مستوى : سنة أولى علوم دقيقة (مادة الجبر)   السنة الدراسية : 2020-2021

السلسلة رقم 5 التي تتضمن مفاهيم حول البنى الجبرية

- **ملاحظة هامة !!!** إن الهدف من عرض حلول التمارين هو المراجعة و الاستفادة من أفكارها ، أما الذي يوظفها في غير هذا المحل كاستعمالها في "الغش و نحو ذلك" فنحن لسنا مسؤولون عن هذا و ليتحمل وزره أمام الله عز وجل.

- **ت (1) :**

أ. لتكن T عملية داخلية على $\mathbb{R}$ معرفة كما يلي : $xTy = x + y - xy \;\; ; \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$

1. هل T تبديلية ؟ هل T تجميعية ؟ علل .
2. ليكن $a \in \mathbb{R}$ ، عين - إن وجد - العنصر الحيادي و العنصر النظير لـ a بالنسبة للعملية T .
3. هل $(\mathbb{R}, T)$ زمرة ؟ هل $(\mathbb{R} - \{1\}, T)$ زمرة ؟ علل .

ب. نقول عن عنصر $b \in \mathbb{R}$ أنه "عنصر ماص" بالنسبة لـ T إذا حقق الشرط التالي : $xTb = bTx = b; \forall x \in \mathbb{R}$. عين العنصر الماص بالنسبة لـ T إن وجد .

ج. نقول عن عنصر $d \in \mathbb{R}$ أنه "عنصر اعتيادي" بالنسبة لـ T إذا حقق الشرط التالي :

$$xTd = yTd \Rightarrow x = y \;\; \text{ou} \;\; dTx = dTy \Rightarrow x = y$$

عين العناصر الاعتيادية بالنسبة لـ T إن وجدت .

⊙ **الحل :**

1. من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}$ لدينا : $xTy = x + y - xy = y + x - yx = yTx$. مما يعني أن العملية T هي عملية تبديلية أما بالنسبة للتجميع فإذا اخترنا عنصرا ثالثا $z \in \mathbb{R}$ فإننا نجد :

$$xT(yTz) = x + (yTz) - x(yTz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - (xy + yz + xz) + xyz$$

هذا من جهة ، و من جهة أخرى لدينا :

$$(xTy)Tz = (xTy) + z - (xTy)z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + y + z - (xy + yz + xz) + xyz$$

بالمقارنة بين النتيجتين نجد أن T عملية تجميعية .

2. لو نشير بـ e إلى العنصر الحيادي لهاته العملية فإنه يحقق الشرط : $xTe = x; \forall x \in \mathbb{R}$ [1] ، إذن :

$$x + e - xe = x \Leftrightarrow e(1 - x) = 0 \Leftrightarrow e = 0$$

و منه العملية T تقبل عنصرا حياديا و هو الـ 0 .
أما إذا أشرنا بـ b إلى نظير a فإنه يحقق - حسب التعريف - الشرط التالي $aTb = e$ ، أي أن :

$$aTb = a + b - ab = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a}{a - 1} \;\; ; \;\; a \neq 1$$

[1] لم نحتاج للمساواة $xTe = eTx = x$ لأن العملية T تبديلية .

إما إذا كان $a=1$ فإنه لا يقبل نظير وفق T ، مما نستنتج منه أن الثنائية $(\mathbb{R},T)$ ليست لها بنية زمرة بعكس الثنائية $(\mathbb{R}-\{1\},T)$ فهي زمرة تبديلية و هذا حسب ما تحققنا منه في الأسئلة السابقة .

ب. لو نشير بـ b إلى العنصر الماص فإنه يحقق :

$$xTb=x+b-bx=b;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b=1$$

ج. لو نرمز بـ d إلى أحد العناصر "الاعتيادية" فإننا نميز حالتين :

ح(1) : إذا كان $d=1$. من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}$ فإنه لدينا $xTd=yTd=1$ إلا أن هذا لا يستلزم كون $x=y$ (هذا لأن النتيجة 1 مستقلة تماما عن اختيار x,y) .

ح(2) : إذا كان $d\neq 1$. لدينا :

$$xTd=yTd\Rightarrow x+d-xd=y+d-yd\Rightarrow x(1-d)=y(1-d)\Rightarrow x=y$$

نستنتج من هذا أن جميع عناصر المجموعة $\mathbb{R}-\{1\}$ هي عناصر اعتيادية .

