محمّد حازي

التكامل الريمانيّ وحساب الدوال الأصليّة: شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ

دروس - تمارين محلولة ومسائل

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها. . .

دفاتر التحليل

ديوان المطبوعات الجامعية

محمّد حازي

من دفاتر التحليل ...

التكامل الريماني وحساب الدوال الأصليّة:

شقّ نظريّ وآخر تطبيقيّ

للسنة الأولى الجامعيّة بكلّ فروعها وتخصّصاتها

ديوان المطبوعات الجامعية

أنشودة الفالج↓

يا من معـــدّله عن العشرة قد طفا
فزتَ، فانعم اليوم بالتهاني و "الوفا"
قـــل للذي دون ذلك لا تراع
كلّ امرئ عن أمره يوما قد غفا
ما له أن يركن حين الملمات إلى
اليأس، ويعرف النوم وعيناه "الجفا"
لئن لم يضرب الفوز في حزيران له
موعـــدا، ولم ينــج من أيلول ضيفا
فله في "الفالج المقروض" خير معين
على الاستذكار، ومن الهم خير "الشفا"
يجلي عن وجهه غلـــس الأسى
فيغدو مثل السماء حين "الصفـــا"
يأتي ركبَكـــم يرفل بوشاحـــه
يحمـــد اللّه و "الفـــالج" الـــذي رفـــا

↓ كلام شبه منظّم، قلته حين صدور الكتاب "الفالج المقروض في الامتحانات والفروض" في طبعته الأولى. إنّه ترويج له لدى جمهور مستخدميه. لك فيه الرفيق المعين على هضم واستيعاب مفاهيم الكرّاس الحاضر...

الإهداء

إلى

زوجتي وأولادي

الذين جلبت لهم كتبي حرمانا مزدوجا:

فلا هي تركت لي فراغا زمنيّا فألهيهم

ولا هي درّت عليّ مالا فأغنيهم ...

بسم الله الرحمن الرحيم

0

تصدير

«وهبت له خمسا من العمر كاملا وسبعا وتسعا ثمّ ولّى وأعرضا
وقال قليل قلت عندي زيادة فزدت له ثلثي سبع الذي قد مضا
وأبقيت لي عشرين عاما أعش بها وذاك قليل للبقاء إن تمرّضا»

ابن الياسمين[↓]

1.0 كلمة لابدّ منها

تمثّل الدروس المستعرضة عبر الدفاتر السبعة عصارة ما شاركت فيه خلال أعوام عديدة ضمن أطقم أشرفت على السنة الأولى في المدارس الوطنيّة العليا الأربع التالية:

المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة؛

المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بـڤاريدي- القبّة؛

المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛

المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛

[↓] من رسالة ماجستير موسومة بـ "الأعمال الرياضيّة لابن الياسمين" لصاحبها الأستاذ التهامي زمولي، المدرسة العليا للأساتذة، القبّة - الجزائر؛ 1993.

إنّها وفاء بالوعد الذي قطعته على نفسي، خلال إعدادي كتابي "السبيل إلى الأعداد الحقيقيّة"↓، بالعودة إلى وحدة تحليل السنة الأولى ووضع مرجع شامل يغطّيها. فها هو العمل في سبع مقطورات، يشكّل "السبيل" قاطرة لها.

أجدّد في هذه الفسحة المتاحة شكري لكلّ زميل عمل وقاسى معي الأمرّين في خدمة طلبة السنة الأولى، وأحيّيه منحنيا على ما بذله من جهد وأغدقه من عطاء وتجشّمه من صعاب وتحمّله من عناء في سبيل ترويض المادّة وإنضاجها وإيصالها إلى المتلقّين نقيّة كاملة.

أكتفي بذكر رؤوس الفرق دون أن ينتقص ذلك مثقال ذرّة من دور كلّ الأعضاء الآخرين، وهم كثيرون. فلئن حال ضيق الإطار دون ذلك، فإنّ القلب أرحب ويسعهم على مدار السنين بشوق جامح يخنق الأنفاس وحنين متجدّد لا يعرف الحدود ...

- الأستاذ شريف بوزيدي من المدرسة الوطنيّة للأشغال العموميّة بالقبّة؛
- الأستاذ ابراهيم كاشة المدرسة الوطنيّة المتعدّدة التقنيات بالحرّاش؛
- الأستاذ مسعود جباري من المدرسة الوطنيّة للتحضير لدراسات المهندسين برويبة؛
- الأستاذ إسماعيل اجبالي من المدرسة العليا للأساتذة بالقبّة القديمة.

نحن الآن معا على موعد مع درّة من درر برنامج السنة الأولى الجامعيّة بكلّ تخصّصاتها وفروعها. إنّها محطّة الحساب التكامليّ ببوّابتيه: **التكامل الريمانيّ وحساب الدوال الأصليّة**. لقد سبق وأن نثرنا لك أربعا منها، لا شكّ أنّها أنارت لك أفقك وأعانتك على شقّ دربك في الفهم والتحصيل.

↓ صدر بدار ديوان المطبوعات الجامعيّة 1999.

2.0 نافذة على التاريخ

ترجع جذور المكاملة دون ريب إلى المسائل ذات الصبغة الهندسيّة التي كانت تواجه المجتمعات البشريّة منذ عهود سحيقة كتلك التي كان يطرحها ويعالجها المصريّون والصينيّون والإغريقيّون الأقدمون: حساب المساحات والحجوم والأطوال ومراكز الثقل والعزوم ... إلخ. فهناك بصمات تاريخيّة على استخدام التكامل في عهد قدماء المصريّين. لقد تأكّد علمهم بصيغ تسمح بحساب الحجوم والمساحات وذلك بتقسيمها إلى أشكال صغيرة غير منتهية معلومة المساحة أو الحجم.

يضع التاريخ العالم الفيلسوف اليونانيّ أرخميدس[1] في مكانة مرموقة بالنظر إلى حجم وأهمّيّة تركته في هذا الميدان. فقد طوّر هذه الطريقة أكثر واستعملها في حساب مساحات أشكال هندسيّة مثل القطع المكافئ بالخصوص وكذا حساب تقريب لمساحة الدائرة.

تمكّن العرب المسلمون بدورهم من توسيع أعمال الإغريق وتدقيقها، بدءا من القرن الحادي عشر الميلاديّ. فقد قاموا بحسابات شتّى للمساحات والحجوم

---

1. Archimède: عالم يونانيّ. ولد حوالي 287 قبل الميلاد في سيراكوز. نبغ في الهندسة. برهن باستعمال مضلّعات منتظمة من 69 ضلعا دستوره المشهور لتقريب العدد π:

$$\frac{223}{71} \le \pi \le \frac{22}{7}.$$

مستخدمين فيها "المجاميع الريمانيّة[2]". إنّ في أعمال العالم الموسوعة ابن الهيثم[3] آثارا بارزة دالّة على ذلك.

لم يبدأ ظهور التقدّم الملحوظ في علم التكامل إلاّ مع القرن السادس عشر مع أعمال كافاليري[4] وفيرمه[5]. لقد كانت بمثابة الانطلاقة نحو وضع الأسس

---

2. Bernhard Riemann: نسبة إلى الرياضيّاتيّ الألمانيّ ريمان. ولد هذا العالم في 17سبتمبر 1826 بهانوفر ومات في 2 جويلية 1866 بسيلاسكا بإيطاليا. فحص الجوانب الهندسية لدى الدوال ذات متغيّر عقديّ. شكّل هذا العمل فحوى موضوع رسالة الدكتوراه التي حضرها تحت إشراف ڤاوص وناقشها عام 1851.

3. محمّد بن الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو علي البصريّ. عالم فيزيائيّ ورياضيّاتيّ عربيّ موهوب. ولد بالبصرة عام 965 م (354 هـــ)، وتوفّي بالقاهرة عام 1039 م (430 هـــ). له العديد من المؤلّفات والمكتشفات العلميّة، لا سيّما في البصريّات والهندسة. أقرّ بعبقريّته العلم الحديث.

4. Bonaventura Francesco Cavalieri: رياضيّاتيّ وفلكيّ إيطاليّ. ولد في 1598 بميلانود ومات في 30 نوفمبر 1647 ببولوني. كانت أعماله بمثابة إعلان ميلاد الحساب التكامليّ.

5. Pièrre de Fermat: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 17 أوت 1601 ببومان ومات في 12 جانفي 1665 بكاستر. كان وراء مبرهنات عديدة في الجبر والهندسة. ويظلّ اسمه مقرونا بتخمينته الشهيرة التي عبرت به القرون وتعاقب عليها كبار الرياضيّاتيّين: ليست للمعادلة $x^n + y^n = z^n$، حيث n عدد طبيعيّ يفوق 2، حلول صحيحة.

لعلم التكامل الحديث. جاء بعدهما نيوتن[6] وتورتشيلي[7] مع مطلع القرن السابع عشر فوسّعا هذا العلم وقدّما التلميحات الأولى في وجود صلة بين التكامل والاشتقاق.

تمّ اكتشاف المبرهنة الأساسيّة للتكامل من قبل نيوتن وليبنيز[8]. هذا نصّها:

"لكلّ دالّة حقيقيّة مستمرّة f على $[a,b]$ دالّة أصليّة F. وفضلا عن ذلكّ، فإنّ تكامل f على $[a,b]$ يعدل الفرق $F(b)-F(a)$ "

لقد أحدثت هذه المبرهنة تقدّما باهرا في علم الحسابين التفاضليّ والتكامليّ. يمكن بدمج هذه العلاقة مع قرينتها الاشتقاق حساب العديد من التكاملات.

اكتسب التفاضل والتكامل مع تطوّر علم النهايات وضوحا ودقّة وهو ما

---

6. Isaac Newton: أعظم علماء انـــڤلترا على الإطلاق. ولد في 04 جانفي 1642 بوولستورب ومات في 31 مارس 1727 بلندن. اشتغل بالفيزياء والفلك والرياضيّات.

7. Evangelista Torricelli : رياضيّاتيّ وفيزيائيّ إيطاليّ. ولد في 15 أكتوبر 1608 بفائنزه ومات في 25 أكتوبر 1647 بفلورنسا. درس الرياضيات والفلسفة. عند وفاة الفلكيّ غاليليو أخذ مكانه في تدريس الرياضيّات بأكاديمية فلورنسا.

8. Leibniz Gottfried Wilhelm: رياضيّاتيّ ألمانيّ. ولد في 1 جويلية 1646 بليبزيـــڤ ومات في 14 نوفمبر 1716 بهانوفر. متعدّد الاهتمامات والمواهب. أسّس بأعماله للحساب التفاضليّ. يعود إليه الفضل في وضع رمز التكامل وكثير من الرموز الرياضيّاتيّة المتداولة اليوم.

كان ينقصه في عهد نيوتن وليبنيز. وتوطّدت أركانه بفضل كوشي[9] في منتصف القرن التاسع عشر. أوّل من لجأ إلى باستعمال النهايات في صياغة التكامل بدقّة كان ريمان. عرف تعميما عبر صور أخرى من قبل لوبيــف[10] أدّى إلى وضع أسس نظرية جديدة وهي القياس. وتلك حكاية أخرى ...

هيكل الدفتر الحالي وفق ثلاثة أقسام هي:

القسم الأوّل : التكامل الريمانيّ وحساب الدوال الأصليّة

وفيه أربعة مقاطع هي:

- تكامل الدوال الدرجيّة الريمانيّ،
- الدوال المحدودة القابلة للمكاملة ريمانيّا،
- دستور تكامل دالّة مستمرّة الريمانيّ،
- حساب دوال أصليّة.

القسم الثاني : التكاملات المعمّمة

وفيه ثلاثة مقاطع:

9. Augustin Louis Cauchy: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 أوت 1789 بباريس ومات في 23 ماي 1857 بصو. يعتبر الرياضياتيّ الفرنسيّ الأغزر إنتاجا. تنطوي أعماله العلميّة على أزيد من 800 بحثا في مواضيع متنوّعة في الرياضيات والفيزياء. له باع طويل في تأسيس التحليل الحديث.

10. Henri Léon Lebesgue : رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 28 جوان 1875 ببوفيه ومات في 26 جويلية 1941 بباريس. قدّم عام 1902 نظرية تكامل جديد، يحمل اليوم اسمه.

- التكاملات المعمّمة من الصنف الأوّل
- التكاملات المعمّمة من الصنف الثاني
- أشكال أخرى ...

القسم الثالث : تمارين

وفيه ثلاثة مقاطع:

- تمارين محلولة،
- حلول،
- تمارين للبحث.

القسم الرابع : دليلان

- دليل المصطلحات،
- دليل الرياضيّاتيّين المذكورين.

دبّجنا الجانب الدرسيّ في هذا الكرّاس بسلاسة وبيان. أتينا بفقراته في تكامل وتناسق يعضد بعضها بعضا.

جلبنا إليه ما رأيناه ضروريّا من التعاريف والمبرهنات والنتائج ونثرنا فيه من الأمثلة ما هو موضّح ومكمّل. ثُمّ عمدنا إلى سلسلة من التمارين قدّها ثمانية عشر وحدة، تصدّينا لحلّها بحذق وإمعان. غيّرنا ونوّعنا في الطرق والحيل ما استطعنا إلى ذلك سبيلا. ختمنا الكرّاس بلوحة من التمارين التدريبيّة والتقويميّة، يوسّع بها القارئ المستزيد أفقه ويختبر تحصيله ويفيض. لقد أكثرنا منها وكنّا فيها ناصحين. يوفّر ذلك لكلّ واحد من الجمهور العريض المستهدف، بكافّة

أصنافه المختلفة ومشاربه المتعدّدة، أينما كان موقعه في الجامعات أو المدارس العليا بل وفي الثانويات، معينا يغرف منه بقدر رغبته وقدرته وتوجّهه.

من نافلة القول الإقرار بأنّه ليس لهذا المسعى من غاية سوى المساهمة في إثراء مكتبات جامعاتنا خدمة لروّادها. لذا أملنا كبير في أن يستهوي المبتدئين من الدارسين ويحظى برضا المحترفين من المدرّسين.

أخيرا، يكون حريّا بي أن أعلن أنّه، أيّا كان حرصي على تقديم هذه الدروس تامّة من كلّ ناقصة ونقيّة من كلّ شائبة ونائية عن كلّ عاذلة، فإنّ أعين القرّاء مدعوّة لتتبّع كلّ واردة مطمسة وتقفّي كلّ مبهمة منفّرة واصطياد كلّ شاردة مشوّهة ... فبالتفافهم حولها يصلح أمرها ويستقيم عودها، وتغدو بعد ذلك للمستخدمين الحائرين منارة وملاذا.

القبّة في 19 أفريل 2012

محمّد حازي

القسم الأوّل

التكامل الريماني

و

حساب الدوال الأصليّة

1

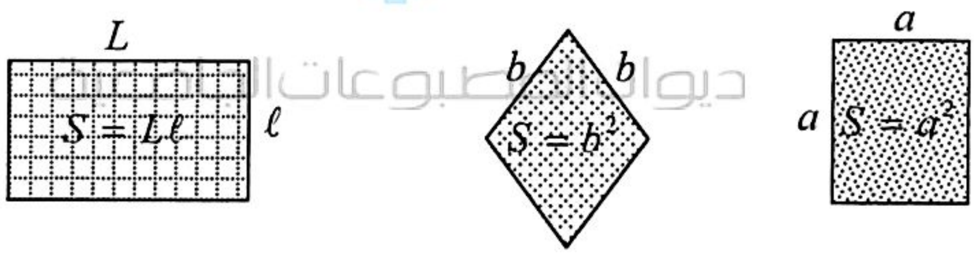
تكامل الدوال الدرجيّة الريماني

1.1 مدخل

التكامل الريمانيّ أداة أثبت الزمان فعاليتها ونجاعتها وأهمّيتها على أكثر من صعيد. يلازم حضوره العديد من الميادين والنتائج والنظريات، إن في الميدان التطبيقيّ وإن في الميدان النظريّ البحت ...

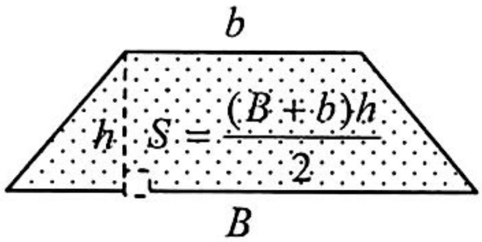
نعلم أنّ حساب مساحات تخصّ أشكالا هندسيّة أوليّة معروفة تخضع لقواعد مضبوطة مألوفة. إنّه حال المستطيل (بصيغتيه المعيّن والمربّع):

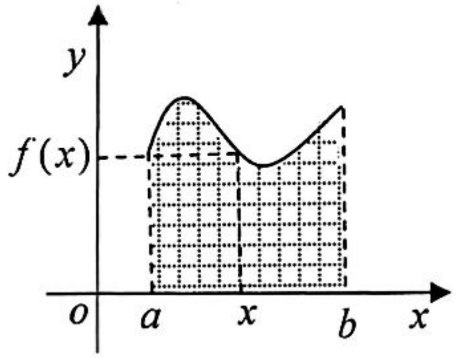
المساحة = الطول في العرض



وكذا شبه المنحرف:

المساحة = نصف حاصل ضرب الارتفاع في مجموع القاعدتين الكبرى والصغرى.





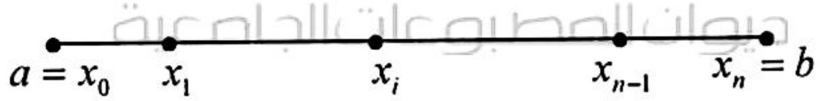
يمكن الحصول على مساحات أشكال هندسيّة غير أولية بالاستناد إلى هذين الشكلين الأساسيّين. نخصّ في الدراسة الحاضرة حساب مساحة حيّز من المستوي، محدود بمحورين عموديّين وآخر أفقيّ وأخيرا، بيان دالّة موجبة (أو نظيرتها إن كانت سالبة) مستمرّة. فإذا قمنا بتقسيم الحيّز الموصوف إلى مستطيلات صغيرة أمكن مقاربة مساحته بمجموع مساحات مستطيلات التقسيم، بل يمكن إدراكها كنهاية لذاك المجموع.

إنّ هذا منطلق ميلاد التكامل الذي بلغ أوجّه مع التمييز الريماني له ...

2.1 تعريف

نسمّي **تقسيما** للمجال $[a,b]$ كلّ مجموعة منتهية من نقاط $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ بحيث:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$



3.1 تعريف

نقول عن دالّة حقيقيّة f، معرّفة على مجال $[a,b]$، إنّها **درجيّة** على $[a,b]$ إذا وجد تقسيم $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ للمجال $[a,b]$ بحيث تكون f ثابتة على كلّ مجال جزئيّ $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \le i \le n)$.

يسمّى التقسيم S في هذه الحالة بالتقسيم الملحق بـــ f .

يستخلص من هذا التعريف أنّ **كلّ دالّة درجيّة دالّة محدودة**، ذلك لأنّها تأخذ عددا منتهيا من القيم (تلك المأخوذة في المجالات المفتوحة $]x_{i-1},x_i[$ أو عند الأطراف x_i).

4.1 أمثلة

1) الدوال الثابتة على $[a,b]$ دوال درجيّة.

2) الدوال العدديّة الحقيقيّة أدناه دوال درجيّة على $[0,1]$.

$$f_1(x)=\begin{cases}1/3\ ;\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[\\ 2\ ;\ x=\frac{1}{2}\\ -3\ ;\ x\in\left]\frac{1}{2},1\right]\end{cases}\quad ;\quad f_2(x)=\begin{cases}4\ ;\ x=0\\ -1\ ;\ x\in\left]0,\frac{1}{3}\right]\\ 5\ ;\ x\in\left]\frac{1}{3},1\right]\end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases}1\ ;\ x=\left[0,\frac{1}{5}\right[\\ 2\ ;\ x\in\left]\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right[\\ -3\ ;\ x=\frac{3}{5}\\ 5\ ;\ x\in\left]\frac{3}{5},1\right[\end{cases}\ ;\ f_3(x)=\begin{cases}-2\ ;\ x=0\\ 0\ ;\ x\in\left]0,1\right[;\\ \frac{2}{3}\ ;\ x=1\end{cases}$$

$$f_5(x)=\begin{cases}0\ ;\ x=0\\ 2\ ;\ x\in\left]0,\dfrac{1}{4}\right[\\ -6\ ;\ x\in\left]\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right[\\ 1\ ;\ x\in\left]\dfrac{3}{4},1\right]\end{cases}\ ;\ f_6(x)=\begin{cases}-2\ ;\ x\in\left]0,\dfrac{1}{3}\right[\\ 0\ ;\ x\in\left]\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right[\\ \dfrac{2}{3}\ ;\ x=\dfrac{2}{3}\\ -1/4\ ;\ x\in\left]\dfrac{2}{3},1\right[\end{cases}.$$

5.1 قضية

لتكن f و g دالّتين درجيّتين على $[a,b]$ و λ عددا حقيقيّا. تكون الدوال:

$$\lambda f,$$
$$f+g,$$
$$fg,$$
$$\sup(f,g),$$
$$\inf(f,g),$$

حينئذ درجيّة على $[a,b]$.

إثبات

بما أنّ f و g درجيّتان على $[a,b]$ فإنّه يوجد تقسيمان:

$$S=\{x_0,x_1,\dots,x_n\};$$
$$S'=\{x'_0,x'_1,\dots,x'_m\},$$

للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$\forall i \in \{1,2,...,n\} \quad f(x)=\alpha_i \; ; \; x \in \left]x_{i-1},x_i\right[,$$
$$\forall j \in \{1,2,...,m\} \quad f(x)=\beta_j \; ; \; x \in \left]x'_{j-1},x'_j\right[,$$

حيث α_1 ، α_2 ، ... ، α_n و β_1 ، β_2 ، ... ، β_n ثوابت حقيقيّة. من أجل كلّ دليل i من $\{1,2,...,n\}$ لدينا:

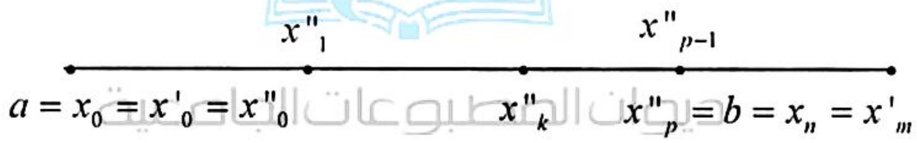
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda\alpha_i \; ; \; x \in \left]x_{i-1},x_i\right[;$$

وهو ما يفيد أنّ λf دالّة درجيّة.

بخصـــوص الدوال المعلنة المتبقّيـــة نلاحظ أنّه إذا ما عمدنـــا إلى ترتيب المجموعة المنتهية $S \cup S'$ وجدنا تقسيما S'' لــ $[a,b]$. وإذا وضعنا:

$$S''=\{x''_0,x''_1,...,x''_p\}; \quad p<m+n,$$

تبيّن أنّ النقاط x''_k تنتمي إلى S أو إلى S'، ممّا يضمن عدم وجود أيّ عنصر من $S \cup S'$ في المجال $\left]x''_{k-1},x''_k\right[$. يترتّب عن ذلك أنّ الدوال المقترحة ثابتة على كلّ مجال $\left]x''_{k-1},x''_k\right[$ $(1 \le k \le p)$.



إنّها درجيّة، إذن، على $[a,b]$.

6.1 نتيجة

إنّ لمجموعة الدوال الحقيقيّة الدرجيّة على $[a,b]$، المرموز لها بــ $\mathscr{E}([a,b])$، بنية حلقة واحديّة وبنية فضاء شعاعيّ على $\mathbb{R}$.

7.1 قضية

لتكن f دالّة من $\mathscr{E}([a,b])$ و $S=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ تقسيما ملحقا بـــ f. إنّ المجموع، المشهور **بمجموع داربو**[11]:

$$I(f,S)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i,$$

حيث α_i هي قيمة f على المجال $]x_{i-1},x_i[$، لا يتعلّق بالتمثيل المختار لـــ f.

إثبات

ليكن $S'=\{x'_0,x'_1,...,x'_m\}$ تقسيما آخر لـــ $[a,b]$، ملحقا بتمثيل آخر لـــ f. إذا كانت a نقطة من S' لا تنتمي إلى S أعطت المجموعة $S\cup\{a\}$ إذا ما رتّبت، تقسيما جديدا ملحقا بـــ f. يوجد عندئذ دليل j من $\{1,2,...,n\}$ بحيث $x_{j-1}<a<x_j$. نكتب تبعا لذلك، محتفظين بالترميزة السابقة:

$$I\left(f,S\cup\{a\}\right)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i+(a-x_{j-1})\alpha_j+(x_j-a)\alpha_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i=I(f,S).$$

إذا كان التقسيم S' يحتوى m عنصرا لا تنتمي إلى S أعدنا البرهان m مرّة لنحصل في الأخير على:

$$I(f,S)=I(f,S,\cup S')=I(f,S').$$

---

11. Jean Gaston Darboux: ريّاضيّاتيّ فرنسيّ، ولد في 14 أوت 1842 بنيم ومات في 23 فيفري 1917 بباريس. له إسهامات هامّة في التحليل والهندسة التفاضليّة.

بالاحتفاظ بترميزة القضية الحالية نضع هذا الـــ:

8.1 تعريف

نسمّي **تكامل دالّة درجيّة** f **(الريماني)** على المجال المتراص $[a,b]$،

العدد:

$$I(f)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i.$$

يرمز لهذا العدد عادة بـــ $\int_a^b f(x)dx$ ، ويقرأ: تكامل f على $[a,b]$.

