $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=(f+g)(x_0)$ وبالتالي $f+g$ مستمر عند x_0.

•2 $\lim_{x\to x_0}(fog)(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$

وهذا لأن f مستمر عند x_0، وبما أن g مستمر عند x_0 فإن:

$$f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(g(\lim_{x\to x_0} x)) = f(g(x_0)) = (fog)(x_0)$$

ومنه: $\lim_{x\to x_0}(fog)(x)=(fog)(x_0)$ وبالتالي fog مستمر عند x_0.

إن استمرار gof عند نقطة x_0 لا تعني أن f مستمرًا عند x_0 وأن g مستمر عند $f(x_0)$.

مثلا:

$$f(x)=\begin{cases}1 : x=0\\ \dfrac{1}{2(x^2+1)} : x\neq 0\end{cases} \qquad g(y)=\begin{cases}0 : y\le 1\\ 1 : y>1\end{cases}$$

فإن f غير مستمر عند $x_0=0$ لأن $\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(x_0)=1$

وأن g غير مستمر عند $f(x_0)=f(0)=1$ لأن:

$$0=\lim_{y\xrightarrow{<}1} g(y)\neq \lim_{y\xrightarrow{>}1} g(y)=1$$

ورغم ذلك فإن:

$$g(f(x))=\begin{cases}0 : x=0\\ 0 : x\neq 0\end{cases}$$ مستمر عند $x_0=0$ لأن:

$$0=\lim_{x\to 0} g(f(x)) = g(f(0)) = g(1)=0$$

مثال: برهن أن الجزء الصحيح $f(x)=[x]$ ليس مستمر عند كل نقطة $x=n\in\mathbb{Z}$.

ملاحظة: نعيد نفس الملاحظة 4.1.3، باعتبار الاستمرار هو نهاية، فإذا كان: $f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرًا فإن المقصود هو استمرار f عند كل نقطة داخلية x_0 من $[a,b]$ أي $a<x_0<b$ واستمرار f على يمين a واستمرار f على يسار b.

ملاحظة هامة: النظريات المتعلقة بالنهايات، تبقى قائمة بالنسبة للاستمرار باعتبار الاستمرار هو نهاية.

4.2.3 - نظريات:

نظرية 1: إذا كان $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ وكان f مستمرًا عند y_0 وكانت $\lim_{x\to x_0} g(x)=y_0$ و (fog) معرفًا فإن:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$$

البرهان:

f مستمر عند $y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0:|y-y_0|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$

$\lim_{x\to x_0} g(x)=y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon'>0,\exists\delta'(\varepsilon')>0:|x-x_0|<\delta' \Rightarrow |g(x)-y_0|<\varepsilon'$

وكحالة خاصة بأخذ $\delta = \varepsilon'$ يكون:

$$|x-x_0|<\delta' \Rightarrow |g(x)-y_0|<\delta \Rightarrow |f(g(x))-f(y_0)|<\varepsilon$$

أي أن: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$.

نظرية 2: إذا كان $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ وكان f مستمرًا عند y_0 وكانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=y_0$

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(y_0)$.

البرهان: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists A(\varepsilon)>0: x>A \Rightarrow |g(x)-y_0|<\varepsilon$

f مستمرا عند y_0 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon'>0,\exists\delta>0, |y-y_0|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(y_0)|<\varepsilon'$

وكحالة خاصة بأخذ $\delta=\varepsilon$ يكون:

$$x>A \Rightarrow |g(x)-y_0|<\delta \Rightarrow |f(g(x))-f(y_0)|<\varepsilon'$$

أي أن: $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(y_0)$.

نظرية 3: إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\ell$$

البرهان: (يترك للقارئ).

نظرية 4: إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=x_0$ فإن:

$\lim_{x\to-\infty} f(g(x))=+\infty$ وذلك بفرض أن: $\begin{cases} A<0 \\ x<A \Rightarrow g(x)\neq x_0\end{cases}$

بدمج الفرضيتين نجد:

$$x<A \Rightarrow |g(x)-x_0|<\varepsilon \Rightarrow |f(g(x))|>A$$

في النظرية 4 نستثني $g(x)=x_0$ لأنه لو كان $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ و $f(x)=\frac{1}{x}$ (مع $x\neq 0$)، فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ و $f(g(x))=\frac{x}{\sin x}$ ليس معرفًا لأجل: $x=-n\pi,\ n\in\mathbb{N}^*$ وبصورة خاصة لا يمكن القول أن $(fog)(x)$ يكون كبيرًا لأجل $x<A$.

5.2.3 – التمديد بالإستمرار:

ليكن $f: I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $x_0\in I$. فإذا كان f غير معرف عند x_0 ، فهو غير مستمر عند x_0 . في هذه الحالة إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ، عندئذ يكون التطبيق g المعرف بـ:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & : x\neq x_0 \\ \ell & : x=x_0\end{cases}$$

مستمرًا عند x_0 . نسمي g التمديد بالاستمرار لـ f عند x_0 .

مثلا: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ليس مستمرًا عند $x_0=0$ ، لكن $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ نمدد f بالاستمرار عند $x_0=0$ فنحصل على:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x\neq 0 \\ 1 & : x=0\end{cases}$$

بينما:

$f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow \frac{1}{x}$ لا يمكن تمديده بالاستمرار نظرًا لعدم وجود $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$.

6.2.3 – الاستمرار بانتظام:

ليكن $f: I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا ما. نقول أن f مستمرًا بانتظام على المجموعة I إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x, x' \in I : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

وهنا العدد δ يتبع ε فقط (متعلق بـ ε فقط). ونلاحظ أن كل تابع مستمر بانتظام يكون مستمرًا عند كل نقطة $x_0 \in I$ وذلك بأخذ $x' = x_0$ فينتج تعريف الاستمرار.

مثال: ليكن: $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $x \longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}$ هل f مستمر بانتظام على $[0,1]$؟

الحل: يكفي برهان أن: $\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x'}\right| \le \sqrt[3]{|x - x'|}$ ....(3)

إذا كان $x = x'$ فإن الشرط محقق. لنفرض الآن أن $x \neq x'$ وعليه $x > x'$ أو $x < x'$.

لنأخذ الحالة $x > x'$ ، عندئذ:

$$0 < \left(\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x'}\right|\right)^3 = x - x' + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x'}\left(\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x}\right) \le x - x'$$

لأن الجزء الباقي مقدار سالب.

ولما $x' > x$: نجد أيضًا: $0 < \left(\left|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x}\right|\right)^3 \le x' - x$

إذن يكون لدينا:

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x'}\right)^3 \le x - x' & : \ x' < x \\ \left(\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x}\right)^3 \le -(x - x') & : \ x' > x \end{cases}$$

ومنه فإن (3) صحيحة:

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x'}\right| \le \sqrt[3]{|x - x'|}$$

فبأخذ $|x - x'| < \delta$ فإن $\sqrt[3]{|x - x'|} < \sqrt[3]{\delta}$.

ويكفي أخذ $\varepsilon = \sqrt[3]{\delta}$ أي $\exists \delta = \varepsilon^3 > 0$ يحقق المطلوب:

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x'}\right| < \varepsilon$$

7.2.3 – نظرية:

كل تابع مستمر على مجال مغلق ومحدود يكون مستمرًا بانتظام على هذا المجال.

البرهان: ليكن $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرًا على المجال المغلق والمحدود $I = [a,b]$.

ولنبرهن أن f مستمر بانتظام على I، أي أنه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, x' \in I : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

سنبرهن بالخلف، أي نفرض جدلاً أن f ليس مستمرًا بانتظام على I، أي شرط التعريف السابق غير صحيح وبالتالي يكون نفيه صحيحًا، أي:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta(\varepsilon) > 0, \exists x, x' \in I : |x - x'| < \delta \ \text{و} \ |f(x) - f(x')| \ge \varepsilon$$

إذن لدينا من أجل:

$$\delta = 1, \ \exists x_1, x_1' \in I : |x_1 - x_1'| < 1 \ \text{و} \ |f(x_1) - f(x_1')| \ge \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2}, \ \exists x_2, x_2' \in I : |x_2 - x_2'| < \frac{1}{2} \ \text{و} \ |f(x_2) - f(x_2')| \ge \varepsilon$$

....

$$\delta = \frac{1}{n}, \ \exists x_n, x_n' \in I : |x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \ \text{و} \ |f(x_n) - f(x_n')| \ge \varepsilon \quad \ldots\ldots (4)$$

وبهذه الطريقة نكون قد أنشأنا متتاليتين $(x_n)_n$ و $(x_n')_n$ من عناصر $I = [a,b]$، إذن:

$$a \le x_n \le b \ \text{و} \ a \le x_n' \le b$$

أي كل منهما محدودة وبالتالي كل منهما تحتوي على متتالية جزئية متقاربة (النظرية 24.1.2)، لتكن $(x_{n_k})_k$ متتالية جزئية متقاربة من $(x_n)_n$ و $(x'_{n_k})_k$ متتالية جزئية متقاربة من $(x'_n)_n$.

وحيث: $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ فإن $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x'_n$ . . . . (5)

فإذا كانت $x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0$ فإن $x'_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0$، لأنه لدينا:

$$|x'_{n_k} - x_0| = |x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0| \le |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0|$$

ولدينا $x_{n_k} \longrightarrow x_0$ فرضنا و $x'_{n_k} \longrightarrow x_{n_k}$ حسب (5) ومنه فإن:

$$x'_{n_k} \longrightarrow x_0$$

وحيث أن f مستمر فإن:

$$\lim_{\substack{k\to+\infty \\ (x_{n_k}\to x_0)}} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}) = f(x_0) \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_0)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$\lim_{\substack{k\to+\infty \\ (x'_{n_k}\to x_0)}} f(x'_{n_k}) = f(x_0) \Rightarrow |f(x'_{n_k}) - f(x_0)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

ومنه حسب (4):

$$\varepsilon \le |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0) - f(x'_{n_k})|$$
$$\le |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x'_{n_k}) - f(x_0)|$$

ولدينا:

$$\begin{cases} |f(x'_{n_k}) - f(x_0)| \longrightarrow 0 \\ \text{و} \\ |f(x_{n_k}) - f(x_0)| \longrightarrow 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\varepsilon \le |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \le 0$$

أي أن $\varepsilon \le 0$ وهذا يناقض كون $\varepsilon > 0$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي لابد أن يكون f مستمرًا بانتظام على I.

8.2.3 – التابع المحدود:

ليكن $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعًا ما. نقول أن f محدود على الجزء I إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ ,\ \forall x \in I : |f(x)| \le k$$

9.2.3 – نظرية:

إذا كان $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرًا على المجال المغلق والمحدود $I = [a,b]$ فإنه لدينا ما يلي:

1• f يكون محدودًا على I.

2• f يبلغ (يدرك) حدَّيه الأعلى والأدنى على I، أي أنه:

$$\exists x_0, x_1 \in I : f(x_0) = \inf_{x\in I} f(x) \ ;\ f(x_1) = \sup_{x\in I} f(x)$$

البرهان:

1• نفرض جدلاً أن f غير محدود على I، هذا يعني أن:

$$\forall k \in \mathbb{R}_+ ,\ \exists x \in I : |f(x)| > k$$

إذن من أجل $k = 1$ يوجد $x_1 \in I$ بحيث $|f(x_1)| > 1$

ومن أجل $k = 2$ يوجد $x_2 \in I$ بحيث $|f(x_2)| > 2$

. . . .

من أجل $k = n$ يوجد $x_n \in I$ بحيث $|f(x_n)| > n$

وهكذا نحصل على متتالية $(x_n)_n$ من عناصر I بحيث:

$|f(x_n)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ وحيث $x_n\in I=[a,b]$ فإن: $a\le x_n\le b$، أي أن $(x_n)_n$ متتالية محدودة، فهي تحتوي على متتالية جزئية $(x_{n_k})_k$ متقاربة من نقطة $x\in I$.

وحيث f مستمر فإن $f(x_{n_k})\xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$ و $f(x)$ معين تمامًا.

ولكن لكون:

$$|f(x_n)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty \Rightarrow |f(x_{n_k})|\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$$

وهذا تناقض، ومنه لا بدّ أن يكون f محدودًا.

•2 حسب الجزء 1، بما أن f محدود فهو محدود من الأعلى ومن الأدنى بآن واحد على I، فله حد أعلى وحد أدنى، وليكونا:

$$m=\inf_{x\in I} f(x) \quad \text{و} \quad M=\sup_{x\in I} f(x)$$

نناقش الحالة $m=\inf_{x\in I} f(x)$. (تناقش الحالة $M=\sup_{x\in I} f(x)$ بنفس الطريقة).

