البنى الجبرية
السنة الأولى رياضيات-فزياء متوسط-ثانوي
المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط

1 قانون التركيب الداخلي

تعاريف 1 :

لتكن E مجموعة غير خالية.

- نسمي قانون التركيب الداخلي على E كل تطبيق من $E \times E$ نحو E. إذ رمزنا إلى هذا التطبيق بالرمز T ، تكتب صورة الثنائية $(x, y) \in E \times E$ بالكتابة التالية xTy عوض $T(x, y)$.
- نسمي مجموعة بنيوية كل ثنائية (E, T) بحيث E مجموعة غير خالية و T قانون تركيب داخلي.

أمثلة 1 :

1. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}, \times)$ مجموعتين بنيويتين.
2. ليكن T_1 قانون التركيب الداخلي المعرف في $\mathbb{R}$ ب :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xTy = x^2 - y^2$$

نلاحظ أن T_1 لا يعرف قانون تركيب داخلي على $\mathbb{N}$ للأن $0T1 = -1 \notin \mathbb{N}$.

3. ليكن T_2 قانون التركيب الداخلي المعرف في $\mathbb{R}$ ب :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xTy = \frac{x+y}{3}$$

تعاريف 2 :

لتكن (E, T) مجموعة بنيوية

- القانون T تجميعي إذا وفقط إذا تحقق مايلي

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \; : \; xT(yTz) = (xTy)Tz.$$

- القانون T تبديلي إذا وفقط إظا تحقق مايلي :

$$\forall (x, y) \in E^2 \; : \; xTy = yTx.$$

ملاحظات 1 :

- يكون القانون T غير تبديلي إذا وجدا عنصران $x, y \in E$ بحيث $xTy \neq yTx$.
- يكون القانون T غير تجميعي إذا وجد ثلاث عناصر $x, y, z \in E$ بحيث : $xT(yTz) \neq (xTy)Tz$.

أمثلة 2 :

1. الضرب و الجمع قانوني تجميعيين و تبديليين في $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
2. القانون T_1 المعرف في المثال السابق ليس تبديلي للأن $0T1 \neq 1T0$

3. القانون T_2 المعرف في المثال السابق ليس تجميعي للأن :

$$((-1)\,T0)\,T1 = -\frac{1}{3}\,T1 = \frac{2}{9} \neq -\frac{2}{9} = (-1)\,T\frac{1}{3} = (-1)\,T(0\,T1).$$

تعاريف 3 :

لتكن (E,T) مجموعة بنيوية

- يكون العنصر e من E عنصرا حياديا إذا وفقط أذا تحقق مايلي :

$$\forall x \in E \;:\; xTe = eTx = x.$$

- إذا كانت (E,T) تقبل عنصرا حياديا e، نقول عن العنصر x من E أنه يقبل نظير من أجل القانون T إذا وجد x' من E بحيث :

$$xTx' = x'Tx = e.$$

العنصر x' يسمى بنظير العنصر x بالقانون T.

أمثلة 3 : 1. 0 هو العنصر الحيادي في المجموعة البنيوية $(\mathbb{C},+)$ و $-x$ هو نظير العنصر x.

2. لتكن E مجموعة غير خالية و $\mathscr{A}(E,E)$ مجموعة التطبيقات للمجموعة E في نفسها. التطبيق المطابق Id_E هو العنصر الحيادي للمجموعة البنيوية $(\mathscr{A}(E,E),\circ)$.

مبرهنة 1 :

لتكن (E,T) مجموعة بنيوية.
إذا كانت (E,T) تقبل عنصر حيادي فإنه وحيد.

برهان. لتكن (E,T) مجموعة بنيوية.
نفرض أن (E,T) تقبل عنصرين حياديين e_1, e_2.
e_1 عنصر حيادي معناه $\forall x \in E \;:\; xTe_1 = e_1Tx = x$.
من أجل $x = e_1$ نجد

$$e_2Te_1 = e_1Te_2 = e_2 \qquad (1)$$

و e_2 عنصر حيادي معناه أيضا : $\forall x \in E \;:\; xTe_2 = e_2Tx = x$.
من أجل $x = e_1$ نجد

$$e_1Te_2 = e_2Te_1 = e_1 \qquad (2)$$

بمطابقة 1 و 2 نجد $e_1 = e_2$ ومنه وحدانية العنصر الحيادي. □

مبرهنة 2 :

لتكن (E,T) مجموعة بنيوية و T تجميعي و يقبل عنصر حيادي.

- إذا كان $x \in E$ يقبل نظيرا فإن نظيره وحيد.
- إذا كان $x \in E$ و $y \in E$ يقبلين نظيرين فإن xTy يقبل نظير و نظيره $y'Tx'$. x' يرمز إلى نظير x و y' إلى نظير y.