يدعى العددان a و b **بحدّي التكامل الأدنى والأعلى** على التوالي؛ بينما يعرف الحرف x **بمتغيّـــر المكاملـــة**، وهو متغيّر "ميّت" لا تتعلّق به قيمة التكامل. يمكن استبداله بأيّ حرف آخر z أو y أو t، إلخ ... فنكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=\ldots$$

لنشر هنا إلى أنّ الكتابة $f(x)dx$ تذكّر بمساحة مستطيل عرضه dx وطوله $f(x)$، في حين أنّ الرمز $\int$ يفيد جمع مساحات هذه المستطيلات الناجمة عن تغيّر x ومسحه المجال $[a,b]$.

وللتاريخ نذكر أنّ ليبنيز هو أوّل من استعمل الرمزين dx و $\int$، بعد إطالته للحرف s، كتمثيل لاختصار عملية الجمع الممثّلة بحرفها اللاتينيّ الأوّل s. أمّا الشكل $\int_a^b$ فكان من وضع الرياضيّاتيّ فوريي[12].

9.1 أمثلة

1) إذا كانت f ثابتة على $[a,b]$ بحيث $c = f(x)$ جاء توّا:

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a),$$

وذلك باعتبار التقسيم $S = \{a,b\}$ للمجال $[a,b]$.

2) المثال الخامس من الطائفة (4.1) يقدّم دالّة تكاملها:

$$\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{1}{4}-0\right)2 + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)(-6) + \left(1-\frac{3}{4}\right)1 = -\frac{9}{4}.$$

3) لتكن $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ مجموعة جزئيّة منتهية من مجال $[a,b]$ بحيث :

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_m < b.$$

إذا انعدمت دالّة f في الميدان $[a,b] \setminus \{x_0, x_1, ..., x_m\}$ انعدم تكاملها على $[a,b]$. وبالفعل، لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)0 + (x_1 - a)0 + (b - x_m)0 = 0.$$

---

12. Joseph Fourier: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 21 مارس 1768 بأكسير ومات في 16 ماي 1830 بباريس. درس بمدرسة باريس العليا للأساتذة بأيدي لاڤرانج ولابلاس. بدأ بالتدريس بالمدرسة المتعدّدة التقنيات قبل أن يشارك في حملة نابليون على مصر. نشر عددا هامّا من البحوث في الرياضيّات الصرفة والتطبيقيّة.

10.1 ملحوظة

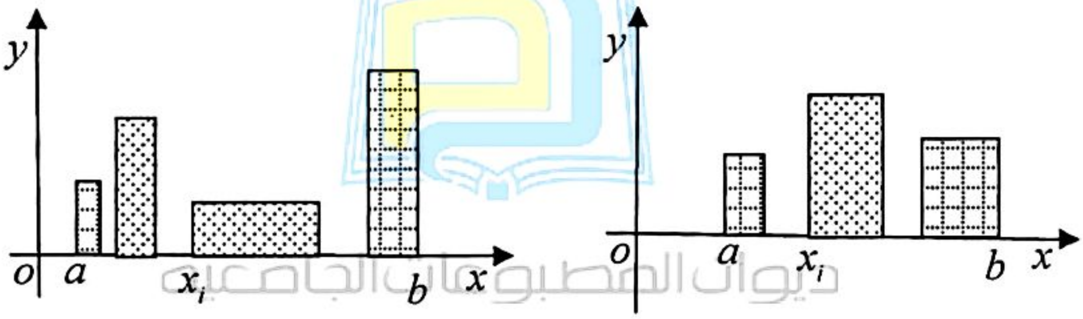
يستشفّ من المثال الأخير أعلاه أنّه يمكن أن ينعدم تكامل دالّة درجيّة ما بدون أن تكون هذه الدالّة مطابقة الصفر.

11.1 التأويل الهندسيّ

لو تمعنّا في العبارة:

$$I(f)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i,$$

وجدناها تقدّم مجموع مساحات الـ n مستطيلا ذات الأبعاد α_i و x_i-x_{i-1}.



12.1 قضية

إذا كانت f و g دالّتين درجيّتين على $[a,b]$ وكان λ ثابتا حقيقيّا فإنّ:

1) الدوال λf و $f+g$ و $\sup(f,g)$ و $\inf(f,g)$ و $|f|$ تكون قابلة للمكاملة ريمانيّا على $[a,b]$؛

2) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

3) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$

4) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx.$

إثبات

1) واضح، ذلك لأنّ كلّ الدوال المذكورة درجيّة على $[a,b]$.

2) باستخدام الترميزة السابقة نكتب:

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx &= \sum_{i=1}^{p}(x_i"-x_{i-1}")(\alpha_i+\beta_i)\\ &= \sum_{i=1}^{p}(x_i"-x_{i-1}")\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}(x_i"-x_{i-1}")\beta_i\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})(\lambda\alpha_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i\\ &= \lambda\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

4) وبالمثل لدينا:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\alpha_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\left|\alpha_i\right| = \int_a^b \left|f(x)\right|dx.$$

13.1 نتيجة

إنّ التطبيق $u:\mathscr{E}\left([a,b]\right)\to\mathbb{R}$ المعرّف بـــ:

$$u(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

شكل خطّيّ. وفضلا عن ذلك، فهو متزايد ويحقّق:

$$|u(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

إثبات

خطّيّة u والمتباينة الأخيرة مستمدّتان من القضية أعلاه. لنثبت تزايد u.
بالاحتفاظ بالترميزة السابقة، يمكننا أن نكتب:

$$f \leq g \Rightarrow \forall i = 1,2,...,p \quad \alpha_i \leq \beta_i, \ \forall x \in]x"_{i-1}, x"_i[;$$

وعليه:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{p} (x_i" - x"_{i-1})\alpha_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{p} (x_i" - x"_{i-1})\beta_i = \int_a^b g(x)dx.$$

14.1 قضية (علاقة شال[13])

من أجل كلّ عنصر f من $\mathscr{C}([a,b])$ وكلّ عدد c من $]a,b[$ يكون لدينا:

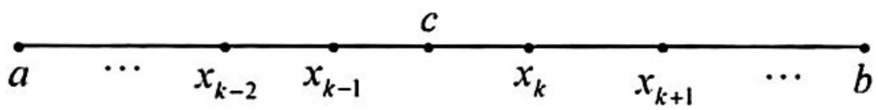
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

---

13. Michel Chasles: رياضيّاتيّ فرنسيّ. ولد في 15 نوفمبر 1793 بإبرنون وتوفّي في 1880 بباريس. اشتهر بأعماله في الهندسة.

إثبات

لنرمز بـــ f_1 و f_2 لمقصـــوري f على $[a,c]$ و $[c,b]$ على الترتيب. إنّهما دالّتان درجيّتان على $[a,c]$ و $[c,b]$ على التوالي. لنفترض أنّ c عنصر من $]x_{k-1},x_k[$. يأتي عندئذ:



$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx = \sum_{i=1}^{k-1}(x_i - x_{i-1})\alpha_i + (c - x_{k-1})\alpha_k,$$

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^b f_2(x)dx = \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1})\alpha_i + (x_k - c)\alpha_k.$$

ومنه:

$$\int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\alpha_i = \int_a^b f(x)dx;$$

وهو ما يؤدّي إلى ما هو مألوفة كتابته على النحو:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2

الدوال المحدودة القابلة للمكاملة ريمانيّا

1.2 تمهيد

نعمد إلى تعميم وتوسيع مفهوم تكامل الدوال الدرجيّة إلى دوال محدودة أخرى مع الاحتفاظ بنفس الخصائص.

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **دالّة محدودة** و φ و ψ دالّتين درجيّتين على $[a,b]$ تحصران f، أي:

$$\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)\ \ \forall x\in[a,b].$$

إنّ الدالّتين φ و ψ مضمونتا الوجود، ذلك لأنّ f محدودة ويكفي أخذ:

$$\psi(x)=\sup_{a\le t\le b} f(t);$$

$$\varphi(x)=\inf_{a\le t\le b} f(t).$$

إذا كانت f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ وأردنا لهذا التكامل الاحتفاظ بالخصائص الموصوفة في المقطع السابق وجب الحصول على:

$$\int_a^b\varphi(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\psi(x)dx.$$

يتّضح هكذا أنّ تكامل f ينتمي إلى المجال ذي الطرفين $\int_a^b\varphi(x)dx$ و $\int_a^b\psi(x)dx$. لنحاول قصد حصر أفضل للتكامل، تبسيط هذا المجال. لتكن

θ (Ψ على التوالي) مجموعة الدوال الدرجيّة على $[a,b]$ التي تحدّ f من الأدنى (الأعلى على التوالي). إنّ θ و Ψ غير خاليتين. لنضع:

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx,\ \varphi \in \theta \right\};$$

$$B = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx, \psi \in \Psi \right\}.$$

إنّ A محدودة من الأعلى بكلّ عنصر من B، كما أنّ هذه الأخيرة تقبل كلّ عنصر من A حادّا أدنى لها. على ضوء هذا التمهيد نضع:

2.2 تعريف

نسمّي **التكامل السفليّ** لـ f على $[a,b]$ العدد المرموز له بـ $\underline{\int_a^b f(x)\,dx}$ والمعرّف بـ :

$$\sup A = \underline{\int_a^b f(x)dx}.$$

نسمّي **التكامل العلويّ** لـ f على $[a,b]$ العدد المرموز له بـ $\overline{\int_a^b f(x)dx}$ والمعرّف بـ :

$$\inf B = \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

لنشر على التوّ إلى أنّ:

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \le \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

إنّ هذين التكاملين ليسا متساويين على العموم. في حالة المساواة، نقول عن f إنّها **قابلة للمكاملة ريمانيّا على** $[a,b]$؛ وهو ما يسمح بوضع هذا الـ :

3.2 تعريف

تكون الدالّة الحقيقيّة f ، المعرّفة والمحدودة على $[a,b]$، قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على $[a,b]$ إذا كان تكاملاها العلويّ والسفليّ متطابقين على $[a,b]$. نسمّي تكامل f ، في هذه الحالة، العدد المرموز له بـــ $\int_a^b f(x)dx$ والمساوي القيمة المشتركة للتكاملين العلويّ والسفليّ على $[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx.$$

يمكن أن نعيد صوغ هذا التعريف على النحو المكافئ التالي:

4.2 تعريف

نقول عن دالّة f ، معرّفة على المجال المتراص $[a,b]$، إنّها قابلة للمكاملة على $[a,b]$ بمفهوم ريمان إذا توفّر الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \varphi, \psi \in \mathscr{E}\left([a,b]\right) / \begin{cases} 1) \ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \forall x \in [a,b], \\ 2) \ \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \varepsilon. \end{cases}$$

نسلّم بتكافؤ التعريفين.

نرمز لمجموعة الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان بـــ $\mathscr{R}\left([a,b]\right)$.

5.2 نتيجة

كلّ دالّة درجيّة على $[a,b]$ قابلة للمكاملة ريمانيًا، ونكتب:

$$\mathscr{E}\left([a,b]\right) \subset \mathscr{R}\left([a,b]\right).$$

6.2 قضية

كلّ دالّة من $\mathscr{R}\left([a,b]\right)$ محدودة على $[a,b]$. العكس ليس صحيحا على العموم.

إثبات

الجزء الأوّل من هذه القضية نتيجة مباشرة للتعريف أعلاه. بخصوص الجزم الثاني نسوق هذا المثال المضاد. نعتبر دالّة ديريكليه[14] على المجال المتراص $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}0\ ;\ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1\ ;\ x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}.\end{cases}$$

ليكن g عنصرا من θ و $\sigma=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[0,1]$، ملحقا بـــ g. وليكن β_i قيمة الدالّة g على المجال $]x_{i-1},x_i[$. إنّ هذا الأخير يضمّ عنصرا ناطقا t_i. من أجله نكتب:

$$\beta_i=g(t_i)\le f(t_i)=0.$$

نستخلص أنّ:

$$\int_0^1 g(x)\,dx\le 0;$$

وعليه:

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx\le 0.$$

نبيّن بالمثل، مستخدمين عدم خلوّ كلّ مجال حقيقيّ من أعداد صمّاء، أنّ:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\ge 1.$$

نستخلص هكذا أنّ:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\ne \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

---

14. Peter Gustav Lejeune Dirichlet : رياضياتيّ ألمانيّ، ولد في 13 فيفري 1805 بدوران وتوفّي في 5 ماي 1859 بـــڤوتينـــڤان. اشتغل بالجامعة زهاء 27 سنة؛ وكان من ضمن طلبته العالمان كرونيكار وريمان. ارتبط اسمه بصفّ من معادلات ذات مشتقّات جزئيّة. له مساهمات كثيرة في علم الحساب.

وعليه، فإنّ f لا تنتمي إلى $\mathscr{R}([0,1])$.

7.2 مبرهنة

كلّ **دالّة رتيبة** على $[a,b]$ تنتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$.

إثبات

نفترض أنّ f متزايدة. الحالة الأخرى تعالج بالمثل.

إذا كان $f(b)=f(a)$ غدت f ثابتة، ممّا يجعلها تنتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$.

لنفترض أنّ $f(b)>f(a)$ وليكن $\varepsilon>0$. لنعتبر تقسيما $\sigma=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ لـــ $[a,b]$ بحيث:

$$\sup_{0<i<n}(x_{i+1}-x_i)\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

ليكن g و h من $\mathscr{E}([a,b])$ بحيث:

$$\begin{cases} g(x)=f(x_i);\ x\in[x_i,x_{i+1}[,\\ g(b)=f(b),\end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x)=f(x_{i+1});\ x\in[x_i,x_{i+1}[,\\ h(b)=f(b).\end{cases}$$

بما أنّ f متزايدة فإنّه يأتي $g\le f\le h$. وفضلا عن ذلك نحصل على:

$$\int_a^b((h(x)-g(x))dx=\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)\big(f(x_{i+1})-f(x_i)\big)$$

$$\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\big(f(b)-f(a)\big)=\varepsilon.$$

و.هـــ.م

8.2 مبرهنة

كلّ دالّة حقيقيّة **مستمرّة** على $[a,b]$ تنتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$ ؛ أي:

$$\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathscr{R}([a,b]).$$

إثبات

إنّ استمرار f على $[a,b]$ يجعلها مستمرّة بانتظام:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \forall x, y \in [a,b] : |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

ليكن $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما لـ $[a,b]$ ملحقا بـ f بحيث:

$$\sup_{0 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i) \leq \delta.$$

من أجل كلّ دليل i من $\{1,2,\ldots,n\}$ وكلّ x من $[x_i, x_{i+1}[$ يكون لدينا:

$$f(x_i) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_i) + \varepsilon.$$

نعرّف دالّتين g و h من $\mathscr{E}([a,b])$ بحيث:

$$\begin{cases} g(x) = f(x_i) - \varepsilon ; \ x \in [x_i, x_{i+1}[, \\ g(b) = f(b), \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) = f(x_i) + \varepsilon ; \ x \in [x_i, x_{i+1}[, \\ h(b) = f(b). \end{cases}$$

يأتي على التوّ أنّ:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) ; \ x \in [a,b], \\ \int_a^b (h(x) - g(x))\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(2\varepsilon) \leq 2\varepsilon(b-a). \end{cases}$$

و.هـ.م

9.2 قضية

إذا كانت f دالّة حقيقيّة محدودة على $[a,b]$ ومستمرّة على $]a,b[$ فإنّها تضحى عنصرا من $\mathscr{R}([a,b])$.

نسلّم بهذه النتيجة.

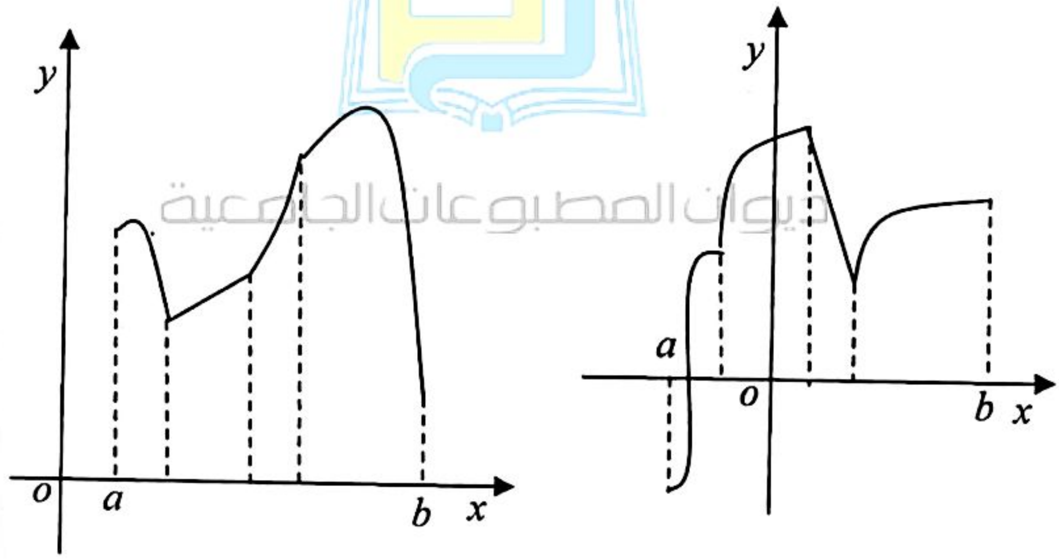
10.2 تعريف

نقول عن دالّة حقيقيّة f، معرّفة على المجال المتراص $[a,b]$، إنّها **مستمرّة بالقطع** على $[a,b]$ إذا وجد تقسيم $\sigma=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ لـ $[a,b]$ بحيث:

1) يكون مقصور f على كلّ مجال $]x_{i-1},x_i[$ $(0\le i\le n)$ مستمرّا؛

2) تقبل f نهاية من اليمين ونهاية من اليسار عند كلّ نقطة x_i، وكذا نهاية من اليمين عند a ونهاية من اليسار عند b.

إنّه حال الدوال المستمرّة والدوال الدرجيّة.



11.2 قضية

كلّ دالّة حقيقيّة مستمرّة بالقطع على المجال $[a,b]$ تنتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$.

نسلّم بهذه النتيجة.

12.2 مبرهنة

1) $(\mathscr{R}([a,b]),+,.)$ فضاء شعاعيّ على $\mathbb{R}$.

2) التطبيق $u:\mathscr{R}([a,b])\to\mathbb{R}$ المعرّف بـــ $u(f)=\int_a^b f(t)dt$ شكل خطّيّ متزايد ويحقّق:

$$|u(f)|=\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq(b-a)\sup_{a\leq t\leq b}|f(t)|.$$

إثبات

1) ليكن f و g عنصرين من $\mathscr{R}([a,b])$. من أجل كلّ $\varepsilon>0$ معطى يوجد φ_1 و φ_2 و ψ_1 و ψ_2 من $\mathscr{E}([a,b])$ بحيث:

$$\begin{cases}\varphi_1(x)\leq f(x)\leq\psi_1(x)\quad\wedge\quad\varphi_2(x)\leq g(x)\leq\psi_2(x)\ ;\ \ x\in[a,b],\\ \int_a^b(\psi_1(x)-\varphi_1(x))dx\leq\dfrac{\varepsilon}{2}\ \wedge\ \int_a^b(\psi_2(x)-\varphi_2(x))dx\leq\dfrac{\varepsilon}{2}.\end{cases}$$

يأتي عندئذ:

$$\begin{cases}\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\leq f(x)+g(x)\leq\psi_1(x)+\psi_2(x)\ ;\ x\in[a,b],\\ \int_a^b\left((\psi_1(x)+\psi_2(x))-(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))\right)dx\leq\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{cases}$$

ولما كان $\varphi_1+\varphi_2$ و $\psi_1+\psi_2$ عنصرين من $\mathscr{E}([a,b])$ نتج أنّ $f+g$ ينتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$.

من جهة أخرى، إذا كان $\lambda = 0$ و f من $\mathscr{R}([a,b])$ جاء على التوّ أنّ $0.f = 0$ ينتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$. وإذا افترضنا $\lambda > 0$ كتبنا عندئذ:

$$\begin{cases} \lambda\varphi_1 \le \lambda f \le \lambda\psi_1, \\ \int_a^b \left(\lambda\psi_1(t) - \lambda\varphi_1(t)\right) dt \le \lambda \dfrac{\varepsilon}{2}; \end{cases}$$

وهو ما يفضي إلى انتماء λf إلى $\mathscr{R}([a,b])$. (لاحظ أنّ $\lambda\psi_1$ و $\lambda\varphi_1$ ينتميان إلى $\mathscr{E}([a,b])$ بداهة.)

تعالج الحالة $\lambda < 0$ بالمثل.

2) قم به!

13.2 قضية

ليكن f عنصرا من $\mathscr{R}([a,b])$ و g دالّة محدودة على $[a,b]$. نفترض أنّ المجموعة $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ منتهية. تكون g عندئذ قابلة للمكاملة على $[a,b]$ وتحقّق:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

إثبات

لنضع:

$$\{x \in [a,b] / f(x) \neq g(x)\} = \{x_1, x_2, ..., x_q\},$$

ولنعتبر $\sigma = \{a, x_1, x_2, ..., x_q, b\}$ تقسيما لـــ $[a,b]$. إنّ الفرق $f - g$ معدوم على كلّ واحد من المجالات المنجرّة عن هذا التقسيم. وعليه، ينتج أنّ $f - g$ ينتمي إلى $\mathscr{E}([a,b])$ المحتوى في $\mathscr{R}([a,b])$. وفضلا عن ذلك، لدينا:

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 0.$$

يترتّب عمّا سبق أنّ $g = f-(f-g)$ ينتمي إلى $\mathscr{R}\big([a,b]\big)$ و:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

14.2 نتيجة

إذا كان f عنصرا من $\mathscr{R}\big([a,b]\big)$ واستبدلنا قيم f عند عدد منته من نقاط $[a,b]$ حصلنا حينئذ على دالّة جديدة $\tilde{f}$، تكون منتمية إلى $\mathscr{R}\big([a,b]\big)$ وتحقّق:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

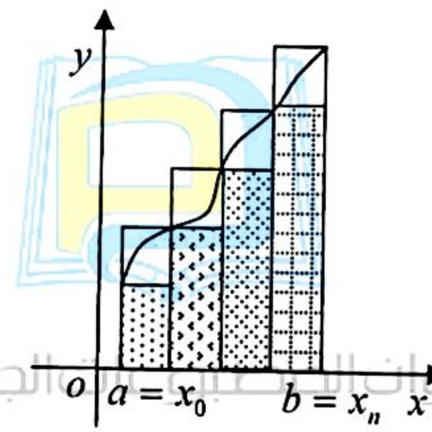
3

دستور تكامل دالّة مستمرّة الريماني

1.3 تمهيد

لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على المجال المتراص $[a,b]$. نعتبر التقسيم المنتظم $\sigma=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ لــ $[a,b]$ بحيث:

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n};\ k=0,1,...,n.$$



بهذا نحصل على $x_{k+1}-x_k=\dfrac{b-a}{n}$. فإذا ما وضعنا:

$$I_n=\frac{b-a}{n}\big(f(x_0)+f(x_1)+...+f(x_{n-1})\big),$$

$$J_n=\frac{b-a}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\big),$$

جاءنا:

$$J_n - I_n = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

إنّ المتتاليتين (I_n) و (J_n) متجاورتان.

2.3 تعريف

نسمّي تكامل الدالّة المستمرّة f على المجال $[a,b]$ النهاية المشتركة للمتتاليتين المتقاربتين (I_n) و (J_n). ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

تظهر هذه القاعدة الهامّة **الدور المتبادل لمفهومي النهاية والتكامل في حساب أحدهما بواسطة الآخر.** تسمح الأمثلة الموالية بالوقوف على ذلك.

3.3 أمثلة

1) لنحسب تكامل الدالّة الحقيقيّة $f(x) = [x]$ (الجزء الصحيح لـــ x) على المجال $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$. لدينا:

$$\int_{-2}^{1,5} [x]dx = 1(-2) + 1(-1) + 1(0) + 1(0,5) = -2,5.$$

2) لحساب التكامل $I = \int_0^1 2\,ax\,dx$ ، حيث a عدد حقيقيّة معطى، نكتب تطبيقا للقاعدة أعلاه:

$$\int_a^b 2\,ax\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} 2a\left(0 + \frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2a}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{2a}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = a.$$

3) لحساب التكامل $I=\int_0^1 x^2dx$ ، نكتب بالمثل:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(0+\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}.$$

4) لحساب التكامل $I=\int_0^1 x^2dx$ وفق التقسيم:

$$0<x_0=a<x_1<\ldots<x_k=a\rho^k<\ldots<x_n=a\rho^n=b$$

نكتب تعريفا:

$$I=\int_a^b x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)x_i^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(a\rho^{i+1}-a\rho^i)a^2\rho^{2i}\ =a^3(\rho-1)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(\rho^3)^i$$

$$=\lim_{n\to\infty}a^3(\rho-1)\frac{1-(\rho^3)^n}{1-\rho^3}=\lim_{n\to\infty}-a^3\,\frac{1-(\rho^3)^n}{1+\rho+\rho^2}.$$

ولما كان $\rho=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ حصلنا على:

$$I=\lim_{n\to\infty}-a^3\frac{1-\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{3n}}{1+\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)+\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^2}=-a^3\,\frac{1-\frac{b^3}{a^3}}{3}=\frac{b^3-a^3}{3}.$$

5) هبك تريد حساب النهايات الخمس التالية:

$$\ell_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi a}{n}+\sin\frac{2\pi a}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi a}{n}\right),a\in\mathbb{R}^*$$

$$\ell_2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2};\ \ \ell_3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}};$$

$$\ell_4 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3 + k^3}}; \quad \ell_5 = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!}{n! n^n} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

يسمح الدستور الموضوع بحساب النهاية الأولى مباشرة:

$$\ell_1 = \pi \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-0}{n} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \sin \left(0 + k \frac{1-0}{n} \pi a \right) = \pi \int_0^1 \sin \pi a x \, dx$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{\pi a} \cos \pi a x \Big]_0^1 \right) = \frac{1}{a} (1 - \cos \pi a).$$

النهايات الثلاث الموالية تحسب بدورها على النحو:

$$\ell_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} dx = \left(Arctg\, x \Big]_0^1 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\ell_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(Argsh\, x \Big]_0^1 \right) = Argsh 1$$

$$= \left(Log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \Big]_0^1 \right) = Log \left(1 + \sqrt{2} \right).$$

$$\ell_4 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n} \right)^2}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^3}} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(1+x^3)^2} \Big]_0^1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{4} - 1 \right).$$

لنتوقّف عند النهاية الأخيرة. يقتضي تعيينها أن نكتب:

$$\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left[(n+1)(n+2)\dots(n+n)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\left[n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Log\left(1+\frac{k}{n}\right)}.$$

ولما كانت الدالّة الأسيّة مستمرّة على $\mathbb{R}$ حصلنا بفضل دستورنا على:

$$\ell_5=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Log\left(1+\frac{k}{n}\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Log\left(1+\frac{k}{n}\right)}=e^{\int_0^1 Log(1+x)dx}$$

$$=e^{\left[(1+x)Log(1+x)-(1+x)\right]_0^1}=e^{2Log2-1}=\frac{4}{e}.$$

4.3 خصائص أساسيّة

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين مستمرّتين على $[a,b]$. لدينا:

1) $\int_a^a f(x)dx=0;$

2) $\forall c\in[a,b]\ \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$

3) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;$

4) $f\geq 0\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx\geq 0;$

5) $f\geq g\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx;$

5.3 مبرهنة (الدستور الأوّل للمتوسّط)

لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على $[a,b]$ و g دالّة قابلة للمكاملة على $[a,b]$ ومتمتّعة بإشارة ثابتة. توجد عندئذ نقطة c من $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

إثبات

نفترض دونما مسّ بعمومية النتيجة، أنّ $g > 0$. فإذا ما وضعنا $\max_{x\in[a,b]} f(x) = M$ و $\min_{x\in[a,b]} f(x) = m$ (وهما مضمونا الوجود) كتبنا:

$$mg \le fg \le Mg,$$

ومنه:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

وبالتالي:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M;$$

ولما كانت f دالّة مستمرّة على $[a,b]$ أدركت كلّ قيمة محصورة بين حدّيها الأعلى والأدنى. نستخلص أنّه توجد نقطة c من $[a,b]$ تؤدّي المطلوب.