إذن: $m=\inf_{x\in I} f(x)$، فإنه حسب 25.3.1 يكون:

$$\forall \varepsilon>0, \exists x_k\in I: m\le f(x_k)<m+\varepsilon$$

وما دام هذا الشرط محققا $\forall\varepsilon>0$ فإنه من أجل:

$$\varepsilon=1, \exists x_1\in I: m\le f(x_1)<m+1$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}, \exists x_2\in I: m\le f(x_2)<m+\frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon=\frac{1}{n}, \exists x_n\in I: m\le f(x_n)<m+\frac{1}{n}$$

وهكذا نحصل على متتالية $(x_n)_n$ من عناصر I تحقق:

$$f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} m$$

ولكن $x_n\in I=[a,b]$ فإن $a\le x_n\le b$، أي محدودة فهي تحتوي على متتالية جزئية $(x_{n_k})_k$ متقاربة من نقطة $x_0\in I$ وعندئذ $x_{n_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0$ و f مستمر تؤدي إلى أن:

$$f(x_{n_k})\xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x_0)$$

وحيث: $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ فإن: $f(x_{n_k})\xrightarrow[k\to+\infty]{} m$

(وهذا حسب النظرية 23.1.2). وبالتالي يكون $m=f(x_0)$.

ومنه:

$$\exists x_0\in I: f(x_0)=m=\inf_{x\in I} f(x)$$

مثال: ليكن $f:I=[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 : x>1 \\ 1 : x=1 \\ 2x-1 : x<1 \end{cases}$$

وليكن $g(x)=k f(x), k<0$. برهن أن:

$$\sup_{x\in I} g(x)=k\inf_{x\in I} f(x)$$

الحل: بما أن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=f(1)$$

فإن f مستمر على المجال المغلق والمحدود $[0,2]$.

إذن فهو محدود ويبلغ حدّيه على I، إذن:

$$\exists m\in\mathbb{R}, \forall x\in I: m=\inf_{x\in I} f(x)$$

وبالتالي فإن g محدود أيضًا وعليه $\sup_{x\in I} g(x)$ موجود.

وحسب الخاصية المميزة للحد الأدنى لـ f يكون:

$$(6) \ldots\ldots \forall x\in I : f(x)\geq m \Rightarrow g(x)=k\,f(x)\leq km$$

$$(7) \ldots\ldots \forall \frac{\varepsilon}{-k}>0,\ \exists x_0\in I : f(x_0)<m-\frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow g(x_0)=k\,f(x_0)>km-\varepsilon$$

وبالتالي نحصل على الشرطين الجديدين:

$$(8) \ldots\ldots \forall x\in I : g(x)\leq km$$

$$(9) \ldots\ldots \forall \varepsilon>0 : \exists x_0\in I : g(x_0)>km-\varepsilon$$

وحسب الخاصية المميزة للحد الأعلى تكون:

$$\sup_{x\in I} g(x)=km=k\inf_{x\in I} f(x)$$

ملاحظة: عند الحديث عن الاستمرار، يجب ملاحظة أنه من أجل كل قيمة يأخذها ε فإن هناك قيمة لـ δ ترافقها.

مثلا: إذا كان $\varepsilon=0,01$ فما هي قيمة $\delta(\varepsilon)$ المرافقة له حتى يكون التابع التالي مستمرًا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & : x\neq 4,\ x\geq 0\\ 4 & : x=4\end{cases}$$

الحل: لدينا:

$$f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}=\sqrt{x}+2 \quad \text{و} \quad f(4)=4$$

واضح أن f مستمر على $]0,+\infty[$ ماعدا عند $x_0=4$ التي يجب التحقق من استمرار f عندها. وحتى يكون f مستمرًا عند $x_0=4$ يجب أن يتحقق التعريف، أي:

$$|x-4|<\delta \Rightarrow |(\sqrt{x}+2)-4|<0,01$$

$$|x-4|<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2|<0,01$$

أي:

$$|\sqrt{x}-2|<0,01 \Leftrightarrow 1,99<\sqrt{x}<2,01 \Leftrightarrow 3,9601<x<4,0401$$

$$\Leftrightarrow -0,0399<x-4<0,0401$$

ومنه فإن δ يجب أن يكون $\delta=0,0399$.

لأنه يحقق تعريف الاستمرار، أي أن:

$$|x-4|<0,0399 \Rightarrow |\sqrt{x}-2|<0,01$$

لأنه إذا كان: $|x-4|<0,0399$ محققًا فإن:

$$|x-4|<0,0399 \Leftrightarrow 3,9601<x<4,0399 \Leftrightarrow 1,99<\sqrt{x}<2,0099$$

$$\Leftrightarrow -0,01<\sqrt{x}-2<0,0099$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x}-2|<0,01$$

10.2.3- نظرية القيم المتوسطة:

إذا كان $f: I=[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرًا على المجال المغلق والمحدود I، عندئذ:

$$\forall\lambda\in\left[\inf_{x\in I} f(x),\ \sup_{x\in I} f(x)\right]=[m,M]$$

فإنه يوجد $c\in[a,b]$ يحقق: $f(c)=\lambda$.

البرهان: بما أن f مستمر على مجال مغلق ومحدود I فإن f محدود ويبلغ حديه الأعلى والأدنى على I (حسب 9.2.3). أي:

$$\exists x_0,x_1\in I : f(x_0)=m=\inf_{x\in I} f(x),\quad f(x_1)=M=\sup_{x\in I} f(x)$$

•1 إذا كان f ثابتًا: أي $\forall x \in I : f(x)=\lambda$ فإن أي عدد $c \in I$ يحقق $f(c)=\lambda$. أي يوجد $c\in[a,b]$ يحقق المطلوب.

•2 إذا كانت $\lambda = M$ أو $\lambda = m$ فيوجد x_0,x_1 يحققان $f(x_1)=M=\lambda$ أو $f(x_0)=m=\lambda$ إذن $\exists c = x_0$ أو $\exists c = x_1$.

•3 إذا كانت $\lambda\in]m,M[$ أي $m<\lambda<M$ فإنه:

$$\exists x_0,x_1 \in I : f(x_0)=m<\lambda<M=f(x_1)$$

و $x_0 \neq x_1$ (لأنه لو كان $x_0=x_1$ لكان: $m=f(x_0)=f(x_1)=M$ ومنه $\lambda=m=M$).

ومنه $x_0<x_1$ أو $x_0>x_1$، لنناقش الحالة $x_0<x_1$ (وتناقش الحالة $x_0>x_1$ بنفس الطريقة) إذن (حسب النظرية 29.3.1).

$$x_0<x_1 \Rightarrow \exists c\in\mathbb{Q} : x_0<c<x_1$$

إذن:

$$\exists c\in[x_0,x_1]\subset[a,b]\Rightarrow c\in[a,b]$$

ولإثبات أن $f(c)=\lambda$، نفرض جدلاً أن $f(c)\neq\lambda$ ومنه:

$$f(c)>\lambda \quad \text{أو} \quad f(c)<\lambda$$

لنأخذ الحالة $f(c)>\lambda$: $f(c)>\lambda \Rightarrow f(c)-\lambda>0$

وبما أن f مستمر فإنه:

$$\forall \varepsilon=\frac{1}{2}(f(c)-\lambda)>0,\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$$

$$|f(x)-f(c)|<\frac{f(c)-\lambda}{2}=\varepsilon$$

ومنه:

$$f(c)-\frac{f(c)-\lambda}{2}<f(x)<f(c)+\frac{f(c)-\lambda}{2}$$

$$\lambda=\frac{\lambda+\lambda}{2}<\frac{f(c)+\lambda}{2}<f(x)<\frac{3f(c)-\lambda}{2}$$

إذن:

$$\forall x\in[x_0,x_1] : f(x)>\lambda$$

وهذا تناقض لأنه يوجد $x_0\in[x_0,x_1]$ و $m=f(x_0)<\lambda$.

وإذا فرضنا جدلاً أن $f(c)<\lambda$ وبنفس الطريقة نحصل أيضًا على تناقض ومنه لا بدّ أن يكون $f(c)=\lambda$.

مثال: ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعًا مستمرًا، حيث $b>a>0$.

برهن أنه $\exists\alpha\in[a,b]$ يحقق:

$$f(\alpha)=\frac{bf(a)+af(b)}{a+b}$$

الحل: f محدود ويبلغ حديه على $[a,b]$ (حسب 9.2.3).

ليكن $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$ و $m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$ عندئذ

$$\forall x\in[a,b] : m\le f(x)\le M$$

وكحالة خاصة $m\le f(b)\le M$ و $m\le f(a)\le M$.

ومنه:

$$bm\le bf(a)\le bM \quad \text{و} \quad am\le af(b)\le aM$$

ومنه:

$$m\le\frac{af(b)+bf(a)}{a+b}\le M$$

بأخذ $\lambda=\dfrac{af(a)+bf(a)}{a+b}$ وتطبيق النظرية 10.2.3 فإنه:

$$\exists\alpha\in[a,b] : f(\alpha)=\lambda$$

ملاحظة: ليكن $f:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ $f(x)=\begin{cases}1 : x\le 1\\ -1 : x>1\end{cases}$.

نرى أن $\sup f(x)=1$ و $\inf f(x)=-1$ وأن: $-1<\lambda=\frac{1}{2}<1$ ورغم ذلك لا توجد $c\in[0,2]$ تحقق $f(c)=\frac{1}{2}$. والسبب هو أن f غير مستمر على $[0,2]$ لأنه غير مستمر عند $x_0=1$. وهذا لكون f مستمر على يسار $x_0=1$ ولكن f غير مستمر على يمين $x_0=1$ لأن:

لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=1=f(1)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-1\neq f(1)=1$ أي أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$.

3.3 – التوابع المتعاكسة:

1.3.3 – تعريف: ليكن $f,g:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعين معرفين، يقال أن f و g تابعين متعاكسين إذا (⇔) حققا الشرطين:

$$\begin{cases} y=f(x)\Leftrightarrow g(y)=g(f(x))=x \\ \text{و} \\ x=g(y)\Leftrightarrow f(x)=f(g(y))=y \end{cases}$$

2.3.3 – التابع الرتيب: ليكن $f:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

•1 نقول أن f متزايد (متزايد تمامًا) على I إذا (⇔) تحقق:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y) \qquad (x<y\Rightarrow f(x)<f(y))$$

•2 نقول أن f متناقص (متناقص تمامًا) إذا (⇔) تحقق:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, x\le y\Rightarrow f(x)\ge f(y) \qquad (x<y\Rightarrow f(x)>f(y))$$

•3 نقول أن f رتيب على I إذا كان f متزايدا أو متناقصا ونقول أن f رتيب تمامًا إذا كان f متزايدا تمامًا أو متناقصا تمامًا.

3.3.3 – نظرية:

إذا كان $f:I=[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعًا مستمرًا على مجال مغلق ومحدود I وكان f متزايدا تمامًا على I عندئذ يكون لدينا ما يلي:

•1 يكون $f:[a,b]\longrightarrow[f(a),f(b)]$ تقابلا وبالتالي له تابع عكسي (أنظر 9.3.1).

•2 $f^{-1}=g:[f(a),f(b)]\longrightarrow[a,b]$ يكون مستمرًا ومتزايدًا تمامًا أيضًا.

البرهان:

•1 بما أن f متزايد تمامًا فإنه متباين لأن:

$$(x<y\Rightarrow f(x)<f(y))\Rightarrow(x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y))$$

وحتى يكون f غامرًا يكفي أن يكون $f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

$(f:A\longrightarrow B$ غامر $\Leftrightarrow\forall y\in B,\exists x\in A, y=f(x)\Leftrightarrow f(A)=B)$

$$f([a,b])=\{f(x)\in\mathbb{R}: x\in[a,b]\}$$

وحيث $A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subseteq B\\ \text{و}\\ B\subseteq A\end{cases}$، فإنه حتى نبرهن أن: $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ يكفي أن نبرهن أن:

$$f([a,b])\subseteq[f(a),f(b)]$$

و

$$f([a,b])\supseteq[f(a),f(b)]$$

ليكن: $f(x)\in f([a,b])\Rightarrow x\in[a,b]\Rightarrow a\le x\le b$

وبما أن f متزايد فإن:

ومنه فإن (حسب 3.2.1): $f(a)\le f(x)\le f(b)\Rightarrow f(x)\in[f(a),f(b)]$

$$f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)] \quad .... (10)$$

وبالعكس إذا كانت $y \in [f(a), f(b)]$ فإن: $f(a) \le y \le f(b)$

$$\Rightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} : m \le y \le M$$

(لأن f مستمر على مجال مغلق ومحدود) ومنه يوجد $c \in [a,b]$ يحقق $f(c) = y$ (حسب 10.2.3) ومنه: $y = f(c) \in f([a,b])$

ومنه فإن:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]) \quad .... (11)$$

وبالتالي من (10) و (11) تتم المساواة ومنه f غامر وبالتالي f متباين وغامر فهو تقابل فله إذن تابع عكسي $g = f^{-1}$.

•2 $g = f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$

أ) نبرهن أن g متزايد تمامًا: ليكن $\alpha, \beta \in [f(a), f(b)]$، ولنبرهن أن:

$$\alpha < \beta \Rightarrow g(\alpha) < g(\beta)$$

لنفرض جدلاً أن $\alpha < \beta$ ومع ذلك فإن $g(\alpha) \ge g(\beta)$.

نضع $y = g(\beta)$ و $x = g(\alpha)$، ومنه $\beta = f(y)$ و $\alpha = f(x)$ (لأن f و g متعاكسان). بما أن f متزايد تمامًا فإن:

$$x \ge y \Rightarrow \alpha = f(x) \ge f(y) = \beta$$

وهذا يخالف كون $\alpha < \beta$ ومنه لا بد أن يكون $g(\alpha) < g(\beta)$ وعليه $g = f^{-1}$ متزايد تمامًا.

