المدرســـــة العليـــا للأساتـــــذة بالأغـــــواط

Ecole Normale supérieure de Laghouat

مقرر:الكهرباء

الثلاثاء**21**فيفري**2017**

شعبة: العلوم الدقيقة (السنة 1)

مدة الإمتـحان:**1** ساعة و **30** دقيقة

الإمتحــان الأول في الكهرباء

أسئلة نظرية:(06 نقاط) اجب على الأسئلة التالية باختصار

1.إذا كان الحقل الكهربائي معدوم في نقطة، ماذا تستنتج بالنسبة للكمون في هذه النقطة؟

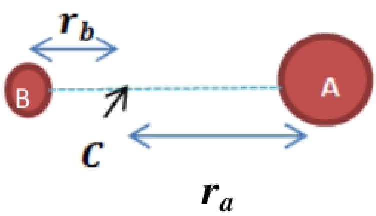
2.أي من هذه النقاط يكون الكمون فيها متساوي؟ (شكل 1.)

3.رتب قيم الحقل الكهربائي في النقاط 1،2،3 و 4 من الأكبر الى الأصغر(شكل2.).

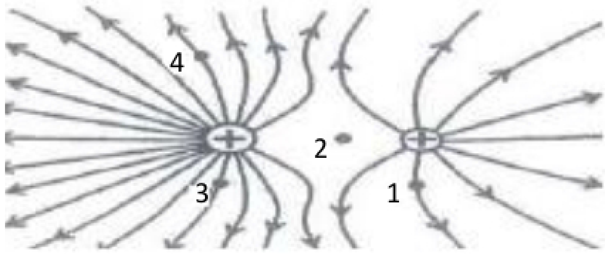
4. شحنتان نقطيتان سالبتين، فإذا كانت $(Q_A=5Q_B)$ كما في الشكل.3، كم تساوي النسبة $\frac{r_a}{r_b}$ (حيث C نقطة التعادل أي أن الحقل الكهربائي في النقطة C يساوي الصفر.)

5. اكتب نظرية "غوص" لحساب الحقل الكهربائي وأعط تعريفا مختصرا لكل عنصر من عناصر هذه النظرية.

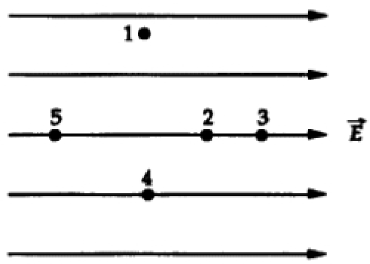
6. متى يكون التدفق الكهربائي Φ_E الذي يجتاز قرص مسطح مستوي ما عند نصف قيمته العظمى؟



الشكل.3



الشكل.2



الشكل.1

التمرين الأول:(06 نقاط)

ثلاث شحنات نقطية q متساوية موضوعة على رؤوس مثلثِ A، B و C متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي $2a$ كما هو موضح على الشكل1.1. حيث $q=10^{-11}C$ و $a=3cm$

1- مثل كل أشعة الحقول الكهربائية عند النقطة M ، حيث $|\overrightarrow{OM}|=a$.

أكتب عبارة الحقل الكهربائي الناتج عند النقطة M.أحسب قيمته.

2- أحسب الكمون الكهربائي في النقطة M .