6.3 نتيجة (الدستور الثاني للمتوسّط)

لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على $[a,b]$. توجد عندئذ نقطة c من $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

يمكن الحصول على هذه النتيجة من المبرهنة السابقة وذلك بأخذ $g \equiv 1$.

من جهة أخرى، تفسّر هندسيّا بأنّ مساحة الحيّز من المستوي المحصور بين بيان f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ تساوي مساحة المستطيل ذي البعدين $(b-a)$ و $f(c)$.

4

حساب دوال أصليّة

1.4 تعاريف وخصائص أساسيّة

1.1.4 تعريف

نقول عن دالّة حقيقيّة F ، معرّفة وقابلة للاشتقاق على مجال I ، إنّها **دالّة أصليّة** للدالّة f على I إذا حقّقت:

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

نرمز للدوال الأصليّة لـــ f بـــ :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.1.4 مبرهنة

لتكن f دالّة قابلة للمكاملة ريمانيًا على مجال متراص $[a,b]$ و F الدالّة الحقيقيّة المعرّفة على $[a,b]$ بـــ :

$$\int_a^x f(x)dx = F(x).$$

1) الدالّة F مستمرّة على المجال $[a,b]$.

2) إذا كانت f مستمرّة عند نقطة x_0 من $[a,b]$ كانت الدالّة F حينئذ قابلة للاشتقاق عند x_0 وحقّقت $F'(x_0) = f(x_0)$.

إثبات

1) إذا وضعنا $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$ جاءنا من أجل كلّ x و y من $[a,b]$:

$$\left|F(x)-F(y)\right|=\left|\int_x^y f(t)dt\right|\le M\left|x-y\right|.$$

إذن، F مستمرّة بانتظام على $[a,b]$.

2) لنحسب نسبة التزايد اللاڤرانجيّة[15]، مستندين إلى الدستور الثاني للمتوسّط:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}=f(c), c\in\left[x,x_0\right]\ (x<x_0).$$

إذا آل x إلى x_0 آل c إلى x_0. ولما كانت f مستمرّة عند x_0 حصلنا على النتيجة المعلنة:

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{c\to x_0} f(x_0).$$

3.1.4 ملحوظتان

1) الدالّة $\int_a^x f(x)dx=F(x)$ ليست بالضرورة دالّة أصلية لدالّة f.

هذا مثال مضاد:

$$f(x)=\begin{cases}1; & 0\le x\le 1,\\ 2; & 1<x\le 2.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad F(x)=\begin{cases}x; & 0\le x\le 1,\\ 1+2(x-1); & 1<x\le 2.\end{cases}$$

---

15. Joseph Louis Lagrange: رياضيّاتيّ إيطاليّ كبير في الفيزياء والتحليل الرياضيّاتيّ ونظرية الأعداد. ولد في 25 جانفي 1736 بطورينو ومات بباريس في 10 أفريل 1813. ساهم بشكل خاص في حسبان التغيّرات والميكانيكا التحليليّة والفلك. إليه يعود رمز المشتقّ f'.

2) إذا كانت F دالّة أصليّة لـــ f على $[a,b]$ فذلك لا يعني أنّ f قابلة للمكاملة على $[a,b]$. يكفي التحجّج بهذا المثال المضاد:

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right); & 0<x\le 1,\\ 0; \quad x=0.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right); & 0<x\le 1,\\ 0; \quad x=0.\end{cases}$$

4.1.4 قضية

لتكن f دالّة مستمرّة على $[a,b]$ و F دالّة أصليّة لها. لدينا عندئذ:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

إثبات

لنعتبر الدالّة $G(x)=\int_a^x f(t)dt$. لدينا:

$$G(x)=F(x)+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

وعليه:

$$G(a)=F(a)+C=0,$$

$$F(b)=G(b)-C=\int_a^b f(x)dx+F(a).$$

يعتمد حساب الدوال الأصلية أساسا كسابق عهدك بذلك، على ركائز ثلاث: **دوال أصليّة متداولة، تبديل للمتغيّر، مكاملة بالتجزئة**. يعمد إلى هذه الركائز فردية أو مقرونة، بل **غالبا ما تتزاوج وتتناوب وتتكرّر. في حساب دالّة أصلية واحدة.**

5.1.4 جدول بعض الدوال الأصلية المتداولة

الدوال الأصليّة	الدالّة
$Arctg\, x + C$	$\frac{1}{1+x^2},\ (x \in \mathbb{R})$
$Arc\cot g\, x + C$	$-\frac{1}{1+x^2},\ (x \in \mathbb{R})$
$Argsh\, x = Log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ (x \in \mathbb{R})$
$Argch\, x = Log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \left(x \in]1, +\infty[\right)$
$Log\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \left(x \in]-\infty, -1[\right)$
$Argth\, x = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$	$\frac{1}{1-x^2},\ \left(x \in]-1, 1[\right)$
$\frac{1}{2} Log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$\frac{1}{1-x^2}, \left(x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\right)$
$Log\left\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},\ (x \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$
$Log\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, \left(\lvert x\rvert > \lvert a\rvert \in \mathbb{R}_+^*\right)$
$Arc\sin\frac{x}{a} + C$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \left(\lvert x\rvert < a;\ a > 0\right)$

$x\,Arc\sin x+\sqrt{1-x^2}+C$	$Arc\sin x,\ \left(x\in\left]-1,1\right[\right)$
$x\,Arc\cos x-\sqrt{1-x^2}+C$	$Arc\cos x,\ \left(x\in\left]-1,1\right[\right)$
$x\,Arctgx-Log\left(\sqrt{1+x^2}\right)+C$	$Arctgx,\ (x\in\mathbb{R})$
$x\,Arccotgx+Log\left(\sqrt{1+x^2}\right)+C$	$Arccotgx,\ (x\in\mathbb{R})$
$x\,Argshx-\sqrt{x^2+1}+C$	$Argshx,\ (x\in\mathbb{R})$
$x\,Argchx-\sqrt{x^2-1}+C$	$Argchx,\ (x>1)$
$x\,Argthx+Log\left(\sqrt{1-x^2}\right)+C$	$Argthx,\ x\in\left(\left]-1,1\right[\right)$
$x\,Argcthx+Log\left(\sqrt{x^2-1}\right)+C$	$Argcthx,\ \left(\lvert x\rvert>1\right)$

2.4 طريقة تبديل المتغيّر

1.2.4 مبرهنة

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالّة مستمرّة و $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ دالّة من الصنف $\mathscr{C}^1$. لدينا عندئذ:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

إثبات

يكفي اعتبار المخطّط $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ حيث:

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

2.2.4 أمثلة

1) إذا رمنا حساب التكامل $I=\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ كتبناه تحت الشكل $\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$، ثمّ عمدنا إلى المتغيّر $t=\frac{x}{a}$. وعليه، يجيئنا توّا:

$$\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}Arctg\,t+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

إذن:

$$I=\frac{1}{a}Arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

2) بالتغيير ذاته $\frac{x}{a}=t$ نجد:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=Arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ \ C\in\mathbb{R};$$

$$K=\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}Log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

3) لحساب التكامل $I=\int a^x dx$ نقوم بكتابته تحت الشكل $I=\int e^{x\log a}dx$ ثمّ نأتي بالمتغيّر الجديد $t=xLog\,a$. ولمّا كان:

$$\frac{1}{Log\,a}\int e^t dt=\frac{1}{Log\,a}e^t+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

ظفرنا بتكاملنا:

$$I = \int a^x dx = \frac{1}{\operatorname{Log} a} a^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

4) للحصول على الدوال الأصليّة للدالّة الحقيقيّة $f(x) = tg\, x$ نستعين بالتغيير $t = \cos x$. وعليه $dt = -\sin x\, dx$، إذن:

$$\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\operatorname{Log}|t| = -\operatorname{Log}|\cos x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5) لنحسب التكامل:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

بأخذ $\varphi(t) = tg\, t$ حيث t من $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$، نجد:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^2 t}{(1+tg^2 t)\sqrt{1+tg^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6) لحساب التكامل:

$$I = \int_a^b \frac{(\operatorname{Log} x)^n}{x} dx,$$

نلجأ إلى التغيير $t = \operatorname{Log} x$ حيث x من $[a,b]$. يأتي عندئذ:

$$I = \int_a^b \frac{(\log x)^n}{x} dx = \int_{\operatorname{Log} a}^{\operatorname{Log} b} t^n dx = \frac{(\operatorname{Log} b)^{n+1} - (\operatorname{Log} a)^{n+1}}{n+1}.$$

3.4 المكاملة بالتجزئة

1.3.4 مبرهنة

لتكن u و v دالّتين حقيقيّتين من الصنف $\mathscr{C}^1$ على المجال $[a,b]$. يكون لدينا عندئذ:

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)\, v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

إثبات

لدينا بالاشتقاق:

$$(u.v)' = u'v + uv'.$$

وبالمكاملة تأتي النتيجة المنشودة.

2.3.4 أمثلة

1) هبك تبحث عن مكاملة الدالّة $f(x) = (1+x)e^x$. إذا اتّبعت القاعدة ووضعت $u = (x+1)$ و $dv = e^x dx$ وجدت دونما عناء:

$$\int f(x)dx = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2) لحساب التكامل $I = \int Arctg\, x\, dx$ نركن إلى المكاملة بالتجزئة فنضع $u = Arctg\, x$ و $dv = dx$. نكتب عندئذ:

$$\begin{aligned} I = \int Arctg\, x\, dx &= x\, Arctg\, x - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= x\, Arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= x\, Arctg\, x - \frac{1}{2} Log(x^2+1) + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) هبك تريد حساب التكامل:

$$I = \int x\sqrt{x+2}\, dx,$$

بوضع $u = x$ و $dv = \sqrt{x+2}\, dx$ تحصل على:

$$I = x\left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{3}\int (x+2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= x\left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{4}{15}(x+2)^{\frac{5}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{2}{15}(3x-4)(x+2)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

4) عند حساب التكامل $I_n = \int (L\text{og}\, x)^n dx$، نجد $I_0 = x$ ومن بعد تأتي العلاقة التراجعيّة:

$$I_n = nI_{n-1} = x(L\text{og}\, x)^n,\ n \geq 1.$$

5) عند حساب التكامل $I_k = \int x^k e^{\alpha x} dx$، حيث k عدد طبيعيّ و α عدد طبيعيّ غير معدوم، نجد $I_0 = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$، والعلاقة التراجعيّة:

$$I_k + \frac{k}{\alpha}I_{k-1} = \frac{1}{\alpha}x^k e^{\alpha x},\ k \geq 1.$$

4.4 الدوال الأصليّة للدوال الكسريّة الناطقة

1.4.4 تعريف

تسمّى الدوال:

$$x \mapsto \frac{A}{(x-x_0)^k},$$

$$x \mapsto \frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^{\nu}},$$

حيث v و k عددان طبيعيّان و x_0 و A و B و c ثوابت حقيقيّة و $p^2 - 4q < 0$ ،

عوامل بسيطة من النوع الأوّل والثاني على التوالي.

2.4.4 مبرهنة

ليكن P و Q كثيري حدود حقيقيّين بحيث درجة P أصغر من درجة Q ولنفترض أنّ:

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} \ldots (x - x_2)^{m_2} (x^2 + p_1 x + q_1)^{v_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{v_s},$$

بحيث:

$$p_i^2 - 4q_i < 0, \; i = 1, \ldots, s.$$

تفكّك الدالّة الكسريّة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ عندئذ على الشكل:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \ldots + \frac{A_{km_k}}{(x - x_2)^{m_k}} +$$

$$+ \frac{B_{11} x + c_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{B_{1v_1} x + c_{1v_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{v_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{s1} x + c_{s1}}{x^2 + p_s x + q_s} + \ldots + \frac{B_{sv_s} x + c_{sv_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{v_s}}$$

بحيث A_{ij} و B_{kl} و C_{pq} ثوابت حقيقيّة.

(انظر التفاصيل في درس الكسور الناطقة عند الجار "الجبر").

3.4.4 نتيجة

كلّ دالّة كسريّة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تكتب على الشكل:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}+\ldots$$ (مجموع لعوامل بسيطة)

كثيرات الحدود $S(x)$ و $R(x)$ هي على التوالي حاصل وباقي قسمة P على Q الإقليديّة.

من المبرهنة السابقة نرى أنّ كلّ دالّة كسريّة تكتب على شكل مجموع كثير حدود وعدد منته لعوامل بسيطة من الشكل:

$$\frac{A}{(x-x_0)^k} \quad \text{و} \quad \frac{Bx+c}{((x-a)^2+b^2)^k}=\frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^k}$$

4.4.4 مكاملة العوامل البسيطة من النوع الأوّل

$$\int\frac{dx}{(x-x_0)^k}=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)(x-x_0)^{k-1}}+C, & k>1;\\ Log|x-x_0|+C, & k=1.\end{cases}$$

5.4.4 مكاملة العوامل البسيطة من النوع الثاني

لحساب التكامل:

$$\int\frac{Bx+c}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}dx$$

نضع $x=a+bt$. ومنه $dx=b\,dt$. وعليه، يصبح للتكامل الشكل:

$$\int \frac{Bx+c}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}dx = b\int \frac{B(a+bt)+c}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}dt$$

$$= b\int \frac{Ba+c}{b^{2k}(1+t^2)^k}dt + b\int \frac{Bbt}{b^{2k}(1+t^2)^k}dt$$

$$= \frac{(Ba+c)}{b^{2k-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^k} + \frac{B}{b^{2k-2}}\int \frac{t}{(1+t^2)^k}dt.$$

هكذا، ترجع مكاملة النوع الثاني إلى مكاملة النمطين:

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^k};\ \int \frac{t}{(1+t^2)^k}dt.$$

لمكاملة النمط:

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^k}dt,$$

نضع $u=1+t^2$؛ ومنه $du=2t\,dt$. وعليه:

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^k}dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}}+C\ ;\ k>1, \\ \dfrac{1}{2}Log(1+t^2)+C\ ;\ k=1. \end{cases}$$

ولمكاملة النمط:

$$I_k = \int \frac{dt}{(1+t^2)^k},$$

نستعين بطريقة المكاملة بالتجزئة. لدينا:

$$\frac{1}{(1+t^2)^k} = u \ \Rightarrow\ du = \frac{-2kt}{(1+t^2)^{k+1}}dt,$$

$$v = t \ \Rightarrow\ dv = dt.$$

بالتعويض نجد:

$$I_k = \int \frac{1}{(1+t^2)^k} dt = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{k+1}} dt$$
$$= \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k \int \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{k+1}} dt$$
$$= \frac{1}{(1+t^2)^k} + 2k \int \frac{dt}{(1+t^2)^k} - 2k \int \frac{dt}{(1+t^2)^{k+1}}$$
$$= \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1};$$

وهو ما يفضي إلى العلاقة التراجعيّة:

$$\begin{cases} 2kI_{k+1} = \dfrac{t}{(1+t^2)^k} + (2k-1)I_k, \\ I_1 = \displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = Arctg\, t + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6.4.4 أمثلة

1) لحساب التكامل $I = \int \frac{dx}{2x^2+3x+5}$ نكتب المقام تحت شكله القانونيّ:

$$D = 2x^2+3x+5 = 2\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2 \left[\left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}}\right)^2 + 1\right],$$

ثمّ نقوم بالتغيير $t = \frac{4x+3}{\sqrt{31}}$، الذي يوصلنا إلى أنّ:

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{31}}{4}}{2\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2 (t^2+1)} dt = \frac{2}{\sqrt{31}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{31}} Arctg\, t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

إذن:

$$I=\frac{2}{\sqrt{31}}Arctg\left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2) لحساب التكامل $J=\int\frac{x-1}{x^2-x-1}dx$ نضع الكسر $\frac{x-1}{x^2-x-1}$ تحت الشكل:

$$\frac{x-1}{x^2-x-1}=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\left(\frac{1}{2}-1\right)}{x^2-x-1}=\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x-1}.$$

وعليه:

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x-1}.$$

بخصوص التكامل الأوّل لدينا على الفور:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-1}dx=\frac{1}{2}Log\left|x^2-x-1\right|+A,\ A\in\mathbb{R};$$

أمّا التكامل الثاني فنعالجه كما فعلنا في المثال الأوّل. لدينا:

$$\int\frac{dx}{x^2-x-1}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2-1\right]}.$$

بوضع $t=\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$ نحصل على $dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dt$. وعليه:

$$\int\frac{dx}{x^2-x-1}=\frac{2}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{t^2-t}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}Log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+B,\ B\in\mathbb{R}.$$

يكون لدينا في الختام:

$$J=\frac{1}{2}Log\left|x^2-x-1\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}Log\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

3) لحساب التكامل $K=\int\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$ نقوم بتفكيك الكسر الناطق

$F(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ تحت الشكل المألوف:

$$F(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}.$$

وعليه:

$$K=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{4}Log\left|x-1\right|-\frac{1}{4}Log\left|x+1\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

4) لحساب التكامل:

$$L=\int\frac{x+3}{(x^2+4x+5)^2}dx,$$

نكتب العبارة x^2+4x+5 تحت الشكل $(x+2)^2+1$ ثمّ نعمد إلى التبديل $t=x+2$. بذلك يتّخذ التكامل L الشكل:

$$L=\int\frac{t}{(t^2+1)^2}dt+\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

لنحسب التكاملين الجزّأين لـــ L، كلا على حدى. بخصوص الأوّل لدينا على الفور:

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} + A,\ A \in \mathbb{R}.$$

نكتب بشأن الثاني:

$$S = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{(t^2+1)}{(t^2+1)^2}\,dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = Arctg\,t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt;$$

وبما أنّ:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int t \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{-t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{-t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}S.$$

إذن:

$$S = \frac{t}{3(t^2+1)} + \frac{2}{3}Arctg\,t + B,\ B \in \mathbb{R}.$$

نجد هكذا:

$$L = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} + \frac{t}{3(t^2+1)} + \frac{2}{3}Arctg\,t + C$$
$$= \frac{1}{6}\frac{2t-3}{(t^2+1)} + \frac{2}{3}Arctg\,t + C,\ C \in \mathbb{R},$$

أي:

$$L = \frac{1}{6}\frac{2x+1}{(x^2+4x+5)} + \frac{2}{3}Arctg(x+2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5.2 مكاملة الدوال الآبليّة (الجذريّة)

لمكاملة هذا النوع من الدوال نحاول دائما الرجوع إلى مكاملة دالّة كسريّة بتبديل المتغيّر.

1.5.2 حساب التكامل $I=\int R(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}})dx$

يرمز R إلى دالّة كسريّة لـ x، $x^{\frac{m}{n}}$، ...، $x^{\frac{r}{s}}$. نرمز للمقام المشترك للكسور $x^{\frac{m}{n}}$، ...، $x^{\frac{r}{s}}$ بـ k. يسمح التبديل $x=t^k$ بالرجوع إلى كسر ناطق.

2.5.2 مثالان

1) لحساب التكامل $I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$ نضع $x=t^4$. وعليه،

$dx=4t^3dt$.

بالتعويض نحصل على:

$$\int\frac{t^2}{1+t^3}4t^3dt=4\int\frac{t^5}{1+t^3}dt=4\int\left(t^2-\frac{t^2}{1+t^3}\right)dt$$
$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}Log\left|t^3+1\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

إذن:

$$I=\frac{3}{4}\left(x^{\frac{3}{4}}-Log\left|1+x^{\frac{3}{4}}\right|\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2) لحساب التكامل $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ نضع $x=t^6$. وعليه $dx=6t^5$، وبالتالي:

$$\int\frac{1}{t^3+t^2}6t^5dt=6\int\frac{t^3}{1+t}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6Log\left|1+t\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

إذن:

$$J=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6Log\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

6.2 حساب التكامل $I=\int R\left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$

تكامل هذه العبارة بوضع $t^k=\frac{ax+b}{cx+d}$، حيث k هو المقام المشترك للقوى $\frac{m}{n}$، ...، $\frac{r}{s}$.

1.6.2 أمثلة

1) لنحسب التكامل $I=\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$ نضع $t^2=x+4$؛ وعليه، نكتب $dx=2t\,dt$. بالتعويض يأتي:

$$I=2\int\frac{t^2}{t^2-4}dt=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=2t+4Log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

بالرجوع إلى المتغيّر الأصليّ نجد:

$$I = 2\sqrt{x+4} + 4Log\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2) لنعد حساب التكامل $I = \int x\sqrt{x+2}\,dx$ الذي مرّ بك. بوضع $t^2 = x+2$ نحصل على:

$$I = 2\int t^2(t^2-2)dt = 2\int(t^4-2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

ومنه:

$$I = \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3) لحساب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}}$ نضع $2x-1 = t^4$. وعليه $dx = 2t^3dt$. بالتعويض يأتي:

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 2\left[\int(t+1)dt + \int\frac{1}{t-1}dt\right] \\ &= t^2 + 2t + 2Log|t-1| + C,\ C \in \mathbb{R}. \\ &= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + Log\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2 + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7.2 التكامل من الشكل: $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a \neq 0$

يمكن إرجاع R إلى دالّة كسريّة باللجوء إلى تبديلات أولر[16] للمتغيّر .

---

16. Leonhard Euler : رياضيّاتيّ سويسريّ موهوب، ولد في 15 أفريل 1707 في بازل ومات في 18 سبتمبر 1783 بسانبترسبورف (روسيا). له تركة ضخمة في الرياضيّات. أُعترف له بأنّه أغزر الرياضيّاتيّين إنتاجا لكلّ الأوقات. يرجع إليه الفضل في إدراج

1.7.2 إذا كان $0 < a$ وضعنا:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x+t;$$

وعليه:

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xt+t^2$$

ومنه $x = \dfrac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}\,t}$. يوصلنا هذا التبديل إلى تكامل دالّة كسريّة وفق t .

2.7.2 أمثلة

1) لحساب التكامل $I = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$ (لاحظ أنّ $a = 1$)، نضع مثلا:

$$\sqrt{x^2+c} = -x+t.$$

ومنه:

$$x^2+c = x^2-2xt+t^2;$$

وبالتالي $x = \dfrac{t^2-c}{2t}$. بالتعويض نجد:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{t^2+c}{t^2}}{\dfrac{c-t^2}{2t}+t}dt = \frac{1}{2}\int\frac{2(t^2+c)}{ct-t^3+2t^3}dt$$

$$= \int\frac{t^2+c}{t.(t^2+c)}dt = \int\frac{dt}{t} = \mathrm{Log}|t|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

أي:

الرمز $f(x)$ لدالّة (1734) و e لأساس اللوغاريتم (1727) و i لجذر1- التربيعيّ (1777) و π للعدد پــي (1755) وغيرها كثير...

$$I = L\log\left|\sqrt{x^2+c}+x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2) هبك تريد حساب التكامل $J=\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}$. كتابتك للمقام

تحت الشكل:

$$\sqrt{-2x^2+3x+2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{4x-3}{5}\right)^2}$$

ووضعك $t=\frac{4x-3}{5}$ يوصلانك إلى:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\sin t+C,\ C\in\mathbb{R},$$

أي:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\sin\frac{4x-3}{5}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

3) لحساب:

$$I=\int\sqrt{x^2+4x+3}\,dx=\int\sqrt{(x+2)^2-1}\,dx$$

نكتب $I=\int\sqrt{(x+2)^2-1}\,dx$ ثمّ نضع $x+2=chu$. وعليه:

$$I=\int\sqrt{ch^2u-1}\,dx=\int sh^2u\,du=\int\frac{ch2u-1}{2}du=\frac{sh2u}{4}-\frac{u}{2}+C;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{shuchu}{2}-\frac{u}{2}=\frac{chu}{2}\sqrt{ch^2u-1}-\frac{u}{2}+C;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{(x+2)}{2}\sqrt{(x+2)^2-1}-\frac{Argch(x+2)}{2}+C;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+3}-\frac{1}{2}Log\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

3.7.2 إذا كان المميّز $\Delta = b^2 - 4ac$ موجبا تماما وكان α و β الجذرين الحقيقيّين لـــ $ax^2 + bx + c$ وضعنا:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t.$$

وعليه:

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha^2)t^2 \quad \Rightarrow \quad a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2$$

ومنه:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

هذا التبديل يسمح كذلك بالرجوع إلى دالّة كسريّة.