ب) نبرهن أن g مستمر على $[f(a), f(b)]$، أي نبرهن أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y \in [f(a), f(b)], y_0 \in [f(a), f(b)]$$
$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

لنفرض جدلاً أن g غير مستمر، عندئذ التعريف السابق يكون خاطئا وبالتالي نفيه صحيح، أي:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta(\varepsilon) > 0, \exists y \in [f(a), f(b)] : |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| \ge \varepsilon$$

أي: $|x - x_0| \ge \varepsilon$ و $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ (لأن $x = g(y)$ ، $y = f(x)$).

ومنه:

$$|x - x_0| \ge \varepsilon \text{ و } -\delta < f(x) - f(x_0) < \delta \quad .... (12)$$

ونميز حالتين:

إذا كان $x - x_0 \ge 0$: فإن:

$$x - x_0 = |x - x_0| \ge \varepsilon \Rightarrow x \ge x_0 + \varepsilon$$

وبما أن f متزايد فإن: $f(x) \ge f(x_0 + \varepsilon)$

ولكن لدينا:

$$x_0 + \varepsilon > x_0 \Rightarrow f(x_0 + \varepsilon) > f(x_0)$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \ge f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0$$

ومنه يوجد: $\delta_1(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0$ بحيث: $f(x) - f(x_0) \ge \delta_1$

وهذا يناقض كون: $\forall \delta > 0 : \quad f(x) - f(x_0) < \delta$ (حسب 12).

إذا كان $x - x_0 \le 0$: نناقش بنفس الطريقة ونحصل أيضًا على تناقض

وبالتالي فإن الفرض الجدلي خاطئ وعليه يجب أن يكون $g = f^{-1}$ مستمرًا.

4.3.3 - نظرية:

إذا كان $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرًا ومتناقص تمامًا.

عندئذ يكون لدينا ما يلي:

•1 $f : [a,b] \longrightarrow [f(b), f(a)]$ تقابل وبالتالي له تابع عكسي f^{-1}.

•2 $h=f^{-1}:[f(b),f(a)]\longrightarrow[a,b]$ مستمر ومتناقص تمامًا.

البرهان: يتم بطريقة مشابهة للنظرية السابقة مع استبدال f بـ $-f$.

5.3.3 – ملاحظة هامة:

في النظرية السابقة ليس بالضرورة أن يكون المجال I مغلقًا ومحدودًا،

فمثلاً: $f:[a,+\infty[\longrightarrow[f(a),+\infty[$ ونأخذ $a<x_0$ ، $f(a)<y_0$

ونأخذ $f:[a,x_0]\longrightarrow[f(a),y_0]$ وبعد تطبيق إحدى النظريتين السابقتين نجعل $x_0, y_0\longrightarrow+\infty$.

مثال: ليكن $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

وليكن $g:A\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعًا معرفًا.

عين A حتى يكون $g=f^{-1}$ ثم برهن أن $g=f^{-1}$ مستمر ومتزايد تمامًا.

الحل: إن f مستمر ومتزايد تمامًا على $[0,1]$ لأنه إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية كيفية من عناصر $[0,1]$ متقاربة نحو x_0 فإن: $(x_n+1)_n$ و $(x_n+2)_n$ متقاربتان (حسب 11.1.2) وحيث أن:

$$\forall x_n\in[0,1]: x_n+2\neq0$$

فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n+1}{x_n+2}\right)=\frac{\lim_{n\to+\infty}(x_n+1)}{\lim_{n\to+\infty}(x_n+2)}=\frac{x_0+1}{x_0+2}=f(x_0)$$

وعليه f مستمر، أو بطريقة أخرى نقول هو قسمة تابعين مستمرين و $x+2\neq0$ على $[0,1]$ فهو مستمر و f متزايد تمامًا لأن:

$$x<y\Rightarrow\frac{x+1}{x+2}<\frac{y+1}{y+2}\Rightarrow f(x)<f(y)$$

ومنه حسب النظرية السابقة فإن:

$f:[0,1]\longrightarrow[f(0),f(1)]=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ تقابل فله تابع عكسي ومنه:

$g=f^{-1}:\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\longrightarrow[0,1]$ ومنه $A=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$.

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x+2}\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=g(y)=\frac{1-2y}{y-1}$$

ونرى بنفس الطريقة أن g مستمر ومتزايد تمامًا على $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$.

4.3 – الاشتقاق:

1.3.3 – مشتق تابع عند نقطة، مشتق تابع على مجال (التابع المشتق):

سنرمز في كل هذا الفصل بـ $I=[a,b]$ لمجال من $\mathbb{R}$. ليكن:

$$\begin{aligned}f:I\subseteq\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longrightarrow y=f(x)\end{aligned}$$

نقول إن f يقبل الاشتقاق عند النقطة $x_0\in]a,b[$ إذا $(\Leftrightarrow)$ كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x\in I)$ موجودة ووحيدة.

وتسمى هذه النهاية الوحيدة عندئذ بمشتق f عند x_0 ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$، أي أن:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وهذا في حال الوجود، ويرمز أحيانًا لهذه النهاية أيضًا بأحد الرموز التالية:

$\dfrac{df}{dx}(x_0)$ أو $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ أو $\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ حيث $\begin{pmatrix}\Delta x=x-x_0\\ x=x_0+\Delta x\end{pmatrix}$

ونقول أن f يقبل الاشتقاق على المجال I إذا ($\Leftrightarrow$) كان f يقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ أي أن: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ موجودة، ونرمز لهذه النهاية بـ $f'(x)$.

أي:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وتزودنا هذه المعادلة بقاعدة لربط كل عدد $x \in I$ بالعدد $f'(x)$ وتسمى مجموعة جميع الأزواج $(x, f'(x))$ التي يتم تشكيلها بهذه الطريقة، بالتابع المشتق f'.

إذا رمزنا بـ D_f لمجموعة تعريف f فإن $D_{f'} \subseteq D_f$.

إن المشتقات ضرورية في نظرية الاقتصاد حيث يصفونها بأنها "هامشية".

مثلا: لنفرض على سبيل المثال: أن مصنعًا ينتج x طنا من الفولاذ أسبوعيًا بكلفة إجمالية مقدرة بالدينار مساوية إلى $y=f(x)$.

إن هذه الكلفة الإجمالية تتضمن مصاريف الصيانة والرواتب والضرائب وثمن المادة الخام...الخ.

ولنفرض أنه من أجل إنتاج $x+\Delta x$ طنًا من الفولاذ أسبوعيًا تكون الكلفة $y+\Delta y$ دينار.

إن الزيادة في الكلفة من أجل كل وحدة زيادة في الإنتاج تساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

تسمى النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بالكلفة الهامشية وهي عبارة عن مشتق y بالنسبة لـ x.

مثال آخر:

نريد تفريغ حوض سباحة بغية تنظيفه، فإذا كانت y تمثل عدد لترات الماء في الحوض بعد t دقيقة من بداية تفريغ الحوض وكانت $y=200(30-t)^2$.

فما هي سرعة انصباب الماء من الحوض عند نهاية الدقيقة العاشرة؟

الحل: بما أن السرعة تعطى بـ $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=10}$، أي قيمة المشتق عند $t=10$

وبالتالي فإن:

$$y'=\lim_{t\to 10}\frac{dy}{dt}=400(30-10)=800$$

أي سرعة انصباب الماء هي 800 لتر/دقيقة.

أمثلة:

1. إذا كان $f(x)=c$ ثابت فإن $f'(x)=0$ لأن:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

2. إذا كان $f(x)=x^n$ فإن: $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$ لأن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\cdots+x_0^{n-1})$$

$$=\underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1}}_{n\text{- مرة}}=nx_0^{n-1}$$

3• $f(x)=\sqrt{x}$ فإن: $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ لأن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

4• $f(x)=\sin x$ فإن $f'(x)=\cos x$ لأن:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\Delta x)=\cos x$$

لأن $\cos x$ مستمر و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

وكذلك عوضنا العبارتين:

$$\cos\Delta x=\cos\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos^2\frac{\Delta x}{2}-\sin^2\frac{\Delta x}{2}$$

$$\sin\Delta x=\sin\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\Delta x}{2}$$

في العبارة التالية:

$$\sin(x+\Delta x)=\sin x\cos\Delta x+\sin\Delta x\cos x$$

2.4.3 – المشتق على يمين (على يسار) نقطة:

إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ووحيدة، فنقول أن f يقبل الاشتقاق على يمين x_0 أو من اليمين، لأن $x\xrightarrow{>}x_0$ تعني أن x يقترب نحو x_0 من الجهة اليمنى على المحور الحقيقي، وتسمى هذه النهاية المشتق من اليمين ونرمز لها بالرمز: $f'(x_0+0)$.

وبنفس الشكل نعرف المشتق على يسار x_0 ونرمز بـ:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي أن x يقترب نحو x_0 بقيم أقل أو أصغر من x_0 ($x\xrightarrow{<}x_0$).

ملاحظة هامة: إذا كان f تابعًا يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ فيجب الانتباه إلى أن:

$$f'(a+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}a}f'(x)$$

ليست صحيحة (ونفس الشيء بالنسبة لـ $f'(b-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}b}f'(x)$).

مثلا: نعتبر $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ:

$$f(x)=\begin{cases}0 : x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x} : x\in]0,1[\end{cases}$$

فإنه: $\forall x\in]0,1[: f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

ونرى أن: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f'(x)$ غير موجودة بسبب $\cos\frac{1}{x}$.

بينما:

$$f'(0+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

ويكون f قابلاً للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا (⇔) كان $f'(x_0-0)$ و $f'(x_0+0)$ موجودين و: $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$.

وعندئذ يكون:

$$f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

أي أن: $\left\{\begin{array}{l} f'(x_0-0) \text{ و } f'(x_0+0) \text{ موجودين} \\ f'(x_0+0)=f'(x_0-0) \text{ ويحققان} \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $f'(x_0)$ موجود ويساوي كل منهما.

أمثلة:

•1 $f(x)=|x|$ وليكن $x_0=0$ فإن:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x}{x}=1$$

ومنه f يقبل الاشتقاق على يمين $x_0=0$.

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x}{x}=-1$$

ومنه f يقبل الاشتقاق على يسار $x_0=0$.

وحيث $f'(x_0+0)\neq f'(x_0-0)$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

•2 $f(x)=\sqrt{x}$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

ملاحظة 01: نعيد هنا نفس الملاحظة 4.1.3، فإذا كان:

$$f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

وأردنا الدقة فنستطيع القول دائما أن $f'(a)$ و $f'(b)$ غير موجودتين لأن $f'(a)$ (أو $f'(b)$) هو بالتعريف:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ولكن $x\longrightarrow a$ تعني أن $x\xrightarrow{>}a$ و $x\xrightarrow{<}a$ و $f(x)$ لا معنى له عندما $x\xrightarrow{<}a$.

مثلا: إذا كان $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ فإن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^{\frac{3}{2}}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}x^{\frac{1}{2}}=0$$

بينما العبارة: $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}x^{\frac{1}{2}}$ لا معنى لها.

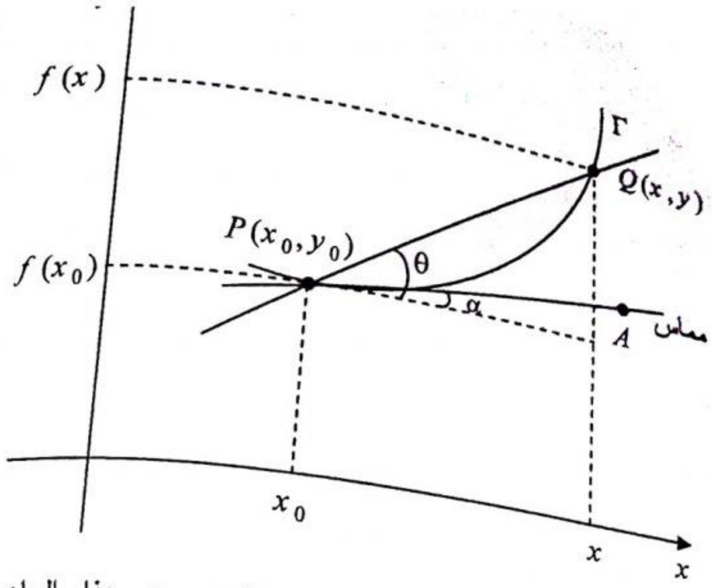
إذن f له مشتق على يمين $x_0=0$ بينما ليس له مشتق على يسار $x_0=0$، وبالتالي f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

فإذا قلنا أن f يقبل الاشتقاق من أجل $x\geq 0$ وأن الصيغة $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ صحيحة من أجل $x\geq 0$، فإننا نكون قد ابتعدنا قليلا عن الدقة، ولكن كثيرًا من الرياضيين ينطلقون في قولها دون قيد. (ويأملون من القارئ أن يفهم أنهم يعنون الاشتقاق على يمين $x_0=0$ أي $f'(0+0)$).