برهان. نبرهن وحدانية النظير، لتكن (E,T) مجموعة بنيوية و ليكن $x\in E$ يقبل نظير و e عنصر الحيادي للقانون T.
نفرض أن x يقبل نظيرين x'_1, x'_2. بمأن T تجميعي يمكننا حساب $x'_1TxTx'_2$ بطريقتين.
من جهة $(x'_1Tx)Tx'_2 = eTx'_2 = x'_2$ و من جهة أخرى $x'_1T(xTx'_2) = x'_1Te = x'_1$.
إذن $x'_1 = x'2$ و منه وحدانية العنصر النظير.
ليكن x,y عنصرين من E يقبلين نظيرين و x',y' نظيريهما، نحسب $(y'Tx')T(xTy)$ و $(xTy)T(y'Tx')$

$$\begin{aligned}(y'Tx')T(xTy) &= y'T(x'Tx)Ty\\ &= (y'Te)Ty\\ &= y'Ty\\ &= e\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(xTy)T(y'Tx') &= xT(yTy')Tx'\\ &= (xTe)Tx'\\ &= xTx'\\ &= e\end{aligned}$$

إذن

$$(xTy)T(y'Tx') = (y'Tx')T(xTy) = e$$

ومنه نظير xTy هو $y'Tx'$. □

تعريف 1 :

ليكن (E,T_1) و (F,T_2) مجموعتين بنيويتين.
نسمي تماثل المجموعتين البنيويتين من (E,T_1) نحو (F,T_2) كل تطبيق f من E نحو F يحقق

$$\forall (x,y)\in E^2\ :\ f(xT_1y) = f(x)T_2f(y).$$

إذا كان f تطبيق تقابلي نسمي f تشاكل من (E,T_1) نحو (F,T_2).

مثال 1 :

التطبيق $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ المعرف ب $f(n)=e^n$ هو تشاكل من $(\mathbb{N},+)$ نحو $(\mathbb{N},\times)$

2 الزمرة

2.1 بنية الزمرة

تعريف 2 :

لتكن (G,T) مجموعة بنيوية.

- نقول أن (G,T) زمرة تبديلية إذا وفقط إذا تحقق مايلي :
  - القانون T تجميعي على G.
  - يوجد عنصر حيادي للقانون T في G.

- كل عنصر من G يقبل نظير من أجل القانون T.

- نقول عن الزمرة (G,T) أنها تبديلية أو آبلية"نسبةإلى الرياضي النرويجي آبل Abel" إذا وفقط إذا كان القانون T تبديلي في G.
- نسمي زمرة جمعية كل زمرة قانونها الداخلي هو + ونرمز ب 0 لعنصرها الحيادي و $-x$ لنظير x.
- نسمي زمرة ضربية كل زمرة قانونها الداخلي هو $\times$ ونرمز ب 1 لعنصرها الحيادي و x^{-1} لنظير x.

أمثلة 4 :
- $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Z},+)$ زمر جمعية.
- $(\mathbb{C}^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمر ضربية.

2.2 زمرة جزئية

(E,T) زمرة، e عنصرها الحيادي.

تعريف 3 :

نسمي زمرة جزئيةلزمرة (E,T) كل جزء A من E يحقق

1. $e\in A$
2. $\forall x,y\in A\ xTy'\in A$ "y' نظير y بالنسبة للقانون T".

أمثلة 5 :
1. $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$.
2. $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$.

2.3 تماثل الزمر

تعريف 4 :

ليكن $(E_1,T_1),(E_2,T_2)$ زمرتين. كل تماثل $f:E_1\to E_2$ يسمى تماثل زمر.

مثال 2 :

ليكن $(\mathbb{R},+),(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرتين و f تطبيق من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$ معرف ب $f(x)=\exp(x)$.
لدينا $f(x+y)=\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)=f(x)\times f(y)$ ومنه f تماثل زمر.

مبرهنة 3 :

ليكن $(E_1,T_1),(E_2,T_2)$ زمرتين عنصريهما الحياديين e_1,e_2 على الترتيب. إذا كان $f:E_1\to E_2$ تماثل زمر فإن $f(e_1)=e_2$ و صورة نظير x هو نظير صورة x أي $f(x')=(f(x))'$.