4.7.2 مثالان

1) معالجة التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$ تقتضي وضعه تحت الشكل:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}.$$

نضع عندئذ:

$$\sqrt{(x+1)(x+3)} = (x+1)t.$$

لدينا توّا $x = \frac{3-t^2}{t^2-1}$، ومنه $dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt$. وبالتالي:

$$I = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t+1} - \frac{dt}{t-1} = Log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

هكذا يكون:

$$I = Log\left|\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}\right| + C$$
$$= Log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

2) لحساب التكامل:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}},$$

نضع:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t.$$

ومنه $x = \frac{1+4t^2}{1-t^2}$ ، وبالتالي $dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}$. بالتعويض في التكامل نجد:

$$I = \int \frac{2dt}{1-t^2} = Log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C;$$

أي:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = Log\left|\frac{x+4+\sqrt{x^2+3x-4}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+3x-4}}\right| + C;\ \ C \in \mathbb{R}.$$

8.2 مكاملة الدوال $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ ، حيث R دالّة كسريّة لـــ $\sin x$ و $\cos x$.

1.8.2 الحالة العامّة

يمكن على الدوام أن نرجع إلى دالّة كسريّة بواسطة التبديل $t = tg\frac{x}{2}$. لدينا:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{\left(tg\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1-\left(tg\frac{x}{2}\right)^2}{\left(tg\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

2.8.2 أمثلة

1) لمعالجة التكامل $I=\int\frac{dx}{\sin x}$ نضع $t=tg\frac{x}{2}$. وعليه:

$$I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=Log|t|+C=Log\left|tg\frac{x}{2}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

2) لنحسب بالمثل التكامل $I=\int\frac{dx}{\cos x}$. نجد بالتبديل ذاته:

$$I=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=Log\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=Log\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

يمكن بطبيعة الحال سلوك سبيل مغاير؛ فنضع $t=\cos x$ بخصوص التكامل (1) و $t=\sin x$ بشأن التكامل (2). نجد في هذا الإطار:

$$I=\int\frac{dx}{\sin x}=-Argth(\cos x)+C;\ C\in\mathbb{R};$$

$$I=\int\frac{dx}{\cos x}=Argth(\sin x)+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

3) لنحسب في الأخير التكامل $I=\int\frac{dx}{2+\cos x}$. بوضع $t=tg\frac{x}{2}$ يأتي:

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3+t^2}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C;\ C\in\mathbb{R}=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

3.8.2 حالات خاصة

في أغلب الحالات، يؤدّي التبديل $t=tg\frac{x}{2}$ إلى حسابات طويلة ومعقّدة.

نستطيع، في الحالات الخاصة التالية، أن نستعمل تبديلات أخرى:

1) في الحالة $I=\int R(\sin x)\cos x dx$ نضع $t=\sin x$؛

2) في الحالة $I=\int R(\cos x)\sin x dx$ نضع $t=\cos x$؛

3) في الحالة $I=\int R(tgx)\frac{1}{(\cos x)^2}dx$ نضع $t=tgx$.

4.8.2 مثال

لحساب $I=\int\frac{(\sin x)^5}{\cos x}dx$ نكتب $I=\int\frac{(\sin x)^4\sin x}{\cos x}dx$ ثمّ نضع $t=\cos x$ فنجد:

$$I=-\int\left(\frac{1}{t}-2t+t^3\right)dt=-Log\left|\cos x\right|+(\cos x)^2-\frac{1}{4}(\cos x)^4+C.$$

5.8.2 لحساب التكاملات الثلاثة:

$$I = \int \cos ax \cos bx \; dx;$$

$$J = \int \sin ax \cos bx \; dx;$$

$$K = \int \sin ax \sin bx \; dx,$$

نلجأ إلى الدساتير المثلثيّة:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right];$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right].$$

6.8.2 لحساب التكامل $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ حيث m و n أعداد صحيحة

نضع:

- $t = \cos x$ عندما يكون m عددا فرديّا موجبا،
- $t = \sin x$ عندما يكون n عددا فرديّا موجبا،
- $t = tgx$ عندما يكون $m+n$ عددا زوجيّا سالبا،
- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ عندما يكون m و n عددين موجبين زوجيّين.

7.8.2 مثال

لنحسب التكاملين:

$$I = \int \cos 3x \sin 5x \; dx; \;\; J = \int \sin^3 x \cos^5 x \, dx.$$

على ضوء ما سبق يأتي بشأن I :

$$I = \int \cos 3x \sin 5x \, dx = \int \frac{\sin(3x+5x) - \sin(3x-5x)}{2} dx$$
$$= \int \frac{\sin 8x + \sin 2x}{2} dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C; \ C \in \mathbb{R}.$$

لحساب J نلجأ إلى التبديل $t = \cos x$، فنكتب:

$$J = -\int (1-t^2)t^5 \, dt = \int t^7 dt - \int t^5 dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C; \ C \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C; \ C \in \mathbb{R}.$$

9.2 مكاملة الدوال $R(e^x)$

ليكن $I = \int R(e^x).dx$، حيث R دالّة كسريّة لـــ e^x. إنّ التبديل $t = e^x$ يسمح لنا بالرجوع إلى دالّة كسريّة وفق t.

1.9.2 أمثلة

1) لنحسب التكامل $\int \frac{dx}{e^x+1}$. إذا ما وضعنا $t = e^x$ كتبنا:

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t};$$

وبالتالي:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = Log \frac{t}{t+1} + C; \ C \in \mathbb{R};$$

إذن:

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=Log\frac{e^x}{e^x+1}+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

2) لنحسب التكامل $I=\int\frac{dx}{shx}$. نكتب في البداية:

$$\int\frac{dx}{shx}=\int\frac{dx}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}=\int\frac{2e^x dx}{e^{2x}-1}.$$

وبوضع $t=e^x$ يأتي:

$$I=\int\frac{2dt}{t^2-1}=Log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

وعليه:

$$I=\int\frac{dt}{shx}=Log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|=Log\left|\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}\right|$$

$$=Log\left|th\frac{x}{2}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

يمكن في هذا المقام أن نقوم بتبرير آخر للمساواة الأخيرة على هذا النحو.

لدينا:

$$shx=\frac{sh2\left(\frac{x}{2}\right)}{1}=\frac{2sh\left(\frac{x}{2}\right)ch\left(\frac{x}{2}\right)}{ch^2\left(\frac{x}{2}\right)-sh^2\left(\frac{x}{2}\right)}=2\frac{th\left(\frac{x}{2}\right)}{1-th^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

وعليه، فإنّ استعمال التبديل $t=th\frac{x}{2}$ يفضي توّا إلى:

$$I=\int\frac{dt}{t}=Log|t|+C=Log\left|th\frac{x}{2}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

3) لحساب التكامل $I=\int\frac{dx}{chx}$ يمكن اتّباع الطريقة نفسها؛ فنكتب:

$$\int\frac{dx}{chx}=\int\frac{dx}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\int\frac{2e^x dx}{e^{2x}+1};$$

وبوضع $t=e^x$ يأتي:

$$I=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2Arctgt+C;\; C\in\mathbb{R}.$$

وعليه:

$$I=\int\frac{dt}{chx}=2Arctge^x+C;\; C\in\mathbb{R}.$$

يوصل التبديلان $t=shx$ و $t=th\frac{x}{2}$ على الترتيب إلى:

$$I=\int\frac{dt}{chx}=Arctgshx+C;\; C\in\mathbb{R};$$

$$I=\int\frac{dt}{chx}=2Arctg\left(th\frac{x}{2}\right)+C;\; C\in\mathbb{R}.$$

2.9.2 حالة خاصة

تتمّ مكاملة $I=\int e^{\alpha x}P_n(x)dx$، بحيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n و α عدد حقيقيّ، على الشكل التالي:

$$\int e^{\alpha x}P_n(x)dx=Q_n(x)e^{\alpha x}+C;$$

حيث Q_n كثير حدود درجته تساوي درجة P_n.

3.9.2 مثال

لحساب $I=\int(x^2+x+1)e^{-x}dx$ نضع:

$$I=(ax^2+bx+c)e^{-x}.$$

وبالاشتقاق نجد:

$$e^{-x}\left(2ax+b-(ax^2+bx+c)\right)=e^{-x}(x^2+x+1).$$

يأتي بالمطابقة أنّ $a=-1$ و $b=-3$ و $c=-4$. ومنه:

$$I=-(x^2+3x+4)e^{-x}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

4.9.2 ملحوظة

يمكن مكاملة التكامل:

$$I=\int e^{\alpha x}P_n(x)dx,$$

بالتجزئة بأخذ $u=P_n(x)$ و $dv=e^{\alpha x}$.

5.9.2 حالة خاصة

لحساب $\int e^{\alpha x}\sin kx\ dx$ و $\int e^{\alpha x}\cos kx\ dx$ يمكن إمّا استعمال المكاملة بالتجزئة مرّتين وإمّا اللجوء إلى شكل دوالها الأصليّة العام المعطى وفق هذه الصيغة:

$$G(x)=e^{\alpha x}(\lambda\cos kx+\mu\sin x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

فإذا أردنا، على سبيل المثال، حساب التكامل $I=\int e^{-x}\cos x\ dx$ وجدنا بالطريقة الأولى:

$$\begin{aligned}I=\int e^{-x}\cos x\ dx&=(-e^{-x}\cos x)-\int e^{-x}\sin x\ dx\\&=(-e^{-x}\cos x)-\left[(-e^{-x}\sin x)+\int e^{-x}\cos x\ dx\right]\\&=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-I.\end{aligned}$$

ومنه:

$$I=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

أمّا بالطريقة الثانية، فنكتب:

$$I(x)=e^{-x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

بالاشتقاق نجد:

$$\begin{aligned}I'(x)&=-e^{-x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)+e^{-x}(-\lambda\sin x+\mu\cos x)\\&=(-\lambda+\mu)e^{-x}\cos x+(-\lambda-\mu)e^{-x}\sin x=e^{-x}\cos x.\end{aligned}$$

وبالمطابقة يأتي:

$$\begin{cases}-\lambda+\mu=1,\\ \mu+\lambda=0;\end{cases}$$

وهو ما يعطي توّا $\mu=-\lambda=\frac{1}{2}$ ويفضى إلى النتيجة المنشودة:

10.2 التكامل من الشكل $I=\int x^n(ax^m+b)^k\,dx$

1.10.2 ليكن التكامل $I=\int x^n(ax^m+b)^k\,dx$ حيث a و b عددان حقيقيّان و m و n و k أعداد كسرية. يمثل I دالّة أولية، إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة التالية:

- k عدد صحيح،
- $\frac{n+1}{m}$ عدد صحيح،
- $k+\frac{n+1}{m}$ عدد صحيح.

التبديلات الموالية تقودنا إلى تكامل دالّة كسرية:

1) $x = t^p$ حيث p هو المقام المشترك لـــ m و n في حالة كون k عددا صحيحا.

2) $ax^m + bx = t^p$ حيث p هو مقام العدد k في حالة كون $\frac{n+1}{m}$ عددا صحيحا.

3) $a + bx^{-m} = t^p$ حيث p هو مقام العدد k في حالة كون $k + \frac{n+1}{m}$ عددا صحيحا.

لا بأس أن نعيد التنبيه إلى أنّه فيما عدا هذه الحالات، فإنّ I لا يقبل تمثيلا وفق دالّة أولية.

2.10.2 أمثلة

1) لنحسب التكامل $I = \int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+1)^{\frac{2}{5}}dx$. لدينا $m = \frac{2}{3}$، $n = \frac{1}{3}$، $k = \frac{2}{5}$؛ وبالتالي $\frac{n+1}{m} = 2$ عدد صحيح. نحن في الحالة الثانية الموصوفة. نضع على ضوئها $x^{\frac{2}{3}} + 1 = t^5$. وعليه:

$$x = (t^5 - 1)^{\frac{3}{2}};\ dx = \frac{15}{2}t^4(t^5-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

وبالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} I &= \int (t^5-1)^{\frac{1}{2}} t^2 \left(\frac{15}{2}t^4(t^5-1)^{\frac{1}{2}}\right)dt \\ &= \frac{15}{2}\int t^{11}dt - \frac{15}{2}\int t^6 dt = \frac{15}{24}t^{12} - \frac{15}{14}t^7 + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

وبالعودة إلى المتغيّر الأصليّ يأتي:

$$I=\frac{15}{24}\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{12}{5}}-\frac{15}{14}\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{7}{5}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2) هبنا نريد معالجة التكامل $I=\int x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{8}}-3)^2\,dx$.

لدينا $m=\frac{1}{8}$، $n=\frac{1}{4}$، $k=2$. العدد k صحيح. نجد أنفسنا في الحالة الأولى. نضع كما هو مشار إليه، $x=t^8$ وعليه:

$$I=\int 8t^9(t-3)^2\,dt=\int(8t^{11}-48t^{10}+72t^9)dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{12}-\frac{48}{11}t^{11}+\frac{36}{5}t^{10},\ C\in\mathbb{R}.$$

وبالعودة إلى المتغيّر الأصليّ نجد:

$$I=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{48}{11}x^{\frac{11}{8}}+\frac{36}{5}x^{\frac{5}{4}},\ C\in\mathbb{R}.$$

3.10.2 ملحوظة

يمكن بطبيعة الحال الاستغناء هنا عن الاستنجاد بتبديل المتغيّر والإتيان بالنتيجة بالحساب المباشر، وهو الأيسر:

$$I=\int x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{8}}-3\right)^2dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{3}{8}}+9x^{\frac{1}{4}}\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{48}{11}x^{\frac{11}{8}}+\frac{36}{5}x^{\frac{5}{4}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

3) لتجسيد الحالة الثالثة نسوق هذا التكامل $I=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}}$. لدينا:

$$k+\frac{n+1}{m}=-\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}+1}{1}=0.$$

نضع إذن $1+\frac{1}{x}=t^2$. وعليه:

$$x=\frac{1}{t^2+1};\quad dx=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt$$

وعليه:

$$I=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=Log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

وبالعودة إلى المتغيّر الأصليّ نجد:

$$I=Log\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

4.10.2 ملحوظة

يمكن كما هو الحال سابقا العزوف عن الاستنجاد بتبديل المتغيّر والإتيان بالنتيجة بالحساب المباشر:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=Log\left|2x+1+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

5.10.2 ملحوظة هامة

قد لا يكون في وسع دوال قابلة للمكاملة التمتّع بدوال أصلية أولية. إنّه حال دوال كثيرة، نخصّ بالذكر الدالّتين e^{-x^2} و $\frac{\sin x}{x}$ على سبيل المثال ...

تنبيه

احذر من أن يستغلّ أيّ منكم هذه الملحوظة لإيقاف حساباته عند أوّل عقبة ...

القسم الثاني

التكاملات المعمّمة

1

التكاملات المعمّمة من الصنف الأوّل

1.1 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للمكاملة ريمانيّا على المجال $[a,u]$، أيّا كان $a \leq u$. نسمّي النهاية $\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$ التكامل **المعمّم** للدالّة f على المجال $[a,+\infty[$. نرمز له بـ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

إذا كانت النهاية $\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$ منتهية قيل عن التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إنّه **متقارب**. إن كانت غير ذلك قيل عنه إنّه **متباعد**.

2.1 مثال

ليكن α عددا حقيقيّا مختلفا عن 1. نعتبر التكامل المعمّم:

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

لدينا من أجل $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^u \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^u = \frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{u^{\alpha-1}}-1\right).$$

نميّز الحالتين التاليتين:

- إذا كان $1<\alpha$ حصلنا على $\lim_{u\to\infty} I_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$، وبالتالي، فإنّ التكامل المعمّم I_α متقارب.

• إذا كان $1 > \alpha$ حصلنا على $\lim_{u\to\infty} I_\alpha = +\infty$؛ وبالتالي، فإنّ التكامل المعمّم I_α متباعد.

ومن أجل $\alpha = 1$:

$$I_1 = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u\to+\infty} Logu = +\infty.$$

إذن، التكامل I_1 متباعد.

3.1 مبرهنة (مقياس كوشي)

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $[a,+\infty[$ وقابلة للمكاملة على كلّ مجال $[a,c]$، حيث $a<c$. يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إذا وفقط إذا توفّر الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall c_1, c_2 : M < c_1 < c_2 \Rightarrow \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

4.1 مثال

لنستحضر التكامل المعمّم $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$. لدينا:

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{1+x^4} \right| \le \int_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{x^4} \le \frac{1}{c_1^{\,3}}.$$

وعليه، من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ نكتب:

$$c_1 > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \Rightarrow \frac{1}{c_1^{\,3}} < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{1+x^4} \right| < \varepsilon.$$

يكفي أخذ $M = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$.

5.1 مبرهنة

إذا كان التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقاربا وكانت النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ موجودة كانت هذه النهاية ℓ عندئذ معدومة.

6.1 مثال

إذا اعتبرنا التكامل المعمّم:

$$I=\int_1^{+\infty} x\sin\frac{1}{x}dx,$$

لاحظنا أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1\neq 0,$$

وبالتالي، فإنّ التكامل المعمّم I متباعد.

7.1 ملحوظة

يمكن للنهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ألاّ تكون موجودة بدون أن يحول ذلك دون تقارب التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ، كما يبيّنه هذا المثال:

نعتبر الدالّة:

$$f(x)=\begin{cases}1\,;\ x\in\mathbb{Z},\\ 0\,;\ x\notin\mathbb{Z}.\end{cases}$$

النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ غير موجودة ومع ذلك فإنّ :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=0.$$

8.1 مبرهنة

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة وموجبة على مجال $[a,+\infty[$ وقابلة للمكاملة

على كلّ مجال $[a,c]$، حيث $a<c$. يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة:

$$\left\{I_c = \int_a^c f(x)dx,\ a<c\right\},$$

محدودة.

9.1 مثال

لندرس على ضوء هذه المبرهنة، طبيعة التكامل المعمّم:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^3+1}}.$$

لدينا:

$$I_c = \int_1^c \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^3+1}} \leq \int_1^c \frac{dx}{\sqrt{x^4}} = 1-\frac{1}{c} < 1.$$

وعليه، فإنّ المجموعة $\left\{I_c = \int_a^c f(x)dx,\ a<c\right\}$ محدودة من الأعلى بـــ 1.
نخلص من هذا إلى أنّ التكامل I متقارب.

10.1 مبرهنة (مقياس المقارنة)

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين معرّفتين وموجبتين على مجال $[a,+\infty[$ وقابلتين للمكاملة على كلّ مجال $[a,c]$، حيث $a<c$. إذا كان:

$$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R} / x > c_0 > a,$$

فإنّ:

- تقارب التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ يستلزم تقارب التكامل المعمّم

، $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

- تباعد التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ يستلزم تباعد التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

11.1 مثال

لنعالج التكامل المعمّم:

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\sin\frac{1}{x}dx.$$

لدينا:

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x} \le \frac{1}{2\sqrt{x}x} = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

ولما كان التكامل المعمّم $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}dx$ متقاربا ضمنت المبرهنة السابقة تقارب التكامل المعمّم التكامل المعمّم I بدوره.

12.1 مبرهنة (مقياس المقارنة بالنهاية)

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين معرّفتين وموجبتين على مجال $[a,+\infty[$ وقابلتين للمكاملة على كلّ مجال $[a,c]$، حيث $a<c$.

1) إذا كانت النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجبة تماما كانت للتكاملين:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx;$$

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx,$$

طبيعة واحدة.

2) إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ معدومة فإنّ تقارب التكامل $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ يستلزم تقارب التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3) إذا آلت النهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ إلى $+\infty$ فإنّ تباعد التكامل $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ يستلزم تباعد التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

13.1 ملحوظتان

1) إذا كانت f و g متكافئتين في جوار $+\infty$ كانت للتكاملين $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ طبيعة واحدة.

2) إذا كانت $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ ميّزنا الحالات التالية:

- إذا وجد $\alpha > 1$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=0$ فإنّ التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارب.
- إذا وجد عدد $\alpha \le 1$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=+\infty$ فإنّ التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متباعد.

14.1 مثالان

1) لدينا في جوار $+\infty$:

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}},$$

ولما كان التكامل $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}dx$ متقاربا أضحى التكامل

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\sin\frac{1}{x}dx$$

كذلك.

2) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2x^ne^{-x}=0$ ، وعليه، فإنّ التكامل $\int_1^{+\infty} x^ne^{-x}dx$ متقارب.

15.1 تعريف (التقارب المطلق)

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $[a,+\infty[$ وقابلة للمكاملة على كلّ مجال $[a,c]$، حيث $a<c$. نقول عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إنّه **متقارب مطلقا** إن كان التكامل $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ متقاربا.

16.1 نتيجة

تقارب التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ المطلق يقتضي تقاربه.

17.1 مبرهنة (مقياس آبل[17])

لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على مجال $[a,+\infty[$ بحيث تكون المجموعة $\left\{I_c=\int_a^c f(x)dx, c>a\right\}$ محدودة ولتكن g دالّة حقيقيّة رتيبة ومحقّقة $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ حينئذ متقاربا.

18.1 مثالان

1) التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ متقارب من أجل كلّ $\alpha>0$. يكفي بغية التبرير تطبيق مقياس آبل بأخذ $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

17. Niels Henrik Abel: رياضيّاتيّ نرويجيّ، ولد في 5 أوت 1802 بفريندو ومات في أفريل 1829 بفرولاند. بحث في المعادلات الدالّيّة والتكامليّة.

2) التكامل $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ متقارب حسب مقياس آبل؛ غير أنّه لا يتقارب مطلقا إذ التكامل $\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ متباعد. وبالفعل، لدينا في كلّ مجال من الشكل $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$:

$$|\sin x|\geq\frac{1}{2};\ \frac{1}{x}\geq\frac{1}{(k+1)\pi},$$

وعليه، يأتي:

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx &\geq \int_{\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{6}+k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{6}+k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+k\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{(k+1)\pi}dx \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{1}{(k+1)\pi}\frac{2\pi}{3}\\ &\geq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

ولما كانت السلسلة $\sum\frac{1}{k+1}$ متباعدة تبيّن أنّ التكامل $\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ متباعد بدوره.

لنشر في هذا الصدد إلى أنّ هذا المثال يوضّح أنّ عكس النتيجة 16.1 أعلاه خاطئ عموما.

19.1 مبرهنة (مقياس ديريكليه)

لتكن f دالّة حقيقيّة رتيبة ومحدودة مطلقا على مجال $[a,+\infty[$ ولتكن g دالّة حقيقيّة بحيث تكاملها المعمّم $\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ متقارب. يكون عندئذ التكامل المعمّم $\int_{a}^{+\infty}f(x)g(x)dx$ متقاربا.

2

التكاملات المعمّمة من الصنف الثاني

1.2 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $]a,b]$ وقابلة للمكاملة ريمانيّا على كلّ مجال $[a+\varepsilon,b]$، أيّا كان $\varepsilon>0$ بحيث $a+\varepsilon<b$. نفترض أنّ a نقطة شاذة للدالّة (أي $f(a)=\infty$ على التوالي).

نسمّي النهاية $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ **التكامل المعمّم من النمط الثاني** للدالّة f على $]a,b]$. نرمز له بـــ $\int_{a}^{b} f(x)dx$.

يتقارب التكامل المعمّم $\int_{a}^{b} f(x)dx$ إن كانت النهاية $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ **موجودة.**

2.2 مثال

ليكن α و β عددا حقيقيّين ولنعالج التكامل المعمّم:

$$I_\alpha=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx.$$

إذا كان $\alpha\neq 1$ و ε من $]0,1[$ جاءنا:

$$\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^\alpha}dx=\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_\varepsilon^1=\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right).$$

وعليه:

- إذا كان $\alpha<1$ فإنّ:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha},$$

وبالتالي، فإنّ التكامل I_α متقارب.

- إذا كان $1<\alpha$ فإنّ:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = +\infty,$$

وبالتالي، فإنّ التكامل I_α متباعد.

إذا كان $1=\alpha$ حصلنا على:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[Logx\right]_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0} Log\varepsilon = +\infty,$$

وبالتالي، فإنّ التكامل I_α متباعد.

3.2 مبرهنة (مقياس كوشي)

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $]a,b]$ وقابلة للمكاملة على كلّ مجال $[c,b]$ محتوى في $]a,b]$. يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^b f(x)dx$ إذا وفقط إذا توفّر الشرط:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0/\forall c_1,c_2: a<c_1<c_2<a+\eta \Rightarrow \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

4.2 مثال

لنعالج التكامل المعمّم:

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx.$$

ليكن $\varepsilon>0$. لدينا:

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}};$$

وبالتالي:

$$\left|\int_{c_1}^{c_2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx\right| \le \int_{c_1}^{c_2}\frac{dx}{\sqrt{x}} \le 2\sqrt{c_2};$$

وعليه، من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ نكتب:

$$0 < c_1 < c_2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{c_2} < \varepsilon \Rightarrow \left|\int_{c_1}^{c_2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx\right| < \varepsilon.$$

يكفي أخذ $\frac{\varepsilon^2}{4} = \eta$.

5.2 مبرهنة

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة وموجبة على مجال $[a,b]$ وقابلة للمكاملة على كلّ مجال $[c,b]$، حيث $a < c < b$. يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^b f(x)dx$ **إذا وفقط إذا كانت المجموعة:**

$$\left\{I_c = \int_c^b f(x)dx,\ a < c \le b\right\},$$

محدودة.