ملاحظة 02: إذا كان f معرفًا على $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ ووجد كل من $f'(a+0)$ و $f'(b-0)$، أي المشتق على يمين a وعلى يسار b، فإننا نقول بغية التبسيط أن f يقبل الاشتقاق على $[a,b]$.

3.4.3 – المعنى الهندسي للمشتق:

ليكن Γ بيان التابع $y=f(x)$ في المستوى xoy كما في الشكل التالي:



ولتكن $P(x_0, f(x_0))$ و $Q(x, f(x))$ نقطتين من هذا البيان، عندما $x \to x_0$ فإن Q تقترب من P على البيان وبالتالي فإن القطعة $\overline{PQ}$ تؤول لتأخذ وضع المماس $\overrightarrow{PA}$ لبيان f عند P. فإذا كان $\overline{PQ}$ يصنع زاوية θ مع المحور الموجب ox فإن النسبة: $\tan\theta = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

وبالتالي فإن $f'(x_0)=\tan\alpha$ ، حيث α هي زاوية المماس مع المحور الموجب ox، أي أن الزاوية θ التي يصنعها $\overline{PQ}$ مع ox تؤول إلى الزاوية α التي يصنعها المماس مع ox عندما $x \to x_0$.

وبالتالي فإن مشتق f عند x_0 هو عبارة عن ميل المماس عند النقطة $P(x_0,y_0)$ ذات الفاصلة x_0.

إذن فالبحث عن مشتق تابع f عند نقطة x_0 يعني البحث عن مماس لبيان التابع f عند النقطة x_0.

يمكن أيضًا إعطاء المعنى الهندسي للمشتق على يمين (يسار) نقطة x_0 باعتبار نصف المماس الأيمن (ونصف المماس الأيسر) عند النقطة x_0،
إذا كان: $f'(x_0-0) \neq f'(x_0+0)$ ، فإن بيان f يمثل عندئذ نقطة زاوية عند $P(x_0,y_0)$ ، أي له مماسان عند P.

مثلا: ليكن $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$, $f:[-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$.

لدينا $f(x)=|x|\sqrt{1+x}$ وبالتالي فإنه من أجل $x_0=0$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\sqrt{1+x}}{x} = 1 = f'(0+0)$$

إذن f له مشتق على يمين $x_0=0$.

و

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x\sqrt{1+x}}{x} = -1 = f'(0-0)$$

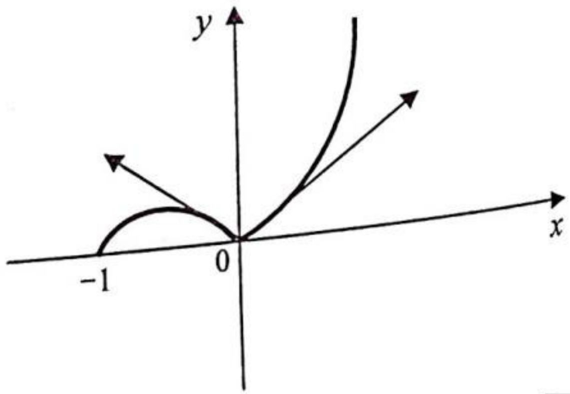
إذن f له مشتق على يسار $x_0=0$.

وحيث $f'(0+0) \neq f'(0-0)$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

وحسب المعنى الهندسي فإن لبيان f مماسين عند $x_0=0$،

مماس بنصف الربع الأول $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \Leftarrow \tan\alpha = 1$

ومماس بنصف الربع الثاني $\alpha = \dfrac{3\pi}{4} \Leftarrow \tan\alpha = -1$



4.4.3 – توسيع أو تمديد تعريف المشتق:

إذا اعتبرت النهايات في $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ ، نقول أن لـ f مشتقًا عند x_0 يساوي $+\infty$ (أو $-\infty$)، أي مشتق غير منته عند x_0 ، إذا (⇔) كان f مستمرًا عند x_0 وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ($-\infty$ أو)

وهذا يعني أن لبيان f مماس شاقولي عند $(x_0, f(x_0))$ أي إذا كان $f'(x_0)=0$ فإن المماس عند $(x_0, f(x_0))$ يوازي ox وإذا كان $f'(x_0)=\infty$ فإن المماس عند $(x_0, f(x_0))$ يوازي oy.

مثلا: ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} \;:\; x\geq 0\\ -\sqrt{|x|} : x<0\end{cases}$$

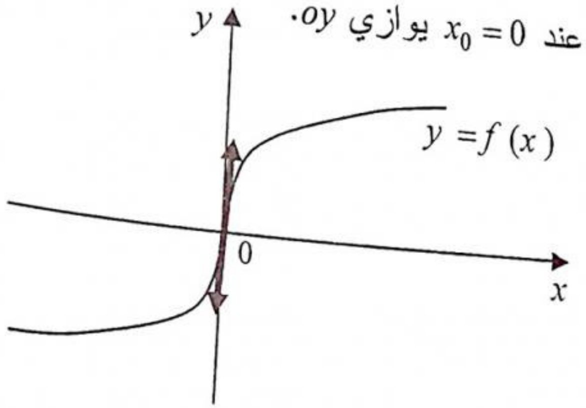
فإن لـ f مشتقًا غير منته عند $x_0=0$ لأن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-\sqrt{|x|}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-|x|}{x\sqrt{|x|}}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty$$

أي أن لـ f مماس عند $x_0=0$ يوازي oy.



5.4.3 – نظرية:

ليكن:

$$x_0\in I=[a,b]\,,\quad f:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow y=f(x)$$

عندئذ f يقبل الاشتقاق عند x_0 $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ f مستمر عند x_0.

($\not\Leftarrow$) يكفي إعطاء مثال مضاد على أن العكس غير صحيح، رأينا أن $f(x)=|x|$ مستمر عند $x_0=0$ ولكنه لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

كذلك f يقبل الاشتقاق على يمين x_0 (يسار x_0) $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ f مستمرًا على يمين x_0 (يسار x_0).

ملاحظة: النظرية السابقة لا تبقى صحيحة في حالة المشتقات غير المنتهية.

مثلاً: التابع:

$$f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=\begin{cases}1: x\in\,]0,1]\\ 0: x=0\end{cases}$$

ليس مستمرًا على يمين $x_0=0$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=1\neq f(0)=0$ ولكن مشتقه على يمين $x_0=0$ هو $+\infty$ لأن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1-0}{x-0}=+\infty$$

6.4.3 – المشتقات المتتابعة:

ليكن $f:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $x_0\in I$.

إذا كان f يقبل الاشتقاق عند x_0 فنرمز لمشتقه بـ $f'(x_0)$.

وإذا قبل f' بدوره مشتقا عند x_0 أي أن: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ موجودة فنرمز لهذه النهاية بـ $f^{(2)}(x_0)=f''(x_0)$ ونسميها المشتق الثاني لـ f عند x_0 وهكذا بالتدريج نعرف المشتق من المرتبة n لـ f عند x_0 والذي نرمز له بـ $f^{(n)}(x_0)$ وهو النهاية:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$ في حال وجودها.

ونصطلح على أن المشتق من المرتبة صفر (0) لـ f هو f نفسه أي أن: $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

تسمى المشتقات $f^{(0)},f^{(1)},\dots,f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة لـ f.

ونرمز لها أيضا بـ: $f'=\frac{df}{dx},\ f^{(2)}=\frac{d^2f}{dx^2},\dots,f^{(n)}=\frac{d^nf}{dx^n}$.

ملاحظة: يجب التمييز بين f^n الذي يعني الضرب $\underbrace{f\cdot f\cdots f}_{n}$ وبين $f^{(n)}$ الذي يعني المشتق من المرتبة n لـ f.

7.4.3 – نظرية:

ليكن $f,g:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $x_0\in I$.

فإذا كان f,g قابلين للاشتقاق عند x_0 فإن $(\Leftarrow)$ التوابع التالية: $f\pm g$، $f\cdot g$، $\frac{f}{g}\,(g(x_0)\neq 0)$، $(\alpha.f)\ \alpha\in\mathbb{R}$، كلها تقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا القواعد التالية:

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$
$$(f.g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$
$$(\alpha f)'=\alpha f'$$

البرهان:

(نذكّر أن التوابع $f\pm g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$ تكون معرفة على $D_f\cap D_g$)

لدينا حسب التعريف:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

(لأن f و g قابلان للاشتقاق ولذلك أمكن توزيع النهاية).

إذن النهاية موجودة ومنتهية فنرمز لها بـ $(f\pm g)'(x_0)$. أي أن:

$$(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

وحيث x_0 كيفية فإن هذا الأمر يتحقق عند كل نقطة من I ولذا نكتب اختصارًا:

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$

ونفس الشيء بالنسبة لـ:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x_0)\right)$$

وحيث g يقبل الاشتقاق عند x_0 فهو مستمر عند x_0 و f و g يقبلان الاشتقاق عند x_0 وبالتالي فكل المقادير الموجودة داخل القوس تقبل نهاية لما $x\to x_0$ ومنه يمكن توزيع رمز النهاية إلى كل حد داخل القوس ونجد أن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+$$
$$+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0)$$

والمقدار في الطرف الأيمن موجود ومنته وبالتالي فالنهاية موجودة والتي نرمز لها بالرمز $(f\cdot g)'(x_0)$ أي أن:

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

وحيث x_0 كيفي فنرمز اختصارًا بـ:

$$(fg)'=f'g+g'f$$

وأخيرًا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right)$$

ولنفس الأسباب المذكورة سابقًا فإن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g^2(x_0)}\left(f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)\right)$$

إذن النهاية موجودة ومنتهية وبالتالي فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

ونرمز اختصارًا بـ: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$.

نتيجة: يمكن البرهان بالتدريج على أنه إذا كان f و g يقبلان الاشتقاق حتى المرتبة n فإن:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$$
$$=c_n^0 f_g^{(n)}+c_n^1 f^{(n-1)}g'+\cdots+c_n^n fg^{(n)}$$

حيث $c_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

يسمى هذا الدستور بدستور لايبنز (Leibnitz) لاشتقاق الجداء.

8.4.3 – اشتقاق تابع مركب gof :

نظرية: ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$ ونعرف التابعين f و g كما يلي:

$$f:I\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ g:J\longrightarrow\mathbb{R}$$

بحيث $f(I)\cap J\neq\phi$، عندئذ يمكن تعريف gof بـ:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(I)\cap J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ولتكن $x_0\in I$ بحيث $f(x_0)\in f(I)\cap J$، عندئذ إذا كان f يقبل الاشتقاق عند x_0 وكان g يقبل الاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن gof يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا:

$$(gof)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)$$

البرهان: حسب التعريف:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(gof)(x)-(gof)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

وحيث f يقبل الاشتقاق عند x_0 فهو مستمر عند x_0 وبالتالي لما $x\to x_0$ فإن $f(x)\longrightarrow f(x_0)$، وحيث g يقبل الاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن نهاية كل عبارة

من العبارتين الموجودتين داخل القوس موجودة وبالتالي يمكن توزيع النهاية ونحصل على:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(gof)(x)-(gof)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{f(x)\to f(x_0)}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)$$

9.4.3 – مشتق تابع عكسي:

نظرية: إذا كان $f:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعًا مستمرًا ومتزايدًا تمامًا (أو مستمرًا ومتناقص تمامًا) فإنه:

إذا كان f يقبل الاشتقاق عند $x_0\in I$ و $f'(x_0)\neq 0$ فإن التابع العكسي f^{-1} يقبل الاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ ويعطى مشتقه بالعلاقة:

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$$

البرهان: حسب النظرية 3.3.3 فإنه لدينا:

$$\begin{aligned}f:I=[a,b]&\longrightarrow\big[f(a),f(b)\big]\\ x&\longrightarrow y=f(x)\end{aligned}$$

تقابلا وبالتالي f^{-1} موجود ولدينا:

$$\begin{aligned}f^{-1}:\big[f(a),f(b)\big]&\longrightarrow[a,b]\\ y&\longrightarrow x=f^{-1}(y)\end{aligned}$$

مستمر ومتزايد تمامًا وبالتالي:

$x=f^{-1}(y)\xrightarrow[y\to y_0]{}f^{-1}(y_0)=x_0$ أي أن $x\to x_0 \Leftarrow y\to y_0$.

وبالتالي حسب التعريف فإن:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\right)$$

$$=\frac{1}{f'(x_0)}$$

وحيث $f'(x_0)\neq 0$ فالنهاية موجودة ومنه $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

ونستنتج أن $(f^{-1})'(y_0)\neq 0$ أيضًا وأن $f'(x_0)=\frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$

5.3 – القيم الحدية (العظمى والصغرى):

1.5.3 – تعاريف: ليكن:

$$\begin{aligned}f:I\subseteq\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longrightarrow y=f(x)\end{aligned}$$ معرفًا على I ولتكن $x_0\in I$.

نقول أن للتابع f قيمة عظمى مطلقة عند النقطة x_0 إذاا ($\Leftrightarrow$) تحقق الشرط:

$$\forall x\in I: f(x)\le f(x_0)$$

ونقول أن لـ f قيمة صغرى مطلقة عند النقطة x_0 إذاا ($\Leftrightarrow$) تحقق الشرط:

$$\forall x\in I: f(x)\ge f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بصورة مطلقة ودون أي قيد على $x\in I$.

