المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط

التخصص: ع. د. ثانوي + متوسط | المستوى: سنة أولى

التاريخ : 2012/01/12 | المدة: 1 سا و 30 د

الامتحان الأول في مادة الميكانيك

التمرين الأول (3 نقاط)

تعطى الدالة الشعاعية $\vec{A}$ بما يلي:

$$\vec{A} = (2xz^2 + y^2)\vec{i} + (2xy - 3y^2z^2)\vec{j} + (2x^2z - 2y^3z)\vec{k}$$

- أحسب دوران $\vec{A}$ $\quad \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{0}$

تعطى الدالة السلمية $\emptyset$ بما يلي: $\emptyset = x^2z^2 + xy^2 - y^3z^2 + C$ حيث C ثابت

- أحسب تدرج $\emptyset$
- استنتج التكامل المنحني لـ $\vec{A}$ بين النقطتين $P(0,1,2)$ و $Q(2,0,1)$ على القطعة المستقيمة بين P و Q .

$\phi(Q) - \phi_P = \Gamma$

التمرين الثاني (6 نقاط)

يتحرك جسم على المحور Ox بحركة متغيرة بانتظام تسارعها $a_1 = 2\ m/s^2$ انطلق من المبدأ ومن السكون.

- أحسب سرعته وفاصلته في اللحظة $t = 1\ s$. $\quad x = \frac{1}{2} a t^2$

في هذه اللحظة يتعرض الجسم لمقاومة هواء معاكسة لسرعته فتكسبه تسارعا إضافيا عكس $a_2 = -2v$ حيث v تمثل سرعة الجسم .

1- أكتب عبارة التسارع الكلي a للجسم بدلالة v. $\quad a = 2 - 2v$

2- أوجد المعادلة الزمنية لسرعة الجسم واستنتج المعادلة الزمنية للتسارع في هذه المرحلة.

3- مثل مخطط التسارع ابتداءً من لحظة الانطلاق ماذا تستنتج؟

4- أحسب القيمة الحدية للسرعة.

5- أحسب المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t = 0\ s$ و $t = 2\ s$.

التمرين الثالث (6 نقاط)

ساقان متماثلان OA و AB طولهما l ، متمفصلان في A ويقعان في المستوي xOy (الشكل 1)

حيث B تنزلق على Ox بسرعة ثابتة ، والزاوية θ تعطى بـ: $\theta = \omega t$

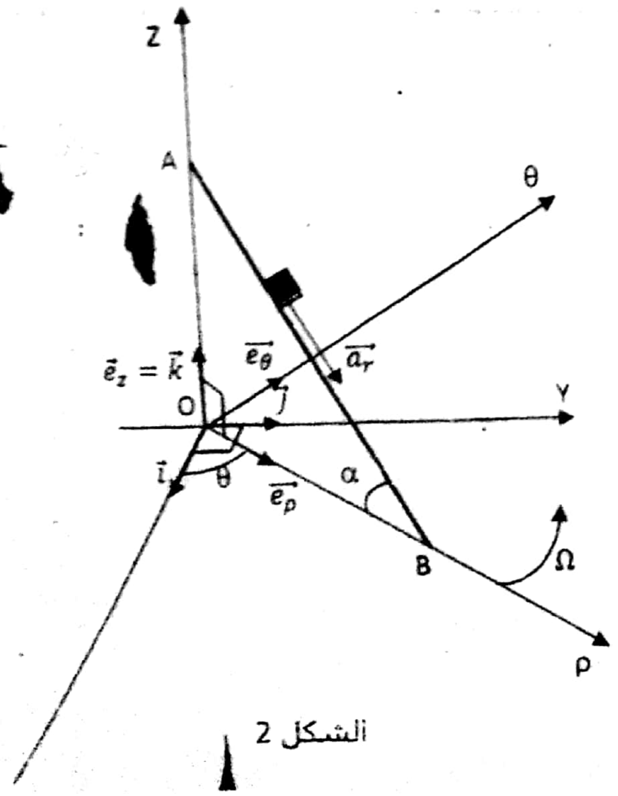
- أوجد عبارتي شعاع الموضع لكل من A و M منتصف AB بدلالة l و ω و t
- أوجد معادلة المسار لكل منهما وحدد شكل المسارين.
- أوجد شعاعي السرعة والتسارع للنقطتين

التمرين الرابع (5 نقاط)