6.2 مبرهنة (مقياس المقارنة)

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين معرّفتين وموجبتين على مجال $]a,b]$ وقابلتين للمكاملة على كلّ مجال $[c,b]$، حيث $a < c < b$. إذا كانت:

$$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R} / a < x < c_0 < b,$$

فإنّ:

- تقارب التكامل المعمّم $\int_a^b g(x)dx$ يستلزم تقارب التكامل المعمّم $\int_a^b f(x)dx$ ،
- تباعد التكامل المعمّم $\int_a^b f(x)dx$ يستلزم تباعد التكامل المعمّم $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

7.2 مثال

لنعالج التكامل المعمّم:

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{e^{-x}}dx,\ \alpha > 0.$$

لدينا:

$$\frac{x^{\alpha-1}}{e^{-x}} \leq x^{\alpha-1},\ \forall x \in \left]0,1\right].$$

ولما كان التكامل المعمّم $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ أضحى كذلك I_α .

8.2 مبرهنة (مقياس المقارنة بالنهاية)

لتكن f و g دالّتين حقيقيّتين معرّفتين وموجبتين على مجال $]a,b]$ وقابلتين للمكاملة على كلّ مجال $[c,b]$، حيث $a < c < b$.

1) إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ موجبة تماما كانت للتكاملين

$\int_a^b f(x)dx$

و $\int_a^b g(x)dx$ طبيعة واحدة.

2) إذا كانت النهاية $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ معدومة فإنّ تقارب التكامل $\int_a^b g(x)dx$ يستلزم تقارب التكامل $\int_a^b f(x)dx$.

3) إذا آلت النهاية $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ إلى $+\infty$ فإنّ تباعد التكامل $\int_a^b g(x)dx$ يستلزم تباعد التكامل $\int_a^b f(x)dx$.

9.2 مثالان

1) لنفحص التكاملين $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ و $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$. لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}}=1;$$

وعليه، فإنّ للتكاملين طبيعة واحدة.

2) لندرس طبيعة التكامل:

$$I=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}Log\frac{1}{x}dx.$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}Log\frac{1}{x}}{x^{-\frac{3}{4}}}=0;$$

ولما كان التكامل $\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}dx$ متقاربا تبيّن أنّ التكامل I متقارب كذلك.

10.2 تعريف (التقارب المطلق)

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $[a,b[$ وقابلة للمكاملة على كلّ مجال $[c,b]$، حيث $a<c<b$. نقول عن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ **إنّه متقارب مطلقا** إن كان التكامل $\int_a^b |f(x)|dx$ متقاربا.

11.2 نتيجة

تقارب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ المطلق يستلزم تقاربه.

3

أشكال أخرى ...

1.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $[a,b[$ وقابلة للمكاملة ريمانيّا على كلّ مجال $[a,b-\varepsilon]$ محتوى في $[a,b[$. نفترض أنّ b نقطة شاذّة للدالّة (أي $f(b)=\infty$).

نسمّي النهاية $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ **التكامل المعمّم من النمط الثاني** للدالّة f على $[a,b[$. نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$.

يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^b f(x)dx$ إن كانت النهاية $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ منتهية **ويتباعد** إن لم تكن كذلك.

2.3 أمثلة

1) هبك تريد طبيعة التكامل المعمّم $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. يأتيك بالحساب المباشر توّا:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left((\sqrt{1-1+\varepsilon}-1\right) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right) = 2.$$

نستخلص أنّ التكامل المقترح متقارب وتساوي قيمته 2.

2) لنفحص طبيعة التكامل المعمّم:

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx.$$

إذا كان $\alpha \neq 1$ جاءنا من أجل كلّ $0<\varepsilon<1$:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(-\varepsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(-1)^{\alpha-1}}\right).$$

وعليه:

- إذا كان $\alpha<1$ فإنّ:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx = \frac{1}{(-1)^{\alpha-1}(\alpha-1)},$$

وبالتالي، فإنّ التكامل I_α متقارب.

- إذا كان $\alpha>1$ فإنّ:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx = +\infty,$$

وبالتالي، فإنّ التكامل I_α متباعد.

إذا كان $\alpha=1$ حصلنا على:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-Log(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0} Log\varepsilon = +\infty,$$

وبالتالي، فإنّ التكامل I_α متباعد.

3) لنفحص طبيعة التكامل المعمّم:

$$I_p = \int_0^1 \frac{2+\sin \pi x}{(1-x)^p} dx.$$

نلاحظ أنّ:

$$\forall x \in [0,1[\quad 0 < \frac{2+\sin \pi x}{(1-x)^p} \leq \frac{3}{(1-x)^p}.$$

وبما أنّ التكامل $\int_0^1 \frac{3}{(1-x)^p} dx$ متقارب من أجل $p<1$ حسب المثال الثاني، فإنّنا نستخلص أنّ التكامل I_p متقارب هو كذلك.

وبالمثل، نلاحظ أنّ:

$$\forall x \in [0,1[\quad 0 < \frac{1}{(1-x)^p} \leq \frac{2+\sin \pi x}{(1-x)^p}.$$

وبما أنّ التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^p}$ متباعد من أجل $p \geq 1$ حسب المثال الثاني، فإنّنا نستخلص أنّ التكامل I_p متباعد بدوره.

3.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $]a,b[$ وقابلة للمكاملة ريمانيّا على كلّ مجال $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$، محتوى في $]a,b[$ ($0<\varepsilon$).

يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^b f(x)dx$ إن كانت النهاية $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ منتهية **ويتباعد** إن لم يكن الأمر كذلك.

4.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $]-\infty,b]$ وقابلة للمكاملة ريمانيّا على كلّ مجال $[c,b]$، محتوى في $]-\infty,b]$.

يتقارب التكامل المعمّم $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ إن كانت النهاية $\lim\limits_{c\to-\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$ منتهية **ويتباعد** إن لم يكن الأمر كذلك.

5.3 تعريف

لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة على مجال $]-\infty,+\infty[$ وقابلة للمكاملة ريمانيّا على كلّ مجال $[c,d]$، محتوى في $]-\infty,+\infty[$.

يتقارب التكامل المعمّم $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ إن وجد عنصر c_0 من $\mathbb{R}$ يكون من أجله التكاملان $\int_{-\infty}^{c_0} f(x)dx$ و $\int_{c_0}^{+\infty} f(x)dx$ متقاربين.

يتباعد التكامل المعمّم $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ إن وجد عنصر c_0 من $\mathbb{R}$ يكون من أجله أحد التكاملين $\int_{-\infty}^{c_0} f(x)dx$ أو $\int_{c_0}^{+\infty} f(x)dx$ متباعدا.

6.3 أمثلة

1) لننظر في طبيعة التكامل المعمّم:

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{tg^2 x}dx.$$

نكتب بشأنه:

$$\int \frac{\sin x}{tg^2 x} dx = \int \frac{\sin x \, cox^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right) du = \int \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \int du + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u+1} = u + \frac{1}{2} Log \left| \frac{u-1}{u+1} \right|$$

$$= \cos x + \frac{1}{2} Log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C; \, C \in \mathbb{R};$$

عمدنا في هذا الحساب إلى التبديل $\cos x = u$. هكذا، يأتي:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{\sin x}{tg^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\cos x + \frac{1}{2} Log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - \cos \varepsilon + \frac{1}{2} Log \frac{\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - 1 \right| \left| \cos \varepsilon + 1 \right|}{\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + 1 \right| \left| \cos \varepsilon - 1 \right|} \right)$$

$$= +\infty.$$

نستخلص أنّ التكامل I متباعد.

2) لنحسب التكامل المعمّم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

لدينا:

$$I = \lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{u \to +\infty} \left[Arctgx \right]_{-u}^{u} = \lim_{u \to +\infty} 2 Arctgu = \frac{\pi}{2}.$$

3) لنحسب التكامل المعمّم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

لنحسب دالة أصليّة للدالّة $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$. بالارتكاز على التبديل $x = tgt$ يأتي:

$$\int \frac{tg^2 t}{1+tg^2 t} dt = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C; C \in \mathbb{R}$$

أي:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{Arctgx}{2} - \frac{\sin 2Arctgx}{4} + C; C \in \mathbb{R}.$$

وعليه:

$$I = \lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{u \to +\infty} \left[\frac{Arctgx}{2} - \frac{\sin 2Arctgx}{4} \right]_{-u}^{u}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(Arctgu - \frac{\sin 2Arctgu}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

القسم الثالث

تمارين

تمارين محلولة

.1 1) احسب التكاملين $I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}} dx$ و $J = \int \frac{e^x}{2 + thx} dx$.

2) استخلص النهايتين:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} \cos\left(\frac{k}{n}\right) \sqrt{\sin\left(\frac{k}{n}\right)},$$

$$\ell' = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{3k}{n}} + e^{\frac{k}{n}}}{3e^{\frac{3k}{n}} + 1}.$$

.2 1) احسب النهايات:

$$\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{Log\left(1 + k\frac{e-1}{n}\right)}{n}; \quad \ell_2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(k+n)^2};$$

$$\ell_3 = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)}.$$

2) احسب التكامل $I = \int \frac{sh^2 x}{sh^2 x + 3ch^2 x} dx$.

.3 1) احسب التكاملين $H = \int \frac{dx}{x^2 + 4}$ و $I = \int \frac{x^2}{x^4 - 16} dx$.

2) استنتج النهاية $\ell = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{nk^2}{k^4 - 16n^4}$.

4. 1) عيّن طبيعتي المتتاليتين الحقيقيّتين ذواتي الحدّين العامّين:

$$u_n = f\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}};\ n\in\mathbb{N}^*;$$

$$v_n = Log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1-th^2\left(\frac{k}{n}\right)};\ n\in\mathbb{N}^*;$$

حيث f دالّة حقيقيّة تتمتّع بمشتق غير معدوم عند الصفر، ثمّ احسب نهايتيهما.

2) احسب هذه التكاملات:

$$I=\int\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}dx;\ \ J=\int\frac{tgx}{1+tgx}dx;\ \ K=\int\frac{x^2}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx.$$

5. 1) عيّن النهايات:

$$\ell_1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n}k^2\cos\frac{k\pi}{n};\ \ \ell_2=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$$

$$\ell_3=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{n^2+nk}};\ \ell_4=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$$

2) ليكن الكسر الناطق $F(x)=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x-1)(x^2+1)^2}$.

أ. فكّكه إلى عناصر بسيطة.

ب. احسب دالّة أصلية لكلّ عنصر بسيط وارد في التفكيك.

ج. استنتج التكامل $I=\int\dfrac{\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x-\sin x}dx$.

6. 1) فكّك في $\mathbb{R}(x)$ الكسر الناطق $F(X)=\dfrac{1}{(X^3+1)^2}$.

2) احسب التكامل $I = \int F(x)dx$.

3) استخلص التكامل $J = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^2}dx$.

4) استنتج النهاية $\ell = \lim_{n\to+\infty} n^5 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^3+n^3)^2}$.

7. 1) ليكن f عنصرا من $\mathscr{R}([a,b])$ ويحقّق الشرط:

$$\forall x \in [a,b]\ f(a+b-x) = f(x).$$

أ. اثبت أنّ:

$$\int_a^b x\, f(x)\, dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx.$$

ب. استنتج التكاملات:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx;\quad J = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx;\quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

2) احسب التكاملين:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx;\quad J = \int x\sqrt{x^2+x+1}\, dx.$$

8. 1) احسب ما يلي:

$$I = \int_1^e \frac{dx}{x(x+1)};\quad J = \int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx;\quad K = \int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{2+2x+x^2}}dx.$$

2) نضع $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}dt}{e^t+1}$.

أ. احسب I_1 و $I_1 + I_0$ ثمّ استنتج I_0 .

ب. جد $I_n + I_{n+1}$ من أجل كلّ دليل طبيعيّ n .

ج. برهن أنّ المتتالية (I_n) متزايدة.

د. برهن أنّ:

$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{e^{nt}}{e+1} \le \frac{e^{nt}}{e^{t}+1} \le \frac{e^{nt}}{2}.$$

ه. استنتج النهاية $\lim_{n\to\infty} I_n$.

9. ليكن p عددا طبيعيّا غير معدوم.

1) برهن أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1+\int_1^n x^p \, dx \le 1^p + 2^p + \ldots + n^p \le \int_1^{n+1} x^p \, dx.$$

2) استنتج أنّ المتتالية الحقيقيّة ذات الحد العام:

$$S_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p,$$

متقاربة ثمّ عيّن نهايتها.

3) احسب مستخدما التقسيم $1 < \rho < \rho^2 < \ldots < \rho^n = 2$ للمجال $[1,2]$، التكامل الريماني $\int_1^2 \frac{1}{x^p} dx$.

10. 1) احسب مستخدما تعريف التكامل الريمانيّ النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

2) اثبت أنّ:

$$x - \frac{1}{2}x^2 < Log(1+x) < x, \ \forall x > 0.$$

3) استنتج نهاية العبارة الموالية:

$$P_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

(تذكير: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

4) ليكن a و b عددين حقيقيّين بحيث $0 < a < b$. احسب التكامل:

$$I = \int_a^b Arctg\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx.$$

(إعانة: يمكن استخدام المساواة:

$$Arctg\,x + Arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ \forall x > 0;$$

ثمّ إجراء التحويل $y = a+b-x$)

11. لتكن الدالّة الحقيقيّة $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ المعرّفة بـــ:

$$\varphi(x) = Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x.$$

من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n نعرّف التطبيق $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x) = x^n e^{-x}.$$

1) أ. برهن أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^x \frac{1}{n!} f_n(t)dt = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

ب. استنتج أنّه من أجل كلّ دليل مثبّت لدينا:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = n!.$$

2) أ. برهن أنّ:

$$\forall x \in]0,1[\quad \varphi(x) > 0.$$

ب. استنتج أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left]0, n\right[,\ f_n(n+x) > f_n(n-x).$$

ج. استنتج أنّ:

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt > \int_n^{n} f_n(t)dt.$$

3) برهنّ أنّ:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}.$$

12. نعتزم هنا استعراض دستور تايلور[18] من الرتبة n بباقي تكامليّ.

ليكن a و b عددين حقيقيّين و f دالّة متمتّعة بمشتقّات مستمرّة إلى غاية الرتبة $(n+1)$ على المجال $[a,b]$.

1) اثبت أنّ:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)\ (b-x)^n\, dx.$$

2) استنتج أنّ:

$$\exists c \in [a,b] : f(b) = f(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

18. Brook Taylor : رياضيّاتيّ انـڤليزيّ. ولد في 18 أوت 1685 بإدمنتون ومات في 29 ديسمبر 1731 بلندن. اشتهر بالدستور المستعرض أعلاه. لقد نشره بدون الباقي ودونما اكتراث بالجوانب التقاربيّة له. استخدمه لإيجاد حلول تقريبيّة لمعادلة من النوع $f(x) = 0$.

13. 1) ليكن a عددا حقيقيّا موجبا تماما ولتكن f دالّة حقيقيّة زوجيّة ومستمرّة على المجال $[-a,a]$. نضع:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt;\ x\in[-a,a].$$

اثبت أنّ F دالّة فرديّة.

2) من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n نضع:

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt.$$

أ. برهن مستعينا بمكاملة بالتجزئة أنّ:

$$F_{n+1}(x)=\frac{x}{2n(1+x^2)^n}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)F_n(x).$$

ب. استخلص عبارة الدالّة:

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$$

3) أ. جد النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار الصفر للدالّة:

$$g(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

ب. استنتج النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار الصفر للدالّة F_n.

4) ليكن Γ_n المنحنى البيانيّ للدالّة $y=F_n(x)$.

أ. هات معادلة مماس المنحنى Γ_n عند النقطة $(0,0)$.

ب. ما هي وضعية Γ_n بالنسبة إلى هذا المماس عند النقطة $(0,0)$؟

14. هات مستعينا بالتعريف طبيعة التكاملات المعمّمة التالية:

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{Logx}{x}dx;\ I_2=\int_0^1 Logx\,dx;\ I_3=\int_0^2 Log|x-1|\,dx.$$

$$I_4=\int_0^1\frac{x}{(1-x)^2}dx;\ I_5=\int_0^1\frac{Logx}{x^\alpha}dx;\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

15. اثبت أنّ:

1) التكاملين المعمّمين $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$ و $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1-x}$ متباعدان،

2) التكامل المعمّم $\int_2^{+\infty}\frac{2dx}{1-x^2}$ متقارب.

3) ماذا تستخلص؟

16. هات طبيعة التكاملات المعمّمة التالية:

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^3+\sin x}dx;\ I_2=\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2(3x)}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx;\ I_3=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha}dx,\ \alpha\in\mathbb{R};$$

17. ادرس طبيعة التكاملين المعمّمين التاليين:

$$I_1=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx;\ I_2=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx.$$

18. نعتزم من خلال هذه المسألة حساب قيمة تكامل ڤاوص[19] المعرّف على النحو $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$.

---

19. Carl Friedrich Gauss: عالم ألماني من أعظم الرياضيّاتيّين عبر التاريخ. ولد في 30 أفريل 1777 ببرونسويك وتوفّي في 23 فيفري 1855 بـڤوتينـڤان. يلقب بـأمير الرياضيّاتيّين. أسهم في العديد من الفروع العلميّة، منها الجبر والتحليل والهندسة والإحصاء والفلك والفيزياء.

الجزء الأوّل

ليكن n عددا طبيعيّا. نسمّي تكامل ويليس[20] رتبته n العدد الحقيقـــيّ المعرّف بـــ:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt.$$

1) اثبت أنّ $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$.

2) صغ W_{n+2} بدلالة W_n؛ ثمّ استنتج، مناقشا وفق شفعية العدد n، عبارة للمقدار W_n تحت شكل جداء.

3) برهن أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+2}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

4) اثبت أنّ المتتالية $(W_n)_n$ موجبة ومتناقصة.

5) استخلص أنّ:

أ. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{W_{n+2}}{W_n} = 1;$

ب. $W_n \underset{+\infty}{\approx} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$

20. John Wallis: عالم إنـــڤليزيّ. ولد في 23 نوفمبر 1616 بأشفورد وتوفّي في 28 أكتوبر 1703 بأكسفورد. درّس الهندسة في أكسفورد. تدور أعماله أساسا حول الحسابين التفاضليّ والتكامليّ.

الجزء الثاني: تطبيق

1) اثبت أنّ التكامل $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ متقارب.

2) أ. اثبت أنّ:

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ 1-u \le e^{-u};$$

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ e^{-u} \le \frac{1}{1+u}.$$

ب. استنتج أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \left[0,\sqrt{n}\right],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \le e^{-t^2};$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ e^{-t^2} \le \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

3) برهن أنّه أيّا كان العدد الطبيعيّ غير المعدوم n فإنّ:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\, W_{2n+1};$$

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\, W_{2n-2}.$$

4) أ. برهن أنّ:

$$\sqrt{n}\, W_{2n+1} \le \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \sqrt{n}\, W_{2n-2}.$$

ب. استنتج قيمة للتكامل $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

حلول

1. 1)نلاحظ أنّ التكامل I تمكن كتابته تحت الشكل:

$$I = \int \frac{2\sin x}{\sqrt{\sin x}} \cos x \, dx.$$

وبوضع $\sin x = t$ يأتي $\cos x \, dx = dt$. وعليه:

$$I = \int \frac{2tdt}{\sqrt{t}} = 2\int \sqrt{t} dt = \frac{4}{3} t\sqrt{t} + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{4}{3}\sin x \sqrt{\sin x} + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

لنعالج التكامل J . نكتب بشأنه:

$$J = \int \frac{e^x}{2 + thx} dx = \int \frac{e^x}{2 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}} dx = \int \frac{e^{2x} + 1}{3e^{2x} + 1} e^x \, dx$$

$$= \int \frac{e^{2x} + 1}{3e^{2x} + 1} e^x \, dx + = \frac{1}{3}\int e^x \, dx - \frac{1}{3}\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3}\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 1} \, dx.$$

بوضع $e^x = t$ في التكامل الأخير نجد توّاً:

$$\int \frac{dt}{3t^2 + 1} = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{3}t\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} Arctg\sqrt{3}t + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

وعليه:

$$J=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3\sqrt{3}}Arctg\left(\sqrt{3}e^{x}\right)+C;\ C\in\mathbb{R}..$$

2) لدينا:

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+1}\cos\left(\frac{k}{n}\right)\sqrt{\sin\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\sin\left(2\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{k}{n}\right)}}.$$

بمقتضى دستور ريمان للتكامل واستنادا إلى السؤال الأوّل نحصل توّا على:

$$\ell=\int_{0}^{1}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{4}{3}\sin x\sqrt{\sin x}\Big]_{0}^{1}=\frac{4}{3}(\sin 1)^{\frac{3}{2}}.$$

نحسب النهاية الثانية بالمثل. لدينا:

$$\ell'=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{3k}{n}}+e^{\frac{k}{n}}}{3e^{\frac{3k}{n}}+1}=5\int_{0}^{1}\frac{e^{3x}+e^{x}}{3e^{3x}+1}dx=5\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}+1}{3e^{3x}+1}e^{x}dx=5\left[J\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{5}{3}e+\frac{10}{3\sqrt{3}}Arctg\left(\sqrt{3}e\right)-\frac{5}{3}-\frac{10}{3\sqrt{3}}Arctg\sqrt{3}.$$

.2 1) لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}Log\left(1+k\frac{e-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Log\left(1+k\frac{e-1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{e-1}\left(\frac{e-1}{n}\sum_{k=1}^{n}Log\left(1+k\frac{e-1}{n}\right)\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k+n)^{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{2}};$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Log\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}.$$

إذا استحضرنا دستور ريمان الحاسب لتكامل دالّة مستمرّة على مجال متراص اتّضح في حالتنا الحاضرة أنّ:

$$\ell_1 = \frac{1}{e-1}\int_1^e Log\, x\, dx = \frac{1}{e-1}\left[xLog\, x - x\right]_1^e = \frac{1}{e-1};$$

$$\ell_2 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Big]_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$\ell_3 = e^{\int_0^1 Log(1+x^2)dx} = e^{xLog(1+x^2)\big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx} = e^{Log2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx}$$

$$= 2e^{(-2x+2Arctgx)\big]_0^1} = 2e^{-2+\frac{\pi}{2}}.$$

2) لحساب التكامل المقترح نلاحظ في البداية أنّ:

$$\frac{sh^2x}{sh^2x+3ch^2x} = \frac{1}{1+3cth^2x},$$

لنلجأ إلى التبديل $y = cth\, x$. يأتي عندئذ أنّ $dx = \frac{1}{1-y^2}dy$ وبالتالي:

$$I = \int \frac{1}{1+3y^2}\frac{1}{1-y^2}dy.$$

ولكن:

$$\frac{1}{1+3y^2}\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{1+3y^2}+\frac{1}{1-y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+3y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)\right];$$

أي:

$$\frac{1}{1+3y^2}\frac{1}{1-y^2}=\frac{3}{4}\frac{1}{1+(\sqrt{3}y)^2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right).$$

هكذا، يأتي:

$$I=\frac{3}{4}\int\frac{1}{1+(\sqrt{3}y)^2}dy+\frac{1}{8}\left(\int\frac{1}{1-y}dy+\int\frac{1}{1+y}dy\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}Arctg\sqrt{3}y+\frac{1}{8}Log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

وبالعودة إلى المتغيّر الأصليّ x نجد:

$$I=\frac{\sqrt{3}}{4}Arctg\left(\sqrt{3}\,cth\,x\right)+\frac{1}{8}Log\left|\frac{1+cth\,x}{1-cth\,x}\right|+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

3. 1) لدينا بخصوص التكامل H :

$$H=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}Arctg\left(\frac{x}{2}\right)+B;\ B\in\mathbb{R}.$$

نستهلّ حساب التكامل I بتفكيك الكسر $\frac{x^2}{x^4-16}$ وفق عناصر أوليّة.

نكتب في هذا الصدد:

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{cx+d}{x^2+4}.$$

نجد (بحسابات ألفتها الآن !):

$$a=\frac{1}{8};\ b=-\frac{1}{8};\ c=0;\ d=\frac{1}{2}.$$

وعليه:

$$I=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}H$$

$$=\frac{1}{8}Log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{1}{4}Arctg\frac{x}{2}+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

2) لحساب النهاية المقترحة نستعين بدستور ريمان. لدينا:

$$\frac{nk^2}{k^4-16n^4}=\frac{nn^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}{n^4\left[\left(\frac{k}{n}\right)^4-16\right]}=\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{n\left[\left(\frac{k}{n}\right)^4-16\right]};$$

وبالتالي:

$$\ell=\int_0^1\frac{x^2}{x^4-16}dx.$$

وبالاستناد إلى السؤال الأوّل نجد:

$$\ell=\frac{1}{8}Log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{1}{4}Arctg\frac{x}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{4}Arctg\frac{1}{2}-\frac{1}{8}Log3.$$

.4 1)لنعتن بالمتتالية (u_n). نكتب بشأنها:

$$u_n=\left[\frac{n}{\pi}f\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]\left[\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right].$$

بخصوص العامل الأوّل لدينا بوضوح:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(\frac{\pi}{n}\right)-0}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{u\to0}\frac{f(u)-0}{u}=f'(0).$$

أمّا العامل الثاني فهو مجموع ريماني بأخذ الدالّـة $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$ في المجـال $[0,\pi]$. وعليه، فهو يقبل نهاية لمّا يؤول n إلى $+\infty$. نرى في الخلاصة أنّ المتتالية جداء لمتتاليتين متقاربتين. إنّها متقاربة إذن!