ونقول أن للتابع f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذاا ($\Leftrightarrow$) تحقق الشرط:

$$\exists\delta_1>0: |x-x_0|<\delta_1\Rightarrow f(x)\le f(x_0)$$

أي أنه يوجد مجال $L=]x_0-\delta_1,x_0+\delta_1[$ مركزه x_0 ويتحقق عليه الشرط السابق من أجل كل $x\in L$.

ونقول أن لـ f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذاا ($\Leftrightarrow$) تحقق الشرط:

$$\exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بالنسبة لتلك العناصر x القريبة من x_0 فقط.

ونسمي $f(x_0)$ قيمة هذه القيمة العظمى أو الصغرى عند x_0 ، فالقيمة العظمى المطلقة أو النسبية أو القيمة الصغرى المطلقة أو النسبية $f(x_0)$ هي قيمة من قيم $f(x)$.

مثال: ليكن:

$$f : I = [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^4 - x^5$$

باستعمال جدول للتغيرات نحصل على:

x	-2		0		$\frac{4}{5}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	48	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{4}{5}\right)^5$	$\searrow$	-16

فنرى أن:

$$\forall x \in [-2,2] : f(x) \le f(-2) = 48$$
$$f(x) \ge f(2) = -16$$

إذن f يقبل قيمة عظمى مطلقة عند $x_0 = -2$ ويقبل قيمة صغرى مطلقة عند $x_0 = 2$.

وعندما يكون x قريبا من $x_0 = 0$ ، أي عندما $\exists \delta > 0 : |x - 0| < \delta$ ، أي يوجد $0 < \delta \in$ مجال مركزه (0): $]-\delta, \delta[\subset I$.

مثلا $\delta = \frac{1}{2}$ فإن: $f(x) \ge f(0) = 0$.

ومنه f يقبل قيمة صغرى نسبية عند $x_0 = 0$.

وعندما يكون x قريبا من $x_0 = \frac{4}{5}$ أي $\exists \delta > 0 : \left|x - \frac{4}{5}\right| < \delta$.

أي يوجد مجال من الشكل $\left]\frac{4}{5} - \delta, \frac{4}{5} + \delta\right[$ مركزه $\frac{4}{5}$.

مثلا $\delta = \frac{1}{5}$ فإن: $f(x) \le f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^5$. ومنه f يقبل قيمة عظمى نسبية عند $x_0 = \frac{4}{5}$.

ملاحظة: لاحظ أنه لا يوجد مجال مفتوح مركزه (2) أو (-2) أي:

$L_1 =]2-\delta, 2+\delta[$ و $L_2 =]-2-\delta, -2+\delta[$ يحققان:

$L_1 \subset I$ و $L_2 \subset I$ أي أن: $L_1 \not\subset I$ و $L_2 \not\subset I$ لأن:

$$\begin{cases} \forall \delta > 0 : 2 < 2 + \delta \\ \forall \delta > 0 : -2 - \delta < -2 \end{cases}$$

يمكن التعرف على القيم الحدية بطريقة أخرى:

إذا كان f معرفًا على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ووجد المشتق على يمين a أي $f'(a+0)$ ووجد المشتق على يسار b أي $f'(b-0)$ فإنه لدينا ما يلي:

لـ f قيمة عظمى نسبية عند a إذا كان: $f'(a+0) < 0$

لـ f قيمة عظمى نسبية عند b إذا كان: $f'(b-0) > 0$

لـ f قيمة صغرى نسبية عند a إذا كان: $f'(a+0) > 0$

لـ f قيمة صغرى نسبية عند b إذا كان: $f'(b-0) < 0$

وعمومًا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لتابع f فإننا نعين من أجل ذلك تلك النقاط x حيث:

أ• ينعدم المشتق
ب• لا يوجد المشتق
ج• يكون مجال تعريف التابع f نصف مفتوح.

إن هذه هي قيم المتغير x المرشحة كي تكون لـــ f قيمة حدية (عظمى أو صغرى) نسمي هذه النقاط x بالنقاط الحرجة لبلوغ f قيمة حدية، ولكي نقرر أيٌّ هذه النقاط تعطى قيم حدية (عظمى أو صغرى) علينا أن نقارن قيم f في هذه النقط مع بعضها ومع حلول النقط المجاورة.

مثال: ليكن:

$$f:[-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)=\left|4-x^2\right|$$

أوجد القيم العظمى والصغرى النسبية والمطلقة إن وجدت:

الحل: لدينا:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 : |x| \le 2 \\ x^2-4 : 2<|x| \le 3 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x : x \in [-2,2] \\ 2x \ \ : x \in [-3,-2[\cup]2,3] \end{cases}$$

فالنقاط الحرجة هي إذن:

أ• $x=0$ حيث ينعدم المشتق

ب• $x=\pm 2$ حيث المشتق غير موجود لأن:

$$f'(2-0)=-4 \neq f'(2+0)=4$$
$$f'(-2-0)=-4 \neq f'(-2+0)=4$$

ج• $x=\pm 3$ طرفا مجال التعريف لـــ f.

إن قيم f الموافقة هي:

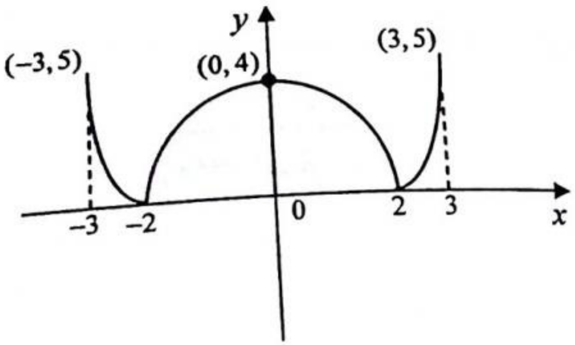
$$f(0)=4 \ , \ f(2)=f(-2)=0 \ , \ f(3)=f(-3)=5$$

وهناك قيم صغرى نسبية ومطلقة عند $x=\pm 2$

وقيم عظمى نسبية ومطلقة عند $x=\pm 3$

وهناك قيمة عظمى نسبية وليست مطلقة عند $x=0$.

ويمكن الحصول على كل هذه النتائج من جدول التغيرات للتابع f وحيث $f(x) \ge 0$ فإن بيانه هو:



ملاحظة: يجب عدم الخلط بين القيمة العظمى لتابع f والحد الأعلى له وبين القيمة الصغرى لتابع f والحد الأدنى له.

فمثلا: إذا كان $f:]1,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ معرفًا بـــ: $f(x)=2x$ فإنه:

وبالتالي: $\forall x \in]1,2[: \ 1<x<2 \Leftrightarrow 2<2x<4 \Leftrightarrow 2<f(x)<4$

$$\inf_{x \in]1,2[} f(x)=2 \ \text{و} \ \sup_{x \in]1,2[} f(x)=4$$

ولكن لا توجد قيمة عظمى ولا قيمة صغرى لـــ f على $]1,2[$.

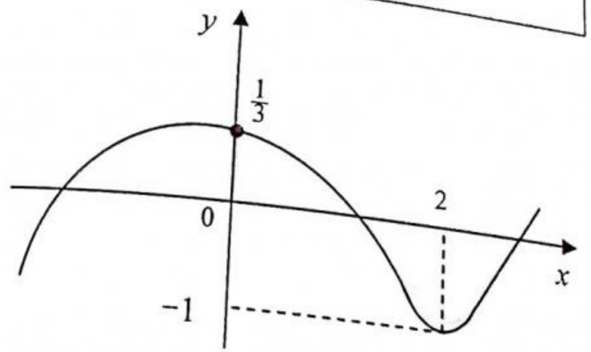
مثال آخر: إذا كان:

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$$

فإن:

$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



فهناك قيمة عظمى نسبية لــ f عند النقطة $x_0 = 0$ وقيمتها $f(0) = \frac{1}{3}$ وهنا قيمة صغرى نسبية عند $x_0 = 2$ وقيمتها $f(2) = -1$ ، ورغم ذلك فليس لـ f حد أعلى أو حد أدنى. أي: $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ و $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ غير موجودين.

2.5.3 - نظرية: ليكن $f: I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

إذا كان f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ وكان لــ f نهاية عظمى نسبية (أو صغرى نسبية) عند $x_0 \in]a,b[$ فإن: $f'(x_0) = 0$.

(مع ملاحظة أن x_0 نقطة داخلية من المجال $[a,b]$ أي $a < x_0 < b$)

البرهان: نفرض أن f يملك نهاية صغرى نسبية عند x_0 (ونبرهن بنفس الطريقة عندما يكون لــ f نهاية عظمى نسبية) إذن:

$$\exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$
$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$$

وبالتالي فإن:

$$(13) \ldots\ldots\ldots \quad f'(x_0 + 0) = \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (x - x_0 > 0 \text{ لأن})$$

$$(14) \ldots\ldots \quad f'(x_0 - 0) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (x - x_0 < 0 \text{ لأن})$$

وحيث f يقبل الاشتقاق عند x_0 فإن المشتقين $f'(x_0 + 0)$ و $f'(x_0 - 0)$ موجودان ويحققان:

$$f'(x_0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$$

وبالتالي فإن:

$f'(x_0) \geq 0$ حسب (13) و $f'(x_0) \leq 0$ حسب (14)

ومنه $f'(x_0) = 0$.

ملاحظة هامة: نحذر القارئ من أن يرى في النظرية أكثر مما تنص عليه، فهي لا تقول ماذا يحدث إذا ظهرت قيمة عظمى أو صغرى في الحالات التالية:

أ- عند نقطة x_0 حيث لا يوجد مشتق عند x_0.

مثلا: $f(x) = |x|$ يقبل نهاية صغرى عند $x_0 = 0$ دون أن يقبل مشتقا عند $x_0 = 0$.

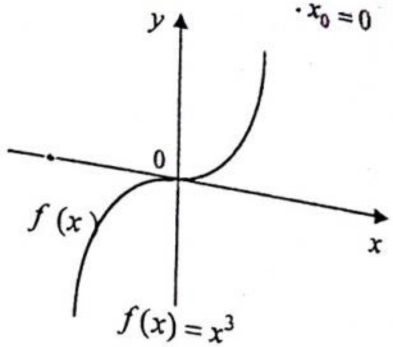
ب- عند طرفي المجال $[a,b]$ المعرف عليه f.

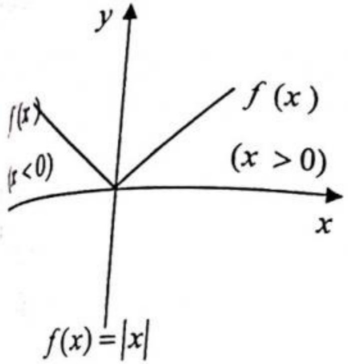
مثلا: التابع المذكور في المثال بعد 1.5.3 مباشرة له قيمة عظمى عند $x_0=-2$

ولكن $f'(-2)\neq 0$.

كما أن النظرية لا تقول أنه يلزم أن يكون للتابع قيمة عظمى أو قيمة صغرى في كل نقطة ينعدم عندها المشتق.

مثلا: $f(x)=x^3$ فإن $f'(0)=0$ دون وجود قيمة عظمى أو صغرى عند $x_0=0$.





3.5.3 – نظرية رول (Rolle):

ليكن: $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث يكون:

1• f مستمرًا على $[a,b]$

2• f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

3• $f(a)=f(b)$

عندئذ توجد نقطة $c\in]a,b[$ تحقق $f'(c)=0$

البرهان:

أ) إذا كان f ثابتا على I: $\forall x\in I : f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$

فإن $f'(x)=0$ وبالتالي كل نقطة $c\in I$ تحقق المطلوب.

ب) نفرض الآن أن f غير ثابت على I، عندئذ كون f مستمر على المجال المغلق والمحدود I فإن f يبلغ حديه الأعلى والأدنى على I. أي:

$$\exists x_0, x_1\in[a,b] : f(x_0)=\inf_{x\in I} f(x)=m\ ,\ f(x_1)=\sup_{x\in I} f(x)=M$$

عندئذ أحد الحدين M أو m يخالف القيمة $f(a)=f(b)$ لأنه لو كان $f(a)=f(b)=m=M$ لأصبح f ثابتًا.

لنفرض أن $f(a)=f(b)\neq m$ عندئذ: $\exists x_0\in]a,b[: f(x_0)=m$

وتكون m نهاية صغرى نسبية (حسب التعريف 1.5.3).

وحيث f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ فإن $f'(x_0)$ موجود، إذن حسب النظرية 2.5.3 فإن $f'(x_0)=0$، أي توجد $c=x_0\in[a,b]$ تحقق المطلوب.

حالة خاصة: إذا كان $f(a)=f(b)=0$ أي a و b جذران للمعادلة $f(x)=0$، فإن نظرية رول في هذه الحالة تعني أنه بين كل جذرين a و b للمعادلة $f(x)=0$، يوجد جذر c على الأقل للمعادلة $f'(x)=0$.

مثال: برهن أن المعادلة $x^3+x+5=0$ تقبل جذرًا حقيقيًا واحدًا (الجذران الآخران عقديان).