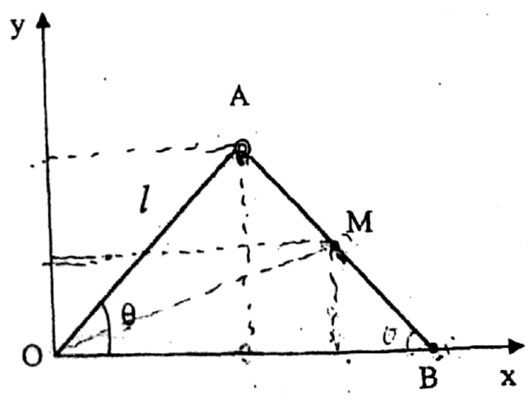
المعلم الأسطواني (R') المزود بالقاعدة $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ يدور حول المعلم الديكارتي الساكن (R) المزود بالقاعدة $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بسرعة زاوية ثابتة Ω حول المحور Oz (الشكل 2).

ينزلق جسم على ساق مثبتة في المستوي (Oρz) بين نقطتين A و B بتسارع ثابت $\vec{\gamma}_r$ بالنسبة لـ (R')

- أكتب عبارة التسارع $\vec{\gamma}_r$ في (R').
- أوجد عبارة سرعة الجسم $\vec{v}_r$ وكذا شعاع موضعه $\overrightarrow{OM}$ في (R') .
- أوجد السرعة $\vec{v}_e$ والتسارع $\vec{\gamma}_e$ لـ (R') بالنسبة لـ (R) (في القاعدة الأسطوانية)
- استنتج السرعة $\vec{v}_a$ والتسارع $\vec{\gamma}_a$ للجسم بالنسبة لـ (R) (في القاعدة الأسطوانية)



الشكل 2



الشكل 1

المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط

التخصص: ع. د. ثانوي + متوسط [illegible]

تصحيح الامتحان الأول في مادة الميكانيك

<u>التمرين الأول (3 نقاط)</u>

1- دوران $\vec{A}$ $\quad \vec{A} = (2xz^2 + y^2)\vec{i} + (2xy - 3y^2z^2)\vec{j} + (2x^2z - 2y^3z)\vec{k}$

لدينا تعريفا $\quad \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ ومنه :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

ومنه $\vec{A}$ مشتق من كمون

2- تدرج $\emptyset$ $\quad \emptyset = x^2z^2 + xy^2 - y^3z^2 + C$

لدينا تعريفا $\quad \overrightarrow{grad}\,\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z}\vec{k}$ ومنه :

$$\overrightarrow{grad}\,\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = (2xz^2 + y^2)\vec{i} + (2xy - 3y^2z^2)\vec{j} + (2x^2z - 2y^3z)\vec{k} = \vec{A}$$

ومنه $\emptyset$ هي كمون $\vec{A}$

3- التكامل المنحني لـ $\vec{A}$: بما أن $\vec{A}$ مشتق من كمون فإن تكامله المنحني مستقل عن المسار المتبع وبالتالي

$$\int \vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} = \emptyset(Q) - \emptyset(P) = \emptyset(2,0,1) - \emptyset(0,1,2) = [illegible]$$

<u>التمرين الثاني (6</u>

1- سرعة وفاصلة المتحرك عند $t = 1s$

$$v(t) = \int a\,dt = 2t + v_0 \; ; \; v_0 =$$

$$x(t) = \int v\,dt = t^2 + x_0 \; ; \; x_0 =$$

ومنه $\; v(1) = 2\,m/s \;$ و $\; x(1) = 1\,m$

2- التسارع الكلي :

$$a = a_1 + a_2 = 2 - 2v \quad \text{إذ} \quad a = 2(1-v)$$

3- المعادلة الزمنية ...رعة والتسارع:

$$2(1-v) \quad \frac{dv}{dt} \quad \text{ومنه} \quad dv = 2(1-v)\,dt \quad \text{ومنه} \quad \frac{dv}{(1-v)} = 2dt$$

وبتكامل الطرفين نجد : $\ln(1-v) = -2t$ ومنه $1-v = e^{C}e^{-2t}$ ومنه $v(t) = 1 - e^{C}e^{-2t}$

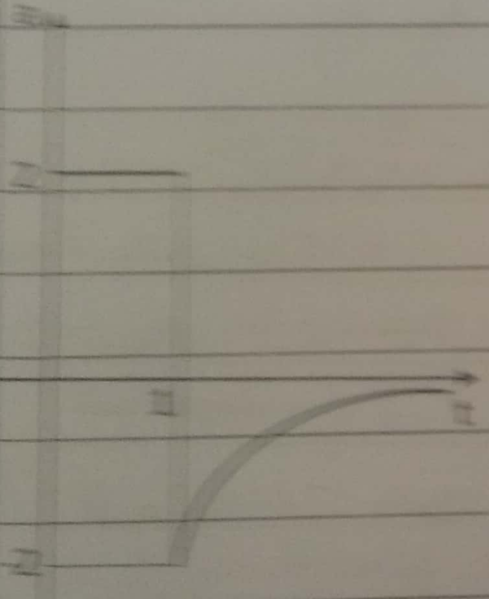
لتحديد قيمة C ... من الشروط الابتدائية $2 = v$ ... $t = 1$