لنحسب نهايتها. لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}f\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}\right]=f'(0)\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}.$$

وإذا استحضرنا هذا التكامل (الذي سبق التقاؤنا به من قبل) جاءنا:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = f'(0)\left[\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{tg\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right]_0^{\pi}=f'(0)\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}f'(0).$$

لا تختلف معالجة المتتالية الثانية عمّا سبق. نكتب بشأنها:

$$v_n=\left[\frac{Log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{k}{n}}{1-th^2\left(\dfrac{k}{n}\right)}\right];$$

مع:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{Log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}\right]=\lim_{u\to 0}\left[\frac{Log(1+u)-0}{u}\right]=(Log(1+u))'(0)=1;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1-th^2\left(\frac{k}{n}\right)}\right]=\int_0^1\frac{x}{1-th^2x}dx=\int_0^1 x\,ch^2x\,dx$$

$$=\int_0^1 x\left(\frac{1+ch2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx+\frac{1}{2}\int_0^1 x\,ch2x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{xsh2x}{4}-\frac{ch2x}{8}\Big]_0^1=\frac{3}{8}+\frac{sh2}{4}-\frac{ch2}{8}.$$

نستخلص أنّ متتاليتنا متقاربة لكونها جداء لمتتاليتين متقاربتين وأنّ نهايتها تساوي:

$$\frac{3}{8}+\frac{sh2}{4}-\frac{ch2}{8}.$$

أ. نستهلّ معالجة التكامل I المقترح بتفكيك الكسر الناطق:

$$F(x)=\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}+\frac{dx+e}{x^2}.$$

لتعيين الثوابت الواردة في هذا الدستور نجري قسمة وفق القوى المتزايدة إلى غاية الرتبة الثانية للمقدار $x+1$ على x^2+1 بعد إدخال المتغيّر $X=x-1$. نجد:

$$x+1=(x^2+1)\left(1-\frac{x-1}{2}\right)+\frac{(x-1)^3}{2};$$

وبالتالي:

$$F(x)=\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

وعليه:

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{(x-1)^3}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}Arctg\,x+C, C\in\mathbb{R}.$$

معالجة التكامل الثاني J تقتضي التبديل $tgx=t$. يأتي به على التوّ:

$$J=\int\frac{t}{1+t}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

نقوم بتفكيك هذا الكسر المولود كالمألوف:

$$\frac{t}{1+t}\frac{1}{1+t^2}=\frac{\alpha}{1+t}+\frac{\beta t+\delta}{1+t^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\frac{t+1}{1+t^2}. \qquad (*)$$

وجدنا α بضرب طرفي العلاقة (*) في $1+t$ ثمّ أخذ $t=-1$ في الحاصلين.

ووجدنا β بضرب طرفي العلاقة (*) في t ثمّ أخذ النهاية عند ∞ في الحاصلين.

ووجدنا δ بأخذ $t=0$ في طرفي العلاقة (*) الذين رسّمنا فيهما قيمتي α و β.

بعد هذا نجد:

$$J=\int\frac{t}{1+t}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{1}{4}Log(1+t^2)+\frac{1}{2}Arctgt-\frac{1}{2}Log\left(|1+t|\right)+C;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1\cdot Log\sqrt{1+t^2}}{Log\left(|1+t|\right)}+\frac{1}{2}Arctgt+C;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{Log\sqrt{1+tgx^2}}{Log\left(|1+tgx|\right)}+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

في الأخير، لحساب التكامل الثالث K نتّبع الخطوات التالية:

نلاحظ أنّ:

$$(x-1)(2-x)=-x^2+3x-2=-(x^2-3x+2)$$

$$=-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}\left[1-(2x-3)^2\right].$$

إذا أدخلنا التبديل $y = 2x - 3$ حصلنا على $x = \frac{y+3}{2}$ و $dx = \frac{1}{2}dy$ ، وبالتالي:

$$K = \int \frac{\left(\frac{y+3}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{4}\int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy + \frac{3}{2}\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy + \frac{9}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

لدينا على التوّ:

$$K_2 = \frac{3}{2}\int \frac{y}{1-y^2} dy = -\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2} + A \; ; \; A \in \mathbb{R};$$

$$K_3 = \frac{9}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{9}{4}\sqrt{Arc\sin y} + B; \;\; B \in \mathbb{R}.$$

لنتوقّف عند التكامل $K_1 = \frac{1}{4}\int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy$. نحصل بالتجزئة على:

$$K_1 = \frac{1}{4}\int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{4}\left(y^2 Arc\sin y - 2\int y\, Arc\sin y\, dy\right).$$

نضع:

$$V = \int y\, Arc\sin y\, dy,$$

ونذكّر بـــ :

$$W = \int Arc\sin y\, dy = y\, Arc\sin y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= y\, Arc\sin y + \sqrt{1-y^2} + C; \;\; C \in \mathbb{R}.$$

وعليه:

$$V = \int y\, Arc\sin y\, dy = yW(y) - \int W(y)\, dy$$

$$= y^2\, Arc\sin y + y\sqrt{1-y^2} - \int y\, Arc\sin y\, dy - \int \sqrt{1-y^2}\, dy$$

ومنه:

$$2V = y^2 Arc\sin y + y\sqrt{1-y^2} - \int\sqrt{1-y^2}\,dy$$

أي:

$$V = \frac{1}{2}y^2 Arc\sin y + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}\int\sqrt{1-y^2}\,dy$$

لنحسب:

$$X = \int\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

يقودنا التبديل $y = \sin t$ إلى:

$$X = \int\sqrt{1-y^2}\,dy = \int\cos^2 t\,dt = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + D$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + D = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + D$$

$$= \frac{1}{2}Arc\sin y + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + D\ ;\ \ D \in \mathbb{R}.$$

هكذا، يأتي:

$$V = \frac{1}{2}y^2 Arc\sin y - \frac{1}{4}Arc\sin y + \frac{1}{4}y\sqrt{1-y^2} + D;\ D \in \mathbb{R}.$$

الرجوع بهذه النتائج إلى K_1 يفضي إلى:

$$K_1 = \frac{1}{8}Arc\sin y - \frac{1}{4}y\sqrt{1-y^2} + D\ ;\ \ D \in \mathbb{R};$$

إذن:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 + K_3 \\ &= \left(\frac{1}{8}Arc\sin y - \frac{1}{8}y\sqrt{1-y^2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right) + \left(\frac{9}{4}Arc\sin y\right) + E \\ &= -\frac{1}{8}(y+12)\sqrt{1-y^2} + \frac{19}{8}Arc\sin y + E\ ;\ \ E \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

أخيرا، يتّخذ التكامل K بدلالة المتغيّر الأصليّ x الشكل النهائيّ هذا:

$$K = -\frac{1}{8}(2x+9)\sqrt{(x-1)(2-x)} + \frac{19}{8} Arc\sin(2x-3) + E;\ \ E \in \mathbb{R}.$$

5. 1) لدينا:

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \cos\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cos\frac{k\pi}{n};$$

وعليه، يأتي بمقتضى دستور ريمان:

$$\ell_1 = \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx.$$

بالاستعانة بالمكاملة بالتجزئة مرّتين نجد:

$$\ell_1 = \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx = \frac{x^2}{\pi}\sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3}\sin \pi x \Big]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}.$$

وبالمثل، لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3};$$

وبالتالي:

$$\ell_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d(1+x^3)}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} Log(1+x^3)\Big]_0^1 = \frac{1}{3} Log 2.$$

بالطريقة ذاتها نجد:

$$\ell_3=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{\sqrt{n^2+nk}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$=4\sqrt{1+x}\,\Big]_0^1=4\left(\sqrt{2}-1\right);$$

$$\ell_4=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}Log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}Log2.$$

2) أ. لنضع F في القالب التفكيكيّ العام:

$$\frac{x^2(x^2+3)}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}. \qquad (*)$$

بضرب طرفي هذه المساواة في $x-1$ وأخذ $x=1$ في الناتج نجد $a=1$.

بضرب طرفي هذه المساواة في x ثمّ جعل x يؤول إلى ∞ في الناتج نحصل على المساواة $a+b=1$. ومنه $b=0$. بعد هذا تصبح $(*)$:

$$\frac{x^2(x^2+3)}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2};$$

وعليه:

$$\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}. \qquad (**)$$

بضرب طرفي هذه المساواة في x^2 ثمّ جعل x يؤول إلى ∞ في الناتج نحصل على $c=0$، ممّا يوصل إلى المساواة:

$$\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}. \qquad (***)$$

بضرب طرفي هذه المساواة في x^3 ثمّ جعل x يؤول إلى ∞ في الناتج نحصل على $d=1$.

أخيرا، يمكّن أخذ $x=0$ في $(***)$ من الظفر بـــ $e=1$. هكذا، يكون التفكيك المطلوب:

$$F(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

ب. بخصوص العنصر البسيط الأوّل لدينا بداهة:

$$F(x)=\int\frac{dx}{x-1}=Log|x-1|.$$

أمّا العنصر الثاني فتكون معالجته على النحو:

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx&=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+Arctgx-\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}Arctgx\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^2+1}+Arctgx\right).\end{aligned}$$

ج. بوضع $t=tg\dfrac{x}{2}$ يأتي:

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

وعليه:

$$I=\int\frac{\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x-\sin x}dx=2\int\frac{1+t}{(1+t^2)^2}dt=\frac{t-1}{t^2+1}+Arctgt+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

6. 1) لدينا بطبيعة الحال:

$$(X^3+1)^2=(X+1)^2(X^2-X+1)^2.$$

وعليه:

$$\frac{1}{(X^3+1)^2}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{cX+d}{X^2-x+1}+\frac{eX+f}{(X^2-x+1)^2}.\qquad (*)$$

نشرع الآن في رحلة البحث عن معاملات هذا التفكيك. للحصول على b نضرب طرفي (*) في $(X+1)^2$ ثمّ نأخذ $X=-1$. نجد على التوّ $b=\frac{1}{9}$.

نقوم بعدئذ بنقل الحدّ المرفق بـ b إلى الطرف الأيسر. نحصل على:

$$\frac{1}{(X^3+1)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{(X+1)^2}=\frac{a}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2-X+1}+\frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2};$$

أي:

$$\frac{1}{9}\frac{-X^3+3X^2-6X+8}{(X+1)(X^2-X+1)^2}=\frac{a}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2-X+1}+\frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}.\quad (**)$$

للحصول على a نضرب طرفي (**) في $X+1$ ثمّ نأخذ $X=-1$. نجد على التوّ $a=\frac{2}{9}$.

وللحصول على c نضرب طرفي (**) ذاتها في X ثمّ نأخذ نهاية الطرفين لمّا يؤول X إلى ∞. نجد دونما عناء:

$$a+c=0.$$

ومنه:

$$c=-a=-\frac{2}{9}.$$

ننقل الحدّ المرفق بـــ a إلى الطرف الأيسر. يأتي على ضوء ما سبق:

$$\frac{1}{9}\frac{1}{(X+1)}\left(\frac{-X^3+3X^2-6X+8}{(X^2-X+1)^2}-2\right)=\frac{-\frac{2}{9}X+d}{X^2-X+1}+\frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}.$$

وبعد معالجة الطرف الأيسر نكتب من جديد:

$$\frac{1}{9}\frac{-2X^3+5X^2-8X+6}{(X^2-X+1)^2}=\frac{-\frac{2}{9}X+d}{X^2-X+1}+\frac{eX+f}{(X^2-X+1)^2}. \qquad (***)$$

البحث عن قيم المعاملات d و e و f يمكن أن يمرّ من حلّ الجملة الجبريّة الموالية، التي توصلنا إليها القيم 0 و1 و1- للمتغيّر X :

$$\begin{cases} d+f=\dfrac{2}{3}, \\ d+f+e-\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{9}, \\ \dfrac{1}{9}\left(3d+f-e+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{7}{27}; \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} d+f=\dfrac{2}{3}, \\ d+f+e=\dfrac{1}{3}, \\ 3d+f-e=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

حلّها يعطي بسهولة:

$$e=-\frac{1}{3};\ d=f=\frac{1}{3}.$$

بناء على ما تقدّم، يتّخذ التفكيك المطلوب الشكل:

$$F(X)=\frac{2}{9}\frac{1}{X+1}+\frac{1}{9}\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{-\frac{2}{9}X+\frac{1}{3}}{X^2-X+1}+\frac{-\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}}{(X^2-X+1)^2}.$$

2) لدينا:

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

حيث:

$$I_1=\frac{2}{9}\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{2}{9}Log|x+1|+C_1;\ \ C_1\in\mathbb{R};$$

$$I_2=\frac{1}{9}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{9}\frac{1}{x+1}+C_2;\ C_2\in\mathbb{R};$$

$$I_3=-\frac{1}{9}\int\frac{2x-3}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{9}\int\left(\frac{(2x-1)-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{9}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{9}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{9}Log(x^2-x+1)+\frac{2}{9}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx.$$

نلجأ قصد حساب التكامل الوارد في هذا المجموع إلى الإجراء التالي. ليس صعبا أن نلاحظ أنّ:

$$\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}=\frac{4}{3}\frac{1}{\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}.$$

وعليه:

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]}dx$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + K;\ K \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + K;\ K \in \mathbb{R};$$

إذن:

$$I_3 = -\frac{1}{9} Log(x^2-x+1) + \frac{4}{9\sqrt{3}} Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C_3;\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

لنحسب في الأخير:

$$I_4 = -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}dx = -\frac{1}{3}\int\left(\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{(x^2-x+1)^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx.$$

لنقف عند حساب التكامل $H = \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$. لدينا تبعا لما سبق:

$$H = \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx = \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]^2}dx$$

بوضع $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ يأتي:

$$H = \frac{8}{9}\sqrt{3}\int \frac{1}{(y^2+1)^2}dy = \frac{8}{9}\sqrt{3}\left[\int \frac{(y^2+1)-y^2}{(y^2+1)^2}dy\right]$$

$$= \frac{8}{9}\sqrt{3}\int \frac{1}{y^2+1}dy + \frac{8}{9}\sqrt{3}\int \frac{-y^2}{(y^2+1)^2}dy$$

$$= \frac{8}{9}\sqrt{3}\, Arctg\, y + \frac{4}{9}\sqrt{3}\int y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy.$$

بالتجزئة نجد:

$$\int y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy = \frac{y}{y^2+1} - \int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{y}{y^2+1} - Arctg\, y + A;\ A \in \mathbb{R}.$$

وعليه:

$$H = \frac{8}{9}\sqrt{3} Arctg\, y + \frac{4}{9}\sqrt{3}\frac{y}{y^2+1} - \frac{4}{9}\sqrt{3}\, Arctg\, y + A.$$

نجد بالعودة إلى I_4:

$$I_4 = \frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\, Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + $$

$$+ \frac{2\sqrt{3}}{27}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\right] + C_4$$

$$= \frac{1}{9}\frac{x+1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\, Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C_4;\ \ C_4 \in \mathbb{R}.$$

في الخلاصة نجد:

$$I = -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} Log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{18}\frac{2x+5}{x^2-x+1} + $$

$$+ \frac{2\sqrt{3}}{9}\, Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

لو وضعنا $y = x^{\frac{1}{3}}$ لجاءنا $x = y^3$ وبالتالي $dx = 3y^2dy$. إذن:

$$J = \int \frac{3y}{(y^6+1)^2} dy.$$

ولو لجأنا مرّة أخرى إلى وضع $t = y^2$ لجاءنا $dt = 2ydy$، وبالتالي:

$$J = \frac{3}{2} \int \frac{1}{(t^3+1)^2} dt = \frac{3}{2} I(t).$$

ملحوظة

يمكن أن نضع مباشرة $u = x^{\frac{2}{3}}$.

3) نلاحظ أنّ:

$$n^5 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^3+n^3)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 1\right)^2}$$

بتطبيق دستور ريمان التكامليّ على الدالّة المستمرّة $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$ في المجال $[0,1]$ يأتي:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} n^5 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^3+n^3)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \left[I(x)\right]_0^1.$$

وعليه، نجد بفضل الحساب السابق:

$$\ell = -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9} Log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{18}\frac{2x+5}{x^2-x+1} + \left. + \frac{2\sqrt{3}}{9} Arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1$$

$$= -\frac{7}{18} + \frac{2}{9} Log 2 + \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi.$$

7. 1) أ. إذا وضعنا $a+b-x=u$ جاءنا على الفور:

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-du)$$

$$= \int_a^b (a+b-u)f(u)du = (a+b)\int_a^b f(u)du - \int_a^b uf(u)du$$

وعليه:

$$2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx.$$

ومنه النتيجة المطلوبة.

ب. لنبدأ بالتكامل I.

نلاحظ أنّ الدالّة $x \mapsto f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ مستمرّة على المجال $[0,\pi]$ وتحقّق الشرط الموضوع:

$$f(0+\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x).$$

هكذا، يمكن في هذه الحالة الاستفادة من السؤال الأوّل بتسخيره للحصول على:

$$I = \int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

وبوضع $u=\cos x$ يأتي على الفور:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}Arctg\,u\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

لنتوقّف عند التكامل J.

الدالّة $g(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}$ مستمرّة على المجال $[0,\pi]$ وتحقّق القيد:

$$g(0+\pi-x)=\frac{\sin(\pi-x)}{1+\sin^2(\pi-x)}=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}=g(x).$$

وعليه، نكتب كما سبق:

$$J=\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos^2 x}dx.$$

وبوضع $u=\cos x$ نجد:

$$J=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{2-u^2}=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\left(\sqrt{2}-u\right)\left(\sqrt{2}+u\right)}$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{2}-u}+\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{2}+u}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}Log\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\Bigg]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}Log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

لنختم بحساب التكامل K .

الدالّة:

$$x\mapsto h(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$$

مستمرّة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وتحقّق شرطنا:

$$h\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=h(x).$$

يمكن في هذه الحالة الاستفادة من السؤال الأوّل بتسخيره للحصول على:

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x+\cos x}\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}(K_1-K_2).$$

بشأن التكامل K_1 لدينا توّا:

$$K_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1+1=2.$$

لحساب التكامل الثاني K_2 نلجأ إلى التبديل $t=tg\frac{x}{2}$. وعليه:

$$K_2=\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_0^1\frac{2dt}{2t+1-t^2}=\int_0^1\frac{dt}{1-\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2}Argth\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg]_0^1=\sqrt{2}Argth\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}Log\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

في الأخير نحصل على:

$$K=\frac{\pi}{8}\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}Log\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8\sqrt{2}}Log\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

2) لنبدأ بحساب التكامل I. بالتجزئة نحصل على:

$$I=-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4x}+\int\frac{x+2}{x\sqrt{x^2+4x}}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4x}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}+2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}$$

$$=-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4x}+I_1+2I_2.$$

بخصوص التكامل I_1 لدينا على التوّ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1}}=Argch\left(\frac{x+2}{2}\right)+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

لحساب التكامل I_2 نضع $\sqrt{x^2+4x}=t+x$. وعليه:

$$x=\frac{t^2}{4-2t};$$

$$dx=\frac{8t-2t^2}{(4-2t)^2}dt.$$

وبالتالي:

$$I_2=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}=\int\frac{\frac{8t-2t^2}{(4-2t)^2}}{\left(\frac{t^2}{4-2t}\right)\left(t+\frac{t^2}{4-2t}\right)}dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}+D=\frac{2}{x-\sqrt{x^2+4x}}+D;\ D\in\mathbb{R}.$$

في الأخير نجد:

$$I=-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4x}+Argch\left(\frac{x+2}{2}\right)+\frac{2}{x-\sqrt{x^2+4x}}+A.$$

لإيجاد التكامل J نكتب:

$$J=\int\left(\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{3}{2}\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+K.$$

لحساب التكامل K نكتب:

$$K=-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx=-\frac{\sqrt{3}}{4}\int\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx;$$

ثمّ نضع $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. وعليه، $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$. بعد هذا يتّخذ الشكل المبسّط:

$$K=-\frac{3}{8}\int\sqrt{t^2+1}dt.$$

نضع مرّة أخرى $t=shy$. وعليه:

$$K=-\frac{3}{8}\int\sqrt{sh^2y+1}\,chy\,dy=-\frac{3}{8}\int ch^2y dy=-\frac{3}{8}\int\frac{1+ch2y}{2}dy$$

$$=-\frac{3}{8}\int\frac{1+ch2y}{2}dy=-\frac{3}{16}y-\frac{3}{32}sh2y+M;\ M\in\mathbb{R}.$$

$$=-\frac{3}{16}y-\frac{3}{16}shychy+M;\ M\in\mathbb{R}.$$

$$=-\frac{3}{16}y-\frac{3}{16}shy\sqrt{1+sh^2y}+M;\ M\in\mathbb{R}.$$

$$=-\frac{3}{16}Argsh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{3}{16}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+M;\ M\in\mathbb{R}.$$

في الخلاصة نجد:

$$J=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{16}Argsh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-$$
$$-\frac{1}{16}(2x+1)\sqrt{3+(2x+1)^2}+M;\ M\in\mathbb{R}.$$

8. 1) حساب I :

لدينا:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

وعليه:

$$I=\int_1^e\frac{1}{x}dx-\int_1^e\frac{dx}{x+1}=Log\frac{x}{x+1}\Big]_1^e=1-Log(e+1)+Log2.$$

حساب J :

إنّ مقام الكسر الناطق الوارد فيه لا يقبل جذورا. نكتب عندئذ:

$$J=\int\frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$
$$=Log(x^2+2x+2)-3Arctg(x+1)+C;\ C\in\mathbb{R}.$$

حساب K :

نكتب:

$$K=\int_0^1\frac{x+2}{\sqrt{2+2x+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+2}{\sqrt{2+2x+x^2}}dx+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}$$
$$=A+B;$$

حيث:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+2}{\sqrt{2+2x+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\left[\sqrt{f(x)}\right]_0^1$$

$$=\sqrt{2+2x+x^2}\Big]_0^1=\sqrt{5}-\sqrt{2};$$

$$B=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+(1+x)^2}}=Argsh(1+x)\Big]_0^1$$

$$=Log(1+x+\sqrt{1+(1+x)^2}\Big]_0^1=Log\left(2+\sqrt{5}\right)-Log(1+\sqrt{2}).$$

في الأخير نجد:

$$K=A+B=\sqrt{5}-\sqrt{2}+Log\left(2+\sqrt{5}\right)-Log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2) أ. حساب I_1:

$$I_1=\int_0^1\frac{e^t}{e^t+1}dt=Log(e^t+1)\Big]_0^1=Log(e+1)-Log2;$$

حساب I_0+I_1:

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt+\int_0^1\frac{e^t}{e^t+1}dt=\int_0^1\frac{1+e^t}{e^t+1}dt=1.$$

استنتاج I_0:

$$I_0=1-I_1=1+Log2-Log(e+1).$$

ب. حساب I_n+I_{n+1}:

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{e^{nt}+e^{(n+1)t}}{e^t+1}dt=\int_0^1 e^{nt}dt=\frac{1}{n}(e^n-1).$$

ج. المتتالية (I_n) متزايدة إذ أنّ:

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{e^{nt}(e^t-1)}{e^t+1}dt\geq 0,$$

ذلك لأنّ الدالّة $\frac{e^{nt}(e^{t}-1)}{e^{t}+1}$ موجبة على المجال $[0,1]$ والتكامل يحافظ على الترتيب.

د. لدينا:

$$\forall t \in [0,1] \quad 1 < e^{t} \leq e$$

وعليه:

$$2 < 1 + e^{t} \leq 1 + e;$$

ومنه:

$$\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^{t}+1} < \frac{1}{2};$$

والتالي:

$$\frac{e^{nt}}{e+1} \leq \frac{e^{nt}}{e^{t}+1} < \frac{e^{nt}}{2}.$$

ه. بمكاملة أطراف المتباينات أعلاه على المجال $[0,1]$ نجد:

$$\frac{1}{n}\frac{e^{n}-1}{e+1} \leq I_n \leq \frac{e^{n}-1}{2n};$$

وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{n}}{n} = +\infty$ فإنّنا نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

9. 1) لدينا:

$$1 + \int_1^n x^p dx = 1^p + \int_1^2 x^p dx + \ldots + \int_{n-1}^n x^p dx \leq 1^p + 2^p + \ldots + n^p$$

$$\leq \int_1^2 x^p dx + \int_2^3 x^p dx + \ldots + \int_n^{n+1} x^p dx = \int_1^{n+1} x^p dx.$$

2) لدينا من (1):

$$1+\int_1^n x^p dx \le \sum_{k=1}^{n} k^p \le \int_1^{n+1} x^p dx$$

وبالتالي:

$$1+\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_1^n \le \sum_{k=1}^{n} k^p \le \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_1^{n+1} ;$$

أي:

$$1+\frac{1}{p+1}n^{p+1}-\frac{1}{p+1} \le \sum_{k=1}^{n} k^p \le \frac{1}{p+1}(n+1)^{p+1}-\frac{1}{p+1};$$

وعليه:

$$\frac{1}{n^{p+1}}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)n^{p+1}} \le \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p$$
$$\le \frac{1}{p+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p+1}-\frac{1}{(p+1)n^{p+1}}.$$

المتتاليتان الواردتان على يمين ويسار هذه العبارة متقاربتان نحو نهاية واحدة $\frac{1}{p+1}$. إذن المتتالية، المحصورة بينهما متقاربة، بفعل مبرهنة الحصر ولها النهاية ذاتها.

3) نذكّر بدستور ريمان:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)\, f(x_k).$$

لدينا هنا:

$$x_{k+1}-x_k = \rho^{k+1}-\rho^k$$
$$f(x_k)=\frac{1}{\rho^{pk}}.$$

وعليه:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\rho^{k+1}-\rho^k)\frac{1}{\rho^{pk}} = \lim_{k\to 0}\left(\rho\,\rho^{(1-p)k}-\rho^{(1-p)k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\rho-1)\sum_{k=0}^{n-1}(\rho^{(1-p)})^k.$$

بتعويض ρ بقيمته $\left(\rho = 2^{\frac{1}{n}}\right)$، نكتب أخيرا:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{\left(\frac{1-p}{n}\right)^k}\right).$$

نميّز حالتين:

الأولى: $p=1$. نجد هنا:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty} n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{m\to 0}\frac{1}{m}\left(2^m-1\right) = Log\,2.$$

(لاحظ أنّنا وضعنا $m=\frac{1}{n}$.)