الحل: بأخذ $f(x)=x^3+x+5$ نرى أن f يحقق الشرطين (1) و (2) من نظرية رول على أي مجال $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ وأنه:

$$\forall x\in[a,b] : f'(x)=3x^2+1>0$$

أي $f'(x)\neq 0$ (تذكر أن $A\Rightarrow B$ تكافئ $\bar{B}\Rightarrow\bar{A}$). إذن للمعادلة $f(x)=0$ جذر حقيقي واحد على الأكثر. (لأنه لو كان لـ $f(x)=0$ جذران لوُجِدَ جذرًا لـ $f'(x_0)=0$). وحيث أن f يغير إشارته من السالب إلى الموجب (مثلا: $f(-2)f(1)<0$) فإن بيان f يقطع المحور ox على الأقل مرة أي $f(x)=0$ لها على الأقل جذر حقيقي وبأخذ التقاطع بين الجوابين:

على الأكثر يوجد حل وعلى الأقــل يوجــد حــل للمعادلــة $f(x)=0$ فــإن لـ $f(x)=0$ حل حقيقي واحد فقط.

ملاحظة: إن عكس الحالة الخاصة من نظرية رول ليس صحيحًا.

فمثلاً $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=x^2+1\neq 0$ ورغم ذلك فإن:

$$f'(x)=2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

أي أن وجود جذور لـ $f'(x_0)=0$ لا يعني وجود جذور لـ $f(x)$.

4.5.3 – نظرية التزايدات المنتهية:

ليكن $f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث يكون:

1• f مستمر على $[a,b]$ 2• f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

عندئذ توجد نقطة $c\in\,]a,b[$ تحقق:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

البرهان: نعتبر التابع المساعد:

$$\varphi:I\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

فنرى أن φ يحقق كل شروط نظرية رول على I. ومنه توجد $c\in\,]a,b[$ تحقق $\varphi'(c)=0$.

وحيث: $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ أي:

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ومنه المطلوب.

نتيجة 01: إذا كان $x_0\in I$ مثبت فإنه:

$$\forall x\in I : \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)$$

حيث c عدد محصور تمامًا بين x_0 و x.

فإذا كانت $\forall x\in I : f'(x)=0$ فإن:

$$\forall c\in\,]a,b[\, : f'(c)=0$$

ومنه:

$$\forall x\in I : f(x)=f(x_0)$$

أي أن f ثابت على $I=[a,b]$.

ملاحظة: إن انعدام المشتق لا يؤدي بالضرورة إلى أن f ثابت ما لم يكن f مستمرًا.

مثلا: ليكن:

$$g:]0,1[\cup]2,3[\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow\begin{cases}1 : x\in\,]0,1[\\ -1 : x\in\,]2,3[\end{cases}$$

إن $g'(x)=0$ ورغم ذلك فإن g ليس ثابتًا لأنه غير مستمر.

نتيجة 02: إذا كان $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرًا وقابلاً للاشتقاق على $]a,b[$

عندئذ:

إذا كان $\forall x\in\,]a,b[\, : f'(x)>0$ فإن f متزايد على $[a,b]$

إذا كان $\forall x\in\,]a,b[\, : f'(x)<0$ فإن f متناقص على $[a,b]$

لأنه إذا كان $x_1,x_2\in[a,b]$ بحيث $x_1<x_2$ (وبنفس الطريقة لما $x_2<x_1$).

عندئذ نظرية التزايدات المنتهية على $[x_1,x_2]$ تعطي:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),\quad c\in]x_1,x_2[$$
$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

وحيث $x_2-x_1>0$ فإن إشارة $f(x_2)-f(x_1)$ من نفس إشارة $f'(c)$.

5.5.3 – نظرية التزايدات المعممة:

ليكن التابعان $f,g:I=[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث:

1• g و f مستمران على I

2• g و f يقبلان الاشتقاق على $]a,b[$

3• $\forall x\in]a,b[\,:g'(x)\neq 0$

عندئذ يوجد $c\in]a,b[$ يحقق:

$$(15)\ \ldots\ldots\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

البرهان: إن $g(b)\neq g(a)$ لأنه لو كان $g(b)=g(a)$ لأصبح g يحقق كل شروط نظرية رول على $[a,b]$ ومنه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $g'(c)=0$ وهذا يُناقض كون $\forall x\in]a,b[\,:g'(x)\neq 0$ وبالتالي وحيث $g'(c)\neq 0$ فإن طرفي العبارة (15) موجودان.

لنعتبر الآن التابع المساعد المعرف كما يلي:

$$\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow\varphi(x)=f(x)-f(a)-\big(g(x)-g(a)\big)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

فنرى أن φ يحقق جميع شروط نظرية رول ومنه يوجد $c\in]a,b[$ يحقق:

$$\varphi'(c)=0$$

ولكن:

$$\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

إذن:

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ومنه:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ملاحظة: نلاحظ أنه بوضع $g(x)=x$ في نظرية التزايدات المعممة، تنتج نظرية التزايدات المنتهية وبوضع $f(b)=f(a)$ في نظرية التزايدات المنتهية تنتج نظرية رول ومنه فإن التزايدات المعممة هي تعميم لنظرية التزايدات المنتهية والتي هي بدورها تعميم لنظرية رول. ومنه نظرية التزايدات المعممة هي تعميم لنظرية رول.

6.3 – دراسة حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$:

1.6.3 – نظرية (قاعدة لوبيتال):

ليكن التابعان $f,g:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث الشروط التالية محققة:

1• $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}g(x)=0$

2• f,g يقبلان الاشتقاق على $]a,b[$

3• $\forall x\in]a,b[\,:g'(x)\neq 0$

4• النهاية: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ موجودة حيث $k\in[-\infty,+\infty]$ عندئذ تكون:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

البرهان: نمدد استمرار f و g على يمين a وذلك بوضع:

$$g(a)=\lim_{x\xrightarrow{>}a} g(x)=0$$

$$f(a)=\lim_{x\xrightarrow{>}a} f(x)=0$$

ومن أجل $x\in[a,b[$ يصبح f و g يحققان شروط نظرية التزايدات المنتهية (5.5.3) على المجال $I=[a,x[$.

وبالتالي يوجد $c\in]a,x[$ يحقق:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

وحيث $a<c<x$ فإنه لما $x\xrightarrow{>}a$ فإن $c\xrightarrow{>}a$.

وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\xrightarrow{>}a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

ملاحظات:

•1 ندرس الحالة لما $x\xrightarrow{<}b$ بطريقة مشابهة، أو عندما $x\to x_0$ حيث $x_0\in]a,b[$.

•2 إذا كانت $\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ فنطبق نظرية لوبيتـــال من جديـد على f' و g' أي أنه يمكن تطبيق النظرية عدة مرات متتالية في حالة توفر شروطها.

•3 تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

•4 تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x\to\infty} f(x)=0\ ;\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0$

ونضع في هذه الحالة: $t=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{t}$

ولما $x\to\infty$ فإن $t\to 0$ ويكون:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{t\to0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{t\to0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

وبهذا نعود للحالة الأولى للنظرية، لأنه يكون في هذه الحالة:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{-1}{t^2}\right)f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{-1}{t^2}\right)g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

•5 يتم إيجاد النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ عندما تكون حالة عدم تعيين بتطبيق قاعدة لوبيتال إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة حسب النظرية.

أما إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة فإن هذا لا يعني إطلاقًا أن النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة.

مثلا: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$ $\left(\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x\xrightarrow[x\to\infty]{}0\right)$

في حين أن النهاية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\cos x}{1}\right)$$

غير موجودة.

مثال: لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

نرى أنه بأخذ $f(x)=1-\cos x$ و $g(x)=\sin x$.

فإن $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ و $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

فنختار أي مجال $]a,b[$ تتحقق عليه جميع شروط نظرية لوبيتال ويشمل النقطة (0).

فلو أخذنا مثلا المجال $\left]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ نرى أن جميع شروط النظرية محققة عليه.

وأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0$$

- يمكن ردّ الحالتين $0\cdot\infty$ و $\infty-\infty$ لعدم التعيين إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق النظرية.

مثال: لحساب $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x\right)$.

نلاحظ أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x\right)=\infty-\infty$ لذا نكتب:

$$\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x=\frac{1-\sin}{\cos x}\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{}\frac{0}{0}$$

وعليه نأخذ $f(x)=1-\sin x$ و $g(x)=\cos x$.

ونطبق النظرية على $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ مثلا لأن $g'(x)\neq 0$ على هذا المجال وبقية الشروط محققة عليه. وحيث:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{\pi}{2}}\frac{+\cos}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$$

إذن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x\right)=0$.

- يمكن ردّ حالات عدم التعيين 0^0، 1^∞، ∞^0 إلى الحالة $\infty\cdot 0$ وبالتالي إلى $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وذلك باستعمال العلاقة $y^x=e^{x\log y}$ (سنقدم التابع log لاحقاً).

مثال: لحساب $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ ، حيث k عدد ثابت.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=1^{+\infty}$ فنكتب:

$$\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^{x\log\left(1+\frac{k}{x}\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}e^{+\infty\cdot 0}$$

ونطبق النظرية على $f(x)=\log\left(1+\frac{k}{x}\right)$ و $g(x)=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac{k}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{k}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-k}{x^2}}{1+\frac{k}{x}}\right)}{\frac{-1}{x^2}}=k$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$.

مثال: أحسب $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{2x^2}$.

و $f(x)=1+x-e^x$ و $g(x)=2x^2$ فإن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ وهي

الحل: نعتبر f و g في المجال على 1.6.3 نطبق نظرية لوبيتال
حالة عدم تعيين لإزالتها نطبق نظرية لوبيتال $x_0=0$ ويحقق شروط
$I=]0,1[$ ، - مثلا - أو أي مجال آخر تظهر فيه 0
النظرية فنجد أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$$

فنطبق النظرية من جديد على f' و g' و I ونجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{4}=\frac{-1}{4}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-1}{4}$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{4}$.

ملاحظة: الحالات التالية لا تمثل حالات عدم تعيين:

•1 إذا كان $a\in\mathbb{R}$ فإن $a+(+\infty)=+\infty$; $a-(+\infty)=-\infty$

•2 $a\cdot(+\infty)=+\infty$ عندما $a>0$ و $a\cdot(+\infty)=-\infty$ عندما $a<0$

•3 $a\cdot(-\infty)=-\infty$ عندما $a>0$ و $a\cdot(-\infty)=+\infty$ عندما $a<0$

•4 $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ و $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

•5 $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

1• أحسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2

2• نضع : $w_n = u_n - v_n \;,\; n \in \mathbb{N}$

أ – تحقق أن (w_n) هي متتالية هندسية مع تحديد أساسها r وحدّها الأول w_0

ب – أكتب (w_n) بدلالة n

ج – برر تقارب (w_n) واحسب نهايتها

3• برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة وأن (v_n) متزايدة

4• نضع $t_n = u_n + 2v_n \;,\; n \in \mathbb{N}$ ، برهن بالتراجع أن $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 0$

5• أ – استنتج باستعمال السؤالين 2.ب و 4 عبارتي (u_n) و (v_n) بدلالة n

ب – حدد نهايتي المتتاليتين (u_n) و (v_n)

تمرين 13 :

لتكن $(u_n)_n$ متتالية موجبة تمامًا، نفرض أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$.

1• ما هي إشارة ℓ

2• برهن أن :

أ – إذا كان $\ell < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

ب – إذا كان $\ell > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

ج – إذا كان $\ell = 1$ فإن كل النتائج ممكنة

تمرين 14 :

برهن بطريقتين مختلفتين أن :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

تمارين محلولة حول الفصل الثالث

تمرين 1 :

احسب النهايات التالية إن وُجدت :

1• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\log x + x}$

2• $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \log x \log(\log x)$

3• $\lim\limits_{x\to 0} x\, E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5• $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x^2)e^{-x^2}$

6• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{5x+2}$

7• $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-3x+2}$

8• $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

9• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\log(1+x) - \log(1+x^2)\right)$

10• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$

11• $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

12• $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}$

13• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

الحل :

•1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\log x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\dfrac{\log x}{x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\log x}{x}+1} = 1$$

•2

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \log x \log(\log x)$$

لدينا $\lim_{y\to 0} y\log y=0$ ومنه : بوضع $y=\log x$ فإن $y\to 0$ ومنه :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}\log x\log(\log x)=\lim_{y\xrightarrow{>}0} y\log y=0$$

•3 $\lim\limits_{x\to 0} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا :

$$\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$$

من أجل $x>0$، لدينا (بضرب المتراجحة في x) :

$$1-x<x\,E\left(\frac{1}{x}\right)\le 1\Rightarrow\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\,E\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

من أجل $x<0$: لدينا (بضرب المتراجحة في x) :

$$1\le x\,E\left(\frac{1}{x}\right)\le 1-x\Rightarrow\lim_{x\xrightarrow{<}0}x\,E\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

ومنه :

$$\lim_{x\to 0}x\,E\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

•4 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

من أجل $x>1$, $0<\frac{1}{x}<1$ ومنه :

$$E\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow x\,E\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}x\,E\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

•5 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\log(1+x^2)e^{-x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\log(1+x^2)+\log e^{-x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\log(1+x^2)-x^2}$$

نضع $x=\frac{1}{y}$، لما $x\to+\infty$ فإن $y\to 0$ ومنه :

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2}=\lim_{y\to 0}e^{\log\left(1+\frac{1}{y^2}\right)-\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to 0}e^{\log(1+y^2)-\log y^2-\frac{1}{y^2}}$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{\log(1+y^2)-\frac{y^2\log y^2+1}{y^2}}=0$$

لأن $\lim\limits_{y\to 0}y^2\log y^2=0$.