- **ت(2) :** لتكن (G,T) زمرة و e,x,y ثلاث عناصر منها . برهن أن :

1. إذا كان e عنصر حيادي لـ T فهو وحيد .
2. إذا كان y نظير لـ x فإن y وحيد .
3. إذا كان z نظير لـ v و y نظير لـ x فإن zTy هو نظير لـ xTv .

⊙ **الحل :**

1. لو نفرض أنه يوجد عنصر حيادي آخر - نرمز له بـ v - فإن هذا يعني أن $v=vTe=eTv$ (هذا ناتج من كون e هو عنصر حيادي) و لدينا أيضا $e=eTv=vTe$ (و هذا ناتج من كون v هو عنصر حيادي من الفرض) ، إذن :

$$v=vTe=eTv=e$$

2. لو نفرض أن u هو نظير آخر لـ x فإننا نجد أن : $u=uTe=uT(xTy)=(uTx)Ty=eTy=y$
3. من الفرض المذكور في السؤال (3) من التمرين فإن :

$$(xTv)T(zTy)=xT(vTz)Ty=xTeTy=xTy=e\ \ ;\ \ (zTy)T(xTv)=zT(yTx)Tv=zTeTv=zTv=e$$

و منه - حسب التعريف - xTv هو نظير zTy .

- **ت(3) :** نضع $I=]-1,1[$ و لتكن $*$ عملية داخلية معرفة على I كما يلي : $x*y=\frac{x+y}{1+xy}\ \ ;\ \ \forall x,y\in I$

1. برهن أن الثنائية $(I,*)$ لها بنية زمرة تبديلية .

الآن نعرف على $\mathbb{R}_+^*$ العملية Δ التالية : $x\Delta y=\sqrt{x^2+y^2}\ \ ;\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

2. هل الثنائية $(\mathbb{R}_+^*,\Delta)$ لها بنية زمرة ؟ علل .

⊙ **الحل :**

1. تبيين أن الثنائية $(I,*)$ لها بنية زمرة .

أ. خاصية التجميع : نختار x,y و z ثلاث عناصر من I ، لدينا :

$$x*(y*z)=\frac{x+(y*z)}{1+x(y*z)}=\frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x.\frac{y+z}{1+yz}}=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

و من جهة أخرى :

$$(x*y)*z = \frac{(x*y)+z}{1+z(x*y)} = \frac{z+\frac{x+y}{1+xy}}{1+z.\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

بالمقارنة بين النتيجتين نستنتج أن العملية $(*)$ هي عملية تجميعية .

ب. البحث عن العنصر الحيادي . من أجل كل $x,y \in I$ لدينا : $x*y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y*x$.
و هذا يعني أن العملية $(*)$ هي عملية تبديلية . الآن ، لو نشير بـ e إلى العنصر الحيادي للعملية $(*)$ فإنه - حسب التعريف - يكون لدينا $x*e = x, \forall x \in I$ ، أي أن :

$$x*e = \frac{x+e}{1+xe} = x \Longrightarrow e = 0$$

ج. البحث عن العنصر النظير . ليكن x عنصر كيفي من I و لنرمز بـ y إلى نظيره بالنسبة لـ x ، إذن

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy} = 0 \Longrightarrow y = -x$$

نستنتج مما سبق أن الثنائية $(I,*)$ لها بنية زمرة تبديلية عنصرها الحيادي هو الـ 0 و لكل x من I نظير من الشكل $-x$.

2. إن الثنائية $(\mathbb{R}_+^*, \Delta)$ ليست لها بنية زمرة هذا لأنها لو كانت كذلك لقبلت عنصرا حيادي - نرمز له بـ u - يحقق $x\Delta u = x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. أي :

$$x\Delta u = \sqrt{x^2+u^2} = x \Longrightarrow u = 0$$

إلا أن الـ 0 لا ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

- **ت(4) :** لتكن G مجموعة التطبيقات f_a المعرفة كما يلي : $G = \{f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*; x \to x^a \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*\}$
برهن أن الثنائية $(G,\circ)$ لها بنية زمرة (مع $\circ$ هي عملية تركيب التطبيقات) .