الثانية: $p\neq 1$. يأتي هنا:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{\left(\frac{1-p}{n}\right)^k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\left[\frac{1-2^{n\left(\frac{1-p}{n}\right)}}{1-2^{\frac{1-p}{n}}}\right]$$

$$=(1-2^{1-p})\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{1-2^{\frac{1-p}{n}}}\right] = (1-2^{1-p})\lim_{m\to 0}\left[\frac{2^m-1}{1-2^{m(1-p)}}\right].$$

ولما كانت:

$$\lim_{m\to 0}\frac{2^m-1}{1-2^{m(1-p)}}=\lim_{m\to 0}\frac{2^m \operatorname{Log}2}{\left(-(1-p)\operatorname{Log}2\right)2^{m(1-p)}}=-\frac{1}{1-p},$$

أتانا في النهاية:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^p}dx=\left(1-2^{1-p}\right)\left(-\frac{1}{1-p}\right)=\frac{2^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}.$$

10. 1) دستور ريمان المعني هو:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

وعلى ضوئه يأتي بوضوح:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

2) باستخدام مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالّتين $\operatorname{Log}(1+x)$ و $\operatorname{Log}(1+x)+\frac{1}{2}x^2$ في المجال $]0,x[$ ($]0,x[$ من $\mathbb{R}_+^*$) نجزم بأنّه:

$$\exists c_1\in\,]0,x[\;/\;\operatorname{Log}(1+x)=x\frac{1}{1+c_1};$$

$$\exists c_2\in\,]0,x[\;/\;\operatorname{Log}(1+x)+\frac{1}{2}x^2=x\left(\frac{1}{1+c_2}+c_2\right)=x\left(1+\frac{c_2^2}{1+c_2}\right);$$

وهو ما يفضي إلى المتباينتين المطلوبتين.

3) لدينا:

$$\operatorname{Log}P_n=\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\operatorname{Log}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+\operatorname{Log}\left(1+\frac{n}{n^2}\right);$$

وإذا استحضرنا البند (ب) ضمنّا هذا الحصر:

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^4}<Log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2},$$

$$\frac{2}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{2^2}{n^4}<Log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)<\frac{2}{n^2},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{n^2}{n^4}<Log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)<\frac{n}{n^2}.$$

نقوم بجمع هذه المتباينات طرفا طرفا لنحصل على:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2<Log\,P_n<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

أي:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{12n^3}(n+1)(2n+1)<Log\,P_n<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

الانتقال إلى النهاية مع مآل n إلى $+\infty$ يفضي إلى العلاقة:

$$\frac{1}{2}\leq\lim_{n\to\infty}Log\,P_n\leq\frac{1}{2}.$$

وعليه:

$$\lim_{n\to\infty}Log\,P_n=Log\left(\lim_{n\to\infty}P_n\right)=\frac{1}{2}.$$

إذن:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=e^{\frac{1}{2}}.$$

4) لدينا تبعا للإرشادات المقدّمة:

$$I=\int_a^b Arctg\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx=\int_a^b\left(\frac{\pi}{2}-Arctg\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\right)dx$$

$$=(b-a)\frac{\pi}{2}-\int_a^b Arctg\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx$$

$$=(b-a)\frac{\pi}{2}+\int_a^b Arctg\sqrt{\frac{b-y}{y-a}}\,dx$$

$$=(b-a)\frac{\pi}{2}\int_a^b Arctg\sqrt{\frac{b-y}{y-a}}\,dx=(b-a)\frac{\pi}{2}-I.$$

وعليه:

$$2I=(b-a)\frac{\pi}{2};$$

إذن:

$$I=(b-a)\frac{\pi}{4}.$$

11. 1) أ. لنضع:

$$I_n(x)=\int_0^x\frac{1}{n!}t^n e^{-t}\,dt.$$

نقوم بإجراء مكاملة بالتجزئة لهذه العبارة، واضعين $u=\frac{t^n}{n!}$ و $dv=e^{-t}dt$. يأتي:

$$I_n(x)=-\frac{x^n e^{-x}}{n!}+\int_0^x\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-t}\,dt;$$

وهو ما يفضي إلى العلاقة التراجعيّة:

$$I_n(x)=-\frac{x^n e^{-x}}{n!}+I_{n-1}(x).$$

لنكتب هذه العلاقة من أجل القيم 1، 2،...، n ولنجمع طرفا المساويات الناتجة:

$$I_1(x) = -\frac{xe^{-x}}{1!} + I_0(x),$$

$$I_2(x) = -\frac{x^2e^{-x}}{2!} + I_1(x),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$I_n(x) = -\frac{x^n e^{-x}}{n!} + I_{n-1}(x).$$

نجد في الأخير:

$$I_n(x) = -e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} + I_0;$$

ولما كان:

$$I_0 = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x},$$

حصلنا على المطلوب:

$$I_n(x) = -e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} + 1 - e^{-x} = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

ب. بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N};$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} I_n(x) = 1;$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = n!.$$

2) أ. لندرس تغيّرات الدالّة φ. لدينا $\varphi(x) = 0$ و:

$$\varphi'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x}-2=\frac{2}{1-x^2}-2=\frac{2x^2}{(1+x)(1-x)};$$

وبالتالي:

$$\forall x\in\,]0,1[\quad \varphi'(x)>0.$$

وعليه:

$$\forall x\in\,]0,1[\quad \varphi(x)>\varphi(0)=0.$$

ب. لدينا المتباينات:

$$\begin{aligned}f_n(n+x)>f_n(n-x)\ &\Leftrightarrow\ (n+x)^n e^{-(n+x)}>(n-x)^n e^{-(n-x)}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n>e^{2x},\ \forall x\in\,]0,n[\\ &\Leftrightarrow nLog\left(\frac{n+x}{n-x}\right)>2x,\ \forall x\in\,]0,n[\\ &\Leftrightarrow Log\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)>2\frac{x}{n},\ \forall x\in\,]0,n[;\end{aligned}$$

وهو ما تمّ إثباته من خلال البند الأوّل (أ)، إذ أنّ:

$$0<\frac{x}{n}<1\Leftrightarrow 0<x<n$$

ج. بوضع $s=t-n$ يأتي على التوّ:

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt=\int_0^n f_n(n+s)ds>\int_n^n f_n(n-s)ds.$$

وإذا وضعنا مرّة أخرى $t=n-s$ في التكامل الأخير وجدنا:

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt>-\int_n^0 f_n(t)dt=\int_0^n f_n(t)dt.$$

3) لنحسب التكامل $\int_0^{2n} f_n(t)dt$. نكتب بفضل علاقة شال:

$$\int_0^{2n} f_n(t)dt = \int_0^{n} f_n(t)dt + \int_n^{2n} f_n(t)dt.$$

وبالاستناد إلى الفرع (2.ج) يأتي:

$$\int_0^{2n} f_n(t)dt > \int_0^{n} f_n(t)dt + \int_n^{n} f_n(t)dt = 2\int_n^{n} f_n(t)dt.$$

نقوم الآن باستخدام عبارة التكامل $\int_0^{x} f_n(t)dt$ الواردة في الفرع (1.أ) من أجل $x = n$ ثمّ $x = 2n$ فنجد:

$$n!\left[1 - e^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)^k}{k!}\right] > 2n!\left[1 - e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$-e^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)^k}{k!} > 1 - 2e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

$$\Updownarrow$$

$$2e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - e^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k n^k}{k!} > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\left[1 - e^{-n}2^{k-1}\right] > \frac{e^n}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}2^{k-1} + \frac{e^n}{2} > \frac{e^n}{2}.$$

12. 1) لنعتبر التكامل:

$$R_k = \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(x)(b-x)^k\,dx;\ 1 \le k \le n.$$

بوضع:

$$u = \frac{(b-x)^k}{k!};\ dv = f^{(k+1)}(x)\,dx,$$

نحصل بمكاملة بالتجزئة على:

$$R_k = -\frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}\ f^{(k)}(x)\,dx$$

وعليه:

$$R_k = -\frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{k-1}\ ,1 \le k \le n.$$

هكذا، نكتب:

$$\begin{aligned}
R_1 &= -(b-a)f'(a) + R_0,\\
R_2 &= -\frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + R_1,\\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
R_{n-1} &= -\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_{n-2},\\
R_n &= -\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n-1}.
\end{aligned}$$

إذا قمنا بجمع هذه المساويات طرفا طرفا جاءنا:

$$R_n = R_0 - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \ldots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a);$$

ولما كان:

$$R_0 = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

استنتجنا أنّ:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$
$$+ \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\,dx.$$

2) يتعلّق الأمر بإثبات أنّه يوجد عنصر c من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

نلاحظ في سبيل ذلك أنّ الدالّة $x \mapsto f^{(n+1)}(x)$ مستمرّة وأنّ للدالّة $x \mapsto (b-x)^n$ إشارة موجبة ثابتة على المجال $[a,b]$. نستخلص بفضل الدستور الأوّل للمتوسّط أنّه يوجد عنصر c من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\,dx = f^{(n+1)}(c)\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}dx$$
$$= f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},\ c \in [a,b].$$

إنّه المبتغى.

13. 1) ليكن x عنصرا من $[-a,a]$. لدينا:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt.$$

بوضع $-y = t$ نحصل على:

$$F(-x) = -\int_0^{x} f(-y)dy.$$

$$R_0 = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

استنتجنا أنّ:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) +$$

$$+ \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\ dx.$$

2) يتعلّق الأمر بإثبات أنّه يوجد عنصر c من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

نلاحظ في سبيل ذلك أنّ الدالّة $x \mapsto f^{(n+1)}(x)$ مستمرّة وأنّ للدالّة $x \mapsto (b-x)^n$ إشارة موجبة ثابتة على المجال $[a,b]$. نستخلص بفضل الدستور الأوّل للمتوسّط أنّه يوجد عنصر c من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\ dx = f^{(n+1)}(c)\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}dx$$

$$= f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},\ c \in [a,b].$$

إنّه المبتغى.

13. 1) ليكن x عنصرا من $[-a,a]$. لدينا:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt.$$

بوضع $t = -y$ نحصل على:

$$F(-x) = -\int_0^x f(-y)dy.$$

ولما كانت زوجيّة جاءنا في الأخير:

$$F(-x)=-\int_0^x f(y)dy=-F(x);$$

وهو ما يدلّ على أنّ F دالة فرديّة.

2) أ. لدينا:

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt=\left.\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x-\int_0^x t\left(\frac{1}{(1+t^2)^n}\right)'dt$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int_0^x \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt-2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt.$$

وعليه:

$$F_n(x)=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2nF_n(x)-2nF_{n+1}(x).$$

ومنه:

$$F_{n+1}(x)=\frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)F_n(x).$$

ب. بأخذ $n=1$ في الصيغة الأخيرة نجد:

$$F_2(x)=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}F_1(x)=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}Arctgx.$$

3) أ. لدينا توّا:

$$g(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}=(1+x^2)^{-n}=1-nx^2+\circ(x^2).$$

ب. إذا انطلقنا من النشر الموضوع جاءنا بالمكاملة:

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt=\int_0^x (1-nt^2)dt+\circ(x^3)=x-\frac{n}{3}x^3+\circ(x^3).$$

4) أ. معادلة المماس المعنية تستمدّ من النشر المحدود وهي $y=x$.

ب. لدينا:

$$F_n(x)-y=-\frac{n}{3}x^3+\circ(x^3).$$

وضعية Γ_n بالنسبة إلى هذا المماس معطاة تبعا لإشارة الحدّ $-\frac{n}{3}x^3$. وعليه، فالمنحنى Γ_n فوق مماسه من أجل قيم x السالبة وهو تحته من أجل قيم x الموجبة.

وضعية Γ_n بالنسبة إلى هذا المماس معطاة تبعا لإشارة الحدّ $-\frac{n}{3}x^3$. وعليه، فالمنحنى Γ_n فوق مماسه من أجل قيم x السالبة وهو تحته من أجل قيم x الموجبة.

14. لدينا بخصوص I_1 :

$$I_1=\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{Logx}{x}dx=\lim_{u\to\infty}\left[\frac{1}{2}(Logx)^2\right]_1^u$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}(Logu)^2=+\infty.$$

إذن، التكامل المعمّم I_1 متباعد.

وبشأن I_2 لدينا:

$$I_2=\lim_{u\to 0}\int_u^1 Logx\,dx=\lim_{u\to 0}\left[xLogx-x\right]_u^1$$

$$=\lim_{u\to 0}(u-1-uLogu)=-1.$$

إذن، التكامل المعمّم I_2 متقارب.

نكتب بالنسبة إلى I_3 :

$$I_3 = \int_0^2 Log|x-1|\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u Log(1-x)dx + \lim_{u\to 1^+}\int_u^2 Log(x-1)dx$$

$$= \lim_{u\to 1^-}\left[(1-x)Log(1-x)-(1-x)\right]_0^u +$$

$$+ \lim_{u\to 1^+}\left[(x-1)Log(x-1)-(x-1)\right]_u^2$$

$$= \lim_{u\to 1^-}\left[(1-u)Log(1-u)-(1-u)+1\right]+$$

$$+ \lim_{u\to 1^+}\left[-(u-1)Log(u-1)+u\right]=2.$$

إذن، التكامل المعمّم I_3 متقارب.

لنفحص I_4 :

لدينا:

$$I_4 = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u \frac{x}{(1-x)^2}dx = \lim_{u\to 1^-}\left[\frac{x}{1-x}+Log(1-x)\right]_0^u$$

$$= \lim_{u\to 1^-}\left[\frac{u}{1-u}+Log(1-u)\right]$$

$$= \lim_{u\to 1^-}\left[\frac{1}{1-u}\big(u+(1-u)Log(1-u)\big)\right]=+\infty.$$

إذن، التكامل المعمّم I_4 متباعد.

لنتوقّف أخيرا عند I_5 :

نميّز الحالتين:

- إذا كان $\alpha = 1$ كان:

$$I_5 = \lim_{u\to 0}\int_u^1 \frac{Logx}{x}dx = \lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{2}(Logx)^2\right]_u^1$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\left[(Logu)^2\right] = -\infty;$$

- إذا كان $\alpha \neq 1$ كان:

$$I_5 = \lim_{u\to 0}\int_u^1 \frac{Logx}{x^\alpha}dx = \lim_{u\to 0}\int_u^1 x^{-\alpha} Logx\, dx$$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{x^{-\alpha+1}Logx}{-\alpha+1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)^2}\right]_u^1$$

$$= \lim_{u\to 0}\left[-\frac{1}{(-\alpha+1)^2} - \frac{u^{-\alpha+1}Logu}{-\alpha+1} + \frac{u^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)^2}\right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{(-\alpha+1)^2}; \alpha < 1, \\ \infty \qquad\qquad ; \alpha > 1. \end{cases}$$

خلاصة

I_5 متقارب من أجل $\alpha < 1$ ومتباعد من أجل $1 \leq \alpha$.

15. 1) لدينا:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x} = \lim_{u\to+\infty}\int_2^u \frac{dx}{1+x} = \lim_{u\to+\infty}\left[Log(1+x)\right]_2^u$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(Log(1+u) - Log3\right) = +\infty;$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1-x}=\lim_{u\to+\infty}\int_2^u\frac{dx}{1-x}=\lim_{u\to+\infty}\left[-Log(x-1)\right]_2^u$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(-Log(u-1)\right)=-\infty;$$

إذن، التكاملان متباعدان.

2) لدينا:

$$\int_2^{+\infty}\frac{2dx}{1-x^2}=\lim_{u\to+\infty}\int_2^u\frac{2dx}{1-x^2}=\lim_{u\to+\infty}\left(-\int_2^u\frac{dx}{x-1}+\int_2^u\frac{dx}{1+x}\right)$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left[Log\frac{x+1}{x-1}\right]_2^u=\lim_{u\to+\infty}\left[Log\frac{u+1}{u-1}-Log3\right]=-Log3.$$

إذن، التكامل المعمّم $\int_2^{+\infty}\frac{2dx}{1-x^2}$ متقارب.

3) نستخلص أنّه يمكن لتكامل جداء دالّتين المعمّم أن يكون متقاربا دون أن يكون تكامل كلّ دالّة المعمّم متباعدا؛ أو بعبارة أخرى، إذا كان تكاملا دالّتين المعمّمان متباعدين فإنّ تكامل جدائهما قد يكون متقاربا.

16. الدالّة $\frac{x}{x^3+\sin x}$ تكافئ الدالّة $\frac{1}{x^2}$ في جوار $+\infty$. ولما كان التكامل المعمّم $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ متقاربا أضحى التكامل I_1 كذلك.

لدينا:

$$0\le\frac{\sin^2(3x)}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}},\forall x\in[2,+\infty[.$$

ولما كان التكامل المعمّم $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ متقاربا أضحى التكامل I_2 كذلك.

الدالّة $\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^{\alpha}}$ تكافئ الدالّة $x^{\frac{1}{2}-\alpha}$ في جوار $+\infty$. ولما كان التكامل المعمّم $\int_{0}^{+\infty}x^{\frac{1}{2}-\alpha}dx$:

- متقاربا من أجل $\alpha > \frac{3}{2}$،
- متباعدا من أجل $\alpha \leq \frac{3}{2}$،

أضحى التكامل I_3 كذلك.

17. نضع $t = x^2$ فيأتي:

$$I_1 = \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt;\ I_2 = \int_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

وبما أنّ:

- الدالّة $\frac{1}{\sqrt{t}}$ متناقصة تماما على $]0, +\infty[$،
- $\left\{I_u = \int_{0}^{u}\sin t\, dt,\ u > 0\right\}$ و $\left\{I_u = \int_{0}^{u}\cos t\, dt,\ u > 0\right\}$ محدودتان،

فإنّنا نجزم، بفضل مقياس آبل، بأنّ التكاملين I_1 و I_2 متقاربان.

18. **الجزء الأوّل**

1) بوضع $y = \frac{\pi}{2} - t$ يأتي على الفور:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right)^n (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^n \, dy.$$

2) لدينا:

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(\cos t)^{n+1} \, dt$$

$$= \left[\sin t \, (\cos t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^n \, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - (\cos t)^2 \right) (\cos t)^n \, dt = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

وعليه:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n. \qquad (*)$$

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ:

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}; \; W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

بالاستناد إلى العلاقة (*) يأتي من أجل $n = 2p - 2$:

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4} \cdots$$
$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots5.3.1}{2p(2p-2)\ldots4.2} W_0.$$

يمكن بالتراجع الجزم بأنّ:

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots5.3.1}{2p(2p-2)\dots4.2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2p!)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

وبالمثل نجد بالطريقة ذاتها من أجل $n = 2p-1$:

$$W_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots4.2}{(2p+1)(2p-1)\dots5.3.1}\,W_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

3) من أجل $n = 2p$ نجد:

$$\begin{aligned}(n+1)W_{n+1}W_n &= (2p+1)W_{2p+1}W_{2p}\\ &= (2p+1)\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

ومن أجل $n = 2p+1$ نجد:

$$\begin{aligned}(n+1)W_{n+1}W_n &= (2p+2)W_{2p+2}W_{2p+1}\\ &= (2p+2)\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

هكذا، نستخلص أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+2}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

4) لدينا:

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \le \cos t \le 1.$$

وعليه:

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \le (\cos t)^{n+1} \le (\cos t)^n \le 1,$$

وبالتالي:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt;$$

ومنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

نستنتج أنّ المتتالية $(W_n)_n$ موجبة ومتناقصة.

5) أ. لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

ولما كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$ استخلصنا بفضل مبرهنة الحصر أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.$$

ب. لدينا:

$$nW_n^{\ 2} = \frac{n}{n+1} \frac{W_n}{W_{n+1}} (n+1) W_{n+1} W_n = \frac{n}{n+1} \frac{W_n}{W_{n+1}} \frac{\pi}{2}.$$

وعليه:

$$\lim_{n\to+\infty} nW_n^{\ 2} = \frac{\pi}{2}.$$

نستخلص هكذا أنّ:

$$nW_n^{\ 2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{\pi}{2};$$

وبالتالي:

$$W_n \underset{+\infty}{\approx} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

الجزء الثاني: تطبيق

1) في جوار $+\infty$ لدينا:

$$\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2};$$

ولما كان التكامل $\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ متقاربا تبيّن أنّ التكامل $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ متقارب بدوره.

2) أ. يسمح النشر الماكلورانيّ المطبّق على الدالّتين e^u و e^{-u} بأنّ نكتب:

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \; \exists c \in \left]0,u\right[\,/\, e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} e^c; \qquad (*)$$

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \; \exists d \in \left]0,u\right[\,/\, e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} e^{-d}. \qquad (**)$$

من هاتين العلاقتين نستنتج على الترتيب:

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad e^u \geq 1 + u;$$
$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad e^{-u} \geq 1 - u..$$

وعليه:

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad e^{-u} \leq \frac{1}{1+u}.$$

ب. استنادا إلى البند (أ) نكتب:

$$0 \leq t \leq \sqrt{n} \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{t^2}{n} \leq 1 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

وبالمثل، لدينا:

$$t \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{t^2}{n} \geq 0 \;\Rightarrow\; e^{-\frac{t^2}{n}} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1} \;\Rightarrow\; e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

3) لدينا:

$$W_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n \cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^n \cos x\, dx$$

$$= \int_0^1 (1-u^2)^n\, du;$$

حيث $u = \sin x$. إذا وضعنا $t = \sqrt{n}\, u$ جاءنا من جديد:

$$W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt;$$

وعليه:

$$\sqrt{n}\, W_{2n+1} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

وبالمثل، نكتب:

$$W_{2n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+tg^2 x\right)^{-n} d(tgx)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n};$$

حيث $u = tgx$. من جهة أخرى، نعلم أنّ:

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{du}{(1+u^2)^n}.$$

بوضع $t = \sqrt{n}\, u$ نحصل على:

$$\int_0^A \frac{du}{(1+u^2)^n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}A} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

وعليه:

$$W_{2n-2} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}A} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

نستخلص في الأخير:

$$\sqrt{n}\, W_{2n-2} = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

4) أ. لدينا بداهة:

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

وباستحضار متباينتي الفرع (2. ب) نكتب:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \le \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

وعليه:

$$\sqrt{n}\, W_{2n+1} \le \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \le \sqrt{n}\, W_{2n-2}. \qquad (\Delta)$$

ب. في جوار $+\infty$ لدينا:

$$W_{2n+1} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$

وعليه:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{n}\, W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

وبالمثل، نجد:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{n}\, W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

يسمح الانتقال إلى النهاية في العبارة (Δ) بالجزم بأنّ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3

تمارين للبحث

1. بيّن مستعملا التعريف أنّ الدالّتين $f(x)=x^3$ و $g(x)=e^x$ تقبلان المكاملة يمانيّا على كلّ مجال $[a,b]$.

2. لتكن f دالّة حقيقيّة منطلقة من مجال $[a,b]$. نفترض أنّ مشتقّها f' دالّة قابلة للمكاملة ريمانيّا على $[a,b]$. اثبت أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\frac{(f(b))^2-(f(a))^2}{2}.$$

3. لتكن f دالّة حقيقيّة منطلقة من المجال $[0,1]$ ومعرّفة بـــ :

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n;\ x\in\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[,\ (n\in\mathbb{N}^*),\\ 0;\ \ x=0.\end{cases}$$

أ. ادرس نهاية الدالّة f عند الصفر.

ب. برهن أنّ الدالّة f تقبل المكاملة على المجال $[0,1]$.

4. جب على السؤالين السابقين بخصوص الدالّة الحقيقيّة:

$$g(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right);\ x\in\left]0,1\right],\\ 0;\ x=0.\end{cases}$$

5. 1) اثبت أنّه إذا كانت f و g دالّتين من $\mathscr{R}([a,b])$ كانت الدوال $|f|$ و $\sup(f,g)$ و $\inf(f,g)$ عناصر من $\mathscr{R}([a,b])$ كذلك.

2) ليكن f عنصرا من $\mathscr{R}([a,b])$ محقّقا $0 < m = \inf_{a\le x\le b} f(x)$.

بيّن أنّ الدالّة $\frac{1}{f}$ تنتمي إلى $\mathscr{R}([a,b])$؛ ثمّ استنتج أنّ الدالّة $g(x) = \frac{1}{x^n}$ (n من $\mathbb{N}$) تقبل المكاملة ريمانيّا على كلّ مجال متراص $[a,b]$.

3) برهن أنّ:

$$\begin{cases} f \in \mathscr{R}([a,b]) \\ f \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f} \in \mathscr{R}([a,b]).$$

6. احسب، مستخدما تعريف تكامل ريمان، النهايات التالية:

$$\ell_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\ ;\ \ell_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k};\ \ \ell_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\ell_4 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{\frac{1}{3}}};\ \ell_5 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}};$$

$$\ell_7 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}.\ \ell_6 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3};$$

7. لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على $[-1,1]$. اثبت أنّ الدالّة g المعرّفة بـ:

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f(t)dt,$$

قابلة للاشتقاق على $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ واحسب مشتقّها.

8. ليكن f عنصرا رتيبا من $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ و g دالّة مستمرّة على $[a,b]$.

برهن أنّه يوجد ثابت c من $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx.$$

(إعانة: يمكن إدراج الدالّة $h(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ ومكاملتها بالتجزئة.)

9. لتكن $f:[a,b]\to]0,+\infty[$ دالة مستمرة. برهن مستعينا بالخاصية المميّزة للحدّ الأعلى، أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x).$$

10. لنعتبر المتتالية الحقيقيّة:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin x}\,dx.$$

1) اثبت تقارب المتتالية (I_n).

2) برهن، مستعينا بالتقسيم $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] = [0,h]\cup\left[h,\frac{\pi}{2}\right]$، أنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

11. لتكن f دالّة من $\mathscr{R}([a,b])$ و $F:[a,b]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ الدالّة المعرّفة بـــ:

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1) نفترض f مستمرّة عند الصفر. برهن عندئذ أنّ:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = f(0).$$

2) نفترض f قابلة للاشتقاق عند الصفر. برهن عندئذ أنّه يمكن تمديد الدالّة F إلى دالّة قابلة للاشتقاق باستمرار عند الصفر.