•6 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+7}}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$$

•7 $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

•8 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$$

نضع $\tan\frac{x}{2}=y$.

ومنه لما $x\to 0$ فإن $y\to 0$. ويمكن البرهان بسهولة أن :

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ومنه :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{(1+t^2)^2}{2t^2}-\frac{1+t^2}{2t^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}(1+t^2)=\frac{1}{2}$$

•9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\log(1+x)-\log(1+x^2)\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\log(1+x)^2-\log(1+x^2)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\log\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

•10 لدينا:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}=\left(\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}\right)$$

$$=\frac{2x^m}{x^n\left(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}\right)}$$

$$=\frac{2x^{m-n}}{\left(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}\right)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}$$

من جهة أخرى نعلم أن: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}=1$ ومنه درا

نهاية التابع f عند 0 هي نفسها دراسة نهاية التابع x^{m-n} عند 0.

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}=\begin{cases}0 & : m>n\\ 1 & : m=n\end{cases}$$

تبقى الحالة الثالثة: من أجل $m<n$ فإن $k=n-m>0$ لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^{n-m}(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^k(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})}=\begin{cases}+\infty & : k\ pair\\ +\infty & : k\ impair\ et\ x\xrightarrow{>}0\\ -\infty & : k\ impair\ et\ x\xrightarrow{<}0\end{cases}$$

•11 لدينا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}h^k-x^n}{h}$$

حيث $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ ، ومنه

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C_n^0x^nh^0+C_n^1x^{n-1}h^1+\ldots+C_n^nx^0h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

.12 لدينا:

$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}=\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}\,\frac{x-\alpha}{x-\alpha}=\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\,\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}=\lim_{h\to 0}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\,\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\,\frac{1}{\frac{x^n-\alpha^n}{x-\alpha}}\right)$$

$$=\left((n+1)\alpha^n\right)\frac{1}{n\alpha^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\alpha$$

13• لدينا:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1\right)}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$$

تمرين 2:

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع مستمر عند $x_0=0$ وعند $x_1=1$، ويحقق $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(x^2)$، برهن أن f ثابت.

الحل:

لدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=f\left((-x)^2\right)=f(x^2)=f(x)$.

ومنه f زوجي. ندرس على نصف المجال: $[0,+\infty[$

من أجل $0<x$:

$$\lim_{n\to+\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1)$$

من جهة أخرى:

$$f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)=f\left(x^{\frac{1}{2^{n-1}}}\right)=\cdots=f(x)\ \Rightarrow\ f(x)=f(1)$$

ومن أجل $x=0$ لدينا:

$$f(0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=f(1)\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}:f(x)=f(1)$$

تمرين 3:

ليكن التابع:

$$f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$$

1) برهن أن f يقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=0$ وأعطي عبارة التمديد ولتكن g.

2) برهن أن g يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لكن g' غير مستمر عند الصفر.

الحل :

لدينا : $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$ ، لأن $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ و $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$.

ومنه f يقبل التمديد بالاستمرار عند 0. وبالتالي عبارة g هي :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) : x\in\mathbb{R}^* \\ 0 \quad : x=0\end{cases}$$

•2 $\forall x\in\mathbb{R}^* \; ; \; g'(x)=f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

ونعلم أنه باختيار متتاليتين $y_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}$, $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{3}+2n\pi}$

مثلا، فإن : $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, $y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

لكن $\cos\frac{1}{x_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{y_n}\xrightarrow{}\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\cos\frac{1}{x}$ لا تملك نهاية عند 0 ومنه g' غير مستمر عند 0.

تمرين 4 :

ادرس قابلية الاشتقاق للتابع :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & : x\neq1\\ 1 & : x=1\end{cases}$$

الحل :

لدينا : $\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=\dfrac{|x|\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\dfrac{|x||x-1|}{x-1}$

ومنه من أجل $x>1$ لدينا $\dfrac{|x||x-1|}{x-1}=x$.

ومنه f قابل للاشتقاق ومستمر.

من أجل $x<1$:

$$\frac{|x||x-1|}{x-1}=-x$$

ومنه f مستمر وقابل للاشتقاق.

ومنه يبقى دراسة الاشتقاق عند $x_0=1$:

لدينا :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\xrightarrow{>}1}x=1$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\xrightarrow{<}1}(-x)=-1$$

ومنه f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=1$.

تمرين 5 :

ليكن التابع :

$$f(x)=\begin{cases}x^p\sin\dfrac{1}{x} & : x\neq0\\ \alpha & : x=0\end{cases}\qquad p\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

ادرس حسب قيم p و α استمرار التابع f عند $x_0=0$.

الحل :

من أجل $p=0$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن f غير مستمر، لأن $\sin\frac{1}{x}$ لا تملك نهاية عند $x_0=0$.

من أجل $p\in\mathbb{N}^*$ و $\alpha\in\mathbb{R}^*$، فإن f غير مستمر لأن :

$$\lim_{x\to0} x^p\sin\frac{1}{x}=0\neq\alpha\neq0$$

من أجل $p\in\mathbb{N}^*$ و $\alpha=0$ فإن f مستمر لأن :

$$\lim_{x\to0} x^p\sin\frac{1}{x}=0=\alpha$$

تمرين6:

حدد العددين $a,\ b\in\mathbb{R}$ بحيث يكون التابع:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & : 0\le x\le 1\\ ax^2+bx+1 & : x>1\end{cases}$$

قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

الحل:

لكي يكون f قابل للاشتقاق يجب أن يكون مستمرا (الاستمرار هنا شرط لازم وغير كافي) وعليه فإن:

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}=f(x)=f(1)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to1\\<}}\sqrt{x}=1=\lim_{\substack{x\to1\\>}}(ax^2+bx+1)=a+b+1=1........(*)$$

من جهة أخرى يجب أن تكون المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار متساويتين، ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{(ax^2+bx+1)-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{ax^2+bx}{x-1}$$

نستعمل أوبيتال نجد:

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{ax^2+bx}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{2ax+b}{1}=2a+b=\frac{1}{2}........(**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد: $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

تمرين7:

نعرف التابع :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3(x^4-16)}{2(x^3-8)}} & : x>2\\ x & : x\le 2\end{cases}$$

ادرس استمرارية f على $\mathbb{R}$.

الحل :

واضح أن f مستمر على $\mathbb{R}-\{2\}$ لأنه مجموع وتركيب وقسمة توابع مستمرة على $\mathbb{R}-\{2\}$.

يبقى دراسة الاستمرار عند $x_0=2$، لدينا :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}2}\sqrt{\frac{3(x^4-16)}{2(x^3-8)}}=\lim_{x\xrightarrow{>}2}\sqrt{\frac{3(x-2)(x+2)(x^2+4)}{2(x-2)(x^2+2x+4)}}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}2}\sqrt{\frac{3(x+2)(x^2+4)}{2(x^2+2x+4)}}=2$$

ومنه : $\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2} x=2$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = f(2) = 2$$

ومنه f مستمرة عند $x_0 = 2$، ومنه f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين8:

نعرف التابع :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 4x & : x < 0 \\ 0 & : x = 0 \\ (x^2+4)\sin x & : x > 0 \end{cases}$$

1• برهن أن g يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2• أوجد عبارة $g'(x)$.

3• برهن أن g' مستمر على $\mathbb{R}$.

4• برهن أن المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا على المجال $]0,\pi[$.

الحل :

1• واضح أن g قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مجموع وجداء توابع قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، يبقى دراسة الاشتقاق عند $x_0 = 0$:

لدينا :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{(x^2+4)\sin x}{x} = 4$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x^3+4x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} (x^2+4) = 4 \Rightarrow g'(0) = 4$$

ومنه g يقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2• عبارة $g'(x)$ هي :

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4 & : x < 0 \\ 4 & : x = 0 \\ 2x\sin x + (x^2+4)\cos x & : x > 0 \end{cases}$$

3• استمرار g' :

واضح أن g' مستمر على $\mathbb{R}^*$، ويبقى دراسة الاستمرار عند $x_0 = 0$.

لدينا :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2x\sin x + (x^2+4)\cos x\right) = 4$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} g'(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} (3x^2+4) = 4$$

ومنه :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} g'(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} g'(x) = g'(0) = 4$$

ومنه g' مستمر على $\mathbb{R}$.

4• نبرهن أن المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $]0,\pi[$:

لدينا g مستمر على $[0,\pi]$ وقابل للاشتقــاق على $]0,\pi[$ ويحقــق $g(0) = g(\pi) = 0$، ومنه كل شروط نظرية رول محققة وبالتالي :

$$\exists c \in]0,\pi[: g'(c) = 0$$

تمرين9:

ليكن a عددا حقيقيا و $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا قابلا للاشتقاق، على المجال $]a,+\infty[$ ويحقق $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$، نعرف التابع:

$$g(x) = \begin{cases} f(a + \frac{1}{x} - 1) & : 0 < x < 1 \\ f(a) & : x = 0 \end{cases}$$

1. اثبت أن التابع g مستمر على $[0,1]$

2. أثبت أن التابع g قابل للاشتقاق على المجال $]0,1[$، وعين g' التابع المشتق.

3. استنتج وجود نقطة $k\in]a,+\infty[$ بحيث $g'(k)=0$.

الحل:

لدينا التابع g مستمر على المجال $]0,1[$ لأنه مركب من تابعين مستمرين هما f و $x\mapsto a+\frac{1}{x}-1$، من جهة أخرى:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(a+\frac{1}{x}-1)=\lim_{y\to+\infty} f(y)=f(a)=g(0)$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} g(x)=f(a+1-1)=f(a)=g(1)$$

ومنه g مستمر على $[0,1]$.

2. لدينا:

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}(a+\frac{1}{x}-1)=a \quad,\quad \lim_{x\xrightarrow{>}0}(a+\frac{1}{x}-1)=+\infty$$

وبما أن التابع $x\mapsto a+\frac{1}{x}-1$ مستمر ومتناقص تماما فإن $\forall x\in]0,1[:(a+\frac{1}{x}-1)\in]a,+\infty[$، ومنه g قابل للاشتقاق على $]0,1[$ لأنه تركيب تابعين قابلين للاشتقاق وهما f على $]a,+\infty[$ و $x\mapsto a+\frac{1}{x}-1$ على $]0,1[$، ولدينا:

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'(a+\frac{1}{x}-1)$$

3. نلاحظ أن g يحقق شروط نظرية رول، أي:

- g مستمرا على $[0,1]$

- g قابلا للاشتقاق على $]0,1[$
- $g(0)=g(1)=f(a)$

عندئذ: $\exists c\in]0,1[: g'(c)=0$، أي: $-\frac{1}{c^2}f'(a+\frac{1}{c}-1)=0$

ومنه $f'(a+\frac{1}{c}-1)=0$، وبما أن $c\in]0,1[$ فإن $(a+\frac{1}{c}-1)\in]a,+\infty[$

وبالتالي يكفي أخذ $k=a+\frac{1}{c}-1$

تمرين10:

برهن أن: $\forall 0<x<y:\ x<\frac{y-x}{\ln y-\ln x}<y$

الحل:

لدينا التابع $f(x)=\ln x$ مستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ فهو مستمر على $[a,b]=[x,y]$, $0<x<y$ وقابل للاشتقاق على $]a,b[=]x,y[$, $0<x<y$ ومنه حسب نظرية التزايدات المنتهية:

$$\exists c\in]x,y[:\ \ln y-\ln x=(y-x)\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \exists c\in]x,y[:\ \frac{y-x}{\ln y-\ln x}=c$$

ولدينا $c\in]x,y[$ ومنه $x<c<y$ ومنه

$$\forall 0<x<y:\ x<\frac{y-x}{\ln y-\ln x}<y$$

تمرين11:

ليكن $x>0$، باستعمال نظرية التزايدات المنتهية، برهن ما يلي:

$$\frac{x}{x+1}<\log(1+x)<x$$

2• $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$

3• $\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $0<x<1$

الحل :

1• نختار التابع $f(x)=\log(1+x)$ والمجال $[0,x]$, $x>0$.

لدينا f مستمر على $[0,x]$ وقابل للاشتقاق على $]0,x[$، فهو يحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية.

ومنه :

$$\exists c\in]0,x[: f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c\in]0,x[: \log(1+x)=\frac{x}{1+c}$$

لدينا :

$$0<c<x \Rightarrow 1<1+c<1+x \Rightarrow 1>\frac{1}{1+c}>\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow x>\frac{x}{1+c}>\frac{x}{1+x}$$

ومنه : $\forall x>0 : \frac{x}{x+1} < \log(1+x) < x$

2• نختار التابع $f(x)=\arctan x$ والمجال $[0,x]$.