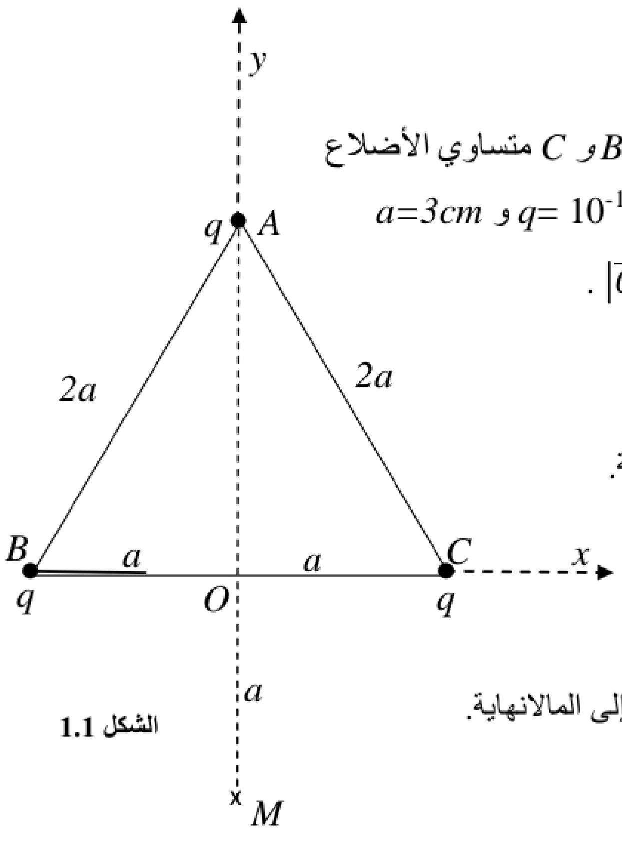
3- أحسب الطاقة الداخلية للجملة الكهربائية المكونة من الشحنات الثلاثة.

4- نضع شحنة رابعة قيمتها $q_M=-10^{9}C$ في النقطة M.

4-1. أحسب القوة الكهربائية المؤثرة على الشحنة q_M.

4-2.الطاقة الكامنة لهذه الشحنة.

4-3. العمل اللازم للقوة الكهربائية لنقل هذه الشحنة من الموضع M إلى المالانهاية.

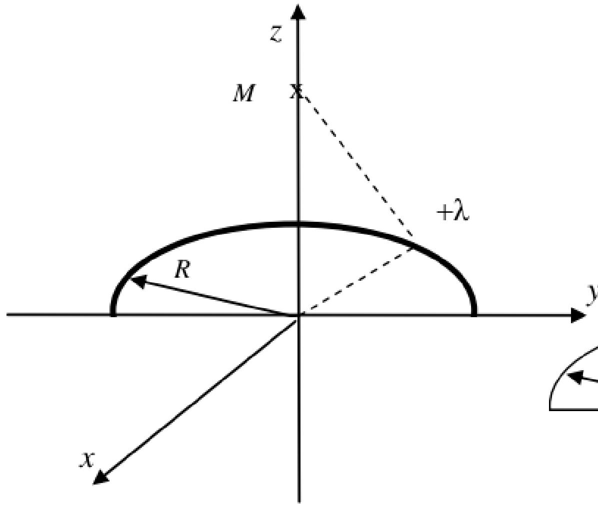


الشكل 1.1

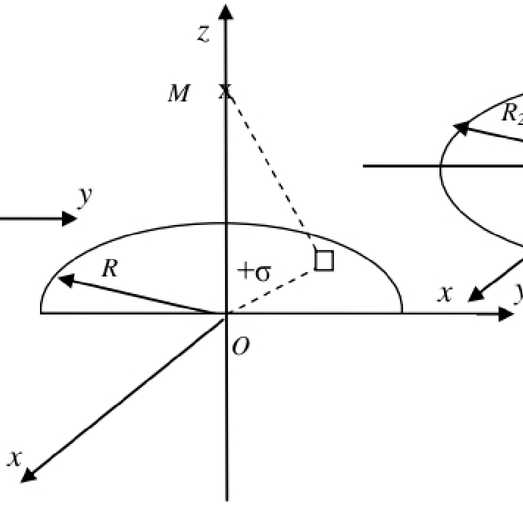
التمرين الثاني:(08 نقاط)

I- الجزء الأول: قرص فارغ الوسط و مشحون بكثافة سطحية منتظمة وموجبة σ+ ،نصف قطره الداخلي R_1 و نصف قطره الخارجي R_2 ، و لتكن النقطة $M\ (0,0,z)$ تقع على محوره و تبعد عن مركزه بمسافة z (الشكل 1.2).