⊙ **الحل :**

لتبيين أن G لها بنية زمرة يكفي أن نثبت أنها زمرة جزئية من الثنائية $(\text{bij}(\mathbb{R}_+^*),\circ)$ [2] إذن :

أ. إن G غير خالية هذا لأن $f_1 = Id_{\mathbb{R}_+^*}$ و هو ينتمي إلى G .

ب. من أجل كل f_a, f_b من G ، و من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا :

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(x^b) = (x^b)^a = x^{ab} \Longrightarrow f_a \circ f_b \in G$$

ج. إذا كان $f_a \in G$ فإن نظيره هو $f_{\frac{1}{a}}$ و هو ينتمي أيضا إلى G هذا لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا :

$$(f_a \circ f_{\frac{1}{a}}(x) = f_a(x^{\frac{1}{a}}) = (x^{\frac{1}{a}})^a = x \Longrightarrow f_a \circ f_{\frac{1}{a}} = Id_{\mathbb{R}_+^*}$$

و نستعمل نفس الفكرة لإثبات أن $f_{\frac{1}{a}} \circ f_a = Id_{\mathbb{R}_+^*}$.

- **ت(5) :** لتكن $(G,.)$ زمرة كيفية و لتكن $Z(G)$ [3] المجموعة التالية :

$$Z(G) = \{g \in G; x.g = g.x \quad ; \quad \forall x \in G\}$$

[2] المجموعة $\text{bij}(\mathbb{R}_+^*)$ نقصد بها مجموعة التقابلات التي تنطلق من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.
[3] تسمى $Z(G)$ بمركز الزمرة G .

1. عين $Z(G)$ في حالة $(G, .)$ هي زمرة تبديلية . 2. برهن أن $Z(G)$ هي زمرة جزئية من G .

⊙ **الحل :** 1. نذكر أن $Z(G)$ هي مجموعة العناصر (من G) و التي تقبل التبديل مع "جميع" عناصر G و هي غير خالية هذا لأن الـ e ينتمي إلى $Z(G)$ (تذكر أن $xe = ex = x$ مهما يكن $x \in G$) . و لهذا فإنه إذا كانت G زمرة تبديلية فإن جميع عناصرها تقبل التبديل مع بعضها البعض ، و منه $Z(G) = G$.

2. إثبات أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G . إن $Z(G)$ غير خالية هذا لأن $e \in Z(G)$ كما أشرنا سابقا . الآن من أجل كل $g, h \in Z(G)$ و من أجل كل $x \in G$ لدينا : $(gh^{-1})x = (gh^{-1})xhh^{-1} = g(h^{-1}h)xh^{-1} = gxh^{-1} = xgh^{-1}$

و هذا يدل على أن gh^{-1} يقبل التبديل مع جميع عناصر G إذن فهو ينتمي إلى $Z(G)$ و منه المطلوب .

• **ت(6) :** نضع $G = \frac{\mathbb{Z}}{23\mathbb{Z}} - \{\overline{0}\}$ و نعرف عليها العملية $(.)$ و هي عملية ضرب الصفوف .

1. أثبت أن $(G, .)$ هي زمرة تبديلية . 2. برهن أنه من أجل كل $x \in G$ فإن $x^{22} = \overline{1}$.

3. حل - في G - المعادلة التالية : $x^3 + \overline{5} = \overline{0}$ ، مع الـ $(+)$ هي عملية جمع الصفوف .

⊙ **الحل :** نذكر أن عناصر G هي : $G = \{\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{22}\}$ ، أما عملية الضرب $(.)$ المعرفة عليها فهي على النحو التالي :

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in G \;\; ; \;\; \overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$$

و هذه العملية هي عملية تبديلية هذا لأن : $\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy} = \overline{yx} = \overline{y}.\overline{x}$

1. أثبات أن $(G, .)$ لها بنية زمرة تبديلية .

أ. خاصية التجميع : من أجل كل $\overline{x}, \overline{y}.\overline{z} \in G$ لدينا :

$$\overline{x}(\overline{y}.\overline{z}) = \overline{x}.\overline{yz} = \overline{xyz} \;\; ; \;\; (\overline{x}.\overline{y}).\overline{z} = \overline{xy}.\overline{z} = \overline{xyz}$$

بالمقارنة بين النتيجتين نستنتج مباشرة أن $(.)$ هي عملية تجميعية .