3) برهن أنّ:

أ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0} F(x)=L.$

ب. f محدودة $\Leftarrow$ F محدودة.

ج. f زوجيّة $\Leftarrow$ F زوجيّة.

12. لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار وموجبة تماما على المجال $[0,c]$ $(0<c)$ وتحقّق $f(0)=0$. برهن أنّ:

$$\forall a\in[0,c],\forall b\in[0,f(c)]:\ ab\le \int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f\,'(x)\,dx.$$

13. لتكن f دالّة حقيقيّة موجبة تماما ومتزايدة على المجال $[0,a]$. بيّن أنّ الدالّة $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ متزايدة.

14. لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار على المجال $[0,1]$ وتحقق $f(0)=f(1)=0$.برهن أنّ:

$$\int_0^1 x^6(f\,'(x))^2\,dx\ge \frac{25}{4}\int_0^1 x^4((f(x))^2\,dx.$$

(إعانة: اعتبر الدالّة g المعرّفة بـــ $g(x)=x^{5/2}f(x)$.)

15. لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار على المجال $[a,b]$ وتحقّق

$$f(a)=f(b)=0,$$
$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx=1.$$

1) برهن أنّ:

$$\int_a^b x\,f(x)f\,'(x)\,dx=-\frac{1}{2}.$$

2) برهن أنّ:

$$\left(\int_a^b x^2 (f(x))^2\, dx\right)\left(\int_a^b (f'(x))^2\, dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

16. ليكن m عددا حقيقيّا موجبا تماما و g الدالّة الحقيقيّة المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـــ:

$$g(x) = \int_0^1 s^m \sin sx\, ds.$$

1) اثبت أنّ:

$$g(x) = \frac{1}{x^{m+1}} \int_0^x t^m \sin t\, dt.$$

2) استنتج أنّ g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ وتحقّق العلاقة:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad xg'(x) + (m=1)g(x) = \sin x.$$

17. لتكن f الدالّة الحقيقيّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t}\, dt.$$

احسب النشر المحدود من الرتبة 5 للدالّة f بجوار الصفر.

18. 1) برهن أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2}\, dt = 1.$$

2) لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ دالّة مستمرّة. بيّن أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n f(x) dx = f(0).$$

19. لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار على $[a,b]$.

1) اثبت أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

2) نعتبر الدالّة $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ ونضع $F(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt$.

أ. برهن، مكاملا بالتجزئة، أنّ:

$$\lim_{x,x'\to+\infty}\left|F(x)-F(x')\right| = 0.$$

ب. استنتج أنّ للدالّة F نهاية عندما يؤول x نحو $+\infty$.

20. لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار مرّتين على المجال $I=[-1,1]$. نعرّف الدالّة ψ على I بـــ :

$$\psi(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt.$$

1) احسب المشتقّات ψ' و ψ'' و ψ'''، ثمّ اكتب النشر المحدود من الرتبة 3 عند الصفر للدالّة ψ .

2) أ. احسب النهاية:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}(\psi(x)+xf(0)).$$

ب. اعط L في الحالة $f(t)=e^{-t^2}$.

21. ليكن f عنصرا من $\mathscr{R}([a,b])$. برهن أنّ:

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx \Leftrightarrow$ للدالّة f إشارة ثابتة على $[a,b]$.

22. 1) اثبت أنّ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx.$$

2) استنتج قيمة التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

23. لتكن f و g دالّتين قابلتين للمكاملة على $[a,b]$.

1) برهن أنّ:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right).$$

2) برهن أنّ المساواة تتحقّق في العلاقة السابقة إذا وفقط إذا كانت الدالّتان f و g مرتبطتين خطّيّا.

24. ليكن n عددا طبيعيّا غير معدوم.

1) احسب التكامل $I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx$ مستخدما:

أ. تبديل المتغيّر $1-x=y$؛

ب. اشتقاق العبارة $(1-x)^n$.

2) استنتج العلاقة:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}C_n^n.$$

25. برهن أنّ:

أ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = 1;$

ب. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0.$

26. برهن مستخدما طريقة المكاملة بالتجزئة، أنّ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(L\operatorname{og} x)dx = \frac{x}{2}\big(\sin(L\operatorname{og} x) - \cos(L\operatorname{og} x)\big) + C;\ C \in \mathbb{R};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} L\operatorname{og}(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L\operatorname{og}(\cos x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} L\operatorname{og}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx.$$

27. بيّن أنّ:

أ. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$;

ب. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2Arc\sin\sqrt{x} + C$;

ج. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}dx = \frac{19}{8}Arc\sin(2x-3) - \\ -\frac{2x+9}{8}\sqrt{(x-1)(2-x)} + C.$$

28. نضع:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx;\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx.$$

احسب $I+J$ و $I-J$ ، ثمّ استنتج قيمة كلّ من I و J.

29. من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n نضع $I_n = \int_1^n e^{-t^2}dt$.

1) برهن أنّ المتتالية (I_n) متزايدة.

2) بيّن أنّ $I_n \le \int_1^n te^{-t^2}dt$.

3) استنتج أنّ (I_n) محدودة.

4) ما هي طبيعتها ؟

30. لتكن المتتالية (I_n) المعرّفة بـــ :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

1) بيّن أنّ:

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

2) احسب I_0 و I_1، ثمّ I_{2k} و I_{2k+1} من أجل كلّ عدد طبيعيّ k.

3) برهن أنّ العدد $(n+1)I_n I_{n+1}$ مستقلّ عن n.

4) بيّن أنّ:

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

5) استنتج النهايتين $\lim_{n\to\infty} n I_n^2$ و $\lim_{n\to\infty} \sqrt{k}\frac{1.3...(2k-1)}{2.4...(2k)}$.

31. من أجل كلّ عددين طبيعيّين m و n نضع:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = I(m,n).$$

1) امتحن صحّة المساواتين:

أ. $(m+1)\,I(m,n+1) = (n+1)\,I(m+1,n),$

ب. $I(m,n) = I(m,n+1) + I(m+1,n).$

2) استنتج صيغة للعبارتين $I(m,n+1)$ و $I(m,n)$ بدلالة m و n.

32. ليكن p عددا طبيعيّا غير معدوم.

1) برهن أنّ:

$$1 + \int_1^n x^p dx < 1^p + 2^p + ... + n^p < \int_1^{n+1} x^p dx.$$

2) استنتج أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

33. احسب الدوال الأصليّة للدوال التالية:

$$5)\ x\,Arctg\,x;\ 1)\ e^x(x^2+5x+2);\ 2)\ x\sin x;\ 3)\ x^n e^{ax};\ 4)\ x^n Log\,x;$$

$$10)\ 4^{\sqrt{2x+1}};\ 7)\ (Log\,x)^2;\ 8)\ \frac{Log\,x}{(1+x)^2};\ 9)\ x^2\cos x;\ 6)\ \sin x\,sh\,x;$$

$$14)\ xArctg\sqrt{x^2-1}.\ 11)\ (Arc\sin x)^2;\ 12)\ \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x};\ 13)\ \sqrt[3]{x}Logx;$$

34. احسب مستخدما تبديل المتغيّر، التكاملات التالية:

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}},(t=\sin x);\ 2)\ \int_0^x t(2t+1)^n dt,(y=2t+1);$$

$$4)\ \int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2},(x=tg\,t);\ 5)\ \int\frac{dx}{(1-x^2)^2},(x=th\,t);\ 3)\ \int_0^5\frac{dx}{1+\sqrt{x}},(x=t^2);$$

$$6)\ \int_0^x\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{\cos t}},0<x<\frac{\pi}{2},(u=\sqrt{\cos t});\ 7)\ \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}},\left(x=\frac{1}{t}\right);$$

$$8)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{6-5\sin x+\sin^2 x},(t=\sin x);\ 9)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(Arc\sin x)^m dx}{\sqrt{1-x^2}},(x=\sin t).$$

35. جب على السؤال نفسه مع اختيار التبديل الملائم:

$$1)\ \int\frac{sh\,x}{1+4ch^2x}dx;\ 2)\ \int\frac{e^x}{1+e^x}dx;3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,Arc\sin x};4)\ \int\frac{ch\,x}{\sqrt{1+sh^2x}}dx$$

$$5)\ \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx;\ 6)\int \frac{dx}{x\sqrt{(Log\,x)^2-1}};\ 7)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1+(Log\,x)^2}};$$

$$8)\int \frac{dx}{(xLog\,x)\big(Log(Log\,x)\big)};\ 9)\ \int \cos(Log\,x)dx;\ 10)\int e^x \cos e^x dx;$$

$$11)\int e^{\sqrt{x}}dx;\ 12)\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}dx;\ 13)\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx;\ 14)\int x^2 Arctg\,x\,dx;$$

$$15)\int \frac{Arc\sin x}{x^2}dx;\ 16)\int Arctg\sqrt[3]{x}\,dx;\ 17)\int \frac{x^2 Log\,x}{(x^3+1)^3}dx;$$

$$18)\int Arc\sin\sqrt{x}\,dx;\ 19)\int \frac{dx}{\cos x+\cos 3x};\ 20)\int \cos^9 x \sin^7 x\,dx.$$

36. 1) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعرّفة بــ :

$$f(x)=\frac{ax+b}{x(x+1)(x+2)}.$$

حيث a و b عددان حقيقيّان.

أ. اكتب $f(x)$ تحت شكل جداء عوامل بسيطة.

ب. احسب:

$$\int f(x)dx;\ \int f(x^2)dx;\ \int x\,f(x^2)dx.$$

2) احسب الدوال الأصلية للدوال الكسريّة التالية:

$$1)\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx;\ 2)\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx;3)\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx;\ 4)\int \frac{dx}{x^4-1};$$

$$5)\int \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x(x^2+1)}dx;\ 6)\int \frac{dx}{x^2+2x+3};\ 7)\int \frac{dx}{x^4+x^2+1};$$

8) $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$; 9) $\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$; 10) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

11) $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}$; 12) $\int\frac{x+1}{2x^2+6x+9}dx$; 13) $\int\frac{dx}{x^4+1}$;

14) $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 15) $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$; 16) $\int\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

37. هات التكاملات التالية:

4) $\int\cos 3x\cos 4x\,dx$; 1) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 2) $\int tg^4 x\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$;

7) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+tg^2 x}$; 5) $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$; 6) $\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$;

8) $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$; 9) $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$;10) $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$;11) $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 2x}$

12) $\int\frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$; 13) $\int\frac{dx}{(1+\cos x)^2}$; 14) $\int\frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos x^2}$

15) $\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$; 16) $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$; 17) $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$;

18) $\int\frac{dx}{1+\sin^3 x}$; 19) $\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}$; 20) $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}dx$;

22) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; 23) $\int\frac{dx}{2\sin x-3\cos x-5}$; 21) $\int\frac{x}{\cos^2 3x}dx$;

24) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; 25) $\int\frac{dx}{\cos x-\cos 3x}$; 26) $\int\frac{dx}{4\cos^2 x+9\sin^2 x}$;

$$27)\ \int x\sin^2 x\,dx;\quad 28)\ \int\frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x};\quad 29)\ \int\frac{dx}{\sin^5 x}.$$

38. هات التكاملات التالية:

$$1)\ \int\frac{e^x}{e^{2x}-2e^x};\quad 2)\ \int\frac{dx}{5\,ch\,x+3\,sh\,x+4};\quad 3)\ \int\frac{dx}{(sh\,x+ch\,x)^n};$$

$$4)\ \int\frac{dx}{ch3x-ch\,x};\quad 5)\ \int\frac{dx}{ch^3x+sh^3x-1};\quad 6)\ \int\frac{dx}{th\,x-1};$$

$$7)\ \int\frac{dx}{sh3x-sh\,x};\quad 8)\ \int\frac{dx}{sh^2x+ch^2x};\quad 9)\ \int\frac{sh\,x\;ch\,x}{sh^4x+ch^4x}dx;$$

$$10)\ \int\frac{ch2x}{ch^5x}dx;\quad 11)\ \int\frac{ch3x}{1+sh\,x}dx;\quad 12)\ \int\frac{dx}{sh^3x+ch^3x};\quad 13)\ \int\frac{ch2x}{sh5x}dx;$$

$$14)\ \int\frac{dx}{th\,x};\quad 15)\ \int\frac{dx}{sh\,x\,ch^2x};\quad 16)\ \int\frac{dx}{ch^2x\,sh^2x};\quad 17)\ \int\frac{th\,x}{\sqrt{ch2x}}dx.$$

39. احسب التكاملات الآبليّة التالية:

$$1)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}};\ 2)\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+1)^2};\ 3)\ \int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx;\ 4)\ \int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$5)\ \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}};\quad 6)\ \int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx;\quad 7)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}};$$

$$8)\ \int\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{(x-1)^5}-x+1}dx;\quad 9)\ \int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}};\quad 10)\ \int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx;$$

$$11)\ \int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx;\quad 12)\ \int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx;\quad 13)\ \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}};$$

$$14)\ \int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx;\quad 15)\ \int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx;\quad 16)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$19)\ \int x\sqrt[3]{3x+1}\,dx;\quad 17)\ \int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}};\quad 18)\ \int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{4x-x^2}};$$

$$20)\ \int\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx;$$

40. لتكن f دالّة مستمرّة ومتناقصة على المجال $[a,b]$. نضع:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

اثبت أنّ:

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{F(x)+F(y)}{2}.$$

41. لتكن $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للمكاملة على كلّ مجال $[0,x]$ $(x>0)$ ومحقّقة العلاقة التكامليّة:

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x}{3}f(x).$$

اثبت أنّ:

1) f مستمرّة على $]0,+\infty[$.

2) f قابلة للاشتقاق باستمرار على $]0,+\infty[$.

3) $\forall x\in[0,+\infty[\ \ 2f(x)-xf'(x)=0.$

42. من أجل كلّ $x>0$ نضع:

$$I_n(y)=\int_0^x\frac{dt}{(t^k+y)^n},$$

حيث $y>0$ و n و k عددان طبيعيان.

1) جد، بإجراء مكاملة بالتجزئة، علاقة بين $I_n(y)$ و $I_{n+1}(y)$.

2) اجر في $I_n(y)$ التبديل $t^k = yu$.

3) عبّر بواسطة التكامل المحصل عليه في (2) ، عن $\frac{d}{dy}(I_n(y))$.

4) اثبت، بالمقارنة مع العلاقة الناتجة في (1)، أنّ:

$$\frac{d}{dy}(I_n(y)) = -nI_{n+1}(y).$$

43. لتكن u دالّة قابلة للاشتقاق بالاستمرار مرّتين على $[0,1]$ وتحقّق على $[0,1]$:

$$\int_0^1 (u(x))^2 dx = 1;\ u(0) = u(1) = 0;$$

$$H(x) = u''(x) - g(x)u'(x) + \lambda u(x) = 0,$$

حيث λ عدد حقيقيّ مثبت و g دالّة مستمرّة على $[0,1]$ وتحقّق:

$$|g| \le C_1, C_1 \in \mathbb{R}_+^*.$$

1) اثبت منطلقا من العلاقة $\int_0^1 u(x)H(x)dx = 0$ ، أنّ:

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 g(x)(u(x))^2 dx = \lambda.$$

2) استنتج العلاقة:

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \le |\lambda| + C_1.$$

3) اثبت معتمدا على المساواة $\int_0^1 u'(x)\,H(x)dx = 0$ ، أنّ:

$$(u'(x))^2 + \lambda(u(x))^2 - (u'(0))^2 - 2\int_0^x g(t)\ u(t)\ u'(t)dt = 0.$$

4) استنتج العلاقة:

$$(u'(0))^2 = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx + \lambda - 2\int_0^1 \left[\int_0^x g(t)\; u(t)\; u'(t)\,dt\right] dx.$$

44. 1) لتكن f دالّة معرّفة ومستمرّة على $[0,a]$ $(0<a<\pi)$. جد نهاية المتتالية $v_n = \int_0^a f(x)\sin nx\,dx$.

2) من أجل كلّ عدد طبيعيّ n نضع:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx;$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx.$$

أ. احسب $I_n - I_{n-1}$ و $J_n - J_{n-1}$.

ب. استنتج I_n و J_n.

ج. بيّن مستخدما السؤال (1) أنّ I_n و J_n تنتهيان نحو ما لا نهاية.

د. استنتج عبارة للعدد π.

3)نفترض أنّ $(0<a<\pi/2)$ونعتبر من أجل كلّ عدد طبيعيّ m، التكامل $K_m = \int_0^a \frac{\sin mx}{\sin x}\,dx$. برهن، مقارنا تبعا لشفعية m، العبارة K_m مع I_n أو J_n، أنّ $\lim\limits_{m\to\infty} K_m = \frac{\pi}{2}$.

45. لتكن f دالّة معرّفة ومستمرّة على $\mathbb{R}$. نفترض أنّها تحقّق من أجل كلّ عدد حقيقيّ a:

$$f(x) = f(a-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) اثبت أنّ:

$$2\int_0^a x f(x)dx = a\int_0^a f(x)dx.$$

2) استنتج قيمة التكامل:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$$

46. 1) برهن المتباينة:

$$0<\int_0^{200}\frac{e^{-5x}}{20+x}dx<\frac{1}{100}.$$

2) تأكّد من أنّ:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^4}{16}.$$

47. لتكن f دالّة معرّفة ومستمرّة وقابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$. نفترض أنّها تحقّق $f(a)=f(b)=0$. برهن أنّه يوجد عنصر x_0 في $[a,b]$ بحيث:

$$|f'(x_0)|\geq\frac{b}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.$$

1) برهن أنّ:

$$0<\int_0^{200}\frac{e^{-5x}}{20+x}dx<\frac{1}{100}.$$

2) تأكّد من أنّ:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^4}{16}.$$

48. لتكن f دالّة حقيقيّة قابلة للاشتقاق باستمرار على $[a,b]$ بحيث $f(a)=f(b)=0$. برهن أنّه يوجد عنصر x_0 من $[a,b]$ بحيث:

$$|f(x_0)| \geq \frac{b}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx.$$

49. لتكن f دالّة حقيقيّة معرّفة ومستمرّة على $[0,\pi]$.

1) بيّن مستعينا بالتبديل $y = \pi - x$ ، أنّ:

$$\int_0^\pi x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\, dx.$$

2) استنتج أنّ:

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^\pi \frac{dx}{1+x^2}.$$

3) اعط قيمة I .

50. 1) لتكن f دالّة مستمرّة ودوريّة، دورها T. برهن أنّ:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

2) لتكن f دالّة حقيقيّة مستمرّة على $\mathbb{R}$ و $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ دالّة دوريّة.

أ. برهن أنّ f دوريّة.

ب. هل العكس صحيح؟

51. ليكن n عددا طبيعيّا غير معدوم ولتكن F_n الدالّة الحقيقيّة المعطاة على النحو:

$$F_n(x) = \int_0^x (1+t^2)^n \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

1) أ. تأكّد من أنّ:

$$F_1(x) = \frac{1}{4}x(1+x^2) + \frac{3}{8}x\sqrt{1+x^2} + \frac{3}{8}Argshx.$$

ب. احسب مستعينا بمكاملة بالتجزئة التكامل:

$$F_0(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

ج. جد النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار الصفر للدالّة $Argshx$.

د. استنتج النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالّة F_0.

2) استعن بوضع $x = sht$ لإثبات أنّ:

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n+4}x(1+x^2)^{n+1}\sqrt{1+x^2} + \frac{2n+3}{2n+4}F_n(x),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3) ليكن P_n الجزء النظاميّ للنشر المحدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالّة F_0 للدالّة F_n :

$$P_n(x) = a_n x + b_n x^3.$$

أ. اثبت أنّ المتتاليتين (a_n) و (b_n) تحقّقان على الترتيب العلاقتين:

$$b_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+4}\left(\frac{1}{2} + b_n\right);$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n+4} + \frac{2n+3}{2n+4}a_n.$$

ب. اثبت أنّ:

$$a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4) أ. اثبت أنّ F_n تحقّق هذه المعادلة التفاضليّة:

$$F_n''(x) = (2n+1)\frac{x}{1+x^2}F_n'(x).$$

ب. اثبت أنّ:

$$b_n = \frac{2n+1}{6} a_n.$$

ج. استنتج b_n.

52. I. من أجل كلّ عدد طبيعيّ n نضع:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x \, dx.$$

1) برهن، بدون حساب التكامل I_n، أنّ المتتالية (I_n) متناقصة، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) لتكن الدالّة الحقيقيّة f المعطاة بـــ $f(x) = tg^{n+1} x$.

أ. احسب مشتقّ f.

ب. اعط عبارة للمجموع $I_{n+2} + I_n$.

ج. برهن مستعينا بالفرع (ب)، أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}.$$

د. استنتج نهاية المتتالية (I_n).

II. ليكن t عنصرا من $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. من أجل كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم n نضع:

$$I_n(t) = \int_0^t tg^n x \, dx;$$

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} I_k(t).$$

1) تأكّد من أنّ:

أ. $$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0,t] \ \left|\sum_{k=1}^{n} tg^k x - \frac{tg\,x}{1-tg\,x}\right| = \frac{tg^{n+1} x}{1-tg\,x},$$

ب. . $$0 \leq \frac{tg^{n+1} x}{1-tg\,x} \leq \frac{tg^{n+1} t}{1-tg\,t}.$$

2) برهن أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \left|S_n(t) - \int_0^t \frac{tg\,x}{1-tg\,x}dx\right| = t\frac{tg^{n+1} t}{1-tg\,t}.$$

3) استخلص أنّ $\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \ell$ ، حيث ℓ عدد حقيقيّ.

4) نعتزم إيجاد عبارة لهذه النهاية.

أ. لتكن g الدالّة الحقيقيّة المعرّفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ بـ:

$$g(x) = L\log(\cos x - \sin x).$$

بيّن أنّ g تقبل الاشتقاق ثمّ احسب مشتقّها.

ب. نضع:

$$J(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}dx;$$

$$K(t) = \int_0^t \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}dx.$$

احسب منطلقا من $J(t)+K(t)$ و $J(t)-K(t)$ ، التكاملين $J(t)$ و $K(t)$.

ج. استخلص $\lim_{n\to\infty} S_n(t)$.

53. عيّن طبيعة التكاملات المعمّمة التالية:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-\cos x)^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R};\ I_2 = \int_0^1 \frac{Log\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} dx;\ I_3 = \int_0^2 \frac{dx}{1-x^3}$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x} dx;\ I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{Logx}{x+4} dx;\ I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x-\sin x}} dx.\ I_4 = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx;$$

$$I_7 = \int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^2};\ I_8 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx;\ I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5};$$

$$I_{10} = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}};\ I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;\ I_{12} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x dx;$$

54. هات طبيعة التكاملات المعمّمة التالية:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^8+1} dx; I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{chx}{ch3x} dx; I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{Arctgx}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx; I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$$

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx; I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{Logx}{1+x^2} dx; I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Arctgx}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}};\ I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{1-x}};\ I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{Logx}{(1+x^2)^2} dx;$$

55. لنعتبر التكامل المعمّم:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}} dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

1) ادرس تقارب التكامل I_n .

2) اعط علاقة بين I_n و I_{n+1} .

3) احسب I_0 ثمّ استنتج I_n .

القسم الرابع

1

دليل المصطلحات

انتهجنا إرجاع القارئ إلى الصفحة التي يظهر فيه المصطلح المذكور للمرّة الأولى.

2

دليل الرياضياتيّين المذكورين

عمدنا في وضع هذا الدليل إلى الإتيان بصور الرياضيّاتيّين للاستئناس، وتمّ إرجاع القارئ إلى أوّل صفحة ذكر فيها العالم.

الصورة غير متوفّرة

أرخميدس(9)

ريمان(10)

ابن الهيثم(10)

كفاليري(10)

دو فيرمه(10)

نيوتن(11)

توريتشيلي (11)

ليبنيز (11)

كوشي (12)

لوبيــف (12)

داربو (22)

فوريي (23)

شال (27)

ديريكليه (32)

لاقرانج (46)

أولر (63)

آبل (87)

تايلور (108)

ڤاوص (110)

ويليس(111)

مراجع

1. م. حازي: الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الأوّل، ديوان المطبوعات الجامعيّة، 1999.
2. م. حازي: الفالج المقروض في الامتحانات والفروض، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعيّة، 1999.
3. م. حازي: الطلع النضيد للطالب والمعيد، دار القصبة للنشر، 2010.

4. K. Allab: Eléments d'analyse, Fonctions d'une variable réelle, OPU,1984.
5. J. M.Arnaudies, H.Frayssé: Cours de mathématiques 2, Analyse, Dunod-Université; 1988.
6. C. Baba-Hamed, K. Ben Habib: Analyse I: Rappels de cours et Exercices avec solutions, O.P.U; 1988.
7. G. Chilov: Analyse mathématique, fonctions d'une variable réelle, tome 1, Mir; 1973.
8. R. Couty, J.Ezra: Analyse, tome1, Armand Collin; 1967.
9. C. Deschamps, A.Warusfel: mathématiques 1re année; Dunod; 1999.
10. J. Dieudonné: Eléments d'analyse, tome 1, fondement de l'analyse moderne, Gauthier-Villars; 1968.
11. J. Dixmier: Cours de mathématiques du premier cycle, Gauthier-Villars; 1976
12. M.Hazi: S.E.M 300 par ses Examens, tome 1, O.P.U; 2004.
13. D.E. Mejdadi, M. Boukra, A. Djadane, B.K. Sadallah: Analyse mathématique, fonctions d'une variable réelle, volume1, OPU; 1994.

الفهرس

القسم الرابع : دليلان

أنجز طبعه على مطابع

ديوان المطبوعات الجامعية

1 ، الساحة المركزية – بن عكنون –