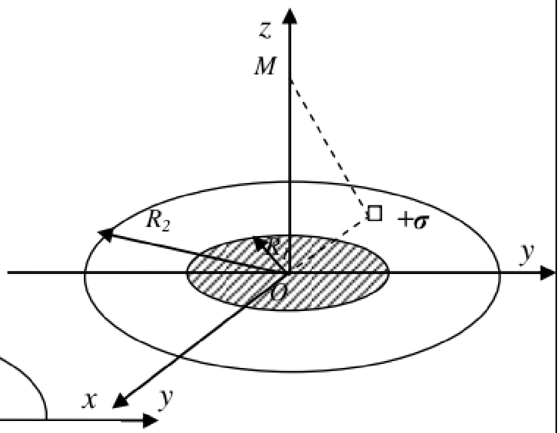
1. أعطي عبارة شعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}$ و الكمون الكهربائي V الناتجين عند النقطة M .
2. أستنتج الحقل الكهربائي $\vec{E}$ و الكمون الكهربائي V الناتجين عن مستوي لامنتهي مشحون بكثافة سطحية منتظمة وموجبة σ.
3. بين انه يمكن حساب الحقل الكهربائي $\vec{E}$ عند النقطة $M\ (0,0,z)$ الناتج عن نصف حلقة مشحونة بكثافة خطية منتظمة وموجبة λ+ ،نصف قطرها R في (الشكل 3.2).و يصعب ذلك في حالة نصف قرص مشحون بكثافة سطحية منتظمة وموجبة σ+ ،نصف قطره R في (الشكل 2.2).



الشكل 3.2



الشكل 2.2

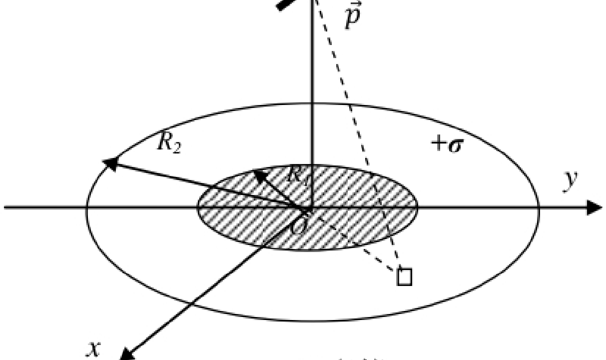


الشكل 1.2

II. الجزء الثاني:

نضع عند النقطة M ثنائي قطب $\vec{p}$ كما هو موضح في (الشكل 3.2) مشكلا زاوية θ مع المحور $\vec{O}$ حيث $\|\vec{p}\| = q.a$

1. أحسب عزم المزدوجة المؤثر على ثنائي القطب و طاقته الكامنة.
2. مثل القوى المطبقة على ثنائي القطب.
3. استنتج التوجيه النهائي لثنائي القطب و فسر إجابتك .
4. في هذه الحالة (التوجيه النهائي)، هل محصلة القوى المؤثرة على ثنائي القطب معدومة؟ ماذا يحدث لثنائي القطب ؟



الشكل3.2

بالتوفيـــق ..أساتذة المادة

تصحيح الامتحان الأول في الكهرباء

أسئلة نظرية : $\boxed{6/6}$

1 - إذا كان الحقل الكهربائي معدوم في نقطة فإن الكمون يساوي ثابت لأنّ :

0,25 إذا كان $\vec{E} = -\vec{\nabla}.V$ ، $V = cste \leftarrow \vec{E} = \vec{0}$

0,25

2 - يكون الكمون متساوي عند النقطتين 1 و 4 ، لأن النقطتين 1 و 4 تقعان 0,25 على نفس خط تساوي الكمون الذي يكون عمودي على $\vec{E}$. 0,25

3 - $\vec{E}_3 > \vec{E}_1 > \vec{E}_4 > \vec{E}_2$ 1 $\vec{E}_2 = \vec{0}$ (لا يوجد خط حقل يمر بالنقطة 2)

4 - الحقل في النقطة C :

$$\vec{E}_C = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

0,25

$$\vec{E}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_A + \vec{E}_B = \vec{0}$$

بالإسقاط : $E_A - E_B = 0$ (لهما نفس الحامل).

$$E_A = E_B \Rightarrow K\frac{Q_A}{r_A^2} = K\frac{Q_B}{r_b^2} \Rightarrow K\frac{5Q_B}{r_a^2} = K\frac{Q_B}{r_b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{r_a^2} = \frac{1}{r_b^2}$$

إذن : $\boxed{\frac{r_a}{r_b} = \sqrt{5}}$ 0,25

5 - **نظرية غوص** :

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

1

$\vec{E}$: الحقل الكهربائي المراد حسابه.