ومنه $2 = 1 - \; ^{2}$ ومنه $e^{C} = -e^{2}$ ومنه $v(t) = 1 + e^{-2t+2}$

وبالاشتقاق أو با... ض في علاقة التسارع الموجودة في السؤال الثاني نجد :

$$a(t) = -e^{-2t+2}$$

4- تمثيل مخطط ال... ع :



نلاحظ من المـ... أن التسارع يؤول إلى الصفر عند اللانهاية

ومنه نستنتج أ... رعة تأخذ قيمة حدية ثابتة.

5- قيمة السرعة ا... :

$$v_{\lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = 1\ m/s$$

6- المسافة المقط... :

نلاحظ أن السـ... وجبة تماما وبالتالي لا يغير المتحرك من جهة

حركته بين اللحـ... ين $t = 0s$ و $t = 2s$ وعليه فإن المسافة

المقطوعة تحـ... العلاقة $L(t_1 \to t_2) = |x(t_2) - x(t_1)|$

$$x(t) = \int v\,dt = t - \frac{1}{2}e^{-2t+2} + C$$

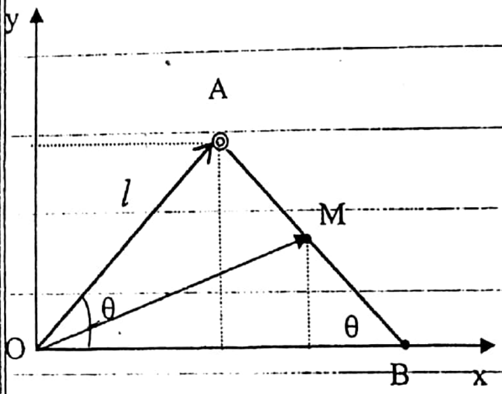
$$C = \frac{1}{2} \quad \to \quad x = \quad \to \quad t = 1 \quad \text{ومنه} \quad x(t) = \left[t + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t+2}\right)\right]$$

وبالتالي نجد $2,43\ m$ $\quad L(0 \to 2) = |x(2) - x(0)|$ (للإشارة المسافة المقطوعة مستقلة عن الجهة)

ملاحظة : نسـ... تطبيق العلاقة العامة لحساب المسافة المقطوعة بين لحظتين

$$L(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$$

التمرين الثالث (6 نقاط)



1- شعاعي الموضع لـ A و B

من الشكل نلاحظ أن :

$$\overrightarrow{OA} = l\cos(\theta)\vec{i} + l\sin(\theta)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}l\cos(\theta)\vec{i} + \frac{1}{2}l\sin(\theta)\vec{j}$$

2- مسار الحركة للنقطتين

من السؤال 1 لدينا :

$$\begin{cases} x_A = l\cos(\theta) \\ y_A = l\sin(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_M = \frac{3}{2}l\cos(\theta) \\ y_M = \frac{1}{2}l\sin(\theta) \end{cases}$$

$x_A^2 + y_A^2 = l^2$ شكل المسار دائري (نصف القطر l والمركز O)

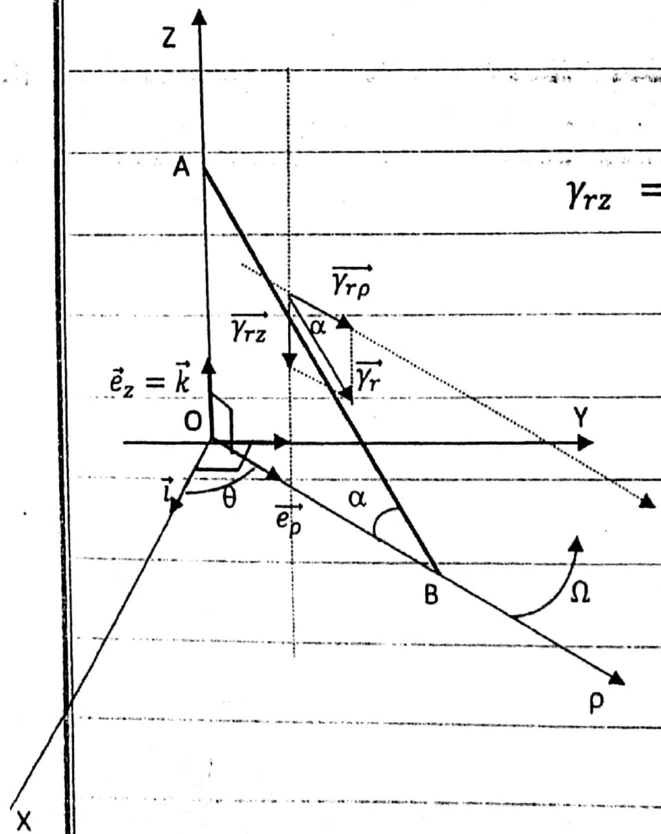
$\frac{x_M^2}{\left(\frac{3}{2}l\right)^2} + \frac{y_M^2}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} = 1$ شكل المسار قطع ناقص (نصفي القطر $\frac{1}{2}l$ و $\frac{3}{2}l$ والمركز O)