لدينا f مستمر على $[0,x]$ وقابل للاشتقاق على $]0,x[$.

ومنه حسب نظرية التزايدات المنتهية :

$$\exists c\in]0,x[: \arctan x - \arctan 0 = \frac{x}{1+c^2}$$

$$\exists c\in]0,x[: \arctan x = \frac{x}{1+c^2}$$

لدينا :

$$c\in]0,x[: 0<c<x \Rightarrow 1<1+c^2<1+x^2$$

$$\Rightarrow x>\frac{x}{1+c^2}>\frac{x}{1+x^2}$$

ومنه :

$$\forall x>0 : \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$$

3• نضع :

$$f(x)=\arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لدينا :

$$f'(x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$$

ومنه $\forall x\in]0,1[: f'(x)>0$.

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0,1[$ ولدينا $f(0)=0$.

ومنه $f(x)>0$, $x\in]0,1[$ ومنه :

$$\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ x\in]0,1[$$

تمرين12:

أوجد عددين موجبين مجموعهما 25 بحيث يكون جداءهما أعظم ما يمكن.

الحل :

نرمز لأحد العددين بـ x فيكون الآخر هو $25-x$ وجداءهما $x(25-x)$، وحيث $x\geq 0$ و $25-x\geq 0$ فإن $0\leq x\leq 25$ أي $x\in[0,25]$.

حتى يكون جداءهما أعظم ما يمكن نعتبر التابع:

$$f:[0,25]\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=x(25-x)$$

ونعين القيمة العظمى له إن وجدت.

لدينا : $f'(x)=25-2x$

x	0		$\frac{25}{2}$		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{25}{2}\right)^2$	$\searrow$	0

إذن f يبلغ قيمة عظمى مطلقة عند $x=\frac{25}{2}$، إذن العدد الأول هو $\frac{25}{2}$، والعدد الثاني هو أيضا $\frac{25}{2}$ لأن :

$$25-x=25-\frac{25}{2}=\frac{25}{2}$$

تمرين13:

يبيع مصنع x قطعة في الأسبوع بسعر : $D=200-0,01x$ للقطعة الواحدة. فإذا كان إنتاج القطعة يكلفه $y=50x+2000$ دج.

كم ينبغي أن ينتج المصنع أسبوعيا للحصول على أعظم ربح؟

الحل :

الدخل الكلي في الأسبوع عند بيع x قطعة يساوي :

$$xD=200x-0,01x^2$$

إذن ربح المصنع وليكن $f(x)$ يساوي الدخل ناقص الكلفة. أي :

$$f(x)=xD-y=200x-0,01x^2-50x-20000$$
$$=150x-0,01x^2-20000$$
$$f'(x)=150-0,02x$$

x		7500	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	542500	$\searrow$

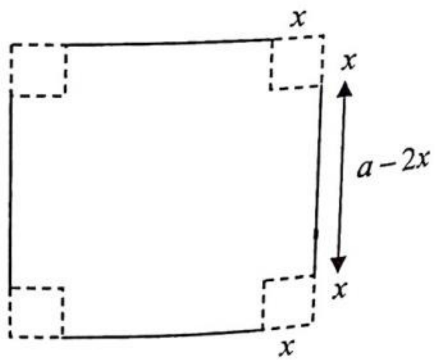
إذن الربح $f(x)$ يبلغ قيمة عظمى عند $x=7500$، وبالتالي ينبغي أن ينتج 7500 قطعة حتى يكون الربح أعظميا.

تمرين14 :

صفيحة من القصدير مربعة الشكل طول ضلعها aسم، نستعمل هذه الصفيحة لصنع علبة مفتوحة من الأعلى وذلك بأن نقطع منها مربعا صغيرا من كل ركن من أركانها الأربعة ثم نثني الأطراف.

كم ينبغي أن يكون طول ضلع المربع المقطوع من كل ركن كي نحصل على أكبر حجم ممكن للعلبة؟

الحل :



نفرض أن طول ضلع المربع المقطوع في كل ركن هو x فيكون حجم العلبة وليكن $f(x)$ مقدرا بالمتر المكعب هو :

$$f(x)=x(a-2x)^2 \ ; \ 0\le x\le \frac{a}{2}$$

لأنه بعد ثني الأطراف نحصل على :

طول العلبة = عرض العلبة = $a-2x$ وارتفاعها هو x

أما الشرط $0\le x\le \frac{a}{2}$ فهو يشمل $x\ge 0$ لأنه لا يمكن قطع مقدار سالب،

كذلك $a-2x\ge 0$ ومنه $x\le \frac{a}{2}$.

لدينا: $f'(x)=(a-2x)(a-6x)$

ومن جدول التغيرات :

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$f'(x)$	a^2	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

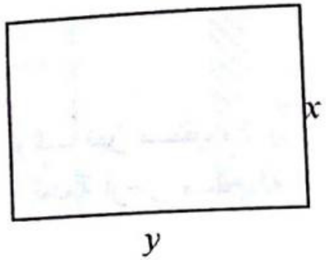
وهكذا f يبلغ قيمة عظمى مطلقة عند $x=\frac{a}{6}$.

إذن حتى نحصل على علبة ذات حجم أعظمي ينبغي أن يكون طول ضلع المربع المقطوع في كل ركن هو $x=\frac{a}{6}$.

ويكون الحجم الأعظمي هو $\frac{2a^3}{27}$.

تمرين15 :

نفرض أن محيط مستطيل هو مقدار ثابت مفروض L، بين أن مساحة هذا المستطيل تكون أعظم ما يمكن عندما يكون هذا المستطيل مربعا.



الحل :

نفرض أن x هو عرض المستطيل و y طوله، إذن المحيط $L=2x+2y$ ومساحته xy وتحت القيد $L=2x+2y$ فإن $y=\frac{L-2x}{2}$

وبالتالي تصبح المساحة هي :

$$xy=x\left(\frac{L-2x}{2}\right)$$

إذن نعتبر $f(x)=\frac{x}{2}(L-2x)$ ونبين أن f يبلغ قيمة عظمى فقط عندما يكون المستطيل مربعا.

$$f'(x)=\frac{L}{2}-2x$$

x	$-\infty$		$\frac{L}{4}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{L^2}{16}$	$\searrow$	$-\infty$

إذن f يبلغ قيمة عظمى مطلقة عند $x=\dfrac{L}{4}$، ولكن عند هذه النقطة $x=\dfrac{L}{4}$ يكون $y=\dfrac{L-2x}{2}=\dfrac{L}{4}$ وبالتالي فإن المستطيل مربع.

تمرين16: يقع حقل على أحد جوانب نهر مستقيم، نريد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى للحصول على قطعة أرض مستطيلة الشكل ذات مساحة عظمى، فإذا كان طول السياج عدد معلوم L، فكيف نقسم السياج بين الطول والعرض؟

الحل :
نفرض أن x هو العرض و y هو الطول، إذن طول السياج هو $L=y+2x$ ومساحة الأرض هي xy وحيث $y=L-2x$ فإن المساحة $x(L-2x)$، إذن تكون المساحة عظمى عند قيم x التي تعطي للتابع $f(x)=x(L-2x)$ قيمة عظمى.

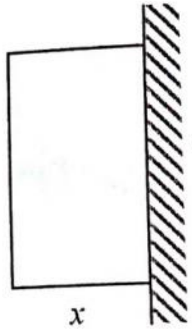
لدينا :
$$f'(x)=L-4x$$
ومنه :
$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{L}{4}$$

x		$\frac{L}{4}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

إذن يبلغ f قيمة عظمى نسبية عند $x=\dfrac{L}{4}$.

ومنه فعرض السياج يجب أن يكون $x=\dfrac{L}{4}$ وطوله يجب أن يكون :

$$y=L-2x=L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}$$



تمرين17:
ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا ولتكن $x_1,x_2,\dots,x_n$ أعدادا حقيقية من المجال $[a,b]$. برهن أنه توجد قيمة $x_0\in[a,b]$ تحقق :
$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=nf(x_0)$$

الحل :

بما أن f مستمر على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فهو يبلغ حديه، أي:
$$\exists\ \alpha\in[a,b]\ :\ f(\alpha)=\inf f(x)$$
$$\exists\ \beta\in[a,b]\ :\ f(\beta)=\sup f(x)$$
$$\Rightarrow\ \forall x_1,\dots,x_n\in[a,b]\ : f(\alpha)\le f(x_1)\le f(\beta)$$
$$f(\alpha)\le f(x_2)\le f(\beta)$$
$$\vdots$$
$$f(\alpha)\le f(x_n)\le f(\beta)$$
بالجمع طرفا إلى طرف نجد :
$$nf(\alpha)\le f(x_1)+\cdots+f(x_n)\le nf(\beta)$$
$$\Rightarrow f(\alpha)\le\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}\le f(\beta)$$

وحسب نظرية القيم الوسطى فإنه:

$$\exists x_0 \in \left]a,b\right[: f(x_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

ومنه المطلوب.

تمارين للحل حول الفصل الثالث

تمرين 1 :

احسب النهايات التالية إن وجدت :

•1 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}}$

•2 $\lim\limits_{x \to 1} (1 + \log x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

•3 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

•4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}, \ a > 0, b > 0$

•5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x$

•6 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x^m - a^m}, \ a > 0, \ n, m \in \mathbb{N}^*$

•7 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1} \right)$

•8 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x^x - 1}{\log(x+1)}$

•9 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x + 1}{x + 2} \right)^{\frac{1}{x+1}}$

تمرين 2 :

احسب النهايات التالية :

•1 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$

•2 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1} \right)$

•3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^x + 1}$

•4 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right)$

•5 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ •6 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin^2 x}$ •7 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$

•8 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 3x}{4x^2}$ •9 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+2x)^{\frac{1}{3}}}{x^2}$

تمرين 3 :

ليكن f تابعا $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرا عند $x_0=0$ بحيث :

$$\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=f(2x)$$

برهن أن f ثابت.

تمرين 4 :

ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا بحيث $f(a)=f(b)$.

برهن أن التابع $g(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)$ ينعدم على الأقل في نقطة في المجال $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$.

تمرين 5 :

ليكن f تابعا معرفا من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\ell$ مع $\ell\in\mathbb{R}$،

ويحقق $\forall x\in\mathbb{R} : f(2x)=f(x)$.

برهن أن :

$$\forall n\in\mathbb{N} : f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

ثم استنتج أن f ثابت.

تمرين 6 :

ليكن التابع :

$$f : x\longrightarrow\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

•1 اوجد مجموعة تعريف f.

•2 برهن أن f يقبل تمديدا بالاستمرار عند $x_0=0$ وأن هذا التمديد هو من الصنف c^1 على $\mathbb{R}$.

تمرين 7 :

ادرس استمرار واشتقاق التوابع التالية على مجال تعريفها :

$$f_1(x)=\begin{cases}x^2\log x & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\log(1+x)}{x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{|x-1|} & : x\neq1\\ 2 & : x=1\end{cases},\quad f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}} & : x>\dfrac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}(4x-\pi+1) & : x\leq\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$f_5(x)=\arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}},\quad f_6(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f_7(x)=\arctan(\text{sh}x),\quad f_8(x)=\log\sqrt{1-2\sin^2 x}$$

تمرين 8 :

ليكن التابع :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow\begin{cases}e^x & : x<0\\ ax^2+bx+c & : x\geq0\end{cases}$$

حد الثوابت a,b,c لكي يكون f من الصنف C^2 على $\mathbb{R}$، ثم من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$.

تمرين 9 :

ليكن التابع :

$$f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}} & : x>0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

حدد العوامل α,β ليكون :

أ• f مستمرا عند $x_0=0$.

ب• f قابلا للاشتقاق عند $x_0=0$.

جـ• f من الصنف C^1 على $[0,+\infty[$.

تمرين 10 :

برهن أن :

1• $\forall x\in]0,+\infty[:\dfrac{1}{x+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$

2• $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]:\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$

3• $\forall x\in]0,+\infty[:x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)=\sqrt{e}$.

تمرين 11 :

أوجد قيم a و b التي تجعل التابع التالي مستمرا على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & : x<1 \\ 2 & : x=1 \\ x^2+b^2 & : x>1 \end{cases}$$

تمرين 12 :

احسب المشتقة النونية لكل من التوابع :

$$f_1(x)=\sin(ax+b),\ f_2(x)=x^2e^x\ ,\ f_3(x)=x^{n-1}\log x$$

تمرين 13 :

ليكن $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا ويحقق $f([0,1])\subset[0,1]$.

برهن أنه يوجد $c\in[0,1]$ بحيث $f(c)=\sqrt{c}$.

تمرين 14 :

ليكن $a\in\mathbb{R}$ و $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا على $[a,+\infty[$ وقابلا للاشتقاق على $]a,+\infty[$ ويحقق : $f(a)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

برهن أنه يوجد $c\in]a,+\infty[$ بحيث $f'(c)=0$.

تمرين 15 :

نرغب في صنع علبة على شكل متوازي مستطيلات مفتوحة من الأعلى، من قطعة ورق مقوى عرضها 8م وطولها 15م، وذلك بأن نقطع مربعا من كل ركن من أركانها ثم نثني الجوانب.

أوجد أبعاد العلبة كي نحصل على أكبر حجم ممكن.