Φ_E : تدفق الحقل الكهربائي.

$\vec{ds} = ds.\vec{n}$ ؛ ds : جزء عنصري من سطح غوص. $\vec{n}$ شعاع وحدة عمودي على ds.

Q_{int} : الشحنة الداخلية التي يحتويها سطح غوص.

ε_0 : سماحية الفراغ.

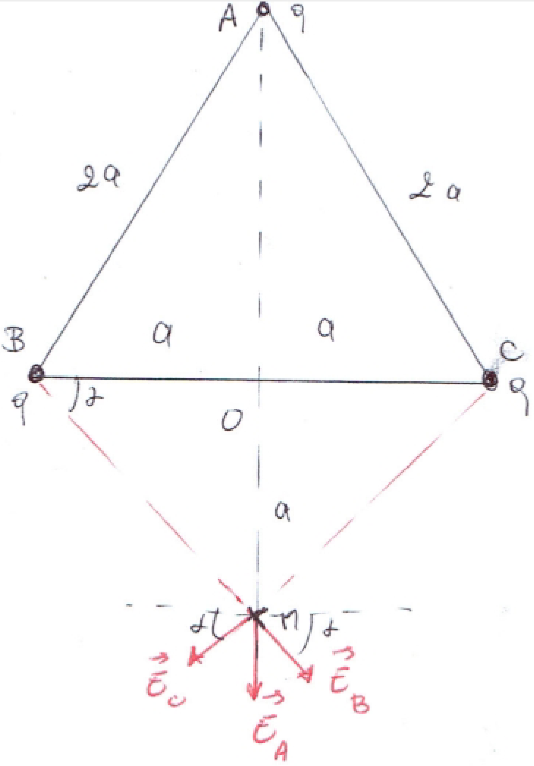
6 - يكون تدفق الحقل الكهربائي Φ_E في نصف قيمته العظمية عندما :

نعلم أن التدفق Φ_E يكون في قيمته الأعظمية عندما تكون الزاوية بين :

$\vec{E}$ و $\vec{ds}$ = الصفر ($0°$) أي : $\cos\alpha = \cos 0° = 1$ إذن نصف القيمة عند :

1 $\cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

أي أن الزاوية بين $\vec{E}$ و $\vec{ds}$ تكون : $60°$



التمرين الأول:

1- تمثيل أشعة الحقل: 0,5

عبارة الحقل عند النقطة M :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}_A = -E_a \vec{j} = -\frac{Kq}{\|\vec{AM}\|^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_B = E_B \cos\alpha \, \vec{i} - E_B \sin\alpha \, \vec{j}$$

$$\vec{E}_B = \frac{Kq}{\|\vec{BM}\|^2} \cos\alpha \, \vec{i} - \frac{Kq}{\|\vec{BM}\|^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_C = -E_C \cos\alpha \, \vec{i} - E_C \sin\alpha \, \vec{j}$$

$$\vec{E}_C = -\frac{Kq}{\|\vec{CM}\|^2} \cos\alpha \, \vec{i} - \frac{Kq}{\|\vec{CM}\|^2} \vec{j}$$

$$\|\vec{AM}\| = \|\vec{AO}\| + \|\vec{OM}\| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} + a = \sqrt{3}\,a + a = (1+\sqrt{3})\,a$$

$$\|\vec{BM}\| = \|\vec{CM}\| = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}\,a \qquad , \quad \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن:

$$\vec{E}_M = \frac{Kq}{a^2}\left[-\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2}\vec{j} + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{i}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{j} - \cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{i}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{j}\right]$$

0 0

$$\boxed{\vec{E}_M = \frac{Kq}{a^2}\left[-\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\vec{j}}$$ 0,25

ت.ع: $\|\vec{E}_M\| = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-11}}{9 \cdot 10^{-4}}\left[\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 84{,}108 \, C/m^2$ 0,25