ب. البحث عن العنصر الحيادي . لو نشير له بـ $\overline{e}$ نجد أن : $\overline{x}.\overline{e} = \overline{x}, \forall \overline{x} \in G$ ، و لما كانت هذه المساواة محققة من أجل كل $\overline{x} \in G$ فهي كذلك من أجل الـ $\overline{1}$ إذن $\overline{1}.\overline{e} = \overline{e} = \overline{1}$ و منه العنصر الحيادي موجود و هو الـ $\overline{1}$.

ج. البحث عن العنصر النظير . إذا كان $\overline{x} \in G$ فإن الـ x و الـ 23 أوليان فيما بينهما (هذا لأن العدد 23 هو عدد أولي) ، إذن حسب بيزو فإنه يوجد $y, z \in \mathbb{Z}$ يحققان $xy + 23z = 1$ ، بالمرور إلى (صف التكافؤ) نجد أن :

$$\overline{xy + 23z} = \overline{xy} = \overline{1} = \overline{x}.\overline{y}$$

إذن مقلوب الـ $\overline{x}$ هو الـ $\overline{y}$ و هو موجود حسبما رأينا سابقا .

2. لإثبات أنه من أجل كل $\overline{x} \in G$ فإن $\overline{x}^{22} = \overline{1}$ نستعمل -مباشرة- نظرية فيرما الصغرى [4] .

3. حل المعادلة : $\overline{x}^3 + \overline{5} = \overline{0}$. إن هذه المعادلة تكافئ المعادلة $\overline{y}^3 = \overline{5}$ مع $y = -x$ و هي لا تقبل حلولا في G (أفحص ذلك بنفسك) .

---

[4] نذكر أن نظرية فيرما الصغرى تنص على ما يلي : إذا كان p عددا أوليا و n عدد صحيح (أولي مع الـ p) فإن :

$$n^{p-1} \equiv 1[p]$$

• **ت(7) :** ليكن i هو العدد المركب المشهور الذي يحقق المساواة $i^2=-1$ و لنعتبر المجموعة التالية :

$$\mathbb{Z}[i]=\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}=\{a+i.b; a,b\in\mathbb{Z}\}$$

1. برهن أن الثلاثية $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ [5] هي حلقة واحدية و تبديلية .
2. عين العناصر القابلة للقلب في الحلقة $\mathbb{Z}[i]$ ثم استنتج أنها ليست حقلا .

⊙ **الحل :**

1. لإثبات أن الثلاثية $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ لها بنية حلقة يكفي أن نبرهن بأنها حلقة جزئية من الحلقة "الأم" $(\mathbb{C},+,\times)$.

أ. إن $\mathbb{Z}[i]$ غير خالية هذا لأنها تحوي $\mathbb{Z}$.

ب. نختار u,v و w ثلاث عناصر من $\mathbb{Z}[i]$ و لنتحقق من أن $u+vw\in\mathbb{Z}[i]$ إذن لدينا :

$$\begin{aligned} u+vw &= (a+ib)+(c+id)(e+if)=(a+ib)+(ce-df+i(de+cf)) \\ &= \underbrace{a(ce-df)-b(de+cf)}_{\in\mathbb{Z}}+i\underbrace{(a(de+cf)+b(ce-df))}_{\in\mathbb{Z}}=k+ih\in\mathbb{Z}\,[i] \end{aligned}$$

و لما كان الـ 1 ينتمي إلى $\mathbb{Z}[i]$ فهي بذلك تكون حلقة واحدية ، أما التبديل فهو ناتج مباشرة من تبديلية عملية الضرب الاعتيادية في $\mathbb{C}$.

2. البحث عن العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[i]$. ليكن $u=a+ib$ عنصرا من $\mathbb{Z}[i]$ و قابلا للقلب ، إذن يوجد $v=c+id\in\mathbb{Z}[i]$ يحقق المساواة $uv=1$ ، بالمرور إلى المرافق نجد أن $\overline{u}.\overline{v}=\overline{1}=1$ ، الآن بضرب طرفي المساواة طرف في طرف نحصل على :

$$u.\overline{u}.v.\overline{v}=|u|^2.|v|^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$$

و لما كانت الأعداد a,b,c,d هي أعداد صحيحة فإنه يصبح لدينا احتمال واحد و هو : $a^2+b^2=1$. و هذه الأخيرة تقبل - في $\mathbb{Z}$ - الحلول التالية :

$$(a,b)\in\{(1,0);(-1,0);(0,1);(0,-1)\}$$

مما يدل على أن العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[i]$ هي : $\{1,-1,i,-i\}$ ، و هذا يعني أيضا أن $\mathbb{Z}[i]$ هي حلقة و ليست حقلا لأن ليس جميع عناصرها (ما عدا الصفر) هي عناصر قابلة للقلب .