برهان. ليكن $f:E_1\to E_2$ تماثل زمر. لدينا $f(e_1)=f(e_1T_1e_1)=f(e_1)T_2f(e_1)$ من جهة $f(e_1)T_2(f(e_1))'=e_2$ ومن جهة أخرى $f(e_1)=f(e_1)T_2e_2=f(e_1)T_2f(e_1)T_2(f(e_1))'$ ومنه $f(e_1)=e_2$.
ليكن $x\in E_1$ إذن $xT_1x'=e_1$ ومنه $f(xT_1x')=f(e_1)=e_2=f(x)T_2f(x')$.
من جهة لدينا $(f(x))'T_2e_2=(f(x))'$ ومن جهة أخرى $(f(x))'T-2f(x)T_2f(x')=e_2T_2f(x')=f(x')$.
ومنه $f(x')=(f(x))'$. □

2.4 صورة و نواة تماثل زمر

ليكن $(E_1,T_1),(E_2,T_2)$ زمرتين عنصريهما الحياديين e_1,e_2 على الترتيب، و $f:E_1\to E_2$ تماثل زمر.

تعاريف 4 :
- صورة f هي $Imf=\{f(x)\ :\ x\in E_1\}$
- نواة f هي $ker f=\{x\in E_1\ :\ f(x)=e_2\}$.
- صورة f هي الصورة المباشرة للمجموعة E_1 آي $Imf=f(E_1)$.
- نواة f هي الصورة العكسية ل $\{e_2\}$ آي $kerf=f^{-1}(\{e_2\})$.

مبرهنة 4 :
- Imf هي زمرة جزئية من (E_2,T_2).
- $kerf$ هي زمرة جزئية من (E_1,T_1).
- f غامر إذا وفقط إذا كان $Imf=E_2$.
- f متباين إذا وفقط إذا كان $kerf=\{e_1\}$.

برهان.
- نبرهن أن Imf زمرة جزئية من (E_2,T_2)
لدينا $f(e_1)=e_2$ ومنه $e_2\in Imf$. ليكن $X,Y\in Imf$ يعني وجود $x,y\in E_1$ بحيث $f(x)=X$ و $f(y)=Y$

$$XT_2Y'=f(x)T_2(f(y))'=f(x)T_2f(y')=f(xT_1y')$$

ومنه $XT_2Y'\in Imf$. إذن Imf زمرة جزئية من (E_2,T_2).

- نبرهن أن $kerf$ زمرة جزئية من (E_1,T_1).
لدينا $f(e_1)=e_2$ ومنه $e_1\in kerf$. ليكن $x,y\in kerf$ معناه $f(x)=f(y)=e_2$.

$$f(xT_1y')=f(x)T_2f(y')=f(x)T_2(f(y))'=e_2T_2e_2'=e_2.$$

إذن $kerf$ زمرة جزئية من (E_1,T_1).

- نفرض أن f غامر. مهما يكن $X\in E_2$ يوجد $x\in E_1$ بحيث $f(x)=X$، إذن $Imf=E_2$.
نبرهن الإستلزام العكسي. نفرض أن f ليس غامر أي يوجد $X\in E_2$ بحيث مهما يكن $x\in E_1$ $f(x)\neq X$، ومنه $X\notin Imf$ إذن $Imf\neq E_2$.

- نفرض أن f متباين.
ليكن $x\in kerf$، معناه $f(x)=e_2$. بمأن f تباين و $f(e_1)=e_2$ نستنتج أن $x=e_1$ ومنه $kerf=\{e_1\}$.
عكسيا، نفرض أن $kerf=\{e_1\}$. ليكن $x,y\in E_1$ بحيث $f(x)=f(y)$. لدينا $f(x)T_2(f(y))'=e_2$ ومنه $f(xT_1y')=e_2$ إذن $xT_1y'\in kerf$. بمأن $kerf=\{e_1\}$ نستنتج أن $xT_1y'=e_1$ مما يعني $x=y$ وهو المطلوب.
□

3 بنية الحلقة

يمكننا أن نثري زمرة بإضافة قانون تركيب داخلي، على سبيل المثال على الزمرة $(\mathbb{R},+)$ نعرف الضرب.

تعريف 5 :

نسمي حلقة كل مجموعة $(E,T,\perp)$ مزودة بقانوني تركيب داخلي بحيث :

1. (E,T) زمرة تبديلية .
2. القانون الداخلي $\perp$ تجميعي.
3. القانون الداخلي $\perp$ توزيعي على القانون الداخلي T أي :

$$\forall x,y,z\in E, x\perp(yTz)=(x\perp y)T(x\perp z) \text{ و } (xTy)\perp z=(x\perp z)T(y\perp z).$$

في مايلي نرمز إلى قانون T بالجمع $+$ والقانون الثاني للحلقة بضرب $\times$ و عنصر الحيادي ل $+$ ب 0_E.
إذا كان القانون $\times$ تبديلي نقول أن الحلقة $(E,+,\times)$ تبديلية.
إذا وجد في E عنصر حيادي ل $\times$ نقول أن الحلقة $(E,+,\times)$ واحدية ونرمز لعنصر حيادي ل $\times$ بالرمز 1_E.