2- حساب الكمون عند النقطة M :

$$V_M = V_A + V_B + V_C = \frac{Kq}{\|\vec{AM}\|} + \frac{Kq}{\|\vec{BM}\|} + \frac{Kq}{\|\vec{CM}\|}$$

$$\boxed{V_M = \frac{Kq}{a}\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right]}$$ 0,25

ت.ع:

$$V_M = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-11}}{3 \cdot 10^{-2}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right] = 5{,}34\, V$$ 0,25

3 - الطاقة الداخلية للجملة الكهربائية :

$$U = \frac{1}{2}\left[E_p(A) + E_p(B) + E_p(C)\right]$$

$$U = \frac{1}{2}\left[q\, V_A + q\, V_B + q\, V_C\right]$$

$$V_A = \frac{Kq_B}{2a} + \frac{Kq_c}{2a} = \frac{2Kq}{2a} = \frac{Kq}{a}$$

$$V_B = \frac{Kq_A}{2a} + \frac{Kq_c}{2a} = \frac{Kq}{a}$$

$$V_c = \frac{Kq_B}{2a} + \frac{Kq_A}{2a} = \frac{Kq}{a}$$

0,25

$$U = \frac{1}{2}\left[q\left(\frac{Kq}{a}\right) + q\left(\frac{Kq}{a}\right) + q\left(\frac{Kq}{a}\right)\right] = \boxed{\frac{3Kq^2}{2a}}$$

ت ع :

$$U = \frac{\cancel{3} \cdot 9 \cdot \cancel{10^{9}} \cdot \cancel{10^{-11}} \cdot 10^{-11}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{10^{-2}}}$$

$$\boxed{U = 4,5\ 10^{-11}\ J}$$

0,5

4 -

4 - 1 . القوة الكهربائية المؤثرة على الشحنة q_M :

$$\vec{F} = q_M \cdot \vec{E}_M = \frac{Kq_M q}{a^2}\left[-\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\vec{j}$$

0,5

ت ع :

$$\|\vec{F}\| = q_M \cdot \|\vec{E}_M\| = -10^{-9} \cdot 84,108$$

$$\boxed{\|\vec{F}\| = 84,1 \cdot 10^{-9}\ N}$$

0,25

4 - 2 : الطاقة الكامنة لهذه الشحنة :

$$E_p = q_M \cdot V_M = q_M \cdot \frac{kq}{a}\left[\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right] \cdot$$ 0,5

ت ع :
$$E_p = -10^{-9} \cdot 5,34\,V$$

$$\boxed{E_p = -5,34 \cdot 10^{-9}\,J}$$ 0,5

4 - 3 : العمل اللازم :

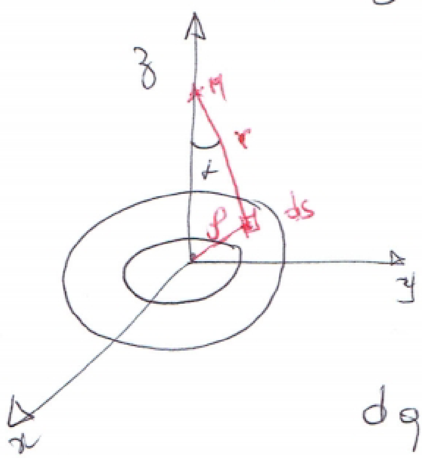
$$W_{M\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_p(\infty) - E_p(M)) = E_p(M)$$

$$W_{M\to\infty} = E_p(M)$$

$$\boxed{W_{M\to\infty} = -5,34 \cdot 10^{-9}\,J}$$ 0,5

التمرين الثاني : الجزء الأول :

$$\vec{E} \parallel \vec{Oz}$$



1) عبارة الحقل الكهربائي :

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow dE = dE_z = k\frac{dq}{r^2}\cos\alpha.$$

بالإسقاط و باعتبار تناظر المسألة الحقل يكون محمول على $\vec{Oz}$ أي : $E_x = E_y = 0$.