• **ت(8) :** لتكن E المجموعة التالية $E=\{1,2,3\}$ و لنعرف على $P(E)$ (مجموعة أجزائها) العملية Δ التالية :

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)\ \ ;\ \forall A,B\in P(E)$$

1. برهن أن الثلاثية $(P(E),\Delta,\cap)$ لها بنية حلقة تبديلية . هل هي حقل ؟ علل .

⊙ **الحل :** إن الثنائية $(P(E),\Delta)$ لها بنية زمرة تبديلية عنصرها الحيادي هو المجموعة الخالية $\emptyset$ و لكل $A\in P(E)$ نظير وحيد و هو الـ A نفسه . إذا زودنا المجموعة $P(E)$ بعملية التقاطع فإن الثلاثية $(P(E),\Delta,\cap)$ تصبح لها بنية حلقة تبديلية عنصرها الحيادي الثاني هو المجموعة E ، إلا أنها ليست حقلا هذا لأننا لو نأخذ $A\in P(E)-\{E\}$ فإنه من أجل كل $B\in P(E)$ يكون لدينا $A\cap B\subseteq A\neq E$ مما يعني أن الـ A ليس له نظير بالنسبة لعملية التقاطع .

• سنترك شرف التحقق من خاصيتي تجميعية [6] Δ و توزيعية $\cap$ عليها للطالب المجتهد .

---

[5] نطلق على هذه الحلقة إسم "حلقة غوص" .

[6] أنظر التمرين 48 من الصفحة 20 من المرجع (Exo7-Tous les exercices) .

• **ت(9) :** لتكن (G,T_1) و (G,T_2) زمرتين كيفيتين ، و ليكن e_1 و e_2 هو العنصر الحيادي لكل منهما (بهذا الترتيب).
الآن نعتبر تطبيقا f ينطلق من G_1 نحو G_2 يحقق الشرط التالي :

$$\forall a,b \in G_1 \ : \ f(aT_1b)=f(a)T_2f(b) \quad (*)$$

1. أثبت أن : $f(e_1)=e_2$. 2. برهن أنه إذا كان y هو نظير x في G_1 فإن $f(y)$ هو نظير $f(x)$ في G_2 .

ثانيا : نعرف المجموعتين التاليتين :

$$\ker f=\{x\in G_1; f(x)=e_1\} \ \ ; \ \ Imf=f(G_2)=\{f(x); x\in G_1\}$$

3. برهن أن $\ker f$ (على التوالي : Imf) هي زمرة جزئية من G_1 (على التوالي : من G_2) .

• تطبيق: نضع $G_1=G_2=\mathbb{R}$ و $T_1=+$ أما T_2 فهي العملية المعرفة على النحو التالي :

$$xT_2y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

و ليكن f هو التطبيق التالي : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\to x^{\frac{1}{3}}$

4. تحقق أن f يحقق الخاصية (*) أعلاه ثم استنتج أن الزمرة $(\mathbb{R},T_2)$ هي زمرة تبديلية .

⊙ الحل : سنترك حله كله للطالب المتميز .

• **أسئلة مهمة حول هاته السلسلة تحتاج منك الإهتمام و التأمل :**

- كيف يمكن أن تعرف عملية تجميعية على مجموعة ما ؟
- هل نستطيع أن نعرف على أي مجموعة (مهما كانت) عملية تجعل منها زمرة ؟
- ما هو الأساس الذي انطلقنا منه حتى عرفنا الزمرة بالشكل (التجميع ، العنصر الحيادي ، العنصر النظير) ؟
- في أي سنة ظهر تعريف مفهوم الزمرة و من كان له الفضل في ذلك ؟
- ما هي - حسب حدسك - فوائد أو تطبيقات مفهوم الزمرة في الرياضيات و خارج الرياضيات ؟

***

أتممنا بفضل الله تعالى ...

toufik.hh.17@gmail.com