3- شعاعي السرعة والتسارع

$$\overrightarrow{v_A} = -l\omega\sin(\theta)\vec{i} + l\omega\cos(\theta)\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{v_M} = -\frac{3}{2}l\omega\sin(\theta)\vec{i} + \frac{1}{2}l\omega\cos(\theta)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\gamma_A} = -l\omega^2\cos(\theta)\vec{i} - l\omega^2\sin(\theta)\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{\gamma_M} = -\frac{3}{2}l\omega^2\cos(\theta)\vec{i} - \frac{1}{2}l\omega^2\sin(\theta)\vec{j}$$

التمرين الرابع (5 نقاط)



1- كتابة $\vec{\gamma}_r$ في المعلم الأسطواني

من الشكل نجد: $\gamma_{r\rho} = \gamma_r\cos(\alpha)$ و $\gamma_{rz} = -\gamma_r\sin(\alpha)$

ومنه $\vec{\gamma}_r = \gamma_r\cos(\alpha)\vec{e}_\rho - \gamma_r\sin(\alpha)\vec{e}_z$

2- $\vec{v}_r$ و $\overrightarrow{OM}$ في (R')

$$\vec{v}_r = \int_{R'} \vec{\gamma}_r \, dt = \gamma_r\, t \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho - \gamma_r t \sin(\alpha)\ \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = \int_{R'} \vec{v}_r \, dt = \frac{1}{2}\gamma_r\, t^2 \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho - \frac{1}{2}\gamma_r t^2 \sin(\alpha)\ \vec{e}_z + OA\ \vec{e}_z$$

3- $\vec{v}_e$ و $\vec{\gamma}_e$ (في القاعدة الأسطوانية)

$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}$ حيث $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}$

بما أن O' منطبقة على O فإن:

$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$ ومنه :

$\vec{v}_e = \Omega \vec{e}_z \times \left(\frac{1}{2}\gamma_r t^2 \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho - \frac{1}{2}\gamma_r t^2 \sin(\alpha)\ \vec{e}_z\right)$ إذا $= \frac{1}{2}\Omega\, \gamma_r\, t^2 \cos(\alpha)\ \vec{e}_\theta$

$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{d^2t} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d^2\vec{\Omega}}{d^2t} \times \overrightarrow{O'M}$ إذا $\vec{\gamma} = -\frac{1}{2}\Omega^2\, \gamma_r\, t^2 \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho$

4- $\vec{v}_a$ و $\vec{\gamma}_a$ (في القاعدة الأسطوانية) : بتطبيق قانون تركيب السرعات وتركيب التسارعات

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ و $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$ حيث $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$

$\vec{\gamma}_c = 2\,\Omega \vec{e}_z \times \left(\gamma_r\, t \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho - \gamma_r\, t \sin(\alpha)\ \vec{e}_z\right)$ إذا $\vec{\gamma} = 2\,\Omega \gamma_r\, t \cos(\alpha)\ \vec{e}_\theta$

نجد : $\vec{v}_a = \gamma_r\, t \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho + \frac{1}{2}\Omega\, \gamma_r\, t^2 \cos(\alpha)\ \vec{e}_\theta - \gamma_r t \sin(\alpha)\ \vec{e}_z$

$= \gamma_r \cos(\alpha) \vec{e}_\rho - \gamma_r \sin(\alpha) \vec{e}_z - \frac{1}{2}\Omega^2\, \gamma_r\, t^2 \cos(\alpha)\ \vec{e}_\rho + \Omega \gamma_r\, t \cos(\alpha)\ \vec{e}_\theta$