$$dq = +\sigma ds = \sigma\,\rho\,.\,d\rho\,.\,d\theta.$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2 \qquad \cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

$$dE = \frac{k\,z\,\sigma\,\rho\,d\rho\,d\theta}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ 0,5

$$E = k\,z\,\sigma\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E(M) = K\sigma z \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\boxed{E(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R_1^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(R_2^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}$$ 0,5

عبارة الكمون :

0,5

$$dV = K\sigma \frac{\rho \cdot d\rho \cdot d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

$$V(M) = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} dV = K\sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\boxed{V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right]}$$ 0,5

2) في حالة مستوي لانهائي :

الحقل الكهربائي : في حالة مستوي لانهائي : $R_1 \to 0$, $R_2 \to \infty$

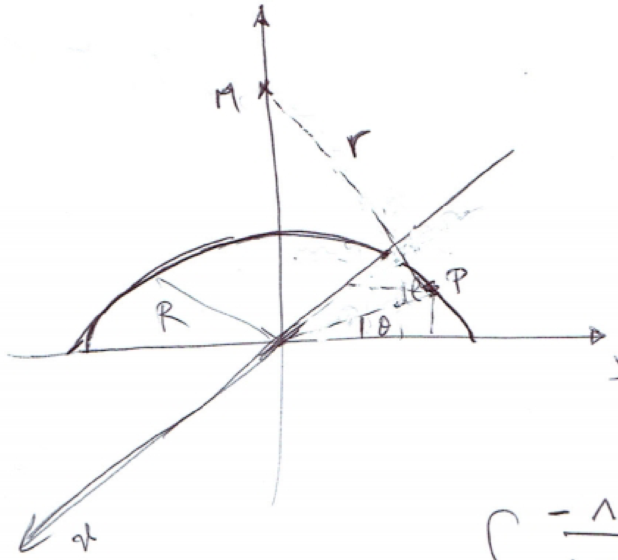
$$\boxed{E(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$ 0,5

الكمون الكهربائي :

$$dV = E \cdot dz$$

$$\Rightarrow \boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + C}$$

(3 في حالة نصف حلقة مشحونة الشكل 2.3 :



$M(0,0,z)$

$P(R\cos\theta, -R\sin\theta, 0)$

$dq = \lambda . dl = \lambda R . d\theta$

$\theta : 0 \rightarrow \pi .$

$\vec{PM} = \vec{r} = -R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + z\,\vec{k} .$

$$d\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\lambda . R\,d\theta}{r^3}\cos\theta \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\lambda . R^2 d\theta}{r^3}\sin\theta \\ \dfrac{z}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\lambda R^2 d\theta}{r^3} \end{cases}$$

(1)

في حالة نصف حلقة يمكن إجراء التكاملات الثلاث :

و نجد:

$$\vec{E} = \begin{cases} \int -\dfrac{K\lambda R^2}{r^3}\cos\theta\, d\theta . \\ \int \dfrac{K\lambda R^2}{r^3}\sin\theta\, d\theta \\ \int \dfrac{K z . \lambda . R}{r^3}\, d\theta . \end{cases}$$

مع :

$r = \sqrt{R^2 + z^2}$

$r^3 = (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$

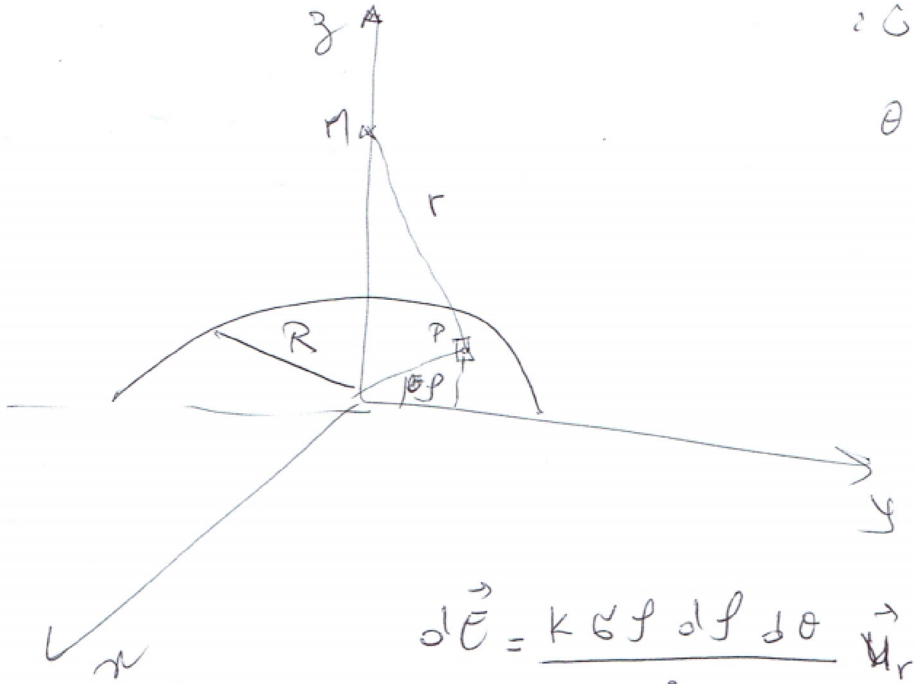
$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi} \\ \dfrac{K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \\ \dfrac{K z . \lambda R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\theta\right]_0^{\pi} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\lambda R^2}{2\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{\lambda R}{4\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} . z \end{cases}$$

8) حالة نصف قرص مشحون :

هناك متغيرين : ρ و θ

$M(0,0,z)$.

$P(\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, 0)$



$$d\vec{E} = \frac{K\sigma\rho\, d\rho\, d\theta}{r^2}\vec{u}_r = \frac{K\sigma\, \rho . d\rho . d\theta}{r^3}\vec{PM}$$

$$d\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{K\sigma\rho^2 d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\theta\, d\theta. \\ \dfrac{K\sigma\rho^2 d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta. \\ \dfrac{K\sigma\rho . d\rho . z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta. \end{cases}$$

1

صعوبة إيجاد $\vec{E}$ هي في حساب التكامل

لا يمكن حساب التكامل : $\dfrac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

الجزء الثاني :

1)- عزم المزدوجة :

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E} = q \cdot d \cdot E_M \sin \alpha$$ 0,5

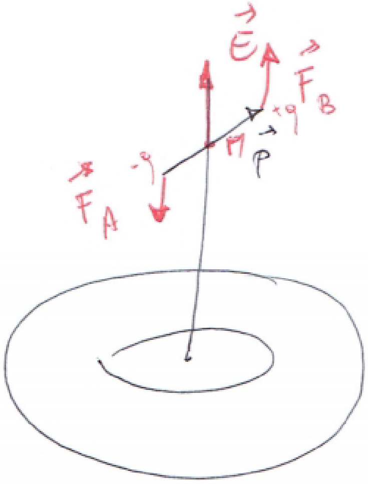
حيث :

$$E_M = \frac{\sigma z}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{(R_1^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(R_2^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

الطاقة الكامنة :

$$E_P = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -q \cdot d \cdot E_M \cos \alpha.$$ 0,5

2) القوى المطبقة على ثنائي القطب :



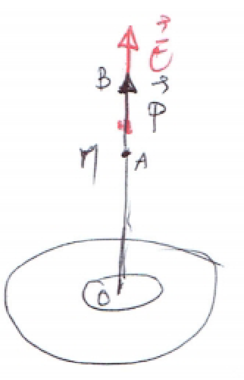
0,5

بما أن :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

فالقوى المؤثرة على ثنائي القطب تكون موازية الحقل $\vec{E}$ أي موازية لـ $\vec{OZ}$

3) عزم مزدوجة القوى تقوم بتدوير ثنائي القطب حتى يصبح موازي للحقل $\vec{E}$ أي $\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{OZ}$



0,5

4) عندما ينطبق $\vec{P}$ على $\vec{E}$ محصلة القوى المؤثرة على ثنائي القطب لا تكون معدومة لأن المسافة بين O و الشحنة q_A لا تساوي المسافة بين O و الشحنة q_B و بما أن الحقل غير منتظم فيتحرك ثنائي القطب باتجاه القوة الأكبر .

1